FLOREA DARIA-MIHAELA
311CC

01.02.2021

Examen final

1.

$$\begin{cases} x'' - 2x' + x = te^t \\ x(0) = -2 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

I Rezolvarea ecuației omogene $x'' - 2x' + x = 0$

Ecuația caracteristică este $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ este rădăcină dublă a ecuației $\Rightarrow$ soluția generală a ecuației este

$x_0(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante.

II Metoda coeficienților nedeterminați

Termenul liber e de forma $e^{\lambda t} \cdot P(t)$, cu $P(t)$ polinom $(P(t) = t)$, iar λ este rădăcină a ecuației caracteristice cu multiplicitatea 2 $\Rightarrow$

$x_p(t)$ este de forma $t^2 e^t(\cancel{at} \; at + b)$

$x_p'(t) = ((at^3 + bt^2)e^t)' = (at^3 + bt^2)e^t + (3at^2 + 2bt)e^t$

$x_p''(t) = [e^t(at^3 + t^2(b+3a) + t \cdot 2b)]' = e^t(at^3 + t^2(b+3a) + 2bt) +$
$e^t(\cancel{3a} \; 3at^2 + t(2b + 6a) + 2b)$

$\Rightarrow x_p'' - 2x_p' + x_p = te^t \Leftrightarrow \cancel{e^t}(at^3 + t^2(b+3a) + 2bt) + \cancel{e^t}(3at^2 + 2t(b+3a) + 2b) - 2\cancel{e^t}(at^3 + bt^2) - 2\cancel{e^t}(3at^2 + 2bt) + \cancel{e^t}t^2(at+b) = t\cancel{e^t} \Leftrightarrow$

$\cancel{t^2(\ldots)} \; t^2(b + 3a + 3a - 2b - 6a + b) + t(2b + \cancel{\ldots} \; 2b + 6a - \overset{4}{\cancel{2}}b) + 2b = t \Leftrightarrow \cancel{t^2} \; 6at + 2b = t \Rightarrow \begin{cases} a = 1/6 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x_p(t) = \frac{1}{6} t^3 e^t$

$\Rightarrow$ ~~Soluția este~~ Soluția generală a ecuației este

$x(t) = x_0(t) + x_p(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t$

$\begin{cases} x(0) = -2 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$ $\quad x'(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_2 e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t$

$x(0) = -2 \Leftrightarrow \cancel{\ldots} \; C_1 = -2$
$x'(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1$
$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$

Soluția sistemului este $x(t) = -2e^t + 3te^t + \frac{1}{6}t^3e^t$

(2.) $\begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = -x + 3y - 1 \end{cases}$ $\quad x(0) = 0$, $y(0) = 2$

I Rezolvăm sistemul omogen asociat

$\begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

Pentru $\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -x \\ -x + 3y = -y \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_1} = Sp\{\binom{4}{1}\}$ $\quad v_1 = \binom{4}{1}$

Pentru $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = 2x \\ -x + 3y = 2y \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_2} = Sp\{\binom{1}{1}\}$ $\quad v_2 = \binom{1}{1}$

$\Rightarrow$ Soluția generală a sistemului omogen este

$X = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} v_2 = \begin{pmatrix} 4c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{2t} \\ c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

II Metoda variației constantelor

$X(t) = \begin{pmatrix} 4e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 4e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t & -\frac{1}{3}e^{t} \\ -\frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{4}{3}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{-1}{3}e^{t} \\ c_2'(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(t) = \frac{-1}{3}\int e^{t}\,dt \\ c_2(t) = \frac{4}{3}\int e^{-2t}\,dt \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} c_1(t) = \frac{-1}{3}e^{t} + k_1 \\ c_2(t) = \frac{-2}{3}e^{-2t} + k_2 \end{cases} \Rightarrow$ Soluția generală a sistemului este $x(t) = 4e^{-t}(\frac{-1}{3}e^{t} + k_1) + e^{2t}(-\frac{2}{3}e^{-2t} + k_2)$, $y(t) = e^{-t}(\frac{-1}{3}e^{t} + k_1) + e^{2t}(-\frac{2}{3}e^{-2t} + k_2)$

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(-\frac{1}{3}+k_1)-\frac{2}{3}+k_2=0 \\ -\frac{1}{3}+k_1-\frac{2}{3}+k_2=2 \end{cases} \Rightarrow 1-3k_1=2 \Rightarrow k_1=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow k_2=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-k_1=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3} \Rightarrow$$

Soluția sistemului este $\begin{cases} x(t)= \cancel{4te}\ 4e^{-t}(-\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{3})+e^{2t}(-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{7}{3}) \\ y(t)=e^{-t}(-\frac{1}{3}e^{t}-\frac{1}{3})+e^{2t}(-\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{7}{3}) \end{cases}$

(4.) $\begin{cases} x'\sin t+x\cos t=\cos^3 t \\ t\in(0,\frac{\pi}{2}),\ x(\frac{\pi}{4})=\frac{5}{6} \end{cases}$

I Rezolvăm ecuația omogenă atașată

$$x'\sin t+x\cos t=0 \iff x'\sin t=-x\cos t \iff \frac{x'}{x}=\frac{-\cos t}{\sin t} \iff$$

$$\int\frac{x'}{x}dt=\int\frac{-\cos t}{\sin t}dt \iff \ln|x|=-\ln|\sin t|+C \iff x=k\cdot\frac{1}{\sin t}$$

$k\in\mathbb{R}$ constantă.

II Metoda variației constantelor

$$x(t)=k(t)\cdot\frac{1}{\sin t} \Rightarrow$$

$$\cancel{k'\frac{1}{\sin t}+k\cdot\frac{-\cos t}{\sin^2 t}}\ (k'\cdot\frac{1}{\cancel{\sin t}}+k\cdot\frac{-\cos t}{\sin^2 t})\cdot\cancel{\sin t}+k\cdot\frac{1}{\sin t}\cdot\cos t$$

$$=\cos^3 t \iff k'+\cancel{k\cdot\frac{-\cos t}{\sin t}}+k\cdot\frac{\cos t}{\sin t}=\cos^3 t \iff$$

$$k'=\cos^3 t \iff k(t)=\int\cos^3 t\,dt \iff k(t)=\int\cos t(1-\sin^2 t)\,dt$$

$$\iff k(t)=\int\cos t\,dt-\int\cos t\cdot\sin^2 t\,dt \iff k(t)=\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}+C$$

unde $C\in\mathbb{R}$ constantă.

$$\Rightarrow x(t)=(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}+C)\cdot\frac{1}{\sin t}=1-\frac{\sin^2 t}{3}+\frac{C}{\sin t}$$

$$x(\frac{\pi}{4})=5/6 \iff 1-\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{3}+\frac{C}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{5}{6} \iff 1-\frac{1}{6}+\sqrt{2}\cdot C=\frac{5}{6}$$

$$\iff \sqrt{2}\cdot C=0 \iff C=0 \Rightarrow$$

$$x(t)=1-\frac{\sin^2 t}{3}$$

5. Pseudosoluția sistemului

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=2 \\ -2x+4y=7 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

~~Cum rang $A=n=2$ => pseudosoluția sistemului este soluția sistemului triunghiular:~~

~~$Rx^* = Q^t b$, unde $A=QR$ este descompunerea QR a matricii A~~

~~Descompunerea QR~~

x^* este pseudosoluția a sistemului dat dacă și numai dacă este soluție a sistemului $A^tAx^* = A^tb$

Cum rang A este egal cu numărul de coloane => A^tA este inversabilă => $x^* = (A^tA)^{-1}\cdot A^tb$ =>

$$x^* = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x^*=1,\ y^*=2$ este pseudosoluție a ~~celui~~ sistemului incompatibil dat.

3. Cum rang $A=1$ => matricea A are o singulă valoarea singulară (corolar) => $A = \sigma_1 u_1 v_1^t \overset{not}{=} \sigma u v^t$

$$\Rightarrow A^2 = (\sigma u v^t)^2 = \sigma^2 u \underbrace{v^t u}_{\langle u,v\rangle} v^t = \sigma^2\cdot\langle u,v\rangle\cdot u v^t =$$

$= \lambda\cdot u v^t = \lambda\cdot A$, unde $\lambda = \sigma\cdot\langle u,v\rangle$ => cerința este demonstrată.