Методы оптимизации
Оптимизация с ограничениями равенства

Н. В. Артамонов

МГИМО МИД России

4 октября 2023 г.

Содержание

Задача минимизации

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = C_1 \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) = C_k \end{cases} \qquad (\min)$$

Определение

$f(\boldsymbol{x})$ называется целевой функцией. Система уравнений

$$\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = C_1 \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) = C_k \end{cases} \qquad (1)$$

называется системой ограничений.

Определение

Точка $\hat{\mathbf{x}}$ *–* *локальный минимумом* *для экстремальной задачи* (min), *если* $\hat{\mathbf{x}}$ *удовлетворяет системе ограничений* (1) *и существует* $\delta > 0$, *что для всех* $\mathbf{x}$, *удовлетворяющих системе ограничений* (1) *и* $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta$, *верно* $f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}})$.

Определение

Точка $\hat{\mathbf{x}}$ *–* *локальный минимумом* *для экстремальной задачи* (min), *если* $\hat{\mathbf{x}}$ *удовлетворяет системе ограничений* (1) *и существует* $\delta > 0$, *что для всех* $\mathbf{x}$, *удовлетворяющих системе ограничений* (1) *и* $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta$, *верно* $f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}})$.

Точка $\hat{\mathbf{x}}$, *удовлетворяющая системе ограничений* (1), *называется* *глобальным минимумом* *для экстремальной задачи* (min), *если* *для всех* $\mathbf{x}$, *удовлетворяющих ограничениям* (1), *верно* $f(\mathbf{x}) \geq f(\hat{\mathbf{x}})$.

Задача максимизации

$$\max f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = C_1 \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) = C_k \end{cases} \tag{max}$$

Аналогично определяется локальный и глобальный максимум.

$f(\boldsymbol{x})$ – целевая функция.

Функция Лагранжа

Определение

Функцией Лагранжа для экстремальной задачи (min) и (max) называется функция

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda_1(g_1(\boldsymbol{x}) - C_1) - \cdots - \lambda_k(g_k(\boldsymbol{x}) - C_k) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(g_j(\boldsymbol{x}) - C_j).$$

Дополнительные переменные $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *называются множителями Лагранжа (Lagrange multipliers).*

Необходимые условия экстремума

Теорема (FOC = First Order Condition)

Если $\hat{\mathbf{x}}$ *– решение задачи* (min) *или* (max), *то для некоторых чисел* $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k)$, *выполнено равенство*

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = 0 & i = 1, \dots, n \\ \mathcal{L}'_{\lambda_j}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) = 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \tag{FOC}$$

Замечание

Легко проверить, что $\mathcal{L}'_{\lambda_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \iff g_j(\boldsymbol{x}) = C_j$

Замечание

Система (FOC) имеет $n + k$ уравнений и $n + k$ неизвестных $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$.

Интерпретация множителей Лагранжа

Пусть $f_{opt} = f(\hat{x})$ – экстремальное значение целевой функции f для задачи (min) или (max).

Рассмотрим

$$f_{opt} = f_{opt}(C_1, \ldots, C_k)$$

Интерпретация множителей Лагранжа

Пусть $f_{opt} = f(\hat{x})$ – экстремальное значение целевой функции f для задачи (min) или (max).

Рассмотрим

$$f_{opt} = f_{opt}(C_1, \ldots, C_k)$$

Теорема (Множители как предельные значения)

Верно равенство

$$\frac{\partial f_{opt}}{\partial C_j} = \hat{\lambda}_j \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Окаймлённый гессиан

Как обычно достаточные условия формулируются в терминах гессиана

Гессиан для функции Лагранжа (симметричная матрица)

$$\underset{(n+k)\times(n+k)}{\mathrm{Hess}_{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} & | & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_l} \\ -- & + & -- \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} & | & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} \end{pmatrix}$$

Из определения функции Лагранжа

- $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} = 0$
- $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} = -\frac{\partial g_s}{\partial x_j}$

Окаймлённый гессиан

Явный вид гессиана

$$\underset{(n+k)\times(n+k)}{\mathrm{Hess}_{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Окаймлённый гессиан

Обозначение

$\mathcal{M}_i$ $(i = 1, ..., n + k)$ – главный минор матрицы $\text{Hess}_{\mathcal{L}}$, образованный строками и столбцами с индексами $i, i + 1, ..., n + k$.

Очевидно

- $\mathcal{M}_1 = \det \text{Hess}_{\mathcal{L}}$
- $\mathcal{M}_i = 0$ при $i = n + 1, \ldots, n + k$

Достаточное условие минимума

Теорема (SOC = Second Order Condition)

Пусть в точке $\hat{\mathbf{x}}$ *ранг матрицы* $\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)$ *максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условия наличия экстремума* (FOC)*.*

Тогда достаточным условием локального минимума в задаче (min) *является выполнение неравенств*

$$(-1)^k \mathcal{M}_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}), \ldots, (-1)^k \mathcal{M}_{n-k}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0. \qquad (3)$$

Замечание

Условие (3) означает, что все миноры $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n-k}$ имеют знак $(-1)^k$.

Достаточное условие максимума

Теорема (SOC = Second Order Condition)

Пусть в точке $\hat{\mathbf{x}}$ *ранг матрицы* $\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right)$ *максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условия наличия экстремума* (FOC).

Тогда достаточным условием наличия максимума в задаче (max) *является выполнение неравенств*

$$(-1)^n(-1)^{i-1}\mathcal{M}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \qquad i = 1, \dots, n-k. \qquad (4)$$

Замечание

Условие (4) означает, что в последовательности миноров $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$ есть чередование знаков, начиная со знака $(-1)^n$.

Пример 2D: FOC

Рассмотрим задачу $(n = 2,\ k = 1)$

$$\max / \min f(x, y)$$
$$s.t.\ g(x, y) = C$$

Так как $n - k = 1$, то рассматриваем только

$$\mathcal{M}_1 = \det \mathrm{Hess}_{\mathcal{L}}(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\lambda})$$

Достаточное условие минимума: $\mathcal{M}_1$ имеет знак $(-1)^k = -1$, т.е. $\mathcal{M}_1 < 0$

Достаточное условие максимума: $\mathcal{M}_1$ имеет знак $(-1)^n = 1$, т.е. $\mathcal{M}_1 > 0$

Пример 3D: FOC

Рассмотрим задачу ($n = 3$, $k = 1$)

$$\max / \min f(x, y, z)$$
$$s.t.\ g(x, y, z) = C$$

Так как $n - k = 2$, то рассматриваем только два минора $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$

Достаточное условие минимума: $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ имеют знак $(-1)^k = -1$, т.е. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 < 0$

Достаточное условие максимума: чередование знаков для $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ начиная с $(-1)^n = -1$, т.е. $\mathcal{M}_1 < 0, \mathcal{M}_2 > 0$.

Задача потребительского выбора

Рассмотрим рынок совершенной конкуренции и потребителя, потребляющего два продукта ценой P_1, P_2 в количестве Q_1, Q_2.

Так как рассматривается рынок совершенной конкуренции, то цены P_1, P_2 являются заданными величинами (экзогенны).

Задачей является максимизация функции полезности $U(Q_1, Q_2)$ потребителя от купленных продуктов, которую мы не будем конкретизировать.

Задача потребительского выбора

Будем предполагать наличие бюджетного ограничения

$$Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = B,$$

где B – заданное число (бюджет на покупку товаров).

Задача потребительского выбора

Будем предполагать наличие бюджетного ограничения

$$Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = B,$$

где B – заданное число (бюджет на покупку товаров).

Получаем экстремальную задачу

$$\max_{Q_1, Q_2} U(Q_1, Q_2)$$

$$s.t. \; Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = B$$

Задача потребительского выбора

Функция Лагранжа этой задачи

$$\mathcal{L}(Q_1, Q_2, \lambda) = U - \lambda(Q_1 P_1 + Q_2 P_2 - B)$$

Задача потребительского выбора

Функция Лагранжа этой задачи

$$\mathcal{L}(Q_1, Q_2, \lambda) = U - \lambda(Q_1 P_1 + Q_2 P_2 - B)$$

Необходимы условия экстремума (FOC) принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial Q_1} - \lambda P_1 = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial Q_2} - \lambda P_2 = 0 \\ B - Q_1 P_1 - Q_2 P_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Задача потребительского выбора

Первые два уравнения можно переписать так:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial Q_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_2}}{P_2} = \lambda.$$

Задача потребительского выбора

Первые два уравнения можно переписать так:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial Q_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_2}}{P_2} = \lambda.$$

Интерпретация: в ситуации, когда полезность максимальна, отношения предельной полезности продукта к цене продукта одинаково для обоих продуктов. Это отношение в этом случае и даст значение λ.

Задача потребительского выбора

Первые два уравнения можно переписать так:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial Q_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_2}}{P_2} = \lambda.$$

Интерпретация: в ситуации, когда полезность максимальна, отношения предельной полезности продукта к цене продукта одинаково для обоих продуктов. Это отношение в этом случае и даст значение λ.

Геометрическая интерпретация: бюджетная прямая и кривая безразличия касаются.

Задача потребительского выбора

Первые два уравнения можно переписать так:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial Q_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_2}}{P_2} = \lambda.$$

Интерпретация: в ситуации, когда полезность максимальна, отношения предельной полезности продукта к цене продукта одинаково для обоих продуктов. Это отношение в этом случае и даст значение λ.

Геометрическая интерпретация: бюджетная прямая и кривая безразличия касаются.

Вопрос: какая интерпретация λ?

Задача потребительского выбора

Образуем окаймленный гессиан (матрицу (2))

$$\mathrm{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}''_{Q_1 Q_1} & \mathcal{L}''_{Q_1 Q_2} & \mathcal{L}''_{Q_1 \lambda} \\ \mathcal{L}''_{Q_2 Q_1} & \mathcal{L}''_{Q_2 Q_2} & \mathcal{L}''_{Q_2 \lambda} \\ \mathcal{L}''_{\lambda Q_1} & \mathcal{L}''_{\lambda Q_2} & \mathcal{L}''_{\lambda \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U''_{Q_1 Q_1} & U''_{Q_1 Q_2} & -P_1 \\ U''_{Q_2 Q_1} & U''_{Q_2 Q_2} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача потребительского выбора

Образуем окаймленный гессиан (матрицу (2))

$$\mathrm{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}''_{Q_1Q_1} & \mathcal{L}''_{Q_1Q_2} & \mathcal{L}''_{Q_1\lambda} \\ \mathcal{L}''_{Q_2Q_1} & \mathcal{L}''_{Q_2Q_2} & \mathcal{L}''_{Q_2\lambda} \\ \mathcal{L}''_{\lambda Q_1} & \mathcal{L}''_{\lambda Q_2} & \mathcal{L}''_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U''_{Q_1Q_1} & U''_{Q_1Q_2} & -P_1 \\ U''_{Q_2Q_1} & U''_{Q_2Q_2} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Достаточное условие максимума

$$\mathcal{M}_1 = \det \mathrm{Hess}_{\mathcal{L}}(\hat{Q}_1, \hat{Q}_2) > 0$$

Задача потребительского выбора

Непосредственное вычисление

$$\mathcal{M}_1 = 2P_1P_2U''_{Q_1Q_2} - P_2^2U''_{Q_1Q_1} - P_1^2U''_{Q_2Q_2}$$

Условия на функцию полезности

$$U''_{Q_1Q_2} \geq 0 \qquad U''_{Q_iQ_i} \leq 0 \qquad i = 1, 2 \tag{6}$$

Задача потребительского выбора

Непосредственное вычисление

$$\mathcal{M}_1 = 2P_1P_2U''_{Q_1Q_2} - P_2^2U''_{Q_1Q_1} - P_1^2U''_{Q_2Q_2}$$

Условия на функцию полезности

$$U''_{Q_1Q_2} \geq 0 \qquad U''_{Q_iQ_i} \leq 0 \qquad i = 1, 2 \tag{6}$$

Вывод

Если одно из неравенств (6) строгое, то решение системы FOC будет решением задачи оптимального потребительского выбора.

Производственная задача

Пусть $Q(x_1, x_2)$ – производственная функция, зависящая от двух факторов производства x_1, x_2 (количественные измерения этих факторов).

Цены этих факторов P_1, P_1 считаем заданными величинами (цены экзогенны).

Производственная задача

Пусть $Q(x_1, x_2)$ – производственная функция, зависящая от двух факторов производства x_1, x_2 (количественные измерения этих факторов).

Цены этих факторов P_1, P_1 считаем заданными величинами (цены экзогенны).

Необходимо минимизировать издержки, выражаемые функцией издержек $C = x_1P_1 + x_2P_2$, при постоянном выпуске $Q(x_1, x_2) = Q_0$.

Производственная задача

Формальная запись экстремальной задачи

$$\min_{x_1, x_2} C(x_1, x_2)$$
$$s.t.\ Q(x_1, x_2) = Q_0$$

Производственная задача

Формальная запись экстремальной задачи

$$\min_{x_1,x_2} C(x_1,x_2)$$
$$s.t.\ Q(x_1,x_2) = Q_0$$

Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = x_1 P_1 + x_2 P_2 - \lambda(Q(x_1,x_2) - Q_0).$$

Производственная задача

Необходимые условия экстремума (FOC) имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = P_1 - \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = P_2 - \lambda \dfrac{\partial Q}{\partial x_2} = 0 \\ Q_0 - Q(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Производственная задача

Первые два уравнения могут быть записаны так:

$$\frac{P_1}{\partial Q/\partial x_1} = \frac{P_2}{\partial Q/\partial x_2} = \lambda \iff \frac{P_1}{P_2} = \frac{\partial Q/\partial x_1}{\partial Q/\partial x_2} \tag{8}$$

Производственная задача

Первые два уравнения могут быть записаны так:

$$\frac{P_1}{\partial Q/\partial x_1} = \frac{P_2}{\partial Q/\partial x_2} = \lambda \iff \frac{P_1}{P_2} = \frac{\partial Q/\partial x_1}{\partial Q/\partial x_2} \qquad (8)$$

Отношение $\frac{P_1}{\partial Q/\partial x_1}$ есть предельные издержки на дополнительный выпуск при увеличении фактора x при оптимальном наборе факторов. Второе отношение – аналогичная величина для фактора y. В оптимальной точке эти два отношения должны совпадать.

Производственная задача

Первые два уравнения могут быть записаны так:

$$\frac{P_1}{\partial Q/\partial x_1} = \frac{P_2}{\partial Q/\partial x_2} = \lambda \iff \frac{P_1}{P_2} = \frac{\partial Q/\partial x_1}{\partial Q/\partial x_2} \tag{8}$$

Отношение $\frac{P_1}{\partial Q/\partial x_1}$ есть предельные издержки на дополнительный выпуск при увеличении фактора x при оптимальном наборе факторов. Второе отношение – аналогичная величина для фактора y. В оптимальной точке эти два отношения должны совпадать.

Вопрос: какая интерпретация λ?

Производственная задача

Образуем окаймленный гессиан (матрицу (2))

$$\mathrm{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}''_{Q_1Q_1} & \mathcal{L}''_{Q_1Q_2} & \mathcal{L}''_{Q_1\lambda} \\ \mathcal{L}''_{Q_2Q_1} & \mathcal{L}''_{Q_2Q_2} & \mathcal{L}''_{Q_2\lambda} \\ \mathcal{L}''_{\lambda Q_1} & \mathcal{L}''_{\lambda Q_2} & \mathcal{L}''_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda Q''_{x_1x_1} & -\lambda Q''_{x_1x_2} & -Q'_{x_1} \\ -\lambda Q''_{x_2x_1} & -\lambda Q''_{x_2x_2} & -Q'_{x_2} \\ -Q'_{x_1} & -Q'_{x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Производственная задача

Образуем окаймленный гессиан (матрицу (2))

$$\mathrm{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}''_{Q_1Q_1} & \mathcal{L}''_{Q_1Q_2} & \mathcal{L}''_{Q_1\lambda} \\ \mathcal{L}''_{Q_2Q_1} & \mathcal{L}''_{Q_2Q_2} & \mathcal{L}''_{Q_2\lambda} \\ \mathcal{L}''_{\lambda Q_1} & \mathcal{L}''_{\lambda Q_2} & \mathcal{L}''_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda Q''_{x_1x_1} & -\lambda Q''_{x_1x_2} & -Q'_{x_1} \\ -\lambda Q''_{x_2x_1} & -\lambda Q''_{x_2x_2} & -Q'_{x_2} \\ -Q'_{x_1} & -Q'_{x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Достаточное условие минимума:

$$\mathcal{M}_1 = \det \mathrm{Hess}_{\mathcal{L}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda}) < 0$$

Производственная задача

Непосредственное вычисление

$$\mathcal{M}_1 = \lambda Q''_{x_1x_1}(Q'_{x_2})^2 + \lambda Q''_{x_2x_2}(Q'_{x_1})^2 - 2\lambda Q''_{x_1x_2}Q'_{x_1}Q'_{x_2}$$

Условия на производственную функцию

$$Q''_{xx}, Q''_{yy} \leq 0 \qquad Q''_{xy} \geq 0 \qquad Q'_x, Q'_y > 0 \tag{9}$$

Очевидно, что $\hat{\lambda} > 0$

Производственная задача

Непосредственное вычисление

$$\mathcal{M}_1 = \lambda Q''_{x_1x_1}(Q'_{x_2})^2 + \lambda Q''_{x_2x_2}(Q'_{x_1})^2 - 2\lambda Q''_{x_1x_2}Q'_{x_1}Q'_{x_2}$$

Условия на производственную функцию

$$Q''_{xx}, Q''_{yy} \le 0 \qquad Q''_{xy} \ge 0 \qquad Q'_x, Q'_y > 0 \tag{9}$$

Очевидно, что $\hat{\lambda} > 0$

Вывод

Если одно из неравенств (9) второго порядка строгое, то решение системы FOC будет решением задачи потребительского выбора.

Задача потребительского выбора 3D

Рассмотрим рынок совершенной конкуренции и потребителя, потребляющего три продукта ценой P_1, P_2, P_3 в количестве Q_1, Q_2, Q_3.

Так как рассматривается рынок совершенной конкуренции, то цены P_1, P_2, P_3 являются заданными величинами (экзогенны).

Задачей является максимизация функции полезности $U(Q_1, Q_2, Q_3)$ потребителя от купленных продуктов, которую мы не будем конкретизировать.

Задача потребительского выбора 3D

Как и раньше будем предполагать наличие бюджетного ограничения

$$Q_1 P_1 + Q_2 P_2 + Q_3 P_3 = B,$$

где B – заданное число (бюджет на покупку товаров).

Задача потребительского выбора 3D

Как и раньше будем предполагать наличие бюджетного ограничения

$$Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3 = B,$$

где B – заданное число (бюджет на покупку товаров).

Получаем экстремальную задачу

$$\max_{Q_1,Q_2,Q_3} U(Q_1, Q_2, Q_3)$$

$$s.t.\ Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3 = B$$

Задача потребительского выбора 3D

Функция Лагранжа этой задачи

$$\mathcal{L} = U - \lambda(Q_1 P_1 + Q_2 P_2 + Q_3 P_3 - B).$$

Задача потребительского выбора 3D

Функция Лагранжа этой задачи

$$\mathcal{L} = U - \lambda(Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3 - B).$$

Необходимы условия экстремума (FOC) принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial Q_1} - \lambda P_1 = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial Q_2} - \lambda P_2 = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial Q_3} - \lambda P_3 = 0 \\ B - Q_1P_1 - Q_2P_2 - Q_3P_3 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Задача потребительского выбора 3D

Первые три уравнения в системе (10) можно переписать так:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial Q_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_2}}{P_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_3}}{P_3} = \lambda.$$

Задача потребительского выбора 3D

Первые три уравнения в системе (10) можно переписать так:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial Q_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_2}}{P_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_3}}{P_3} = \lambda.$$

Интерпретация: в ситуации, когда полезность максимальна, отношения предельной полезности продукта к цене продукта одинаково для трёх продуктов. Это отношение равно λ.

Задача потребительского выбора 3D

Первые три уравнения в системе (10) можно переписать так:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial Q_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_2}}{P_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_3}}{P_3} = \lambda.$$

Интерпретация: в ситуации, когда полезность максимальна, отношения предельной полезности продукта к цене продукта одинаково для трёх продуктов. Это отношение равно λ.

Геометрическая интерпретация: бюджетная плоскость и поверхность безразличия касаются.

Задача потребительского выбора 3D

Первые три уравнения в системе (10) можно переписать так:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial Q_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_2}}{P_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Q_3}}{P_3} = \lambda.$$

Интерпретация: в ситуации, когда полезность максимальна, отношения предельной полезности продукта к цене продукта одинаково для трёх продуктов. Это отношение равно λ.

Геометрическая интерпретация: бюджетная плоскость и поверхность безразличия касаются.

Вопрос: какая интерпретация λ?

Задача потребительского выбора 3D

Образуем окаймленный гессиан (матрицу (2))

$$\mathrm{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} U''_{Q_1Q_1} & U''_{Q_1Q_2} & U''_{Q_1Q_3} & -P_1 \\ U''_{Q_2Q_1} & U''_{Q_2Q_2} & U''_{Q_2Q_3} & -P_2 \\ U''_{Q_3Q_1} & U''_{Q_3Q_2} & U''_{Q_3Q_3} & -P_3 \\ -P_1 & -P_2 & -P_3 & 0 \end{pmatrix}$$

В данной ситуации $n = 3$, $k = 1$ и нужно рассмотреть $n - k = 2$ минора $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$.

Достаточное условие максимума

$$\mathcal{M}_1 < 0 \qquad \mathcal{M}_2 > 0$$