FYS2140

Kandidat nr. 15110

26. mars 2017

1 Oppgave 1)

2 Oppgave 2)

a)

Den tidsuavhengige Schrödinger likningen er gitt som

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{2.1}$$

Hvor E er energien til systemet, mens $\hat{H}$ er den hamiltonske operatoren. Denne er gitt som

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y)$$

I 2 dimensjoner er:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Vi skal se på tilfelle hvor potensialet er det for en 2 dimensjonal harmonisk osillator:

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

Dette gir oss Schrödinger likningen for dette systemet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)\psi = E\psi \tag{2.2}$$

b)

Vi kan se at det er mulig å separere differensiallikningen inn i to likninger bare avhengig av enten x eller y. Funksjonen ψ kan derfor skrives som et produkt av løsningene på disse to likningene. Disse to løsningene kaller vi $X = X(x)$ og $Y = Y(y)$. ψ kan derfor skrives som

$$\psi(x,y) = X(x)Y(y)$$

Vi kan sette dette inn i 2.2

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 XY}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 XY}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)XY = EXY$$

Siden X er uavhenging av y og Y av x, så kan vi stokke litt om på derivasjonene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)XY = EXY$$

Vi deler så hele likningen på XY:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = E$$

Vi stokke om og samle de delene som er avhengig av samme variabel:

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2}_{E_x}+\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{1}{2}m\omega^2y^2}_{E_y}=E \tag{2.3}$$

Jeg har her kalt de to leddene E_x og E_y, og dette er ikke uten grunn. Om vi nå skriver disse likningene over hver for seg:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E_x$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{1}{2}m\omega^2y^2=E_y$$

Vi ganger så likningene med forholdsvis X og Y:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2X(x)=E_xX(x)$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}+\frac{1}{2}m\omega^2y^2Y(y)=E_yY(y)$$

Det vi nå kan se at de to differensiallikningene vi har fått er 2 likninger som tilsvarer Schrödinger likninger for harmoniske osillatorer i x- og y-retning. Dette betyr at den 2 dimensjonale harmoniske osillatoren bare består av 2 lineært uavhengige harmoniske osillatorer, én i x-retning og én i y-retning! E_x og E_y forholdsvis energien til den harmoniske osillatoren i x- og y-retningen. Fra 2.3 ser vi at

$$E = E_x + E_y$$

Siden vi kan skrive $\psi = X_i(x)Y_j(y)$, hvor i og j er kvantetall assosiert med de harmoniske osillatorene i de 2 retningene, og $E = E_x + E_y$, så betyr det at det er flere konfigurasjoner av disse kvantetallene kan gi samme energi E. Dette betyr at dette systemet er *degenerert.*

3 Oppgave 3)

a)

Vi har en observabel beskrevet av den hermitiske matrisen

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Dette er en operator som kan brukes på tilstandene til et system som så gir de faktiske målingene. Tilstandene til systemet er gitt som egenvektorene til D, mens målingene er gitt som egenverdiene til D. Vi bruker Dirac-notasjon, som gjør at dette skrives som *braketer*:

$$\hat{D}|d_\pm\rangle = d_\pm|d_\pm\rangle$$

Her er $|d_\pm\rangle$ de to tilstandsegenvektorene, mens $d_\pm$ er målingsegenverdiene. Dette kan være litt forvirrende notasjon, men egenvektorene er alltid inni en *ket*, $|\ \rangle$(eller senere inni en *bra* $\langle\ |$, mens egenverdier står som 'frittstående' tall

Vi starter med å finne egenverdien. Dette gjøres på standardmetoden:

$$\begin{vmatrix} 0-d & 1 \\ 1 & 2-d \end{vmatrix} = d^2 - 2d - 1 = 0$$

Svaret på dette karakteristiske polynomet er

$$d_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

De mulige målingene for observablen D er derfor $d_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$. Vi kan bruke dette til å finne tilstandene, i form av egenvektorene til disse to egenverdiene. Egenvektorene til egenverdiene er definert som nullrommet til $D - d_\pm I$. Vi starter med egenverdien til $d_+ = 1 + \sqrt{2}$

$$Null \begin{pmatrix} 0 - 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 - 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normaliserer vi dette finner vi den første egenvektoren:

$$|d_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Vi regner så ut egenvektoren til $d_- = 1 - \sqrt{2}$:

$$Null \begin{pmatrix} 0 - 1 + \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 - 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Og så normaliserer den og finner den andre egenvektoren:

$$|d_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Vi har da funnet de mulige målingene $d_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$, med de tilsvarende tilstandene til systemet $|d_+\rangle$ og $|d_-\rangle$.

b)

For en observabel D er gjennomsnittverdien/forventningsverdien gitt som

$$\langle D \rangle = \langle \Psi | D | \Psi \rangle$$

Vi vet hva D er, men vi har enda ikke funnet $\Psi(t)$. For å finne denne må vi se på de to Hamiltonoperatorene:

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker å finne tilstandene og energiene til disse to systemene. Akkurat som i forrige deloppgave er dette gitt ved egenvektorene og egenverdiene til de to operatorene.

<u>H_0</u>: Vi skal første finne energiene til H_0. Dette er egenvektorene E_{00} og E_{01}:

$$\begin{vmatrix} -E_0 & -4 \\ -4 & 6 - E_0 \end{vmatrix} = E_0^2 - 6E_0 - 16 = 0$$

Dette gir egenverdiene:

$$E_0 = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 16}}{2} = 3 \pm 5$$

Så vi får $E_{00} = -2$ og $E_{01} = 8$. Jeg viste hvordan man regner ut egenvektorer og normaliserer dem i forrige deloppgave, så her gir jeg bare egenvektorene som tilhører egenverdiene. For E_{00}

$$|h_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Og for E_{01}:

$$|h_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$\underline{H_1}$: Vi kan så finne tilstandene og energiene til H_1. Energiene er egenvektorene, som vi som vanlig finner ved:

$$\begin{vmatrix}1-E_1 & 0\\ 0 & 3-E_1\end{vmatrix} = (1-E_1)(3-E_1) = 0$$

Dette energiene $E_{10} = 1$ og $E_{11} = 3$, med de tilsvarende egenvektorene:

$$|h_{10}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

og

$$|h_{11}\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Vi er nå i stand til å finne Ψ. I følge oppgaven starter systemet i grunntilstanden. Dette vil si tilstanden som tilsvarer den laveste energien til H_0, så:

$$\Psi_0(0) = |h_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Denne er for øyeblikket tidsuavhengig. Men ved tiden t_D er vi i regime til H_1, det betyr at vi må beskrive $\Psi_0(0)$ i H_1-system, m.a.o. som en lineærkombinasjon av egenvektorene til H_1, $|h_{10}\rangle$ og $|h_{11}\rangle$. Siden disse er det samme som basisvektorene til $\mathbb{R}^2$ ($\hat{e}_0$ og $\hat{e}_1$), så er dette en enkel oppgave:

$$\Psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2|h_{10}\rangle + |h_{11}\rangle)$$

Vi kan så legge til en tidsavhengighet ved hjelp av $e^{-iE_n t}$ – dette er tilvanlig $e^{-iE_n t/\hbar}$, men vi har satt $\hbar = 1$ –. E_n er energiene, som i dette tilfellet er energiene til H_1 som er $E_{10} = 1$ og $E_{11} = 3$. Vi får da:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2|h_{10}\rangle e^{-it} + |h_{10}\rangle e^{-3it}\right]$$

Vi har nesten funnet $\Psi(t)$, men det er en ting til vi må ta hensyn til. Denne tidsutviklingen gjelder bare fra vi skrur på H_1 ved t_1. Vi er derfor interessert i hvordan systemet utvikler seg i en tid mellom t_1 og når vi observerer systemet ved tiden t_D. Tiden systemet har utviklet seg på er derfor $t = T_D - t_1$. F.eks ser vi at om vi observerer systemet akkurat i $t_D = t_1$ forsvinner tidsavhengigheten og vi sitter igjen med grunntilstanden, akkurat som vi ønsker. Den endelige bølgefunksjonen er derfor:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2|h_{10}\rangle e^{-i(t_D-t_1)} + |h_{10}\rangle e^{-3i(t_D-t_1)}\right] \tag{3.8}$$

Eller skrevet som en vektor:

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2e^{-i(t_D-t_1)}\\ e^{-3i(t_D-t_1)}\end{pmatrix}$$

Vi har nå de redskapene som skal til for å regne ut $\langle D\rangle$:

Som nevnt i starten av deloppgaven er forventiningsverdien gitt ved

$$\langle D \rangle = \langle \Psi | D | \Psi \rangle$$

Vi starter ved å regne ut $D|\Psi\rangle$:

$$D|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2e^{-i(t_D - t_1)} \\ e^{-3i(t_D - t_1)} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} e^{-3i(t_D - t_1)} \\ 2e^{-i(t_D - t_1)} + 2e^{-3i(t_D - t_1)} \end{pmatrix}$$

Vi ser så på $\langle \Psi |$. En *bra* er den hermitisk konjugerte til en *ket*, $\langle \Psi | = |\Psi\rangle^\dagger$, så

$$\langle \Psi | = |\Psi\rangle^\dagger = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2e^{i(t_D - t_1)} & e^{3i(t_D - t_1)} \end{pmatrix}$$

Vi kan nå finne $\langle D \rangle$:

$$\langle D \rangle = \langle \Psi | D | \Psi \rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2e^{i(t_D - t_1)} & e^{3i(t_D - t_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3i(t_D - t_1)} \\ 2e^{-i(t_D - t_1)} + 2e^{-3i(t_D - t_1)} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{2}{5} \left(e^{-2i(t_D - t_1)} + e^{2i(t_D - t_1)} + 1 \right)$$

Vi bruker så identiteten:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Og finner det endelig svaret:

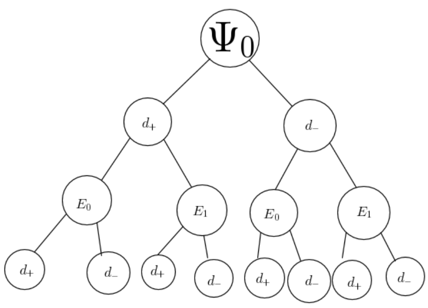
$$\langle D \rangle = \frac{2}{5} \left[2\cos(2(t_D - t_1)) + 1 \right] \tag{3.9}$$

Vi kan se at forventingsverdien til D osillerer i tid, men en frekvents $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$. Dette er verdien man forventer fra observablen D om man observerer den gjentatte ganger.

c)

Siden vi i denne oppgaven bare er interessert i energiene i H_1-regimet, så skrier jeg at $E_0 = E_{10}$ og $E_1 = E_{11}$.

Vi skal her finne sannsynlighet for at om man observerer D, så energien og deretter D igjen, så vil man måle samme verdi for D. Nedenfor kan vi se alle de forskjellige muligheten vi kan måle:



Figur 1: Et valgtre som viser alle de mulige utfallene vi kan observere.

Vi stater med grunntilstanden Ψ_0, vi observerer deretter enten d_+ eller d_-. Bølgelikningen kollapser så til tilstanden som tilsvarer denne målingen ($|d_+\rangle$ eller $|d_-\rangle$). Vi observerer så energien, og måler enten E_0 eller E_1, og bølgefunksjonen kollapser til forholdsvis $|h_{10}\rangle$ eller $|h_{11}\rangle$. I den lange utregningen under bryter jeg min egen notasjon, og skriver $|E_0\rangle \equiv |h_{10}\rangle$ og $|E_1\rangle \equiv |h_{11}\rangle$, dette er for å gjøre det lettere å lese og skrive, så beklager om dette skaper forvirring, men nå er du advart! Vi gjør så en siste måling og får enten d_+ eller d_-.

Sannsynligheten for å gjøre en viss måling av en tilstand $|f_n\rangle$ når vi har en tilstand $|\psi_n\rangle$ er gitt ved:

$$|c_n|^2 = |\langle f_n|\psi_n\rangle|^2$$

(Vi har bare reelle tilstander, så vi kan fjerne $|\ |$)

Sannsynligheten for å måle samme D begge gangene er

$$P(samme) = P(d_+ \cap d_+) + P(d_- \cap d_-) \tag{3.10}$$

Vi finner så at leddene er gitt ved:

$$P(d_+ \cap d_+) = P(d_+)P(d_+|d_+)$$

$P(d_+|d_+)$ er sannsynligheten for at vi igjen måler d_+ etter vi har målt d_+ én gang. Dette er gitt ved sannsynligheten for at vi først måler E_0 så d_+ eller at vi måler E_1 så d_+. Så

$$P(d_+|d_+) = \langle E_0|d_+\rangle^2\langle d_+|E_0\rangle^2 + \langle E_1|d_+\rangle^2\langle d_+|E_1\rangle^2$$

$\langle E_0|d_+\rangle^2\langle d_+|E_0\rangle^2$ er sannsynligheten for at vi først måler E_0 så d_+, og $\langle E_1|d_+\rangle^2\langle d_+|E_1\rangle^2$ er sannsynligheten for at vi måler E_1 så d_+.
$P(d_+)$ er gitt som:

$$P(d_+) = \langle d_+|\Psi\rangle^2$$

For får da:

$$P(d_+ \cap d_+) = \langle d_+|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_+\rangle^2\langle d_+|E_0\rangle^2 + \langle E_1|d_+\rangle^2\langle d_+|E_1\rangle^2\right]$$

Og helt tilsvarende:

$$P(d_- \cap d_-) = \langle d_-|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_-\rangle^2\langle d_-|E_0\rangle^2 + \langle E_1|d_-\rangle^2\langle d_-|E_1\rangle^2\right]$$

Vi ender da med at sannsynligheten er:

$$P(samme) = \langle d_+|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_+\rangle^2\langle d_+|E_0\rangle^2 + \langle E_1|d_+\rangle^2\langle d_+|E_1\rangle^2\right] + \langle d_-|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_-\rangle^2\langle d_-|E_0\rangle^2 + \langle E_1|d_-\rangle^2\langle d_-|E_1\rangle^2\right]$$

Vi kan så begynne å regne ut dette beistet. Fra tidligere i oppgaven har vi funnet at:

$$|E_0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |E_1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$|d_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \qquad |d_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$
$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2e^{-i(t_D-t_1)}\\e^{-3i(t_D-t_1)}\end{pmatrix}$$

I uttrykket for $|\Psi(t)\rangle$ finner vi en stygg tidsavhengighet, som vi håper vil forsvinne. Vi kan så regne ut indreproduktene:

$$\langle E_0|d_+\rangle^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2, \qquad \langle E_0|d_-\rangle^2 = \left(\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^2$$
$$\langle E_1|d_+\rangle^2 = \frac{1}{4-2\sqrt{2}}, \qquad \langle E_1|d_-\rangle^2 = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}$$

Indreprodukt er uavhenging av hvilke vei vi skriver dem, så

$$\langle d_+|E_0\rangle^2 = \langle E_0|d_+\rangle^2, \qquad \langle d_-|E_0\rangle^2 = \langle E_0|d_-\rangle^2$$
$$\langle d_+|E_1\rangle^2 = \langle E_1|d_+\rangle^2, \qquad \langle d_-|E_1\rangle^2 = \langle E_1|d_-\rangle^2$$

Vi regner ikke ut $\langle d_\pm|\Psi(t)\rangle$ enda, av grunner vi skal se senere! Vi kan nå regne ut leddene i sannsynligheten:

$$\begin{aligned}
P(d_+ \cap d_+) &= \langle d_+|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_+\rangle^2 \langle d_+|E_0\rangle^2 + \langle E_1|d_+\rangle^2 \langle d_+|E_1\rangle^2\right] \\
&= \langle d_+|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_+\rangle^2 \langle E_0|d_+\rangle^2 + \langle E_1|d_+\rangle^2 \langle E_1|d_+\rangle^2\right] \\
&= \langle d_+|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_+\rangle^4 + \langle E_1|d_+\rangle^4\right] \\
&= \langle d_+|\Psi\rangle^2 \left[\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^4 + \left(\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^4\right] \\
&= \frac{3}{4}\langle d_+|\Psi\rangle^2
\end{aligned}$$

Og tilsvarende:

$$\begin{aligned}
P(d_- \cap d_-) &= \langle d_-|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_-\rangle^2 \langle d_-|E_0\rangle^2 + \langle E_1|d_-\rangle^2 \langle d_-|E_1\rangle^2\right] \\
&= \langle d_-|\Psi\rangle^2 \left[\langle E_0|d_-\rangle^4 + \langle E_1|d_-\rangle^4\right] \\
&= \langle d_-|\Psi\rangle^2 \left[\left(\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\right)^2\right] \\
&= \frac{3}{4}\langle d_-|\Psi\rangle^2
\end{aligned}$$

Og her skjedde det noe utrolig vakkert! Sannsynligheten for at man ved første måling enten finner d_+ eller d_- må være 1. Dette vil si at $\langle d_+|\Psi\rangle^2 + \langle d_-|\Psi\rangle^2 = 1$. Så nå ser vi at:

$$P(samme) = P(d_+ \cap d_+) + P(d_- \cap d_-) = \frac{3}{4}\left(\langle d_+|\Psi\rangle^2 + \langle d_-|\Psi\rangle^2\right) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \tag{3.11}$$

Siden all tidsavhengighet lå i $\langle d_+|\Psi\rangle$ og $\langle d_-|\Psi\rangle$, og disse forsvant, så betyr det at tidsavhengigheten til sannsynligheten for å finne samme måling begge gangene!

Så da har vi funnet at sannsynligheten for å måle samme verdi for D ved to raske målinger er alltid $\underline{\underline{\frac{3}{4}}}$.