Методы оптимизации
Задача линейного программирования

Н. В. Артамонов

МГИМО МИД России

21 октября 2023 г.

Содержание

Общая постановка задачи

Определение

Экстремальная задача называется задачей линейного программирования или задачей линейной оптимизации, если целевая функция и функции, задающие ограничения, линейные

Общая постановка задачи

Определение

Экстремальная задача называется задачей линейного программирования или задачей линейной оптимизации, если целевая функция и функции, задающие ограничения, линейные

Предложение

Для задачи линейного программирования имеет место одна из следующих ситуаций:

- *задача не имеет решения,*
- *задача имеет единственное решение,*
- *задача имеет бесконечное число решений.*

Задача максимизации

$$\max(f_1x_1 + \cdots + f_nx_n)$$
$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le c_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le c_m \\ (x_1, \ldots, x_n \ge 0) \end{cases} \qquad (\max)$$

Важно!

Так как линейные функции выпуклы и вогнуты одновременно, то задача (max) *будет задачей выпуклого программирования.*

Матричная запись

Обозначим

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{m\times 1}{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Матричная запись

Обозначим

$$\underset{m\times n}{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{m\times 1}{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Тогда по аналогии с системами линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le c_1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le c_m \end{cases} \iff \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{c}$$

(матричное неравенство понимается покомпонентно)

Матричная запись

Для целевой функции

$$f_1x_1 + \cdots + f_nx_n = \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{f}$$

и задачу (max) можно записать в матричном виде

$$\max\left(\boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{x}\right)$$
$$s.t. \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{x} \ge 0) \end{cases}$$

(матричные неравенства понимается поэлементно)

Задача минимизации

$$\min(f_1x_1 + \dots + f_nx_n)$$
$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq c_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq c_m \\ (x_1, \dots, x_n \geq 0) \end{cases} \tag{min}$$

Матричная запись

$$\min\left(\boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{x}\right)$$
$$s.t. \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{x} \geq 0) \end{cases}$$

Так как линейные функции выпуклы и вогнуты одновременно, то задача (min) будет задачей выпуклого программирования.

Геометрия линейной оптимизации 2D

Рассмотрим задачу

$$\max(f_1x_1 + f_2x_2)$$
$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq c_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq c_m \end{cases}$$

Каждое ограничения задаёт полуплоскость, ограниченную прямой

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = c_j \qquad\qquad j = 1, \ldots, m$$

Все вместе ограничения задают пересечение этих полупространств.

Геометрия линейной оптимизации 2D

Если оно не пусто, то оно описывается следующим образом.

Так как берётся пересечение конечного числа полупространств (являющихся выпуклыми множествами), а пересечение выпуклым множеств выпукло, то получаем (возможно, неограниченный) выпуклый многоугольник.

В вырожденном случае получаем просто отрезок.

Общий случай

В общем случаем ограничения задают пересечение полупространств – выпуклый многогранник.

Общий случай

В общем случаем ограничения задают пересечение полупространств – выпуклый многогранник.

Предложение

Если задача оптимизации (max) *или* (min) *имеет решение, то решение находится в вершине многогранника.*

Геометрический способ решения

«Простой» способ решения: перебрать все вершины и выбрать ту, в которой значение целевой функции max/min.

Геометрический способ решения

«Простой» способ решения: перебрать все вершины и выбрать ту, в которой значение целевой функции max/min.

Основная проблема: вершин может быть много и неочевидно как их искать.

Геометрический способ решения

«Простой» способ решения: перебрать все вершины и выбрать ту, в которой значение целевой функции max/min.

Основная проблема: вершин может быть много и неочевидно как их искать.

Вывод: этот метод «хорошо» работает в случае 2D.

Геометрический способ решения

Пример

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\max(3x_1 + 5x_2)$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ограничения определяют четырёхугольник с вершинами

$$O(0,0) \qquad A(0,5) \qquad B(3,2) \qquad C(4,0)$$

Геометрический способ решения

Пример (Продолжение)

Значения целевой функции $\ell(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$ *в этих вершинах*

$$\ell(O) = 0 \qquad \ell(A) = 25 \qquad \ell(B) = 19 \qquad \ell(C) = 12$$

Вывод: Оптимальное решение $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = 5$.

Симплекс-метод

Общий способ решения: симплекс-метод

Симплекс-метод

Общий способ решения: симплекс-метод

Идея симплекс-метода

Начинаем с некоторой вершины (как правило с начала координат)

Последовательно перебираем вершины, переходя к новой в направлении максимального возрастания целевой функции (по направлению проекции градиента).

Симплекс-метод

Общий способ решения: симплекс-метод

Идея симплекс-метода

Начинаем с некоторой вершины (как правило с начала координат)

Последовательно перебираем вершины, переходя к новой в направлении максимального возрастания целевой функции (по направлению проекции градиента).

В общем случае гораздо быстрее сходится к решению, чем простой перебор вершин.

Прямая задача

Рассмотрим задачу

$$\max(f_1 x_1 + \cdots + f_n x_n)$$
$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq c_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq c_m \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{Primal}$$

(отдельно выделили ограничения неотрицательности переменных)

Двойственная задача

Для задачи (Primal) в ведём т.н. двойственные переменные $y_1, \dots, y_m$ по числу «содержательных» ограничений.

Двойственная задача

Для задачи (Primal) в ведём т.н. двойственные переменные $y_1, \dots, y_m$ по числу «содержательных» ограничений.

Определение

Двойственной задачей к задаче (Primal) *называется задача линейного программирования вида*

$$\min(c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m)$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11} y_1 + \cdots + a_{m1} y_m \geq f_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{1n} y_1 + \cdots + a_{mn} y_m \geq f_n \\ y_1, \dots, y_m \geq 0 \end{cases} \tag{Dual}$$

Матричная запись

Матричная запись прямой задачи

$$\max\left(\boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{x}\right)$$
$$s.t.\ \begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$$

Матричная запись двойственной задачи

$$\min\left(\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y}\right)$$
$$s.t.\ \begin{cases} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{y} \geq 0 \end{cases}$$

Теоремы двойственности

Теорема (Первая теорема двойственности)

Если $\hat{\boldsymbol{x}}$ *и* $\hat{\boldsymbol{y}}$ *– решения прямой* (Primal) *и двойственной* (Dual) *задачи, то*

$$\boldsymbol{f}^\top \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^\top \hat{\boldsymbol{y}},$$

т.е. на оптимальном решении значения целевых функций совпадают.

Теоремы двойственности

Теорема (Вторая теорема двойственности)

Если $\hat{\mathbf{x}}$ *и* $\hat{\mathbf{y}}$ *– решения прямой* (Primal) *и двойственной* (Dual) *задачи, то выполнены равенства*

$$\hat{y}_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\hat{x}_i - c_j \right) = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$\hat{x}_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\hat{y}_j - f_i \right) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Смысл: в прямой задаче на оптимальном решении либо ограничение становиться равенством, либо двойственная переменная равна нулю. Аналогично для двойственной задачи.

Теоремы двойственности

Так как задача линейного программирования есть частный случай задачи выпуклой оптимизации, то оптимальное решение $\hat{\boldsymbol{x}}$ гладко зависит от $\boldsymbol{c}$: $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{c})$.

Теорема (Третья теорема двойственности)

Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ и $\hat{\boldsymbol{y}}$ – решения прямой (Primal) *и двойственной* (Dual) *задачи. Тогда верно равенство*

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}^\top \hat{\boldsymbol{x}})}{\partial c_j} = \hat{y}_j \qquad \frac{\partial(\boldsymbol{c}^\top \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial f_i} = \hat{x}_i$$

Теоремы двойственности

Так как задача линейного программирования есть частный случай задачи выпуклой оптимизации, то оптимальное решение $\hat{\boldsymbol{x}}$ гладко зависит от $\boldsymbol{c}$: $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{c})$.

Теорема (Третья теорема двойственности)

Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ и $\hat{\boldsymbol{y}}$ – решения прямой (Primal) *и двойственной* (Dual) *задачи. Тогда верно равенство*

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}^\top \hat{\boldsymbol{x}})}{\partial c_j} = \hat{y}_j \qquad \frac{\partial(\boldsymbol{c}^\top \hat{\boldsymbol{y}})}{\partial f_i} = \hat{x}_i$$

Смысл: двойственные переменные суть множители Лагранжа в форме Куна-Таккера.

Применение к решению задачи

Пример

Рассмотрим прямую и двойственную задачу

$$\max f = \max(x_1 + 3x_2 + 3x_3)$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min g = \min(y_1 + y_2)$$

$$s.t. \begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 1 \\ 2y_1 + y_2 \ge 3 \\ y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Применение к решению задачи

Пример

Рассмотрим прямую и двойственную задачу

$$\max f = \max(x_1 + 3x_2 + 3x_3) \qquad s.t. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min g = \min(y_1 + y_2) \qquad s.t. \begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Графическое решение двойственной задачи

$$\hat{y}_1 = 1 \qquad \hat{y}_2 = 1 \qquad g_{\min} = 2$$

Применение к решению задачи

Пример (Продолжение)

Первая теорема двойственности: $f_{\max} = \hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 = 2.$

Применение к решению задачи

Пример (Продолжение)

Первая теорема двойственности: $f_{\max} = \hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 = 2$.

Вторая теорема двойственности: *т.к.* $\hat{y}_1, \hat{y}_2 > 0$, *то*

$$2\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + \hat{x}_3 = 1$$
$$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 = 1$$

Так как на оптимальном решении двойственной задачи первое ограничение строгое неравенство, то $\hat{x}_1 = 0$.

Применение к решению задачи

Пример (Продолжение)

Первая теорема двойственности: $f_{\max} = \hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 = 2$.

Вторая теорема двойственности: *т.к.* $\hat{y}_1, \hat{y}_2 > 0$, *то*

$$
\begin{aligned}
2\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + \hat{x}_3 &= 1 \\
\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Так как на оптимальном решении двойственной задачи первое ограничение строгое неравенство, то $\hat{x}_1 = 0$.

Решение прямой задачи: $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = \frac{1}{3}$, $\hat{x}_3 = \frac{1}{3}$.

Постановка задачи

Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса.

Пусть A_1 и A_2 – располагаемое количество первого и второго ресурса.

Постановка задачи

Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса.

Пусть A_1 и A_2 – располагаемое количество первого и второго ресурса.

Основные предположения

1. Цены на произведённый товар экзогенны (пусть P_1, P_2, P_3);
2. Предельные затраты ресурсов постоянны (пусть a_{ij}, $i = 1, 2$ $j = 1, 2, 3$): для производства дополнительной единицы товара j требуется затратить a_{ij} ед. ресурса i.

Постановка задачи

Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса.

Пусть A_1 и A_2 – располагаемое количество первого и второго ресурса.

Основные предположения

1. Цены на произведённый товар экзогенны (пусть P_1, P_2, P_3);
2. Предельные затраты ресурсов постоянны (пусть a_{ij}, $i = 1, 2$ $j = 1, 2, 3$): для производства дополнительной единицы товара j требуется затратить a_{ij} ед. ресурса i.

Цель

Найти оптимальные объёмы производства с учётом ограниченности ресурсов.

Модель

Переменные: Q_1, Q_2, Q_3 – выпуск.

Экстремальная задача

$$\max R = \max(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3)$$
$$s.t \begin{cases} a_{11} Q_1 + a_{12} Q_2 + a_{13} Q_3 \leq A_1 \\ a_{21} Q_1 + a_{22} Q_2 + a_{23} Q_3 \leq A_2 \\ Q_1, Q_2, Q_3 \geq 0 \end{cases}$$

Двойственная задача

Двойственные переменные: y_1, y_2

Двойственная задача

$$\min g = \min(A_1 y_1 + A_2 y_2)$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq P_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq P_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \geq P_3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Интерпретация двойственного решения

Из третьей теоремы двойственности

$$\frac{\partial R^*}{\partial A_i} = \hat{y}_i \qquad\qquad i = 1, 2$$

Интерпретация: На сколько увеличится доход оптимального производства при увеличении количества ресурса на единицу.

Интерпретация двойственного решения

Из третьей теоремы двойственности

$$\frac{\partial R^*}{\partial A_i} = \hat{y}_i \qquad\qquad\qquad i = 1, 2$$

Интерпретация: На сколько увеличится доход оптимального производства при увеличении количества ресурса на единицу.

Другая интерпретация: «стоимость» привлечения дополнительной единицы ресурса или «скрытая» цена ресурса.

Постановка задачи

Есть n поставщиков однородного продукта и m потребителей.

Пусть

- A_i – предложение по поставщикам
- B_j – спрос по потребителям

Постановка задачи

Есть n поставщиков однородного продукта и m потребителей.

Пусть

- A_i – предложение по поставщикам
- B_j – спрос по потребителям

Основное предположение: предельные издержки на перевозку постоянны, пусть

$$c_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad j = 1, \ldots, m$$

Постановка: замкнутая и открытая задачи

Цель

Найти распределение поставок от всех поставщиков ко всем потребителям с минимальными суммарными транспортными издержками.

Постановка: замкнутая и открытая задачи

Цель

Найти распределение поставок от всех поставщиков ко всем потребителям с минимальными суммарными транспортными издержками.

Определение

Транспортная задача называется замкнутой, если общий спрос и общее предложение равны

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{j=1}^{m} B_j$$

В противном случае транспортная задача называется открытой.

Модель замкнутой задачи

Переменные: x_{ij} – объём поставок от поставщика $i = 1, \ldots, n$ к потребителю $j = 1, \ldots, m$ (всего $n \cdot m$ переменных).

Модель замкнутой задачи

Переменные: x_{ij} – объём поставок от поставщика $i = 1, \dots, n$ к потребителю $j = 1, \dots, m$ (всего $n \cdot m$ переменных).

Экстремальная задача

$$\min C = \min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \begin{cases} x_{i1} + \dots + x_{im} = A_i & i = 1, \dots, n \quad \text{(supply)} \\ x_{1j} + \dots + x_{nj} = B_j & j = 1, \dots, m \quad \text{(demand)} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Смысл: уравновешиваем спрос и предложение.

Модель открытой задачи

Пусть для определённости $\sum_i A_i < \sum_j B_j$.

Модель открытой задачи

Пусть для определённости $\sum_i A_i < \sum_j B_j$.

Экстремальная задача

$$\min C = \min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \begin{cases} x_{i1} + \dots + x_{im} = A_i & i = 1, \dots, n & \text{(supply)} \\ x_{1j} + \dots + x_{nj} \leq B_j & j = 1, \dots, m & \text{(demand)} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Смысл: не можем уравновесить спрос.

Постановка задачи

Есть сеть «трубопроводов» с одном «входом» и одним «выходом»

Сеть представим в виде ориентированного графа. Ориентация рёбер графа задаётся направлением потока в каждом трубопроводе. В вершинах графа происходит соединение трубопроводов + начальная вершина («вход») + конечная вершина («выход»)

Постановка задачи

Есть сеть «трубопроводов» с одном «входом» и одним «выходом»

Сеть представим в виде ориентированного графа. Ориентация рёбер графа задаётся направлением потока в каждом трубопроводе. В вершинах графа происходит соединение трубопроводов + начальная вершина («вход») + конечная вершина («выход»)

Основные предположения:

- каждый трубопровод имеет ограниченную пропускную способность;
- в вершинах графа происходит перераспределение входящего потока без потерь.

Постановка задачи

Есть сеть «трубопроводов» с одном «входом» и одним «выходом»

Сеть представим в виде ориентированного графа. Ориентация рёбер графа задаётся направлением потока в каждом трубопроводе. В вершинах графа происходит соединение трубопроводов + начальная вершина («вход») + конечная вершина («выход»)

Основные предположения:

- каждый трубопровод имеет ограниченную пропускную способность;
- в вершинах графа происходит перераспределение входящего потока без потерь.

Цель: найти максимальную пропускную способность сети

Модель

Перенумеруем вершины графа т.ч. начальная вершина имеет номер 1, а конечная вершина имеет максимальный номер (пусть номер n, т.ч. всего n вершин).

[1] при этом переменной x_{ji} может не быть

Модель

Перенумеруем вершины графа т.ч. начальная вершина имеет номер 1, а конечная вершина имеет максимальный номер (пусть номер n, т.ч. всего n вершин).

Переменные: если трубопровод ведёт из вершины i к вершине j, то для него определим переменную x_{ij}[1].

[1] при этом переменной x_{ji} может не быть

Модель

Перенумеруем вершины графа т.ч. начальная вершина имеет номер 1, а конечная вершина имеет максимальный номер (пусть номер n, т.ч. всего n вершин).

Переменные: если трубопровод ведёт из вершины i к вершине j, то для него определим переменную x_{ij}[1].

Пусть A_{ij} – максимальная пропускная способность трубопровода из вершины i к вершине j.

[1] при этом переменной x_{ji} может не быть

Модель

Перенумеруем вершины графа т.ч. начальная вершина имеет номер 1, а конечная вершина имеет максимальный номер (пусть номер n, т.ч. всего n вершин).

Переменные: если трубопровод ведёт из вершины i к вершине j, то для него определим переменную x_{ij}[1].

Пусть A_{ij} – максимальная пропускная способность трубопровода из вершины i к вершине j.

Входной поток: $\sum_j x_{1j}$.

Выходной поток: $\sum_i x_{in}$.

[1] при этом переменной x_{ji} может не быть

Модель

Экстремальная задача

$$\max \sum_j x_{1j} = \max \sum_i x_{in}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_k x_{ki} = \sum_j x_{ij} & i = 2, \ldots, n-1 \\ 0 \le x_{ij} \le A_{ij} & \end{cases}$$

Первое ограничение – условие неразрывности в промежуточных вершинах.

Постановка задачи

Имеется три компоненты, каждая содержит два вещества.

Постановка задачи

Имеется три компоненты, каждая содержит два вещества.

Далее

- P_1, P_2, P_3 – цена на компоненты;
- a_{ij} – относительное (процентное) содержание вещества i в компоненте j ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$).

Постановка задачи

Имеется три компоненты, каждая содержит два вещества.

Далее

- P_1, P_2, P_3 – цена на компоненты;
- a_{ij} – относительное (процентное) содержание вещества i в компоненте j ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$).

Цель

Составить из трёх компонент смесь минимальной стоимости, т.ч. относительное содержание обоих веществ было равно (или не меньше) c_1, c_2.

Модель №1

Переменные: Q_1, Q_2, Q_3 – количество каждой из компонент.

Модель №1

Переменные: Q_1, Q_2, Q_3 – количество каждой из компонент.

Экстремальная задача:

$$\min C = \min(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3)$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11} Q_1 + a_{12} Q_2 + a_{13} Q_3 = c_1(Q_1 + Q_2 + Q_3) \\ a_{21} Q_1 + a_{22} Q_2 + a_{23} Q_3 = c_2(Q_1 + Q_2 + Q_3) \\ Q_1, Q_2, Q_3 \geq 0 \end{cases}$$

Модель №2

Переменные: Q_1, Q_2, Q_3 – количество каждой из компонент.

Модель №2

Переменные: Q_1, Q_2, Q_3 – количество каждой из компонент.

Экстремальная задача:

$$\min C = \min(P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3)$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11} Q_1 + a_{12} Q_2 + a_{13} Q_3 \geq c_1(Q_1 + Q_2 + Q_3) \\ a_{21} Q_1 + a_{22} Q_2 + a_{23} Q_3 \geq c_2(Q_1 + Q_2 + Q_3) \\ Q_1, Q_2, Q_3 \geq 0 \end{cases}$$