

# FYS3140 Oblig 2

Daniel Heinesen, daniehei

1. februar 2017

## 2.1)

a)

$$\frac{-i+2z}{2+iz} = \frac{-i+2a+2ib}{2+ia-b} = \frac{2a+i(2b-1)}{(2-b)+ia}$$

Vi ganger så telleren med den conjugerte til nevneren

$$\frac{(2a+i(2b-1))((2-b)-ia)}{(2-b)^2-a^2} = \frac{2a(2-b)-2ia^2+i(2b-a)(2-b)+a(2b-1)}{(2-b)^2-a^2}$$

Som vi sorterer de reelle og imaginære delene får vi:

$$u(x, y) = \frac{2a(2-b)+a(2b-a)}{(2-b)^2-a^2}$$

$$v(x, y) = \frac{(2b-a)(2-b)-2a^2}{(2-b)^2-a^2}$$

b)

$$e^{iz} = e^{i(a+ib)} = e^{-b+ia} = e^{-b}e^{ia}$$

Vi bruker så Eulers formel:

$$e^{-b}e^{ia} = e^{-b}[\cos(a) + i\sin(a)]$$

Dette gir oss at

$$u(x, y) = e^{-b} \cos(a)$$

$$v(x, y) = e^{-b} \sin(a)$$

## 2.2)

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z}$$

Vi tar så å plusser på  $f(z+\Delta z)g(z) - f(z+\Delta z)g(z)$  i telleren:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)g(z+\Delta z) - f(z)g(z) + f(z+\Delta z)g(z) - f(z+\Delta z)g(z)}{\Delta z}$$

Vi ser nå at vi kan skrive dette som

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( f(z+\Delta z) \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} + g(z) \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right)$$

Når vi tar grensen ser vi at

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z+\Delta z) = f(z)$$

Vi ender dermed opp med at

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f(z) \frac{dg(z)}{dz} + g(z) \frac{df(z)}{dz}$$

## 2.3)

Jeg kommer til å bruke en litt annen notasjon for den deriverte her:

$$\frac{d}{dz}f(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Der  $z = z_0 + \Delta z$ , og  $\Delta z = z - z_0$ . Vi kan nå skrive det i polarkoordinater

$$\frac{d}{dz}f(r_0 e^{i\theta_0}) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(re^{i\theta}) - f(r_0 e^{i\theta_0})}{z - z_0}$$

I første omgang skal vi la  $\theta$  være konstant, og tilnærme og punktet via  $r$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}f(r_0 e^{i\theta_0}) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta}) - f(r_0 e^{i\theta_0})}{r e^{i\theta_0} - r_0 e^{i\theta_0}} \\ &= e^{-i\theta_0} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta}) - f(r_0 e^{i\theta_0})}{r - r_0} \\ &= e^{-i\theta_0} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u(r, \theta_0) + iv(r, \theta_0) - u(r_0, \theta_0) - iv(r_0, \theta_0)}{r - r_0} \\ &= e^{-i\theta_0} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

Vi skal nå gjøre det samme, men holde  $r$  konstant:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}f(r_0 e^{i\theta_0}) &= \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta}) - f(r_0 e^{i\theta_0})}{r_0 e^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0}} \\ &= \frac{1}{r_0} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta}) - f(r_0 e^{i\theta_0})}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}} \end{aligned}$$

Vi skal nå gjøre et lite triks(tatt fra [1])

$$= \frac{1}{r_0} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta}) - f(r_0 e^{i\theta_0})}{\theta - \theta_0} \frac{\theta - \theta_0}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}$$

Vi kan så se på det siste leddet:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}}{\theta - \theta_0} &= \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta_0 - i \sin \theta_0}{\theta - \theta_0} \\ &= \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \left( \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\theta - \theta_0} + i \frac{\sin \theta - \sin \theta_0}{\theta - \theta_0} \right) \\ &= -\sin \theta_0 + i \cos \theta_0 = i e^{i\theta_0} \end{aligned}$$

Vi får da at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}f(r_0 e^{i\theta_0}) &= \frac{-i e^{i\theta_0}}{r_0} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{f(r_0 e^{i\theta}) - f(r_0 e^{i\theta_0})}{\theta - \theta_0} \\ &= \frac{-i e^{i\theta_0}}{r_0} \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] = \frac{e^{i\theta_0}}{r_0} \left[ \frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

Siden den deriverte er unik vet vi at

$$\frac{e^{i\theta_0}}{r_0} \left[ \frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] = e^{-i\theta_0} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right]$$

Setter vi de reelle dele like, og det samme for de imaginære dele:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

## 2.4)

a)

$$u = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2}$$

For å sjekke om dette er en harmonisk funksjon må vi sjekke om  $\nabla^2 u = 0$ . Vi finner først at

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2(x-1)y}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(1-x)^2 - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

så

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{6(1-x)^2 y - 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{6(1-x)^2 y - 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Vi ser da enkelt at

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

og  $u$  er harmonisk.

b)

Vi bruker Cauchy-Riemann for å finne  $v$ :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2(x-1)y}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

For å finne et uttrykk for  $v$  integrerer vi dette uttrykket med hensyn på  $y$ , og får da at:

$$v(x, y) = \frac{x-1}{(1-x)^2 + y^2} + \phi(x)$$

Vi bruker så at

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 + (1-x)^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

Integrerer vi dette får vi at

$$v(x, y) = \frac{x-1}{(1-x)^2 + y^2} + \psi(y)$$

Vi kan så slå disse sammen å får at

$$v(x, y) = \frac{x-1}{(1-x)^2 + y^2} + C$$

Hvor  $C$  er en konstant.

Vi kan så skrive om  $u + iv$  til en funksjon av  $z$ . Vi bruker da at  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  og  $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ . Siden begge funksjonene har lik nevner kan vi starte med å finne denne som en funksjon av  $z$

$$(1-x)^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2 + y^2 = 1 - z - \bar{z} + \frac{1}{4}(z + \bar{z}) - \frac{1}{4}(z - \bar{z})$$

$$1 - z - \bar{z} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}\bar{z} + \frac{z\bar{z}}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}\bar{z} + \frac{z\bar{z}}{2} = 1 - z - \bar{z} - z\bar{z}$$

Vi finner da at

$$u = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2} = \frac{1}{2i} \frac{z - \bar{z}}{1 - z - \bar{z} - z\bar{z}}$$

og

$$v = \frac{x-1}{(1-x)^2 + y^2} + C = \frac{1}{2} \frac{z + \bar{z} + 2}{1 - z - \bar{z} - z\bar{z}} + C$$

Da blir

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{2i} \frac{z - \bar{z}}{1 - z - \bar{z} - z\bar{z}} - \frac{1}{i} \frac{1}{2} \frac{z + \bar{z} + 2}{1 - z - \bar{z} - z\bar{z}} + C \\ &= \frac{1}{i} \frac{\bar{z} - 1}{1 - z - \bar{z} - z\bar{z}} + C = i \frac{1 - \bar{z}}{(1 - \bar{z})(1 - z)} + C = \frac{i}{1 - z} + C \end{aligned}$$

Så vi kan skrive

$$f(z) = \frac{i}{1-z} + C$$

**c)**

Vi skal nå sjekke at  $v$  er harmonisk:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^2 - (1-x)^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-2(x-1)y}{((1-x)^2 + y^2)^2}$$

Og

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2(x-1)^3 - 6(x-1)y^2}{((1-x)^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{2(x-1)^3 - 6(x-1)y^2}{((1-x)^2 + y^2)^3} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Og vi ser da at

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

og  $v$  er harmonisk.

## 2.5)

Om funksjonen ikke har noen singulæriteter innenfor konturen,  $C$ , vi integrerer over, bruker vi

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (1)$$

Om det er en singulærighet der, må vi bruke Cauchy's integralteorem

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi \cdot f(z_0) \quad (2)$$

**a)**

Vi kan se at for

$$\oint_C \frac{\sin z}{2z - \pi} dz$$

er det en singulærighet ved  $z_0 = \pi/2$ , som er innenfor konturen (gitt som  $|z| = 3$ ). Vi bruker derfor 2. Så

$$\oint_C \frac{\sin z}{2z - \pi} dz = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2\pi i = 2\pi i$$

**b)**

Vi har samme integral, men konturen,  $C$ , er definert ved  $|z| = 1$ . Da ligger singulæriteten utenfor. Vi bruker da 1, og får at

$$\oint_C \frac{\sin z}{2z - \pi} dz = 0$$

**c)**

For

$$\oint_C \frac{\sin 2z}{6z - \pi} dz$$

Ser vi at singulæriteten er ved  $z_0 = \pi/6$ . Dette er innenfor konturen  $C$  gitt ved  $|z| = 1$ . Vi må da bruke 2, så

$$\oint_C \frac{\sin 2z}{6z - \pi} dz = \sin\left(2\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\pi i = \sqrt{3}\pi i$$

**d)**

For

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{z - \ln 2} dz$$

er  $z = \ln 2 \approx 0.693$  er en singulærighet.  $C$  er et kvadrat med hjørnene i  $\pm 2$  og  $\pm 2i$ . Vi siden  $\ln 2 < 2$  så er det en singulærighet på innsiden av  $C$ . Vi bruker da 2. Så

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{z - \ln 2} dz = 2\pi i e^{2\ln 2} = 2\pi i (e^{\ln 2})^2 = 2\pi i 2^2 = 8\pi i$$

## Referanser

- [1] Cauchy-riemann in polar coordinates. <http://users.math.msu.edu/users/shapiro/teaching/classes/425/crpolar.pdf>, Read: 30.01.17.