# FYS2140 Oblig 2

Daniel Heinesen, daniehei

2. februar 2017

## 3.3)

### a)

Energien som frigitt av atomet er gitt som $E = E_1 - E_2$. Dette energien blir til et foton, men noe av den blir også gitt til atomet i forme av kinetisk energi. Vi antar at den kinetiske energien atomet får er ikke-relativistisk

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Vi trenger da å finne bevegelsesmengden. Vi antar at atomet stod stille før emitteringen. Det emitterte fotonet har $p_\gamma = \frac{h\nu}{c}$. Så

$$p_k + p_\gamma = 0$$

$$p_k = -p_\gamma = -\frac{h\nu}{c}$$

vi for da at den kinetiske energien til atomet blir

$$E_k = \frac{h^2\nu^2}{2Mc^2}$$

Vi vet da at den totale energien etter emitteringen er

$$E = h\nu + \frac{h^2\nu^2}{2Mc^2} = E_1 - E_2$$

$$\Rightarrow h\nu = E_1 - E_2 - \frac{h^2\nu^2}{2mc^2}$$

Dette gir oss at

$$\Delta E = \frac{h^2\nu^2}{2Mc^2} \tag{1}$$

### b)

Nå har vi et atom med masse $M$ og et foton med energi $h\nu$ og bevegelsemengde $\frac{h\nu}{c}$. Atomet har også energi $E_1$. Når fotonet treffer atomet får det energi $E_2$. I tillegg får det en kinetisk energi $\Delta E$. Så

$$h\nu + E_1 = E_2 + \Delta E$$

Vi antar også at atomet stod stille får sammenstøtet, og får bevegelsemengden $p_k$ etter, mens fotonet vil bli borte og ikke lenger ha noe bevegelsemengde. Derfor

$$p_k + 0 = \frac{h\nu}{c} + 0$$

Dette gir oss akkurat de samme uttrykket som i a), og vi får igjen at

$$\Delta E = \frac{h^2\nu^2}{2Mc^2}$$

**c)**

**FYLL INN HER**

## 3.5)

Vi har potensialet

$$V(r) = V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^k \tag{2}$$

og kvantifiseringsbetingelsen

$$L = n\hbar$$

Siden $L = mvr$, kan betingelsen gi oss et uttrykk for $r$

$$r = \frac{n\hbar}{mv} \tag{3}$$

Vi trenger nå å gjøre noe med potensialet. Vi trenger å få et uttrykk for kraften, noe vi vet er gitt ved

$$F = -\frac{dV(r)}{dt} = -\frac{V_0 k}{a^k} r^{k-1}$$

Om partikkelen skal gå i bane rundt dette potentialet vet vi også at

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{V_0 k}{a^k} r^{k-1}$$

Om vi løser dette for hastigheten finner vi at

$$v^2 = -\frac{V_0 k r}{m a^k} r^{k-1} = \frac{V_0 k}{m a^k} r^k \tag{4}$$

Den totale energien til partikkelen er da gitt ved

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r) = \frac{V_0 k}{2a^k} r^k + V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^k = \frac{V_0(k+2) r^k}{2a^k} \tag{5}$$

Vi ønsker å å fjerne avhengigheten på $r$. Vi kan gjøre dette ved å sette inn uttrykket for hastigheten 4 inn i uttrykket for $r$3

$$r(n) = \left(\frac{\hbar^2 a^k}{m V_0 k} n^2\right)^{\frac{1}{k+2}}$$

Setter vi nå dette inn i energien finner vi at

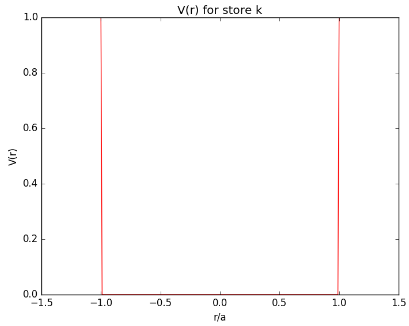
$$E(n;k) = \frac{V_0(k+2)}{2a^k} \left(\frac{\hbar^2 a^k}{m V_0 k} n^2\right)^{\frac{k}{k+2}} \tag{6}$$

Vi kan nå sjekke om dette blir Bohrs formal om $k = -1$:

$$E(n;-1) = \frac{V_0(-1+2)}{2a^-1} \left(\frac{\hbar^2 a^- 1}{m V_0(-1)} n^2\right)^{\frac{-1}{-1+2}} = -(V_0 a)^2 \frac{m}{2\hbar} \frac{1}{n^2}$$

Om vi setter $(V_0 a)^2 = k_e^2 e^4$ får vi Bohrs formel.

Vi kan nå ser på plottet av $V(r)$ for store verdier av $k$




Figur 1: Vi kan se at ved $\pm 1$ går $V(r)$ mot uendelig.

Vi $V(r)$ divergerer ved $\frac{r}{a} = \pm 1$ når $k$ blir stor(går mot uendelig). Vi får da et såkalt brønnpotensial.

# 4.2)

## a)

Vi vet at de Broglies bølgelengde er gitt ved

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{7}$$

Vi trenger derfor et uttrykk bevegelsemengden. Til dette kan vi bruke energien

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - m_0c^2}$$

Den relativistiske energien kan også skrives som

$$E = KE + m_0c^2$$

Partikkelen akselereres i et elektrisk feil, noe som gir den kinetiske energien $KE = eV$. Så setter vi energien $E = eV + m_0c^2$ inn i utrykket for $p$ finner vi

$$p = \sqrt{\left(\frac{eV + m_0c^2}{c}\right)^2 - m_0c^2}$$

$$= \sqrt{\frac{e^2V^2 + 2eV_0m_0^2 + m_0^2c^4}{c^2} - m_0c^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{eV}{c}\right)^2 + 2eV_0m_0}$$

$$= \sqrt{2eV_0m_0}\left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{1/2}$$

Vi kan nå sette dette inn i 7, og vi får da bølgelengden

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2eV_0m_0}}\left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{-1/2} \tag{8}$$

### b)

Vi brukte at $eV$ for $KE$ når vi utledet uttrykket over. Om vi setter $KE$ tilbake, finner vi at

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2KEm_0}}\left(1 + \frac{KE}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}$$

I den ikke-relativistiske grensen er $KE = \frac{1}{2}m_0v^2$. Setter vi dette inn får vi

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{m_0^2v^2}}\left(1 + \frac{v^2}{4c^2}\right)^{-1/2}$$

Siden $c >> v$ så er $\frac{v}{c} \approx 0$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{m_0v^2}}(1+0) = \frac{h}{m_0v}$$

Noe som stemmer godt med at

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

### c)

Vi skal nå regne ut 7 med en relativistisk bevegelsemengde $p = \gamma m_0 v$, der

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta}}$$

Der $\beta = v/c$. Vi setter dette inn

$$\lambda = \frac{h}{\gamma m_0 v} = \frac{h}{m_0 v}\frac{\sqrt{1-\beta}}{1}$$

Vi ganger så med $\frac{c^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \frac{hc}{m_0c^2}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\frac{v}{c}} = \frac{hc}{E_0}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\frac{v}{c}}$$

Regner vi ut $hc$ får vi

$$\lambda = \frac{1.24\cdot 10^{-12}}{E_0}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\frac{v}{c}}\text{MeVm}$$

Om vi regner ut $E_0$ is MeV får vi dette i meter. Vi vet også at $10^{-10} = 1$å. Så

$$\lambda = \frac{1.24\cdot 10^{-2}}{E_0(\text{MeV})}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\frac{v}{c}}$$

Det skal stå en "åetter dette uttrykket, men Latex klarer ikke skrive "å"i matteuttrykk.

## 4.3)

### a)

Vi vet at for et foton er

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu_{min}}{c}$$

$$\Rightarrow \nu_{min} = \frac{c}{\lambda}$$

Setter vi inn bølgelengden 0.6nm får vi

$$\nu_{min} = 5 \cdot 10^{17}\text{Hz}$$

## b)

Energien til et fotonet for å få denne oppløsningen er

$$E = h\nu_{min} = 2.07\text{keV}$$

## c)

Fra 7 vet vi at bevegelsemengden til elektronet er gitt ved

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Energien til elektronet er da gitt ved

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \sqrt{\frac{h^2c^2}{\lambda^2} + m_0^2c^4} = 511\text{keV}$$

Som er mye høyere enn energien for fotonet.

Dette var regnet ut med relativistisk energi. Om man regner det ut med ikke-relativistisk energi finner vi heller ut at

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = 4.18\text{eV}$$

## d)

Bruker vi relativistisk energi for elektronet er det veldig mye mer effektivt å bruke fotoner. Med ikke-relativistisk er det mye bedre å bruke elektroner.

Siden vi vet at man bruker elektronmikroskop for å se på ned på nanonivå nettopp fordi det krever mindre en med vanlige mikroskop. Jeg tror derfor at den ikke-relativistiske energien gir det korrekte svaret.