FYS1120 Oblig 1

Daniel Heinesen, daniehei

11.09.2016

Oppgave 1:
a)

Når jeg skal regne ut gradienten i oppgavene under bruker jeg at

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \tag{1}$$

i)

$$\nabla f = \nabla(x^2 y) = 2xy\hat{i} + x^2\hat{j}$$

ii)

$$\nabla g = \nabla(xyz) = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$$

iii)

$$\nabla h = \nabla(\frac{1}{r}e^{r^2}) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e_r}$$

Vi bruker produktregelen for derivasjon:

$$= (2e^{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{r^2})\hat{e_r}$$

b)
Her bruker jeg at divergensen og virvlingen er

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x}u_x + \frac{\partial}{\partial y}u_y + \frac{\partial}{\partial z}U_z \tag{2}$$

og

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \tag{3}$$

i)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (2xy, x^2, 0) = 2x + 0 + 0 = 2x$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (2xy, x^2, 0) = \hat{k}(2x - 2x) = 0$$

ii)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (e^{yz}, ln(xy), z) = 0 + x\frac{1}{xy} + 1 = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (e^{yz}, ln(xy), z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & ln(xy) & z \end{vmatrix} = \hat{j}(ye^{yz}) + \hat{k}(\frac{1}{x} - ze^{yz})$$

iii)

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \nabla \cdot (yz, xz, xy) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times (yz, xz, xy) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x - x)\,\hat{i} + (y - y)\,\hat{j} + (z - z)\,\hat{k} = 0$$

iv)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla \cdot (y^2 z, -z^2 \sin(y) + 2xyz, 2z\cos(y) + y^2 x) \\ &= 0 - z^2\cos(y) + 2xz + 2\cos(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \nabla \times (y^2 z, -z^2 \sin(y) + 2xyz, 2z\cos(y) + y^2 x) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z & -z^2\sin(y) + 2xyz & 2z\cos(y) + y^2 x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= ((-2zsiny + 2yx) - (-2zsiny + 2xy))\,\hat{i} + \left(y^2 - y^2\right)\hat{j} + (2yz - 2yz)\,\hat{k}$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = 0$$

C)

Matematisk sett vil $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ si at feltet er konservativt. Strømningen over en lukket kurve er null, strømning er uavhengig av vei og feltet kan skrives som $\mathbf{v} = \nabla f$, hvor f kalles en potens.

Gravitasjon er konservativt fordi arbeid er uavhengig av tid og strekning; m.a.o bare avhengig av tilbakelagt avstand(høyde). Dette betyr også at mekanisk energi er bevart.

I **b)** er *i)*, *iii)* og *iv)* konservative. *i)* i **a)** er potensen til *i)* i **b)**.

d)

Her bruker jeg at

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f \tag{4}$$

i)

$$(\nabla j) = (2x + y)\hat{i} + (x + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$$

$$\nabla \cdot (\nabla j) = 2 + 0 + 2y = 2 + 2y$$

ii)

Vi har fra **a)** *iii)* at

$$\nabla h = (2e^{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{r^2})\hat{e_r}$$

Så bruker vi at

$$(\nabla \cdot \nabla h)_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^r \nabla h_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^r(2e^{r^2} - \frac{1}{r^2}e^{r^2}))$$

$$= \frac{1}{r^2}[2r(2r^2 - 1)e^{r^2} + 4re^{r^2}] = \frac{e^{r^2}}{r}(4r^2 + 2)$$

Oppgave 2)

Her skal jeg bevise for $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ for en tilfeldig i-komponenten. Det tilsvarende vil være likt for de to andre komponentene også.

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ (b_j c_k - b_k c_j) & (b_k c_i - b_i c_k) & (b_i c_j - b_j c_i) \end{vmatrix}_i$$

$$= (a_j(b_i c_j - b_j c_i) - a_k(b_k c_i - b_i c_k))$$

Så legger vi til $a_i b_i c_i - a_i b_i c_i$

$$= (a_j(b_i c_j - b_j c_i) - a_k(b_k c_i - b_i c_k) + a_i b_i c_i - a_i b_i c_i)$$
$$= (b_i(a_i c_i + a_j c_j + a_k c_k) - c_i(a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k))$$
$$= [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})]_i$$

Det tilsvarende gjøres for de andre 2 kompnentene(er helt likt, så jeg tar bare for én komponent for ikke å trenge å skrive så mye)

Oppgave 3)

a)

$$\mathbf{v} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} - (z - x)\hat{k}$$

For å regne ut $\int\int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$ enklere, regner vi det ut for hver flate av kuben og legger det sammen. For å få dette oversiktelig setter vi opp en tabell for flatene:

flate	f for flaten	$\mathbf{n}$	$d\sigma$	$\mathbf{v} \times \mathbf{n}$
1	y=0	$-\hat{\jmath}$	dx dz	-x
2	x=0	$-\hat{\imath}$	dy dz	-y
3	z=1	$\hat{k}$	dx dy	1-x
4	y=1	$\hat{\jmath}$	dx dz	x
5	x=1	$\hat{\imath}$	dy dz	y
5	z=0	$-\hat{k}$	dx dy	x

Vi kan se med den gang at flate 1 er det motsatte av flate 4, og derfor vil bli 0 når de blir lagt sammen. Det samme gjelder flate 2 og 5. Så det vi sitter igjen med er:

$$Q = \int\int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_0^1 \int_0^1 [(1 - x) + x] dxdy = \int_0^1 \int_0^1 dxdy = 1$$

b)

Gauss' teorem sier at

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau$$

Her er $\nabla \cdot \mathbf{v} = 1$, så

$$Q = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1 dxdydz = 1$$

Som forventet er samme svar som i **a)**

Oppgave 4)

$$\mathbf{w}(x, y, z) = (2x - y)\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + y^2 z\hat{k}$$

a)

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 2 - 2y - y^2$$

b)

$$\nabla \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x-y) & y^2 & y^2 z \end{vmatrix} = \hat{i}(-2yz) + \hat{k}$$

c)
Kurven til en sirkel med radius 1 som ligger i $z = 1$ er

$$\mathbf{\Gamma} = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + 1\hat{k}$$

Vi kan så derivere dette med hensyn på t

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} = -\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$$

$$\Rightarrow d\mathbf{\Gamma} = (-\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j})dt$$

d)

$$C = \oint_{\mathbf{\Gamma}} \boldsymbol{W}(\mathbf{\Gamma}) \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

Først må vi finne $\boldsymbol{w}(\mathbf{\Gamma})$ og $\boldsymbol{W}(\mathbf{\Gamma}) \cdot d\mathbf{\Gamma}$

$$\boldsymbol{w}(\mathbf{\Gamma}) = (2\cos(t) - \sin(t))\hat{i} - \sin^2(t)\hat{j} - \sin^2(t)\hat{k}$$

$$\boldsymbol{w}(\mathbf{\Gamma}) \cdot d\mathbf{\Gamma} = ((2\cos(t) - \sin(t))\hat{i} - \sin^2(t)\hat{j} - \sin^2(t)\hat{k}) \cdot (-\sin(t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j})$$

$$= 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) - \cos(t)\sin^2(t)$$

Da får vi

$$C = \int_0^{2\pi} (2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) - \cos(t)\sin^2(t))dt$$

$$= \left[\sin^2(t) + \frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t)) - \frac{1}{3}sin^3(t)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi$$

e)
Stokes' teorem sier at

$$\oint_{\mathbf{\Gamma}} \boldsymbol{w}(\mathbf{\Gamma}) \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_A \nabla \times \mathbf{w} d\sigma$$

Vi har at virvlingen er $\nabla \times \mathbf{w} = \hat{\imath}(-2yz) + \hat{k}$, og $\mathbf{n} = \hat{k}$(siden normalvektoren på en sirkel i xy-planet er $\hat{k}$). Da får vi

$$C = \int_A \nabla \times \mathbf{w} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\hat{\imath}(-2yz) + \hat{k}) \cdot \hat{k} r d\theta dr$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 2\pi \int_0^1 r dr = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

Som er akkurat samme svar som i **d)**.