FYS3140 Oblig 2

Daniel Heinesen, daniehei

30. januar 2017

2.1)

a)

$$\frac{-i+2z}{2+iz} = \frac{-i+2a+2ib}{2+ia-b} = \frac{2a+i(2b-1)}{(2-b)+ia}$$

Vi ganger så telleren med den conjugerte til nevneren

$$\frac{(2a+i(2b-1))((2-b)-ia)}{(2-b)^2-a^2} = \frac{2a(2-b)-2ia^2+i(2b-a)(2-b)+a(2b-1)}{(2-b)^2-a^2}$$

Som vi sorterer de reelle og imaginære delene får vi:

$$u(x,y) = \frac{2a(2-b)+a(2b-a)}{(2-b)^2-a^2}$$

$$v(x,y) = \frac{(2b-a)(2-b)-2a^2}{(2-b)^2-a^2}$$

b)

$$e^{iz} = e^{i(a+ib)} = e^{-b+ia} = e^{-b}e^{ia}$$

Vi bruker så Eulers formel:

$$e^{-b}e^{ia} = e^{-b}[\cos(a) + i\sin(a)]$$

Dette gir oss at

$$u(x,y) = e^{-b}\cos(a)$$

$$v(x,y) = e^{-b}\sin(a)$$

2.2)

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z)}{\Delta z}$$

Vi tar så å plusser på $f(z+\Delta z)g(z) - f(z+\Delta z)g(z)$ i telleren:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z)-f(z)g(z)+f(z+\Delta z)g(z)-f(z+\Delta z)g(z)}{\Delta z}$$

Vi ser nå at vi kan skrive dette som

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left(f(z+\Delta z)\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} + g(z)\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right)$$

Når vi tar grensen ser vi at

$$\lim_{\Delta z\to 0} f(z+\Delta z) = f(z)$$

Vi ender dermed opp med at

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z) = f(z)\frac{dg(z)}{dt} + g(z)\frac{df(z)}{dt}$$

2.3)

Jeg kommer til å bruke en litt annen notasjon for den deriverte her:

$$\frac{d}{dz}f(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Der $z = z_0 + \Delta z$, og $\Delta z = z - z_0$. Vi kan nå skrive det i polarkoordinater

$$\frac{d}{dz}f(r_0 e^{i\theta_0}) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(re^{i\theta}) - f(r_0 e^{i\theta_0})}{z - z_0}$$

I første omgang skal vi la θ være kostant, og tilnærme og punktet via r

$$\frac{d}{dz}f(r_0 e^{i\theta_0}) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta}) - f(re^{i\theta_0})}{re^{i\theta_0} - r_0 e^{i\theta_0}}$$

$$= e^{-i\theta_0} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta}) - f(re^{i\theta_0})}{r - r_0}$$

$$= e^{-i\theta_0} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{u(r, \theta_0) + iv(r, \theta) - u(r_0, \theta_0) - iv(r_0, \theta_0)}{r - r_0}$$

$$= e^{-i\theta_0} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

Vi skal nå gjøre det samme, men holde r konstant:

$$\frac{d}{dz}f(r_0 e^{i\theta_0}) = \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta_0}) - f(r_0 e^{i\theta})}{r_0 e^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0}}$$

$$= \frac{1}{r_0} \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta_0}) - f(r_0 e^{i\theta})}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}$$

Vi skal nå gjøre et lite triks(tatt fra [1])

$$= \frac{1}{r_0} \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta_0}) - f(r_0 e^{i\theta})}{\theta - \theta_0} \frac{\theta - \theta_0}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}$$

Vi kan så se på det siste leddet:

$$\lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0} = \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta_0 - i\sin\theta_0}{\theta - \theta_0}$$

$$= \lim_{\Delta \theta \to 0} \left(\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{\theta - \theta_0} + i\frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\theta - \theta_0}\right)$$

$$= -\sin\theta_0 + i\cos\theta_0 = ie^{i\theta_0}$$

Vi får da at

$$\frac{d}{dz}f(r_0 e^{i\theta_0}) = \frac{-ie^{i\theta_0}}{r_0} \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta_0}) - f(r_0 e^{i\theta})}{\theta - \theta_0}$$

$$= \frac{-ie^{i\theta_0}}{r_0} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right] = \frac{e^{i\theta_0}}{r_0} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]$$

Siden den deriverte er unik vet vi at

$$\frac{e^{i\theta_0}}{r_0} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right] = e^{-i\theta_0} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

Setter vi de reelle dele like, og det samme for de imaginære dele:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

2.4)

a)

$$u = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2}$$

For å sjekke om dette er en harmonisk funksjon må vi sjekke om $\nabla^2 u = 0$. Vi finner først at

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2(x-1)y}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(1-x)^2 - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

så

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{6(1-x)^2 y - 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{6(1-x)^2 y - 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Vi ser da enkelt at

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

og u er harmonisk.

b)

Vi bruker Cauchy-Riemann for å finne v:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2(x-1)y}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

For å finne et uttrykk for v integrerer vi dette uttrykket med hensyn på y,og får da at:

$$v(x,y) = \frac{x-1}{(1-x)^2 + y^2} + \phi(x)$$

Vi bruker så at

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 + (1-x)^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

Integrerer vi dette får vi at

$$v(x,y) = \frac{x-1}{(1-x)^2 + y^2} + \psi(y)$$

Vi kan så slå disse sammen å får at

$$v(x,y) = \frac{x-1}{(1-x)^2+y^2} + C$$

Hvor C er en kostant.

Vi kan så skrive om $u+iv$ til en funksjon av z. Vi bruker da at $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ og $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$. Siden begge funksjonene har lik nevner kan vi starte med å finne denne som en funksjon av z

$$(1-x)^2+y^2 = 1-2x+x^2+y^2 = 1-z-\bar{z}+\frac{1}{4}(z+\bar{z}) - \frac{1}{4}(z-\bar{z})$$
$$1-z-\bar{z}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}\bar{z}+\frac{z\bar{z}}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{4}\bar{z}+\frac{z\bar{z}}{2} = 1-z-\bar{z}-z\bar{z}$$

Vi finner da at

$$u = \frac{y}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1}{2i}\frac{z-\bar{z}}{1-z-\bar{z}-z\bar{z}}$$

og

$$v = \frac{x-1}{(1-x)^2+y^2} + C = \frac{1}{2}\frac{z+\bar{z}+2}{1-z-\bar{z}-z\bar{z}} + C$$

Da blir

$$u+iv = \frac{1}{2i}\frac{z-\bar{z}}{1-z-\bar{z}-z\bar{z}} - \frac{1}{i}\frac{1}{2}\frac{z+\bar{z}+2}{1-z-\bar{z}-z\bar{z}} + C$$
$$= \frac{1}{i}\frac{\bar{z}-1}{1-z-\bar{z}-z\bar{z}} + C = i\frac{1-\bar{z}}{(1-\bar{z})(1-z)} + C = \frac{i}{1-z} + C$$

Så vi kan skrive

$$f(z) = \frac{i}{1-z} + C$$

c)

Vi skal nå sjekke at v er harmonisk:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2-(1-x)^2}{((1-x)^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2(x-1)y}{((1-x)^2+y^2)^2}$$

Og

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2(x-1)^3-6(x-1)y^2}{((1-x)^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{2(x-1)^3-6(x-1)y^2}{((1-x)^2+y^2)^3} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Og vi ser da at

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

og v er harmonisk.

Referanser

[1] Cauchy-riemann in polar coordinates. `http://users.math.msu.edu/users/shapiro/teaching/classes/425/crpolar.pdf`, Read: 30.01.17.