MAT1120 Oblig 2

Daniel Heinesen, daniehei

3. november 2016

Oppgave 1 Vi har en $m \times 1$ vektor $\mathbf{u}$ og en $1 \times n$ vektor $\mathbf{v}^T$. Ytterproduktet mellom disse 2 er gitt ved:

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \cdots v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_mv_1 & \cdots & u_mv_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\mathbf{u} \cdots v_n\mathbf{u} \end{bmatrix}$$

Siden v_i er komponeneter og skalarer ser vi at alle kolonnene er lineært avhengige og

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = span\{\mathbf{u}\} \tag{1}$$

Rang er definert som $dim(col(\mathbf{u}\mathbf{v}^T))$. Vi kan se at

$$col(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \mathbf{u}$$

og

$$rank(\mathbf{u}) = dim(col(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)) = 1 \tag{2}$$

Vi kan teste dette i Matlab med 2 tilfeldige vektorer.

```
>> u = rand(4,1);
>> v = rand(5,1);
>> u*v'
ans =

   0.488594   0.164829   0.504212   0.729964   0.669458
   0.043800   0.014776   0.045200   0.065438   0.060014
   0.327409   0.110453   0.337874   0.489151   0.448606
   0.227790   0.076846   0.235071   0.340320   0.312111

>> rank(u*v')
ans =  1
```

Vi ser da at rangen er 1, som vi forventet.

Oppgave 2 Vi skal vise at:

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$$

Fra oppgaveteksten får vi at

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC} = \sum_{j=1}^{n} Col_j(\mathbf{B}) Row_j(\mathbf{C})$$

Vi setter at $\mathbf{B} = \mathbf{U\Sigma}$ og $\mathbf{C} = \mathbf{V}^T$. Vi har da

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC} = (\mathbf{U\Sigma})(\mathbf{V}^T) = \sum_{j=1}^{n} Col_j(\mathbf{U\Sigma}) Row_j(\mathbf{V}^T)$$

Siden $\mathbf{\Sigma}$ er en diagonalmatrise vil

$$\begin{aligned}\mathbf{U\Sigma} &= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\sigma_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \ddots & \sigma_r & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\sigma_1\mathbf{u}_1 & \cdots & \sigma_r\mathbf{u}_r & \cdots & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

og får da

$$Col_j(\mathbf{U\Sigma}) = \sigma_j \mathbf{u}_j$$

For $Row_j(V^T)$:

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T\end{bmatrix}$$

og da blir

$$Row_j(\mathbf{V}^T) = \mathbf{v}_j^T$$

Vi får da til slutt at

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} Col_j(\mathbf{U\Sigma}) Row_j(\mathbf{V}^T) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \tag{3}$$

Oppgave 3

a)

*Kommentar/Advarsel: All koden i denne obligen er skrevet i **Octave**. Jeg håper at det også skal fungere i Matlab, jeg har ikke hatt muligheten til å teste dette.*

```
function AK=svdApprox(A,k)

  A = double(A);

  if k>rank(A)
    disp("The rank of A is lower than k");
    return
  end

  [U,S,V] = svd(A);
  AK = zeros(size(A));

  for j=1:(k)
    AK = AK + S(j,j)*U(:,j)*V(:,j)';
  end

  AK = uint8(AK); #If AK is double the image isnt saved correctly
```

b) Vi laster inn bildet som en matrise og sjekker rangen med **rank**-kommandoen og **rank**(A, ϵ) med $\epsilon = 0.001$

```
>> A = imread("mm.gif","gif");
>> A = double(A);
>> rank(A)
ans =  256
>> rank(A,0.001)
ans =  256
```

Vi kan se at begge kommandoene gir samme svar $rank(A) = 256$.

c) For $k = 8$

Figur 1: mm.gif svd-dekomponert med $k = 8$

og for $k = 32$:

Figur 2: mm.gif svd-dekomponert med $k = 32$

Med $k = 8$ kan vi såvidt se hvem bildet er av, og for $k = 32$ er kan man helt tydelig se motivet. Man kan likevel se at bildet har blitt komprimert, særlig rundt halsen og håret. Vi burde med andre ord velge en noe større k for at bildet skal ha en aksepterbar kvalitet.

d) Figur 1 i oppgaveteksten består av nøyanser av sort til grå. Gjør vi dette til en matrise vil kolonnene bestå av de forskjellige nøyansene. Kolonnene inneholder én nøyanse hver(elementene i denne kolonnen er like), hvilket betyr at alle radene i denne matrisen er like. Siden vi kan skrive rangen til denne matrisen som

$$Rank(\mathbf{A}) = dim(Col(\mathbf{A})) = dim(Row(\mathbf{A}))$$

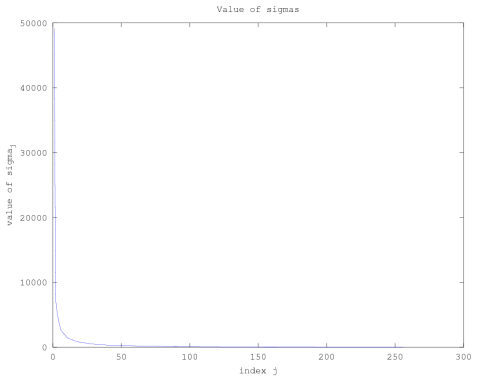
og alle radene er like, betyr det at dimensjonen på radrommet er 1, og derfor er rangen til dette bildet 1.

e) Jeg laget et lite progam jeg laget for å plotte σ_j

```
function plotSigma(A,k)
  if k>rank(A)
    disp("The rank of A is lower than k");
    return
  end
  A = double(A);
  [U,S,V] = svd(A);

  s = diag(S);
  x = linspace(1,256,256);
  graphics_toolkit("gnuplot")
  figure(1);
  plot(x,s(1:k));
  title("Value of sigmas");
  xlabel("index j");
  ylabel("value of sigma_j");
  saveas(1,"sigmas.png");
```

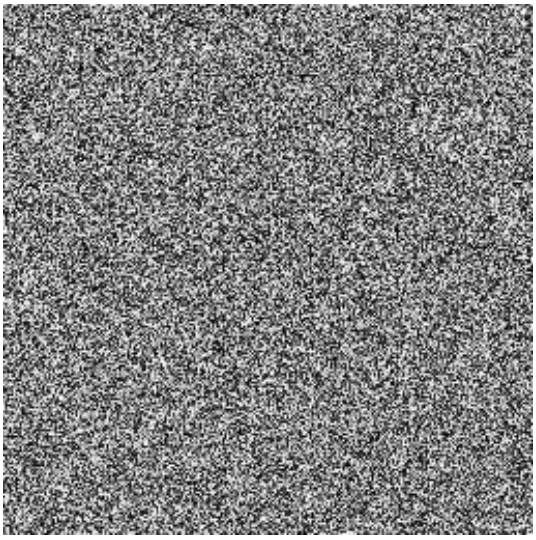
Plotter vi alle singulærverdiene får vi:



Figur 3: Singulærverdiene for mm.gif

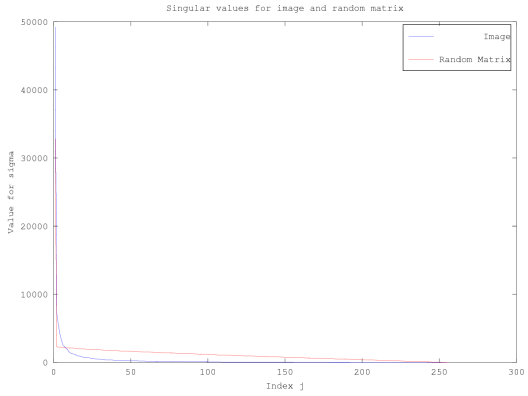
Vi kan se at verdien for σ_j raskt går mot 0. Dette betyr at den viktige informasjonen om bildet ligger i relativt få singulærverier. Som vi så i deloppgave c fikk vi et ganske klart bilde med bare de 32 første singulærverdiene.

For en tilfeldig matrise får vi dette bildet:



Figur 4: Bildet som tilsvarer en tilfeldig matrise. Bare støy.

Singulærverdiene til bildet og den tilfeldige matrisen plottet mot hverandre:



Figur 5: Singulærverdiene for en tilfeldig matrise og bildet.

For det tilfeldige bildet kan vi se at σ_1 inneholder det meste av informasjonen. Men etter dette synker verdiene for σ saktere enn for Marilyn Monroe, hvilket betyr at vi trenger flere ledd for å gi en god tilnærming til den tilfeldige matrisen. Grunnet til dette kan være at bildet av Marilyn Monroe inneholder områder bestående av mye hvit rundt henne, i tillegg til at det er flere områder i ansiktet hennes med lik farge. I det tilfeldige bildet, derimot, er det ingen store områder med samme farge, og man trenger derfor flere singulærverdier for å tilnærme matrisen.

Oppgave 5

a) Om vi vil lagre bildet for k singulærverdier må vi lagre disse verdiene. I tillegg trenger vi å lagre k $\mathbf{u}_j$'er, som har størrelsen $m \times 1$, og k $\mathbf{v}_j$'er, som har størrelsen $1 \times n$. Vi trenger med andre ord å lagre $(k + k \cdot m + k \cdot n)$ tall.

Etter litt eksprementering fant jeg ut at $k = 40$ gir et ganske godt bilde. Om man ser godt nok kan man se at det er noe kornete, men forstyrrelsene rundt nakken og håret har forsvunnet:

Figur 6: Et ganske bra bildet med $k = 40$

b) Programmet for å regne ut feilen:

```
function e=relError(A,AK)
  A = double(A);
  AK = double(AK);
  e = norm(A-AK)/norm(A);
```

Feilen mellom orginalbildet og tilnærmingen med $k = 40$ er:

```
>> relError(A,AK)
ans =  0.0064210
```

Hvilke er en ganske god tilnærming.