STK1100 Oblig 1

Daniel Heinesen, daniehei

9. mars 2017

Oppgave 1)

a)

$$X = \text{Antall komponenter som testes frem til og med første defekte}$$

Vi ser at de første x vi tester, må de første $x-1$ ikke være defekte. Sjansen for at komponentene ikke er defekte er $(1-p)$. Så sannsynligheten for at dette inntreffer er $(1-p)^{x-1}$. Den siste vi tester må så være defekt, som har en sannsynelighet p. Dette gir oss en punktsannsynlighet

$$p_X(x;p) = p(1-p)^{x-1}$$

Dette er en negativ binomisk fordelig, hvor antall suksesser er 1. Vi kan derfor også finne punktsannsynligheten gjennom denne fordelingn.

b)

Den momentgenererende funksjonen for denne fordeligen er gitt ved

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} p_X(x;p) = \sum_x e^{tx} p(1-p)^{x-1}$$

Vi bruker så formelen for en uendelig geometrisk serie og får

$$M_X(t) = pe^t \sum_x e^{t(x-1)}(1-p)^{x-1} = \frac{pe^t}{1-e^t(1-p)}$$

Vi kan nå finne $E[X]$ og $E[X]$ ved hjelp av den momentgenererende funksjonen. Først finner vi:

$$M_X'(t) = \frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2}$$

$$M_X''(t) = \frac{pe^t(1+(1-p)e^t)}{(1-(1-p)e^t)^3}$$

Vi finner så at

$$E[X] = M_X'(0) = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$$E[X^2] = M_X''(0) = \frac{p(1+(1-p))}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

Vi kan så regne ut variasjonen:

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

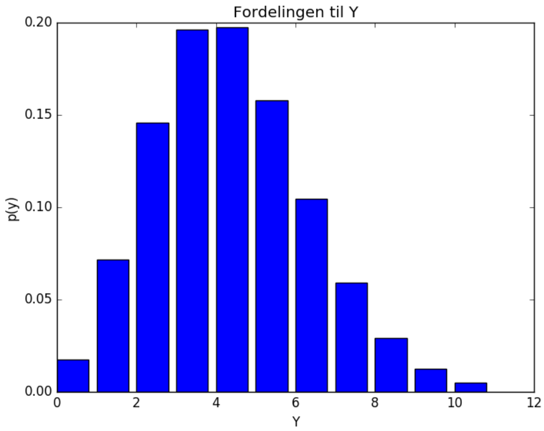
c)

$$Y = \text{Antall defekte komponenter i et utvalg.}$$

Variablen over, Y, beskriver et eksperiment hvor vi har et antall forsøk hvor vi enten kan få suksess(defekt) eller ikke-suksess(ikke defekt).Hvorvidt komponentene er defekte eller ikke tar vi til å være uavhenging, og sannsynligheten for å finne en defekt komponent er p. Denne variablen forfyller alle kravene til en binomisk fordelig, og er derfor det. For denne oppgaven bruker vi at $p = 0.02$ og $n = 200$

d)

Dette er programmert i python, og finnes i *opp1c.py*



Figur 1: Den binomiske fordelingen til Y

e)

Fra side 134 i læreboken finner vi at

$$E[Y] = np = 200 \cdot 0.02 = \underline{\underline{4}}$$

og

$$V[Y] = np(1-p) = 4 \cdot (1-0.02) = \underline{\underline{3.92}}$$

f)

En binomisk fordelig går mot en Poisson-fordeling når $n \to \infty$ og $p \to 0$. For vært eksperiment er vi lang unna, men som en tommelregel kan den binomiske fordelingen bli godt tilnærmet av Poisson-fordelingen når $n > 50$ og $np < 5$. Og siden vi har

$$n = 200 > 50$$

$$np = 4 < 5$$

Så er en Poisson-fordeling en god tilnærming til fordelingen til Y.

g)

For en Poisson-fordeling

$$p(y; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$$

Hvor λ er forventningsverdien til Y, som gjør at vi har

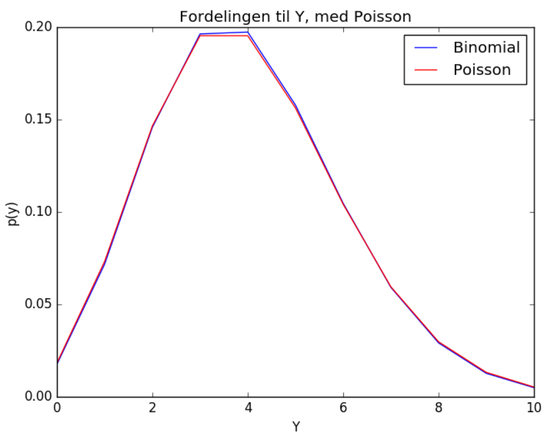
$$\lambda = np = 4$$

og

$$p(x) = \frac{e^{-4}4^y}{y!}$$

h)

Dette er programmert i python, og finnes i *opp1c.py*



Figur 2: Jeg har nå valgt å plotte fordelingene som rene grafer, slik at det blir lettere å sammenlikne. Vi kan se at de ikke er helt identiske – som vi ikke forventer –, men tilnærmingen er veldig bra.

Oppgave 2)

a)

Vi har X med sannsynlighetsfordelingen

$$f(x) = \begin{cases} \theta^{-1} x^{-\frac{\theta+1}{\theta}} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

Den kumulative fordelingen er gitt ved

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy = \int_1^x \frac{y^{-\frac{\theta+1}{\theta}}}{\theta} dy$$

Dette reduseres til

$$F(x) = -y^{-1/\theta}\Big|_1^x = -x^{-1/\theta} - (-1) = 1 - x^{-1/\theta}$$

b)

For $\theta = 0.45$ kan vi lett finne

$$P(2 \leq X \leq 5) = \int_2^5 f(x)dx = F(5) - F(2) = -5^{-1/0.45} + 2^{-1/0.45} = \underline{\underline{0.186}}$$

c)

Medianen til en kontinuelig fordeling er det punktet x hvor arealet til fordelingen er lik på hverside. Dette kan regnes ut på to måter

$$1) \qquad \int_1^x f(x)dx = \int_x^\infty f(x)dx$$

$$2) \qquad P(X \geq x) = P(X \leq x) = \frac{1}{2}$$

Det er lett å vise at disse ble det samme. Men den enkleste er 2). Fra den får vi

$$P(X \geq x) = F(x) = 1 - x^{-1/\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2^\theta$$

Så $x = 2^\theta$ er medianen til fordelingen.

d)

Vi ønsker så å finne forventningsverdien til fordelingen:

$$E[X] = \int_{-\infty}^\infty x f(x)dx = \int_1^\infty \frac{x^{-\frac{\theta+1}{\theta}+1}}{\theta} dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{\theta}+1} \frac{x^{-1/\theta+1}}{\theta}\Big|_1^\infty = \frac{1}{1-\theta}$$

Det er viktig å merke seg at siden $\theta < 1/2$ så er $\lim_{x\to\infty} x^{-1/\theta+1} = 0$, om ikke kunne integralet divergert.

e)

For å finne variansen må vi først finne

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{x^{-\frac{\theta+2}{\theta}+1}}{\theta} dx$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{x^{\frac{\theta-1}{\theta}}}{\theta} dx = \frac{1}{2\theta-1} x^{\frac{2\theta-1}{\theta}} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2\theta-1}$$

Akkurat som i deloppgaven over, vil faktumet at $\theta < 1/2$ forsikre oss om at integralet divergerer, siden $\frac{2\theta-1}{\theta} < 0$, som gjør at $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2\theta-1}{\theta}} = 0$.

Vi kan nå finne variansen

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{2\theta-1} - \frac{1}{(1-\theta)^2}$$