FYS1120 Oblig 2

Daniel Heinesen

27. oktober 2016

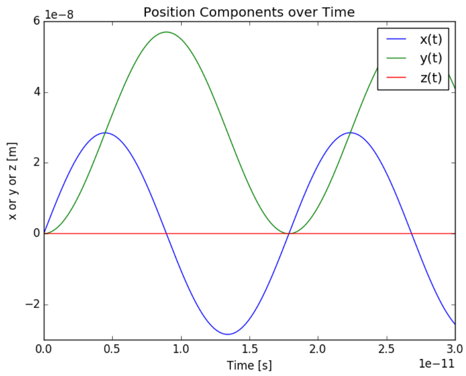
Oppgave 2

a) Med et uniformt magnetfelt vil kraften

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1}$$

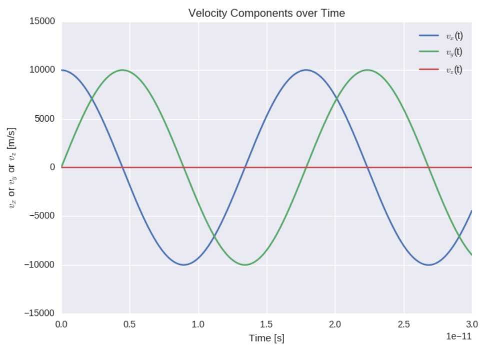
alltid stå vikelrett på hastighetsvektoren, hvilket betyr at vi kan forvente en sikulærbane. Vi vil senere i oppgaven løse likningen for denne bevegelsen analytisk.

Programmet gir disse plottene:



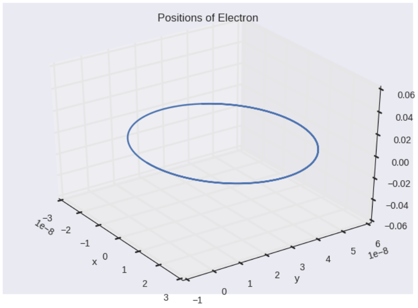
Figur 1: x, y og z plottet mot tid.

Vi kan se at x og y varierer som en *cosinus*- og en *sinus*funksjon – x er noe forskyvet –, mens z holder seg konstant på 0.



Figur 2: v_x, v_y og v_z plottet mot tid.

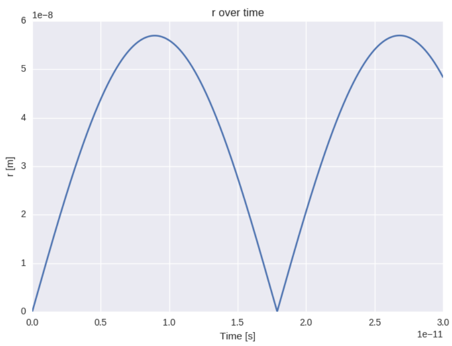
Som med posisjonene er $z = 0$, og x og y varierer er *cosinus*- og en *sinus*funksjoner.



Figur 3: Vi kan se at elektronet beveger seg i en sirkelbane, som vi forventet.

Vi kan se i figurene over at elektronet beveger seg i en sirkelbane, det var det vi forventet fra det lille resonnomentet i starten av oppgaven.

b) For å finne omløpstiden til numerisk kan vi bruke 2 metoder. Den visuelle og unøyaktige er å plotte $|\vec{r}|$ mot t:



Figur 4: Avstanden til origo over tid.

Vi kan finne omløpstiden ved å se når avstanden fra origo er 0. Vi kan se avstanden er 0 ca mellom 1.7 og $1.8 \cdot 10^{-11}$. En mer nøyaktig måte får å finne omløpstiden er å sjekke når vinkelen til elektronet i forhold til $x - aksen$. Omløpstiden vi får fra dette er $1.8021 \cdot 10^{-11}$ s. Med det analytiske utrykket vi skal utlede om noen deloppgaver, finner vi en verdi på $1.789 \cdot 10^{-11} s$. Vi ser at det numeriske svaret er veldig likt det analytiske.

c) For å finne syklotronfrekvesen ser vi at for å gå i en sirkerbane må størrelsen til kraften fra magnetfeltet være lik sentripitalkraften.

$$F_{magnet} = F_{sentripital}$$

$$qvB = m\frac{v^2}{r} \tag{2}$$

$$R = \frac{vm}{qB} \tag{3}$$

Vi bruker sammenhengen mellom frekvensen og radius:

$$\omega_s = \frac{v}{R} = \frac{vqB}{vm} = \frac{qB}{m} \tag{4}$$

Perioden er tiden det tar å komme seg 2π rundt sirkelen med vinkelhastighet ω

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} = 1.789 \cdot 10^{-11} s \tag{5}$$

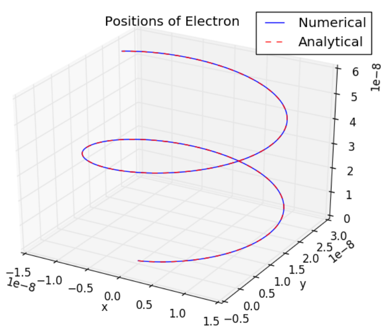
d) Har elektronet en hastighet i z-retning, vil vi få en bane som skrur oppover. Jeg bruker den analytiske løsningen, og plotten den over den numeriske. Den analytisk løsningen er gitt ved:

$$\begin{aligned} r_x(t) &= \frac{v_{x0}}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) \\ r_y(t) &= -\frac{v_{x0}}{\omega}\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{6}$$

For $x-$ og $y-retningen$ (Vises i Appendix A), og for $z-retning$

$$r_z(t) = v_z * t \tag{7}$$

Plottet blir da:

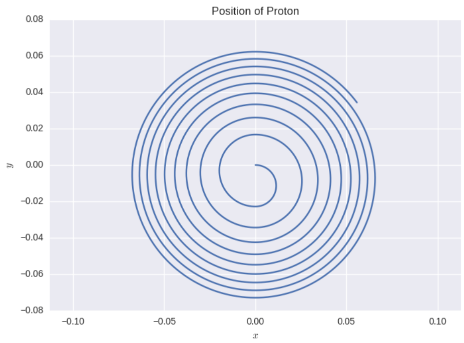


Figur 5: Posisjonen til et elektron med en fart i $z - retning$.

En oppover skruebane. Vi kan se at den analytiske og numeriske løsningen er (mer eller mindre) helt like.

Oppgave 3

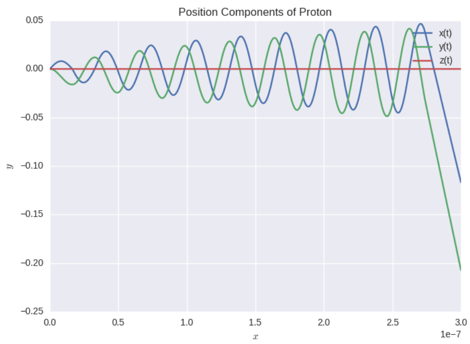
a) I mitt program bruker jeg et magnet felt på $B = 2T$. Jeg får da:



Figur 6: En sirkelbane med økende radius.

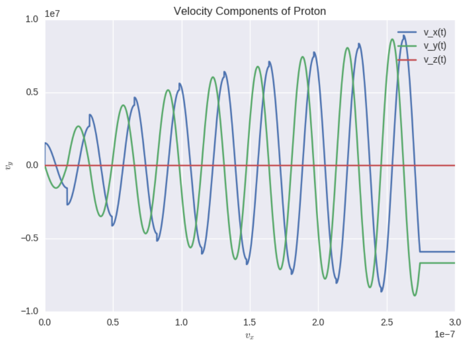
Protonet akselereres når det går gjennom det elektriske feltet i *thevalleygap*, og bøyes i det magnetiske feltet. E-feltet varierer slik at protonen alltid akselereres i hastighetsretningen. Dette resulterer i en sirkelbevegelse hvor radiusen øker for hver gang protonet går gjennom *valleygapet*

b) Vi lar nå protonet slippes løs fra syklotronen når avstanden fra sentrum er $90\mu m$ får vi:



Figur 7: Plott av x, y og z over tid.

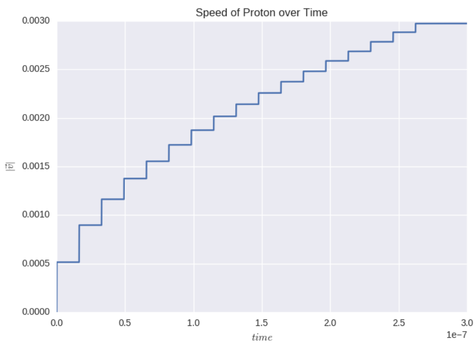
Som i oppgave 2 får vi $cosinus-$ og $sinusfunksjoner$ for x og y, og en konstant z. Siden radiusen øker vil amplitudene $cosinus-$ og $sinusfunksjonen$ øke. Etter $90\mu m$ slipper protonet løs og fortsetter i den retningen den hadde.



Figur 8: Plott av v_x, v_y og v_z over tid.

v_x, v_y og v_z likner mye på posisjonskomponentene. Vi kan se at v_x plutselig øker nær topp- og bunnpunktene. Dette er når protonet akelsereres i E-feltet. På slutten slippes protonet løs og protonet opplever ingen akselerasjon og hastigheten forblir konstant.

c) Her er et plot av farten over tid:



Figur 9: Farten til protonet som en faktor av lyshastigheten c.

Vi kan se farten øker brått når protonet går gjennom E-feltet, for så å bli konstant når det bare påvirkes av magnetfeltet. Vi kan se at mot sluttet blir farten konstant. Tar vi å sjekker lengden av hastighetsvektoren i siste tidspunkt finner vi unnslipsfarten:

$$|\vec{v}_{last}| = 8918994.96m/s = 0.00297c$$

d) Vi bruker eq 1 **Sjekk nummeret på likningen** og løser uttrykket for v, og får:

$$v = \frac{qBr}{m} \tag{8}$$

Vi setter nå dette uttrykke som hastigheten i den kinetiske energien:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2B^2r^2}{m} \tag{9}$$

Oppgave 4

Kode:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
#import seaborn


#De 2 funksjonene under er for oppgave 2
"""
def findPeriode(r,t):

    startTheta = np.arctan2(r[0,1],r[0,1])
    iChecked = 0
    times = [0.0]

    for i in range(1,r[:,0].size):
        theta = np.arctan2(r[i,1],r[i,0])

        if theta > 0 and np.arctan2(r[i-1,1],r[i-1,0]) < 0:
            times.append(t[i])
            iChecked = i


    print "Periode found: ", times[1] - times[0]


def exactSolution(time,r,omega,v):
    y = r-r*np.cos(omega*time)
    x = r*(np.sin(omega*time))
    z = time*v[2]

    return x,y,z
"""


E0 = 25e3/(90e-6)
B = np.array([0,0,2])

d = 90e-6
rd = 50e-3

c = 3e9

mp = 1.67e-27 #mass of a proton
q = 1.6e-19 #charge of a proton

omega = np.linalg.norm(B)*q/mp

def a(r,v,i):
    F_b = q*np.cross(v,B)

    if np.linalg.norm(r) < rd:
        if abs(r[0]) < d/2.:
            F = F_e[i]*np.array([1,0,0]) + F_b
            return F/mp

        else:
            F = F_b
```

```
            return F/mp
    else:
        return 0



timeToSim = 300e-9
dt = 1000e-15

n = int(timeToSim/dt)


v = np.zeros((n,3))
r = np.zeros((n,3))
time = np.linspace(0,timeToSim,n)
F_e = E0*np.cos(omega*time)*q

v[0,:] = np.array([0,0,0])
r[0,:] = np.array([0,0,0])


#main Euler-Cromer loop

for i in range(1,int(n)):
    acc = a(r[i-1,:],v[i-1,:],i-1)
    v[i,:] = v[i-1,:] + acc*dt
    r[i,:] = r[i-1,:] + v[i,:]*dt

    print (float(i)/int(n))*100, "%            \r",
print ""


print "The proton has a speed of: ", np.linalg.norm(v[-1,:])

plt.title("Position Components of Proton")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$y$")
plt.plot(time,r[:,0])
plt.plot(time,r[:,1])
plt.plot(time,r[:,2])
plt.legend(["x(t)","y(t)","z(t)"])
plt.show()

plt.title("Velocity Components of Proton")
plt.xlabel("$v_x$")
plt.ylabel("$v_y$")
plt.plot(time,v[:,0])
plt.plot(time,v[:,1])
plt.plot(time,v[:,2])
plt.legend(["v_x(t)","v_y(t)","v_z(t)"])
plt.show()

plt.title("Position of Proton")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$y$")
plt.plot(r[:,0],r[:,1])
plt.axis("equal")
```

```
plt.show()

plt.title("Velocity of Proton")
plt.xlabel("$v_x$")
plt.ylabel("$v_y$")
plt.plot(v[:,0],v[:,1])
plt.show()

plt.title("Speed of Proton over Time")
plt.xlabel("$time$")
plt.ylabel(r'$|\vec{v}|$')
plt.plot(time,np.linalg.norm(v,axis = 1)/3e9)
plt.show()
```

Appedix A: Utreging av analytisk løsning.

Vi skal vise at vi får en sirkelbane i oppgave 2, ved å løse problemet analytisk:

Vi starter med at

$$\vec{a} = \frac{q}{m}(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{10}$$

Vi setter det så opp komponentvis, siden vi bare har et magnetfelt i z-retning, setter vi $B_z = B$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \hat{i}(v_y B) - \hat{j}(v_x B)$$

$$\begin{aligned} a_x = v_x' &= -\frac{qB}{m} v_y \\ a_y = v_y' &= \frac{qB}{m} v_x \end{aligned} \tag{11}$$

vi bruker at $\frac{qB}{m} = \omega$(vises i en senere deloppgave). Den generelle løsningen på denne differensiallikningen er:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \\ v_y(t) &= c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{12}$$

setter vi inn grensebetingelsene $v_x(0) = v_{x0}$ og $v_y(0) = 0$ får vi

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} \cos(\omega t) \\ v_y(t) &= -v_{x0} \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{13}$$

Om vi integrerer dette og setter inn at $r_x(0) = r_y(0) = 0$ får vi et uttrykk for posisjonen:

$$\begin{aligned} r_x(t) &= \frac{v_{x0}}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) \\ r_y(t) &= -\frac{v_{x0}}{\omega} \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{14}$$

Dette gir oss en sirkelbevegelse hvor x-komponenten er litt forskyvet, akkurat som vi så i den første figuren. Radiusen på sirkelen er $R = \frac{v_{x0}}{\omega}$.