FYS1120 Oblig 1

Daniel Heinesen, daniehei

11.09.2016

Oppgave 1:
a)

Når jeg skal regne ut gradienten i oppgavene under bruker jeg at

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \tag{1}$$

i)

$$\nabla f = \nabla(x^2y) = 2xy\hat{i} + x^2\hat{j}$$

ii)

$$\nabla g = \nabla(xyz) = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$$

iii)

$$\nabla h = \nabla(\frac{1}{r}e^{r^2}) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e_r}$$

Vi bruker produktregelen for derivasjon:

$$= (2e^{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{r^2})\hat{e_r}$$

b)
Her bruker jeg at divergensen og virvlingen er

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x}u_x + \frac{\partial}{\partial y}u_y + \frac{\partial}{\partial z}U_z \tag{2}$$

og

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \tag{3}$$

i)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (2xy, x^2, 0) = 2x + 0 + 0 = 2x$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (2xy, x^2, 0) = \hat{k}(2x - 2x) = 0$$

ii)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (e^{yz}, ln(xy), z) = 0 + x\frac{1}{xy} + 1 = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (e^{yz}, ln(xy), z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & ln(xy) & z \end{vmatrix} = \hat{j}(ye^{yz}) + \hat{k}(\frac{1}{x} - ze^{yz})$$

iii)

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla \cdot (yz, xz, xy) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times (yz, xz, xy) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x - x)\,\hat{i} + (y - y)\,\hat{j} + (z - z)\,\hat{k} = 0$$

iv)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla \cdot (y^2 z, -z^2 \sin(y) + 2xyz, 2z\cos(y) + y^2 x) \\ &= 0 - z^2\cos(y) + 2xz + 2\cos(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \nabla \times (y^2 z, -z^2 \sin(y) + 2xyz, 2z\cos(y) + y^2 x) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z & -z^2\sin(y) + 2xyz & 2z\cos(y) + y^2 x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= ((-2zsiny + 2yx) - (-2zsiny + 2xy))\,\hat{i} + \left(y^2 - y^2\right)\hat{j} + (2yz - 2yz)\,\hat{k}$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = 0$$

C)

Matematisk sett vil $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ si at feltet er konservativt. Strømningen over en lukket kurve er null, strømning er uavhengig av vei og feltet kan skrives som $\mathbf{v} = \nabla f$, hvor f kalles en potens.

Gravitasjon er konservativt fordi arbeid er uavhengig av tid og strekning; m.a.o bare avhengig av tilbakelagt avstand(høyde). Dette betyr også at mekanisk energi er bevart.

I **b)** er *i)*, *iii)* og *iv)* konservative. *i)* i **a)** er potensen til *i)* i **b)**.

d)

Her bruker jeg at

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f \tag{4}$$

i)

$$(\nabla j) = (2x + y)\hat{i} + (x + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$$

$$\nabla \cdot (\nabla j) = 2 + 0 + 2y = 2 + 2y$$

ii)

Vi har fra **a)** *iii)* at

$$\nabla h = (2e^{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{r^2})\hat{e_r}$$

Så bruker vi at

$$(\nabla \cdot \nabla h)_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^r \nabla h_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^r(2e^{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{r^2}))$$

$$= \frac{1}{r^2}[2r(2r^2 - 1)e^{r^2} + 4re^{r^2}] = \frac{e^{r^2}}{r}(4r^2 + 2)$$

Oppgave 2)

Her skal jeg bevise for $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ for en tilfeldig i-komponenten. Det tilsvarende vil være likt for de to andre komponentene også.

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ (b_j c_k - b_k c_j) & (b_k c_i - b_i c_k) & (b_i c_j - b_j c_i) \end{vmatrix}_i$$

$$= (a_j(b_i c_j - b_j c_i) - a_k(b_k c_i - b_i c_k))$$

Så legger vi til $a_i b_i c_i - a_i b_i c_i$

$$= (a_j(b_i c_j - b_j c_i) - a_k(b_k c_i - b_i c_k) + a_i b_i c_i - a_i b_i c_i)$$

$$= (b_i(a_i c_i + a_j c_j + a_k c_k) - c_i(a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k))$$

$$= [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})]_i$$

Det tilsvarende gjøres for de andre 2 kompnentene(er helt likt, så jeg tar bare for én komponent for ikke å trenge å skrive så mye)