Obligatorisk innlevering 1, MAT1120-Lineær algebra

Av: Laila Andersland

21. september 2016

Oppgave 1

Linkmatrisen til figur 2:

Dokument nummer 1 har hyperlenke til
dok.nr. 2, 3 og 4 som gir første kolonne: $(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Dok.nr. 2 har hyperlenke til dok.nr.
3 og 4 som gir andre kolonne: $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Dok.nr. 3 har hyperlenke til dok.nr.
1 som gir tredje kolonne: $(1, 0, 0, 0)$

Dok.nr. 4 har hyperlenke til dok.nr.
3 og 1 som gir fjerde kolonne: $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$

Linkmatrisen blir da:

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Basis for nullrommet til matrisen A-I

Begynner med A-I:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reduserer til redusert trappeform ved bruk av Matlab:

$$\text{rref(A-I)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Som gir:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_4 &= 0 \\ x_3 - \frac{3}{2}x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2x_4 \\ x_2 &= \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 &= \frac{3}{2}x_4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

En basis for nullrommet er da $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}}$

Den unike score vektoren

Siden summen av elementene i basisen for nulrommet skal være lik 1, må vi finne den normaliserte basisen:

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{31}{6} \Rightarrow \left(\frac{2}{31/6}, \frac{2/3}{31/6}, \frac{3/2}{31/6}, \frac{1}{31/6} \right)$$

$$= \left(\frac{12}{31}, \frac{4}{31}, \frac{9}{31}, \frac{6}{31} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{31} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

Den tilhørende rangeringen

Rangering blir:

dok.nr.	rangering
1	1
2	4
3	2
4	3

Oppgave 2

Linkmatrisen til figur 3:

Første kolonne: $(0, 1, 0, 0, 0)$
Andre kolonne: $(1, 0, 0, 0, 0)$
Tredje kolonne: $(0, 0, 0, 1, 0)$
Fjerde kolonne: $(0, 0, 1, 0, 0)$
Fjerde kolonne: $\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

Linkmatrisen blir da:

$$\underline{\underline{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

Basis for nullrommet til matrisen A-I

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Redusert trappeform:

$$\text{rref(A-I)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Som gir:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_3 &= x_4 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Basiser for nullrommet er da: $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$

Den unike score vektoren

Siden vi her fikk to basiser så kan det ikke være en <u>*unik*</u> score vektor.

Oppgave 3

Matrisene er stokastiske fordi de er ikke negative og kvadratisk, med kolonnesum = 1.

Ifølge Theorem 18 så har en matrise en likevektsvektor hvis den er en nxn regulær stokastisk matrise.

I Oppgave 1 fant vi en unik scorevektor altså likevektsvektoren til link-matrisen, og vi kan da si at matrisen er regulær.

I oppgave 2 var det ingen unik scorevektor, derfor er link-matrsien ikke regulær.

Hvis vi hadde hatt en node som ikke linker til noe annet så vil summen av kolonnen være 0, og ikke 1, altså ikke stokastisk.

Oppgave 4 *Anta at A er stokastisk. Begrun at M da er stokastisk og regulær (og dermed har en unik score-vektor), når*

$$M = (1 - m)A + mS$$

Betrakter i'te kolonne, da er:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad S = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad \text{da blir} \quad mS = \begin{bmatrix} m\frac{1}{n} \\ \vdots \\ m\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Da er i'te kolonne i matrsien M:

$$\mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} (1-m)a_{1i} + \frac{m}{n} \\ \vdots \\ (1-m)a_{ni} + \frac{m}{n} \end{bmatrix}$$

For at M skal være stokastisk må summen av alle kolonnene være lik 1, derfor summerer jeg i'te kolonnen for å sjekke om den er lik 1:

$$(1 - m)(a_{1i} + \cdots + a_{ni}) + n\frac{m}{n}$$

Siden A var en stokastisk matrise, betyr det at $(a_{1i} + \cdots + a_{ni}) = 1$. Da står jeg igjen med:

$$(1 - m) \cdot 1 + m = 1 - m + m = \underline{1}$$

Dermed kan vi konkludere at M er stokastisk.

Om M er regulær så må hvert element i M^2 være strengt positiv. Hvis et av elementene i $M^2 <= 0$ så må minst et av elementene i $M <= 0$. Da $m_i S > 0$ og $A >= 0$ så er alle elementene i $M <= 0$, og da er $M^2 <= 0$. Da er M regulær, og har per teorem 18 en unik likevektsvektor som i dette tilfellet er scorevektoren.

Oppgave 5 *Skriv opp Google-matrisen M når når linkmatrisen A fra oppgave 2 og m=0.15*

```matlab
A = [0 1 0 0 0; 1 0 0 0 0;   %A fra oppgave21
     0 0 0 1 .5; 0 0 1 0 .5;
     0 0 0 0 0];
m = 0.15;
n = 5;
S(1:n,1:n) =  1/n;           %gir en nxn-matrise med
                             %1/n som alle ellemter

M=(1-m).*A + m.*S;           %Google-matrisen til A
 Googlematrisen = M

 I=eye(n);                   %gir nxn-identitetsmatrisen
 nullrom=null(M-I)           %nullrommet til M-I

 s=1/sum(nullrom);           %normaliserer
 score_vektor= s.*nullrom    %unike score-vektor til M
```

```
Command Window

>> Mat1120_Oblig1_5

Googlematrisen =

    0.0300    0.8800    0.0300    0.0300    0.0300
    0.8800    0.0300    0.0300    0.0300    0.0300
    0.0300    0.0300    0.0300    0.8800    0.4550
    0.0300    0.0300    0.8800    0.0300    0.4550
    0.0300    0.0300    0.0300    0.0300    0.0300

nullrom =

   -0.4054
   -0.4054
   -0.5777
   -0.5777
   -0.0608

score_vektor =

    0.2000
    0.2000
    0.2850
    0.2850
    0.0300

>>
```

Oppgave 6 *Forklar hvorfor følgende kode returnerer en link-matrise*

```
function A=randlinkmatrix(n)
A = round(rand(n,n));
for k=1:(n-1)
    A(k,k) = 0;
    if (A(:,k) == 0)
        A(n,k) = 1;
    end
    s = sum(A(:,k));
    A(:,k) = (1/s) * A(:,k);
end
A(n,n) = 0;
if (A(:,n) == 0)
    A(1,n) = 1;
end
s = sum(A(:,n));
A(:,n) = (1/s) * A(:,n);
```

Funksjonen randlinkmatrix tar en input, n, og returnerer en A. Koden starter med å gjøre A til en nxn matrise som er tilfeldige tall mellom null og en. Så går den igjennom kolonne 1 til den nest siste kolonnen og setter null langs diagonalen. En linkmatrise kan ikke ha null på diagonalen ettersom dette vil gi en slags slukendeeffekt, når den tilhørende weben da kun vil referere til seg selv.
Siden linkmatrisen må være stokastisk så må summen av kolonnene være lik 1. Dette gjøres vet at den sier at hvis summen av kolonnen er lik null så skal det settes en 1'ner i siste element i den kolonnen. Hvis det skulle vise seg at det var flere 1'nere i kolonnen så normaliseres kolonnen ved å dele på summen av alle elementene, slik at det er sikret at summen av kolonnen fortsatt er lik 1.
Tilslutt omhandles den siste kolonne. Først settes det siste elementet i den siste kolonnen lik null, siden dette også er på diagonalen. Hvis alle elemntene i denne er null så settes det en 1'ner som første element. Videre passer den på at summen blir lik 1 på samme måte som de første kolonnene.

Oppgave 7 *Sett n=5 og tegn weben for matrisen.*

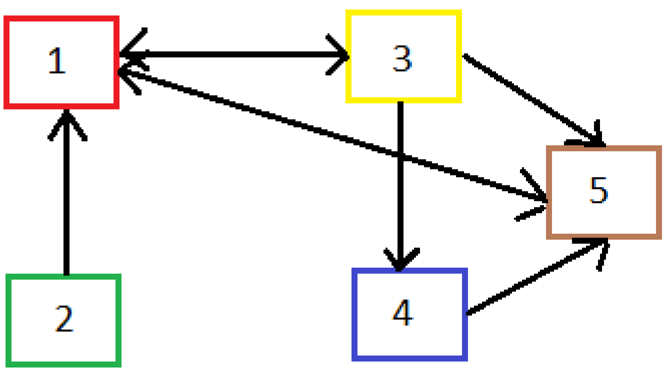
Kjørte radlinkmatrix(5):

```
Command Window

>> randlinkmatrix(5)

ans =

         0    1.0000    0.3333         0    1.0000
         0         0         0         0         0
    0.5000         0         0         0         0
         0         0    0.3333         0         0
    0.5000         0    0.3333    1.0000         0

>>
```

Altså følgende 5x5-matrise:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hvor dok.nr 1 linker til dok.nr. 3 og 5, dok.nr 2 linker kun til 1, osv. Weben ser ut som følger:



Oppgave 8

Skriv en matlab-funksjon: ranking(A) dom returnerer den unike scorevektoren.

```
function x=ranking(A)
m = 0.15;
r = size(A,1);              %rader i matrsien
n = size(A,2);              %kolonner

for k=1:n                   %for kolonne 1 til siste
    if sum(A(:,k))~= 1      %hvis summen ikke er lik en
        disp('Matrisen er ikke stokastisk')
        return
    end
end
if n ~= r                   %hvis matrisen ikke er nxn
    disp('Matrisen er ikke kvadratisk')
    return                  %hvis matrisen er dette er den
end                         %stokastisk og vi kan ga videre
S(1:n,1:n) = 1/n;           %med a returner score-vektoren
M=(1-m).*A + m.*S;
I=eye(n);
x=null(M-I);
s=1/sum(x);
x= s.*x;
```

Oppgave 9

Matlabfunksjonen er som følger:

```matlab
function x=rankingapprox(A, delta)
n=size(A,2);
m = 0.15;
x(1:n, 1) = 1/n;
x=(1/sum(x))*x;

S(1:n,1:n) = 1/n;
M=(1-m).*A + m.*S;

x0 = x;
x = M*x;
while max(abs(x-x0))>delta
    x0=x;
    x=M*x;
end
```

Oppgave 10

Bruker A fra oppgave 1 og kjører ranking(A):

```
Command Window
>> A = [0 0 1 .5; 1/3 0 0 0; 1/3 1/2 0 1/2; 1/3 1/2 0 0]

A =

         0         0    1.0000    0.5000
    0.3333         0         0         0
    0.3333    0.5000         0    0.5000
    0.3333    0.5000         0         0

>> ranking(A)

ans =

    0.3682
    0.1418
    0.2880
    0.2021

>>
```

Kjører så rankingapprox(A, 0.005):

```
Command Window
>> A = [0 0 1 .5; 1/3 0 0 0; 1/3 1/2 0 1/2; 1/3 1/2 0 0]

A =

         0         0    1.0000    0.5000
    0.3333         0         0         0
    0.3333    0.5000         0    0.5000
    0.3333    0.5000         0         0

>> rankingapprox(A, 0.005)

ans =

    0.3664
    0.1422
    0.2884
    0.2030

>>
```

Altså er scorevektoren med ranking funksjonen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.3682 \\ 0.1418 \\ 0.2880 \\ 0.2021 \end{bmatrix}$$

og med rangingapprox er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.3664 \\ 0.1422 \\ 0.2884 \\ 0.2030 \end{bmatrix}$$

Som er ganske likt, og ser ut til at man ikke ser avvik før i tredje desimalet.