Lecţii de Matematici Speciale

TANIA-LUMINIŢA COSTACHE

*

Prefaţă

Lucrarea este rezultatul cursurilor şi seminariilor de Probabilităţi şi statistică matematică , Matematici avansate şi Matematici 3 ţinute de autoare studenţilor anilor întâi ai Facultăţilor de Automatică şi Calculatoare şi Electronică din Universitatea Politehnică Bucureşti.

Cartea este structurată în unsprezece capitole, conţinând teoria cu principalele noţiuni şi rezultate necesare rezolvării exerciţiilor, exemple rezolvate care acoperă programa seminarului de Matematici 3 şi probleme propuse studenţilor pentru o fixare mai bună a cunoştinţelor predate, precum şi pentru înţelegerea altor cursuri de specialitate.

Pentru aprofundarea conceptelor fundamentale sunt necesare o pregătire teoretică suplimentară şi o participare activă în cadrul seminariilor şi cursurilor.

Mult succes!

*

Cuprins

Capitolul 1

Funcţii complexe. Integrale complexe

1.1 Funcţii olomorfe. Condiţiile Cauchy-Riemann. Funcţii elementare

Definiţia 1.1. Fie $A \subset \mathbb{C}$. Se numeşte **funcţie complexă** orice funcţie $f\colon A \to \mathbb{C}$ (deci o funcţie cu valori complexe de variabilă complexă).

Dacă notăm $w = f(z)$ cu $z \in A$ şi $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, unde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, iar $f = P + \mathrm{i}Q$ (adică $P = \mathrm{Re} f, Q = \mathrm{Im} f$), se pun în evidenţă două funcţii reale $P, Q\colon A \to \mathbb{R}$, unde am considerat $A \subset \mathbb{R}^2$ ca o mulţime de perechi de numere reale. Atunci egalitatea $w = f(z)$ este echivalentă cu două egalităţi reale $u = P(x, y)$ şi $v = Q(x, y)$ şi funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$ este echivalentă cu o transformare punctuală $A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longrightarrow (P(x, y), Q(x, y))$.

Definiţia 1.2. Dacă $A \subset \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă , funcţia complexă f este **continuă** într-un punct $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in A$ dacă şi numai dacă P şi Q sunt simultan continue în punctul (x_0, y_0).

Definiţia 1.3. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă . Funcţia f se numeşte **olomorfă într-un punct** $z_0 \in A$ (sau **$\mathbb{C}$- derivabilă în** z_0 sau **monogenă în** z_0) dacă există şi este finită (adică aparţine lui $\mathbb{C}$) limita $l = \lim\limits_{z \to z_0, z \neq z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Notăm l cu $f'(z_0)$ şi se numeşte **derivata complexă a lui f în** z_0.

Observaţia 1.1. Dacă funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$ este olomorfă în $z_0 \in A$, atunci ea este continuă în z_0.

Definiţia 1.4. Funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$ se numeşte olomorfă pe deschisul A dacă ea este olomorfă în orice punct $z_0 \in A$.

Observaţia 1.2. Suma, produsul, câtul şi compunerea a două funcţii olomorfe pe un deschis A sunt funcţii olomorfe.

Fie $w = f(z)$, $f\colon A \to \mathbb{C}$ definită pe un deschis $A \subset \mathbb{C}$ şi $z_0 \in A$,

$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

Dacă f este olomorfă în z_0, atunci $f'(z_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$. In particular, pentru h real va rezulta că

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+\mathrm{i}h)-f(z_0)}{\mathrm{i}h} = f'(z_0)$$

şi ţinând cont că $f = P + \mathrm{i}Q$ se obţine

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x_0+h,y_0)-P(x_0,y_0)}{h} + \mathrm{i}\lim_{h\to 0}\frac{Q(x_0+h,y_0)-Q(x_0,y_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x_0,y_0+h)-P(x_0,y_0)}{\mathrm{i}h} + \mathrm{i}\lim_{h\to 0}\frac{Q(x_0,y_0+h)-Q(x_0,y_0)}{\mathrm{i}h}$$

Dacă funcţiile P şi Q au derivate parţiale în raport cu x şi y în punctul (x_0, y_0), atunci

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)$$

de unde deducem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

numite **condiţiile Cauchy-Riemann**.

Teorema 1.1. *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă . Funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$ este olomorfă în $z_0 \in A$ dacă şi numai dacă $P, Q\colon A \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în $z_0 = (x_0, y_0)$ şi derivatele lor parţiale în (x_0, y_0) verifică condiţiile Cauchy-Riemann.*

Demonstraţie. Presupunem că f este olomorfă în $z_0 \in A$ şi fie $f'(z_0) = a + \mathrm{i}b = c$. Definim

$$\beta(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0), & \text{pentru } z \in A, z \neq z_0 \\ 0, & \text{pentru } z = z_0 \end{cases}$$

Evident $\lim\limits_{z\to z_0}\beta(z) = 0$.

Definim

$$\alpha(z) = \begin{cases} \beta(z)\frac{z-z_0}{|z-z_0|}, & \text{pentru } z \in A, z \neq z_0 \\ 0, & \text{pentru } z = z_0 \end{cases}$$

Atunci $\lim\limits_{z\to z_0}|\alpha(z)| = \lim\limits_{z\to z_0}|\beta(z)| = 0$, deci $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha(z) = 0$. Putem scrie

$$f(z) - f(z_0) = c(z-z_0) + (z-z_0)\beta(z) = c(z-z_0) + \alpha(z)|z-z_0|. \quad (1.1)$$

Dar

$$f(z) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y), z - z_0 = (x - x_0) + \mathrm{i}(y - y_0)$$

deci

$$\begin{aligned} P(x,y) - P(x_0,y_0) + \mathrm{i}(Q(x,y) - Q(x_0,y_0)) = \\ = a(x-x_0) - b(y-y_0) + \mathrm{Re}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \\ +\mathrm{i}[b(x-x_0) + a(y-y_0) + \mathrm{Im}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}] \end{aligned}$$

Rezultă formulele

$$\begin{aligned} P(x,y) - P(x_0,y_0) = a(x-x_0) - b(y-y_0) + \\ + \mathrm{Re}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} Q(x,y) - Q(x_0,y_0) = b(x-x_0) + a(y-y_0) + \\ + \mathrm{Im}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

unde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathrm{Re}\alpha(x,y) = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathrm{Im}\alpha(x,y) = 0$, deci funcţiile P şi Q sunt diferenţiabile în $z_0 = (x_0, y_0)$ şi atunci

$$a = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0), b = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

adică am obţinut condiţiile Cauchy-Riemann.

Reciproc, dacă P şi Q sunt diferenţiabile în $z_0 = (x_0, y_0)$ şi au loc condiţiile Cauchy-Riemann, atunci avem

$$\begin{aligned} P(x,y) - P(x_0,y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ + \alpha_1(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} Q(x,y) - Q(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ + \alpha_2(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

unde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha_1(x,y) = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha_2(x,y) = 0$.

Notând $a = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0), b = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$ şi $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$, obţinem din relaţiile (1.4) şi (1.5), relaţiile (1.2) şi (1.3), iar acestea sunt echivalente cu (1.1) dacă notăm $c = a + ib$. Din (1.1) obţinem $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - c = \alpha(z)\cdot\frac{|z-z_0|}{z-z_0}$, pentru $z \neq z_0$ şi atunci $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right) = c \in \mathbb{C}$, deci f este olomorfă în $z_0 \in \mathbb{C}$.

In plus, avem

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(z_0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0) = \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(z_0) \end{aligned}$$

$\square$

Corolarul 1.1. *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$. Dacă $P, Q \in \mathcal{C}^1(A)$ şi dacă pentru $\forall z \in A$ au loc condiţiile Cauchy-Riemann, atunci f este olomorfă pe A.*

Demonstraţie. Dacă $P, Q \in \mathcal{C}^1(A)$, atunci P, Q sunt diferenţiabile în orice punct $z_0 \in A$. Având loc şi condiţiile Cauchy-Riemann în orice punct $z_0 \in A$ afirmaţia rezultă din Teorema 1.1. □

Notăm $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ şi $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ (numită **derivata areolară a lui f în** z_0; introdusă de Dimitrie Pompeiu în 1912).

Corolarul 1.2. *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$. Dacă $P, Q \in \mathcal{C}^1(A)$ şi $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ pe A, atunci funcţia f este olomorfă pe A.*

Demonstraţie. Vom arăta că relaţia $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ pe A este echivalentă cu condiţiile Cauchy-Riemann şi apoi aplicăm Corolarul 1.1. Intr-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial y}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ şi } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

□

Exemplul 1.1. Studiaţi olomorfia următoarei funcţii

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}.$$

Demonstraţie. Punem în evidenţă partea reală şi partea imaginară a funcţiei f şi aplicăm Corolarul 1.1.

$f(z) = z^2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = (x + \mathrm{i}y)^2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + \mathrm{e}^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^{-y}\cos x + \mathrm{i}(2xy + \mathrm{e}^{-y}\sin x)$, deci $P(x, y) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^{-y}\cos x, Q(x, y) = 2xy + \mathrm{e}^{-y}\sin x$.

Avem $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x - \mathrm{e}^{-y}\sin x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y - \mathrm{e}^{-y}\cos x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + \mathrm{e}^{-y}\cos x$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x - \mathrm{e}^{-y}\sin x$. Aşadar, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, de unde rezultă că f este olomorfă . □

Exemplul 1.2. Să se arate că funcţia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sqrt{|z^2 - \overline{z}^2|}$ este continuă în $z = 0$, satisface condiţiile Cauchy-Riemann în acest punct, dar nu este olomorfă .

Demonstraţie. $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0 = f(0)$, deci f este continuă în $z = 0$

Dacă $z = x + \mathrm{i}y$, avem $f(z) = 2\sqrt{|xy|}$, deci $P(x,y) = 2\sqrt{|xy|}$ şi $Q = 0$.

$\frac{\partial P}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P(x,0) - P(0,0)}{x - 0} = 0 = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(0,0)$

$\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{P(0,y) - P(0,0)}{y - 0} = 0 = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(0,0)$

Totuşi f nu este olomorfă în $z = 0$, deoarece P nu e diferenţiabilă în acest punct. Presupunem că P ar fi diferenţiabilă , deci

$$P(x,y) - P(0,0) = 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + P_1(z)|z - 0|,$$

unde $\lim\limits_{z\to 0} P_1(z) = 0$.

Pentru $z \neq 0$ avem $P_1(z) = \frac{P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{x\to 0, y=mx} \dfrac{2\sqrt{|mx^2|}}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \dfrac{2\sqrt{|m|}}{\sqrt{1+m^2}}$, deci P_1 nu are limită în $(0,0)$. □

Exemplul 1.3. Să se determine punctele în care funcţia $f(z) = z^2 + 2z\overline{z} - 2\overline{z}^2 + 3z + 2\overline{z}$ este olomorfă şi calculaţi derivatele în aceste puncte.

Demonstraţie. $f(z) = z^2 + 2z\overline{z} - 2\overline{z}^2 + 3z + 2\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)^2 + 2(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) - 2(x - \mathrm{i}y)^2 + 3(x + \mathrm{i}y) + 2(x - \mathrm{i}y) = x^2 + 3y^2 + 5x + \mathrm{i}(6xy + y)$, deci $P(x,y) = x^2 + 3y^2 + 5x, Q(x,y) = 6xy + y$.

Pentru ca funcţia f să fie olomorfă trebuie să fie îndeplinite condiţiile Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$, adică $2x + 5 = 6x + 1$ şi $6y = -6y$, de unde rezultă că $x = 1, y = 0$, deci $z = 1$ este punctul în care funcţia f este olomorfă .

Atunci $\frac{\partial f}{\partial z}(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1)\right) =$

$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x}(1,0) + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x}(1,0) - \mathrm{i}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(1,0) + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial y}(1,0)\right)\right] = 7$ □

Exemplul 1.4. Să se determine constantele a şi b astfel încât funcţia $f(z) = \mathrm{ch}x(\cos y + a \sin y) + \mathrm{i}\,\mathrm{sh}x(\cos y + b \sin y)$ să fie olomorfă .

Demonstraţie. Punând condiţiile Cauchy-Riemann obţinem

$\mathrm{sh}x(\cos y + a\sin y) = \mathrm{sh}x(-\sin y + b\cos y)$ şi $\mathrm{ch}x(-\sin y + a\cos y) = -\mathrm{ch}x(\cos y + b \sin y)$, de unde rezultă $a = -1, b = 1$. □

Definiţia 1.5. Fie $u\colon A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe deschisul A. Funcţia u se numeşte **armonică** dacă pentru $\forall a \in A$ avem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a) = 0$, adică $\Delta u = 0$ în orice punct din A.

Corolarul 1.3. *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$ şi $P, Q \in \mathcal{C}^2(A)$. Dacă f este olomorfă pe A, atunci P, Q sunt funcţii armonice pe A.*

Demonstraţie. Din condiţiile Cauchy-Riemann şi Teorema lui Schwarz avem

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 0$$

□

Definiţia 1.6. Un deschis $D \subset \mathbb{C}$ este **conex** (deci un domeniu) dacă şi numai dacă pentru orice două puncte $z_1, z_2 \in D$ există un drum $\gamma\colon [a,b] \to D$ astfel ca $\gamma(a) = z_1$ şi $\gamma(b) = z_2$. Un domeniu D se numeşte **simplu conex** dacă frontiera lui D este conexă , adică orice curbă închisă cu suportul în D se poate deforma continuu către un punct.

Observaţia 1.3. Se poate arăta că aceasta este echivalent cu faptul că orice curbă închisă cu suportul în D se poate deforma continuu către un punct. Coroana $K(z_0; r, R)$ nu este un domeniu simplu conex.

Teorema 1.2. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex. Dacă funcţia $P\colon D \to \mathbb{R}$ este armonică pe D, atunci există funcţia $Q\colon D \to \mathbb{R}$ armonică pe D astfel încât funcţia $f\colon D \to \mathbb{C}$, $f = P + \mathrm{i}Q$ să fie olomorfă .*

Demonstraţie. Dacă ar exista funcţia Q armonică pe D astfel încât $f = P + \mathrm{i}Q$ să fie olomorfă pe D, atunci Q ar verifica relaţiile Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$, deci $dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy$.

Considerăm forma diferenţială $\omega = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy = P_1 dx + Q_1 dy$.

Avem $\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$, deci $\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$, deoarece $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$, P fiind armonică pe D. Aşadar, forma ω este închisă , deci ω este exactă deoarece D este simplu conex. Atunci există funcţia Q pe D, $Q \in \mathcal{C}^2(D)$ astfel încât $\omega = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = dQ$. Rezultă relaţiile $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$, adică tocmai condiţiile Cauchy-Riemann. Aplicând Corolarul 1.1, rezultă că $f = P + \mathrm{i}Q$ este olomorfă pe D. □

Observaţia 1.4. Din relaţia $\omega = dQ$ rezultă că funcţia Q este unică până la adăugarea unei constante reale, deci f este unică până la adăugarea unei constante pur imaginare.

Exemplul 1.5. Să se determine funcţia olomorfă $f = P + \mathrm{i}Q$ astfel încât $P(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y), f(0) = 0$.

Demonstraţie. Relaţiile Cauchy-Riemann sunt verificate dacă :

$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + \mathrm{e}^x\cos y$

$-\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{e}^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)$

Atunci integrând prima relaţie în raport cu y obţinem

$Q(x,y) = \int(\mathrm{e}^x x\cos y - \mathrm{e}^x y\sin y + \mathrm{e}^x\cos y)dy = \mathrm{e}^x x\sin y + \mathrm{e}^x y\cos y + k(x)$

Introducând rezultatul în a doua relaţie avem
$-(\mathrm{e}^x x \sin y + \mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{e}^x y \cos y + k'(x)) = \mathrm{e}^x(-x \sin y - \sin y - y \cos y)$, de unde $k'(x) = 0$, deci $k(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

Atunci $Q(x, y) = \mathrm{e}^x x \sin y + \mathrm{e}^x y \cos y + c$.

Aşadar, $f = \mathrm{e}^x(x \cos y - y \sin y) + \mathrm{i}(\mathrm{e}^x x \sin y + \mathrm{e}^x y \cos y + c) = \mathrm{e}^x x(\cos y + \mathrm{i} \sin y) + \mathrm{i}\mathrm{e}^x y(\cos y + \mathrm{i} \sin y) + \mathrm{i}c = \mathrm{e}^x x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{i}\mathrm{e}^x y\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{i}c = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}(x + \mathrm{i}y) + \mathrm{i}c = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}(x + \mathrm{i}y) + \mathrm{i}c = \mathrm{e}^z z + \mathrm{i}c$

Cum $f(0) = 0$, rezultă $\mathrm{i}c = 0$, deci $c = 0$. □

Exemplul 1.6. Să se determine funcţia olomorfă $f = P + \mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$, unde $Q(x, y) = \varphi(x^2 - y^2), \varphi \in \mathcal{C}^2$.

Demonstraţie. Notăm $\alpha = x^2 - y^2$.

Avem $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\varphi'(\alpha)$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -2y\varphi'(\alpha)$, deci $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2\varphi'(\alpha) + 4x^2\varphi''(\alpha)$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -2\varphi'(\alpha) + 4y^2\varphi''(\alpha)$

Cum Q este armonică , adică $\Delta Q = 0$, avem

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2)\varphi''(\alpha) = 0 \Longrightarrow \varphi''(\alpha) = 0 \Longrightarrow \varphi'(\alpha) = c \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \varphi(\alpha) = c\alpha + c_1 \Longrightarrow Q(x, y) = c(x^2 - y^2) + c_1, c, c_1 \in \mathbb{R}$$

Din condiţiile Cauchy-Riemann obţinem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = -2cy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -2cx$$

Integrând a doua ecuaţie în raport cu y obţinem $P(x, y) = -2cxy + g(x)$ şi înlocuind în prima obţinem $-2cy + g'(x) = -2cy \Longrightarrow g'(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = k \Longrightarrow P(x, y) = -2cxy + k$, deci $f(z) = -2cxy + k + \mathrm{i}(c(x^2 - y^2) + c_1) \Longrightarrow f(z) = c\mathrm{i}z^2 + \mathrm{i}c_1 + k, c, c_1, k \in \mathbb{R}$ □

1.2 Funcţii elementare

1.2.1 Funcţia exponenţială

Definiţia 1.7. Se numeşte **exponenţiala complexă** funcţia

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \longrightarrow \mathrm{e}^z,$$

unde $\exp z = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proprietăţi :

a) $\mathrm{e}^0 = 1$;

b) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \ \forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

c) $e^{iy} = \cos y + i\sin y, \ \forall \ y \in \mathbb{R}$ (**formula lui Euler**);

d) funcţia exponenţială este olomorfă şi periodică de perioadă $2\pi i$.

Demonstraţie. b) Considerăm seriile $\sum\limits_{n\geq 0} u_n = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{n!}, \sum\limits_{n\geq 0} v_n = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{z_2^n}{n!}$. Atunci $w_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!} z_1^p z_2^{n-p} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$.

Cum seria produs $\sum\limits_{n\geq 0} w_n = \sum\limits_{p\geq 0} u_p \sum\limits_{q\geq 0} v_q$, avem

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \left(\sum_{p\geq 0} \frac{z_1^p}{p!}\right) \cdot \left(\sum_{q\geq 0} \frac{z_1^q}{q!}\right).$$

c) Avem

$$e^{iy} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + \ldots +$$

$$+i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) = \cos y + i\sin y$$

folosind dezvoltările în serie ale funcţiilor reale $\cos y$ şi $\sin y$.

d) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, deci $\operatorname{Re}\exp z = P(x,y) = e^x \cos y$ şi $\operatorname{Im}\exp z = Q(x,y) = e^x \sin y$. Funcţiile P şi Q sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $\frac{\partial P}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial Q}{\partial y}$ şi $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. Atunci conform Corolarului 1.1, funcţia $\exp z$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$.

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^x e^{i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) =$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z,$$

deci funcţia $\exp z$ este periodică de perioadă $2\pi i$. □

Exemplul 1.7. Calculaţi e^z, unde $z = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi i$.

Demonstraţie. $e^z = e^{\sqrt{2}-\frac{1}{2}\pi i} = e^{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) = -ie^{\sqrt{2}}$ □

1.2.2 Funcţia logaritm

Pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$ fixat ne punem problema să aflăm toate soluţiile $w = u + iv \in \mathbb{C}$ ale ecuaţiei $\mathrm{e}^w = z$. Folosind scrierea trigonometrică a unui număr complex, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, unde $r = |z|$, iar $\theta = \arg z$, obţinem $\mathrm{e}^u = |z|$, de unde rezultă $u = \ln|z|$ şi ţinând cont că funcţia $\exp z$ este periodică de perioadă $2\pi\mathrm{i}$, avem $v = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Aşadar, toate soluţiile ecuaţiei sunt $\mathrm{e}^w = z$, $z \in \mathbb{C}^*$ sunt $w = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

Definiţia 1.8. Se numeşte **logaritmul numărului complex** $z \in \mathbb{C}^*$, mulţimea de numere complexe $\mathrm{Ln}z = \{\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Funcţia $\mathrm{Ln}z$ este o funcţie multiformă (care asociază unei valori z mai multe valori numerice). Funcţia logaritm are o infinitate de ramuri.

Pentru $k = 0$ obţinem **valoarea principală** a logaritmului

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

Exemplul 1.8. Calculaţi $\mathrm{Ln}(2 - 2\mathrm{i})$.

Demonstraţie. Avem $|2-2\mathrm{i}| = 2\sqrt{2}$ şi $\arg z = \frac{7\pi}{4}$, deci $\mathrm{Ln}(2-2\mathrm{i}) = \ln 2\sqrt{2} + \mathrm{i}(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ □

Exemplul 1.9. Rezolvaţi ecuaţia $\mathrm{Ln}z = \mathrm{e} - \pi\mathrm{i}, z \in \mathbb{C}$.

Demonstraţie. $\mathrm{Ln}z = \mathrm{e} - \pi\mathrm{i} \Longrightarrow z = \mathrm{e}^{\mathrm{e}-\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \cdot (\cos\pi - \mathrm{i}\sin\pi) = -\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ □

1.2.3 Funcţia putere

Este o funcţie multiformă

$$z^m = \mathrm{e}^{m\mathrm{Ln}z} = \{\mathrm{e}^{m(\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi))} \mid k \in \mathbb{Z}\},\ \ m \in \mathbb{C}.$$

Exemplul 1.10. Calculaţi i^{i}.

Demonstraţie. $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{iLni}} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}(\arg(\mathrm{i}) + 2k\pi))} \mid k \in \mathbb{Z}\} =$
$= \{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. □

Exemplul 1.11. Calculaţi $(-1)^{1-2\mathrm{i}}$.

Demonstraţie. $(-1)^{1-2\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{Ln}(-1)^{1-2\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\mathrm{Ln}(-1)} = \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})(\ln|-1| + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi))} = \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})\mathrm{i}(\pi+2k\pi)} = \mathrm{e}^{2(\pi+2k\pi)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)} = -\mathrm{e}^{2(\pi+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$ □

1.2.4 Funcţia radical

Este o funcţie multiformă $\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dacă $z \neq 0$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, funcţia radical o definim cu ajutorul funcţiei putere şi scriem

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi))} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln|z|}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\}$$

Exemplul 1.12. Să se rezolve ecuaţia $z^3 + 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

Demonstraţie. Avem ecuaţia $z^3 = 2(-1+\mathrm{i})$. Cum $|w| = |-1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ şi $\frac{w}{|w|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$, rezultă $\arg w = \frac{3\pi}{4}$.

Deci $z = \left\{\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}} \mid k = 0, 1, 2\right\} = \left\{\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} \mid k = 0, 1, 2\right\} = \left\{\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \mid k = 0, 1, 2\right\}$.

□

1.2.5 Funcţiile trigonometrice complexe

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, definim funcţiile $\cos z$ şi $\sin z$ prin

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

Se verifică relaţiile

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

Definim $\mathrm{tg} : \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{tg}\, z = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}$ şi

$$\mathrm{ctg} : \mathbb{C} \setminus \left\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}$$

Funcţiile $\sin, \cos, \mathrm{tg}\,, \mathrm{ctg}$ sunt funcţii uniforme (nu sunt multiforme) şi toate formulele trigonometrice din cazul real rămân valabile.

Se definesc şi funcţiile hiperbolice complexe

$$\mathrm{sh}z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z} \quad (\text{pentru ch z} \neq 0)$$

Se observă că $\mathrm{sh}z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z), \mathrm{ch}z = \cos(\mathrm{i}z)$.

Inversarea funcţilor trigonometrice complexe conduce la alte funcţii multiforme. Astfel, rezolvând ecuaţia $z = \sin w$, rezultă :

$$z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}} \quad \text{sau} \quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2\mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - 1 = 0,$$

de unde $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1-z^2}$ şi $iw = \mathrm{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2})$. Atunci se defineşte

$$\mathrm{Arcsin}z = -i\mathrm{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2}).$$

Analog se definesc

$$\mathrm{Arccos}z = -i\mathrm{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}),$$

$$\mathrm{Arctg}z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i-z}{i+z} \text{ etc.}$$

Exemplul 1.13. Să se calculeze $z = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 3\right)$.

Demonstraţie. Avem $z = i\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 3\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 3\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 3\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 3\right)}}$.

Cum $e^{i\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 3\right)} = e^{\ln 3}e^{\frac{\pi i}{4}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Atunci $z = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)+\frac{2}{3\sqrt{2}(1+i)}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)-\frac{2}{3\sqrt{2}(1+i)}} = \frac{11+7i}{7+11i} = \frac{77-36i}{85}$. □

Exemplul 1.14. Să se calculeze $z = \mathrm{th}\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{4}\right)$.

Demonstraţie. Avem $z = \frac{e^{\ln 2+\frac{\pi i}{4}}-e^{-\left(\ln 2+\frac{\pi i}{4}\right)}}{e^{\ln 2+\frac{\pi i}{4}}+e^{-\left(\ln 2+\frac{\pi i}{4}\right)}}$, dar $e^{\ln 2+\frac{\pi i}{4}} = e^{\ln 2}e^{\frac{\pi i}{4}} =$
$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+i)$. Atunci $z = \frac{\sqrt{2}(1+i)-\frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}}{\sqrt{2}(1+i)+\frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}} = \frac{4i-1}{4i+1} = \frac{15+8i}{17}$. □

Exemplul 1.15. Să se calculeze $z = \mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}\right)$.

Demonstraţie. Avem $z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i-\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}}{i+\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{-1+i\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}$.

Cum $\left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}\right| = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$ şi $\frac{z}{|z|} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă $\arg\frac{-1+i\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{3}$.
Aşadar, $z = -\frac{i}{2}\left[\ln\frac{2}{3+\sqrt{5}} + i\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{3k+1}{3}\pi - \frac{i}{2}\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}, k \in \mathbb{Z}$ □

Exemplul 1.16. Să se demonstreze egalităţile :
a) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$
b) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y$
unde $z = x + iy$.

Demonstraţie. a) Avem $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \sin iy\cos x$. Dar $\cos iy = \mathrm{ch}y, \sin iy = i\cdot\mathrm{sh}y$, deci $\sin z = \sin x\cdot\mathrm{ch}y + i\cos x\cdot\mathrm{sh}y$.

De aici deducem $|\sin z|^2 = \sin^2 x\cdot\mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x\cdot\mathrm{sh}^2 y$.

Tinând cont că $\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y = 1$, rezultă $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y$.

b) Analog avem

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x\cdot\mathrm{ch}y - i\sin x\cdot\mathrm{sh}y,$$

deci $|\cos z|^2 = \cos^2 x\cdot\mathrm{ch}y^2 + \sin^2 x\cdot\mathrm{sh}^2 y$, adică $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y$. □

Exemplul 1.17. Rezolvaţi in mulţimea numerelor complexe ecuaţia

$$\mathrm{ch}z - \mathrm{sh}z = 1 + \mathrm{i}.$$

Demonstraţie. Ecuaţia devine $\frac{e^z+e^{-z}}{2} - \frac{e^z-e^{-z}}{2} = 1 + \mathrm{i} \Longrightarrow e^{-z} = 1 + \mathrm{i} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow -z = \mathrm{Ln}(1+\mathrm{i}) \Longrightarrow z = -[\ln|1+\mathrm{i}| + \mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)] =$
$= -\ln\sqrt{2} - \mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ □

1.3 Integrala complexă . Teorema lui Cauchy. Formula integrala Cauchy

Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $\gamma\colon [a,b] \to A$ un drum (curbă) de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni. Fie $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă continuă , $f = P + \mathrm{i}Q$.

Notăm $\gamma(t) = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, deci $x, y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni. Drumul $\gamma^-\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ este drumul opus lui γ, $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$.

Fie $\triangle_n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ care împarte drumul γ în n arce $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$. Inceputul arcului l_k este punctul $z_k = \gamma(t_k)$ şi sfârşitul lui l_k este punctul $z_{k+1} = \gamma(t_{k+1})$. Alegem $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ o valoare arbitrară şi scriem $\zeta_k = \gamma(\tau_k) = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k$.

Definiţia 1.9. Suma $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$ se numeşte **sumă integrală complexă** (relativ la $\gamma, f, \triangle_n, \zeta_k$).

Notăm cu $\nu(\triangle_n) = \max\left\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}\right\}$ norma diviziunii $\triangle_n$.

Lema 1.1. *In condiţiile anterioare, pentru orice alegere a punctelor ζ_k, există limita*

$$\lim_{\nu(\triangle_n)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \int_\gamma P dx - Q dy + \mathrm{i} \int_\gamma Q dx + P dy$$

(două integrale curbilinii reale).

Demonstraţie. Avem $f(\zeta_k) = P(\xi_k, \eta_k) + \mathrm{i}Q(\xi_k, \eta_k)$ şi

$$z_{k+1} - z_k = (x_{k+1} - x_k) + \mathrm{i}(y_{k+1} - y_k).$$

Deci

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k) +$$

$$+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k)(x_{k+1} - x_k) + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)(y_{k+1} - y_k)$$

Din ipoteză f este continuă , deci P şi Q sunt continue, iar x şi y sunt funcţii de clasă C^1 pe porţiuni. Rezultă că

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k) \longrightarrow \int_\gamma Pdx \text{ şi } \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k,\eta_k)(y_{k+1}-y_k) \longrightarrow \int_\gamma Qdy, \text{ etc.}$$

□

Definiţia 1.10. Limita

$$\lim_{\nu(\triangle_n)\to 0(\text{orice } \zeta_k)} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)$$

se numeşte **integrala complexă a funcţiei** f **de-a lungul curbei** γ şi se notează cu $\int_\gamma f(z)dz$.

Corolarul 1.4. *Avem* $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt$, *unde*

$$\gamma: \quad z = z(t), \quad t \in [a,b].$$

Demonstraţie. Din Lema 1.1 avem

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma Pdx - Qdy + \mathrm{i}\int_\gamma Qdx + Pdy.$$

Dar

$$\int_\gamma Pdx - Qdy = \int_a^b [P(x(t),y(t))\cdot x'(t) - Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt$$

$$\int_\gamma Qdx + Pdy = \int_a^b [Q(x(t),y(t))\cdot x'(t) + P(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt,$$

deci

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b [P(x(t),y(t)) + \mathrm{i}Q(x(t),y(t))](x'(t)+\mathrm{i}y'(t))dt = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt.$$

Aşadar, o integrală complexă revine la o pereche de integrale Riemann reale. □

Proprietăţile integralei complexe :

1. (**schimbarea sensului**) $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

2. (**liniaritatea**) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ şi $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ continuă ,

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

3. (**aditivitatea**) Fie $\gamma_1 \colon [a,b] \to A$, $\gamma_2 \colon [b,c] \to A$ drumuri de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni cu $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ şi $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Atunci
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$
4. $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|ds$.
5. (**limitarea modulului integralei**) Fie L lungimea drumului γ şi fie $M = \sup\limits_{z\in A}|f(z)| < \infty$. Atunci $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le ML$.

Exemplul 1.18. Să se calculeze integralele $I_1 = \int_{|z|=1} z|dz|, I_2 = \int_S z|dz|$, unde cercul unitate este parcurs pozitiv o singură dată , iar S e segmentul care uneşte 0 şi i.

Demonstraţie. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi] \Longrightarrow dz = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt \Longrightarrow |dz| = dt \Longrightarrow I_1 =$
$= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/_0^{2\pi} = 0$

Segmentul S are reprezentarea parametrică $z = t\mathrm{i}, t \in [0,1] \Longrightarrow dz =$
$= \mathrm{i}dt \Longrightarrow |dz| = dt \Longrightarrow I_2 = \int_0^1 t\mathrm{i}dt = \frac{\mathrm{i}}{2}$ □

Exemplul 1.19. Să se calculeze integrala complexă $\int_\gamma (z^2+1)dz$, unde $\gamma = \mathrm{Fr}\big\{z \in \mathbb{C}/|z| \le r, \mathrm{Im}z \ge 0\big\}$ cu $r > 1$.

Demonstraţie. γ este reuniunea curbelor δ, unde $\delta(t) = (2t-1)r, t \in [0,1]$ şi σ, unde $\sigma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0,\pi]$

Atunci $\int_\gamma (z^2+1)dz = \int_\delta (z^2+1)dz + \int_\sigma (z^2+1)dz =$
$= \int_0^1 (2t-1)^2 r^2 2rtdt + \int_0^\pi r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}dt$ etc. □

Teorema 1.3. ***(Cauchy)*** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f \colon D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D astfel încât $P = Ref, Q = Imf$ să fie de clasă $\mathcal{C}^1(D)$. Dacă $\gamma \colon [a,b] \to D$ este o curbă închisă jordaniană (i.e. o curbă fără autointersecţii în $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni astfel încât compactul $\overline{\mathrm{Int}}\gamma$ să verifice condiţiile formulei Green-Riemann, atunci $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Demonstraţie. Aplicând formula Green-Riemann obţinem
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma Pdx - Qdy + \mathrm{i}\int_\gamma Qdx + Pdy =$$
$$= \int\int_K \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \mathrm{i}\int\int_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy, \text{ unde } K = \overline{\mathrm{Int}}\gamma.$$
Cum f este olomorfă , au loc condiţiile Cauchy-Riemann, deci cele două integrale duble sunt nule. □

Exemplul 1.20. Să se calculeze integrala $\int_{|z|=1} \sec\frac{z}{2}dz$.

Demonstraţie. $\int_{|z|=1} \sec \frac{z}{2} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{\cos \frac{z}{2}} dz = 0$ conform Teoremei 1.3, deoarece soluţiile ecuaţiei $\cos \frac{z}{2} = 0$ sunt în afara cercului unitate.

$\cos \frac{z}{2} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{z}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{z}{2}}}{2} = 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{z}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{z}{2}} = 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 1 = 0 \Longrightarrow \mathrm{i}z = \mathrm{Ln}(-1) \Longrightarrow z = \frac{1}{\mathrm{i}}[\ln|-1| + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi)] = -\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}(\pi + 2k\pi) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ □

Lema 1.2. *Fie* $C = \{z \in \mathbb{C} | \ |z - a| = r > 0\}$ *un cerc considerat ca un drum închis jordanian de clasă* $\mathcal{C}^1$*, orientat pozitiv (parcurs o singură dată în sens trigonometric direct). Pentru orice* $n \in \mathbb{Z}$ *avem*

$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i}, & n = -1 \end{cases}$$

Demonstraţie. Fie $z(t) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [-\pi, \pi]$ parametrizarea cercului.

Avem $z'(t) = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Deci

$$\int_C (z-a)^n dz = \int_{-\pi}^{\pi} (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} dt = r^{n+1}\mathrm{i} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} dt.$$

Dacă $n \neq -1$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+1)t dt + \mathrm{i} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+1)t dt = 0.$$

Dacă $n = -1$, atunci $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}0t} dt = 2\pi$, deci $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi\mathrm{i}$. □

Teorema 1.4. ***(formula integrală a lui Cauchy)*** *Fie* $D \subset \mathbb{C}$ *un domeniu şi* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă pe* D*. Fie* $\overline{\triangle} \subset D$*, unde* $\triangle$ *este un domeniu simplu conex, mărginit cu frontiera* γ *o curbă închisă jordaniană , de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe porţiuni, orientată pozitiv. Atunci, pentru orice punct* $a \in \triangle$ *fixat, are loc formula*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Demonstraţie. Alegem două discuri $\overline{B}(a; r_0) \subset \overline{B}(a; \rho) \subset \triangle$ şi fie C frontiera discului $\overline{B}(a; \rho)$ orientată pozitiv. In domeniul $D \setminus \overline{B}(a; r_0)$ funcţia $\frac{f(z)}{z-a}$ este olomorfă . Deci $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$.

Acum putem scrie

$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz + \int_C \frac{f(a)}{z-a} dz = I + f(a) \int_C \frac{1}{z-a} dz = I + 2\pi\mathrm{i} f(a)$, unde $I = \int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz$. Vom arăta că $I = 0$. Funcţia f este olomorfă în a, deci continuă în a. Pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ astfel încât

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Deoarece discurile erau alese arbitrar, vom lua $\rho < \delta$ şi atunci rezultă

$$|I| = \left| \int_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq \int_C \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} ds < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \int_C ds = \varepsilon$$

Dar ε este arbitrar ($\varepsilon \longrightarrow 0$), deci obţinem $I = 0$ şi atunci

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$\square$

Corolarul 1.5. *In condiţiile Teoremei 1.4 avem,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}$$

Exemplul 1.21. Calculaţi integrala $\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^{3z}}{3z-\mathrm{i}} dz$.

Demonstraţie. Conform Teoremei 1.4, luând $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{3}$ şi $a = \frac{\mathrm{i}}{3}$ avem $\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^{3z}}{3z-\mathrm{i}} dz = 2\pi \mathrm{i} f\left(\frac{\mathrm{i}}{3}\right) = 2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e}^{3 \cdot \frac{\mathrm{i}}{3}}}{3} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{3}(\cos 1 + \mathrm{i} \sin 1)$ $\square$

Exemplul 1.22. Calculaţi integrala $\int_{|z|=2} \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z+\mathrm{i})^3} dz$.

Demonstraţie. In Corolarul 1.5 luăm $f(z) = z^4 - 3z^2 + 6, a = -\mathrm{i}, n = 2$ şi obţinem $\int_{|z|=2} \frac{z^4-3z^2+6}{(z+\mathrm{i})^3} dz = \frac{2\pi \mathrm{i}}{2!} f''(-\mathrm{i}) = \pi \mathrm{i}(12\mathrm{i}^2 - 6) = -18\pi \mathrm{i}$ $\square$

1.4 Funcţii analitice complexe. Dezvoltări în serie Laurent

Definiţia 1.11. Seria $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, unde $z \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$ fixat, $a_n \in \mathbb{C}$ se numeşte **serie de puteri centrată în punctul** z_0.

Definiţia 1.12. Fie $R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R} / r \geq 0, \text{ seria} \sum\limits_{n \geq 0} a_n |r|^n \text{convergentă } \right\}$.

Numărul R se numeşte **rază de convergenţă** , iar discul $B(z_0, R) =$ $= \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R \right\}$ se numeşte **disc de convergenţă** . Convenţie : pentru $R = 0, B(z_0, R) = \left\{ z_0 \right\}$, iar pentru $R = \infty, B(z_0, R) = \mathbb{C}$.

Teorema 1.5. ***(Cauchy - Hadamard)*** *Fie o serie de puteri cu raza de convergenţă R. Atunci* $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Teorema 1.6. ***(Teorema lui Abel)*** *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ *cu raza de convergenţă R. Atunci*

1. *seria este absolut convergentă pe* $|z - z_0| < R$*;*
2. *seria este divergentă pe* $|z - z_0| > R$*;*
3. *seria este uniform convergentă pe* $|z - z_0| \leq \rho$*, oricare ar fi* $\rho < R$*.*

Teorema 1.7. *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat şi $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n, \forall z$ cu $|z-z_0| < R$ suma seriei centrate în punctul z_0, unde R este raza de convergenţă . Atunci funcţia $S(z)$ este olomorfă în orice punct $z \in B(z_0, R)$ şi*

$$S'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \forall z \in B(z_0, R).$$

Corolarul 1.6. *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat şi $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n, \forall z$ cu $|z-z_0| < R$ suma seriei centrate în punctul z_0, unde R este raza de convergenţă . Atunci funcţia $S(z)$ are derivate complexe de orice ordin în orice punct $z \in B(z_0, R)$ şi $a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}$.*

Definiţia 1.13. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă . Funcţia $f\colon A \to \mathbb{C}$ se numeşte **analitică** pe A dacă $\forall z_0 \in A$, există o serie formală $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ convergentă într-un disc de rază $R > 0$ astfel încât există discul $B(z_0, r) \subset A$, $0 < r \leq R$ cu proprietatea

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n, \ \ \forall z \in B(z_0; r).$$

Propoziţia 1.1. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie analitică pe A. Atunci există derivatele complexe de orice ordin ale lui f în A şi într-o vecinătate a oricărui punct $z_0 \in A$ avem

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Noţiunile de analiticitate şi olomorfie sunt echivalente şi vom evidenţia acest fapt în următoarea teoremă :

Teorema 1.8. ***(Weierstrass-Riemann-Cauchy)*** *Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă . Atunci f este analitică pe A dacă şi numai dacă f este olomorfă pe A.*

Demonstraţie. Presupunem că f este analitică pe A. Fie $z_0 \in A$ un punct oarecare. Atunci există $B(z_0; r) \subset A$ $(r > 0)$ astfel încât

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z - z_0)^n, \ \ \forall \ z \in B(z_0; r).$$

Deoarece $f(z_0) = c_0$ putem scrie $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n\geq 1} c_n(z - z_0)^{n-1}$ pentru $z \neq z_0, \ \ z \in B(z_0; r)$ şi atunci $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c_1 \in \mathbb{C}$.

Reciproc, presupunem că f este olomorfă pe A şi fie $z_0 \in A$ un punct fixat oarecare. Fie $\rho = d(z_0, \mathrm{Fr}A)$ şi fie $B(z_0; r) \subset A$ cu $0 < r < \rho$. Fie $C = \mathrm{Fr}B(z_0; r)$, circumferinţa parcursă în sens trigonometric direct. Atunci, din formula integrală a lui Cauchy, rezultă

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(u)}{u - z} du, \ \ \forall \ z \in B(z_0; r).$$

Scriem

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{(u - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{u - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}}$$

şi notând $w = \frac{z - z_0}{u - z_0}$ ($u \in \mathbb{C}$, deci $u \neq z_0$) avem $|w| = \left|\frac{z - z_0}{u - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$. Atunci seria $\sum\limits_{n \geq 0} w^n$ este convergentă şi $\sum\limits_{n \geq 0} w^n = \dfrac{1}{1 - w}$, deci obţinem

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - z_0} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0}\right)^n; \ \ \frac{f(u)}{u - z} = \sum_{n \geq 0} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}.$$

Pentru $z \in B(z_0; r)$ fixat putem scrie

$$\left| f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}} \right| \leq \sup_{u \in C} |f(u)| \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}} = M \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}},$$

deoarece $|f|$ este o funcţie continuă pe compactul $C \subset A$. Rezultă că seria de funcţii $\sum\limits_{n \geq 0} f(u) \dfrac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}$ este majorată (în modul) de seria numerică convergentă $\frac{M}{r} \sum\limits_{n \geq 0} \left(\dfrac{|z - z_0|}{r}\right)^n$ (o progresie geometrică cu raţia $\frac{|z - z_0|}{r} < 1$). Atunci, conform criteriului lui Weierstrass, seria de funcţii converge uniform în raport cu $u \in C$ (C compact) şi poate fi integrată termen cu termen (părţile reală şi imaginară converg uniform şi aplicăm rezultatele de la integrale reale). Aşadar obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \sum_{n \geq 0} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n \geq 0} \left(\int_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du \right) \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n,$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece c_n nu depinde de punctul z, ci numai de f şi de z_0 şi cum seria $\sum\limits_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ este convergentă pentru orice $z \in B(z_0; r)$, rezultă că funcţia f este analitică pe A. $\square$

Observaţia 1.5. Din demonstraţie rezultă că , pentru o funcţie olomorfă f pe A, seria $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$ este convergentă cu suma $f(z)$ în discul $B(z_0;\rho)$ $(0 < r < \rho$, cu r arbitrar), unde ρ este distanţa de la punctul z_0 la frontiera deschisului A.

Definiţia 1.14. Se numeşte **serie Laurent centrată în punctul** $z_0 \in \mathbb{C}$ orice serie de funcţii de forma $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n, a_n \in \mathbb{C}$.

Definiţia 1.15. Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n, a_n \in \mathbb{C}$ se numeşte **convergentă** dacă seriile $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ şi $\sum\limits_{n\geq 1} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ sunt simultan convergente.

Definiţia 1.16. Seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ se numeşte **partea principală a seriei Laurent**, iar seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ se numeşte **partea Taylor a seriei Laurent**.

Teorema 1.9. *Fie seria Laurent* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ *şi fie* $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$*; presupunem că* $0 \leq r < R$*. Atunci :*

a) In coroana circulară $B(z_0;r,R) = \{z \in \mathbb{C}/r < |z-z_0| < R\}$ *seria Laurent converge absolut şi uniform pe compacţi.*

b) In mulţimea $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0;r,R)}$ *seria Laurent diverge.*

c) Suma seriei Laurent $S(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ *este o funcţie olomorfă pe coroana* $B(z_0;r,R)$.

Demonstraţie. a) Seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ are raza de convergenţă R şi converge absolut şi uniform pe compacţi în discul $B(z_0;R)$. Seria de puteri $\sum\limits_{n>0} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum\limits_{n>0} a_{-n}w^n$ (am notat $w = \frac{1}{z-z_0}$) are raza de convergenţă $\frac{1}{r}$, deci converge absolut şi uniform pe compacţi în discul $B(0,\frac{1}{r})$, deci în exteriorul discului $\overline{B}(z_0,r)$ $(|w| < \frac{1}{r} \iff |z-z_0| > r)$. Deci, seria Laurent (ca sumă a celor două serii de funcţii) converge absolut şi uniform pe compacţi în coroana circulară $B(z_0;r,R)$.

b) In $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0;r,R)}$ seria Laurent este suma a două serii, dintre care una este convergentă şi cealaltă divergentă , deci este divergentă .

c) Conform Teoremei 1.8, funcţia $S_1(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ este olomorfă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z-z_0| < R$ şi funcţia $S_2(w) = \sum\limits_{n>0} a_{-n}w^n$ este olomorfă pentru orice $w \in \mathbb{C}$ cu $|w| < \frac{1}{r}$.

Funcţia $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\right\} \longrightarrow \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \frac{1}{r}\right\}$, $z \longrightarrow w = \frac{1}{z - z_0}$ este olomorfă , deci compunerea $S_2(z) = \sum\limits_{n>0} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ este o funcţie olomorfă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z - z_0| > r$. Atunci $S(z) = S_1(z) + S_2(z)$ este o funcţie olomorfă pentru orice $z \in B(z_0; r; R)$. Mai mult, $S'(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n a_n (z - z_0)^{n-1}$. □

Teorema 1.10. *Fie $f\colon B(z_0; r, R) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana circulară $D = B(z_0; r, R)(0 \leq r < R)$. Atunci există o unică serie Laurent $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ a cărei coroană de convergenţă include coroana D astfel încât în D avem $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$.*

Exemplul 1.23. Să se determine discul de convergenţă pentru următoarele serii :

a) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2^{100n}}{n!} z^n$; b) $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{2+3\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}\right)^n (z - \pi)^n$

Demonstraţie. a) $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{100(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{2^{100n}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{100}}{n+1}} = \infty$, deci mulţimea de convergenţă este $\mathbb{C}$.

b) $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\dfrac{2+3\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}\right|^n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{2+3\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}\right|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}}} = \sqrt{2}$, deci discul de convergenţă este $|z - \pi| < \sqrt{2}$ □

Exemplul 1.24. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

în următoarele domenii:

a) $|z| < 1$; b) $1 < |z| < 2$; c) $2 < |z| < 3$; d) $|z| > 3$.

Demonstraţie. Funcţia f are ca poli rădăcinile ecuaţiei $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$, adică punctele $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3$.

a) In cercul $|z| < 1$, funcţia f este olomorfă , deci dezvoltabilă în serie Taylor în acest domeniu.

$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2(z-3)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$

In acest domeniu avem $|z| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1$.

Atunci $f(z) = -\frac{1}{2} \sum\limits_{n\geq 0} z^n + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{2^n} - \dfrac{1}{6} \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{3^n} = \sum\limits_{n\geq 0} z^n \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$

b) In coroana circulară $1 < |z| < 2$, funcţia f este dezvoltabilă în serie Laurent.

In domeniul $1 < |z| < 2$ avem $\left|\frac{z}{2}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \left|\frac{1}{z}\right| < 1$, deci
$f(z) = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{6}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^n} =$
$= \sum\limits_{n\geq 0}\left[\frac{1}{2z^{n+1}} + z^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right]$

c) In domeniul $2 < |z| < 3$ avem $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{3}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$.

Atunci $f(z) = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} =$
$= \frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{6}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{z^n}{3^{n+1}} = \sum\limits_{n\geq 0}\left[\left(\frac{1}{2} - 2^n\right)\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^n}{3^{n+1}}\right]$.

d) In acest domeniu $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1, \left|\frac{3}{z}\right| < 1$.

Atunci $f(z) = \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} + \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} =$
$= \frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^n} + \frac{1}{2z}\sum\limits_{n\geq 0}\frac{3^n}{z^n} = \sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}\left(\frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2}\right)$. □

Exemplul 1.25. Să se dezvolte funcţia $f(z) = \frac{2z^2+3z-1}{z^3+z^2-z-1}$ în jurul originii şi în jurul lui $z = \pm 1$.

Demonstraţie. $z^3 + z^2 - z - 1 = 0 \Longrightarrow (z-1)(z+1)^2 = 0$, deci $z = 1$ e pol simplu, iar $z = -1$ e pol dublu

Scriem $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}$

Cum $\frac{1}{z+1} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n z^n$, prin derivare obţinem

$-\frac{1}{(z+1)^2} = \sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n n z^{n-1} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^{n+1}(n+1)z^n$.

Pe $|z| < 1$, f este olomorfă şi
$f(z) = -\sum\limits_{n\geq 0}z^n + \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n z^n + \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)z^n =$
$= \sum\limits_{n\geq 0}z^n[-1 + (-1)^n + (-1)^n(n+1)]$

Pentru a dezvolta în jurul punctului $z = -1$ scriem
$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}$.

Pe $|z+1| < 2$ avem $\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$.

Deci $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\sum\limits_{n\geq 0}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$.

Pentru a dezvolta în jurul punctului $z = 1$ scriem
$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^2}$.

Pe $|z-1| < 2$, $\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$ şi

$\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^2} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{(n+1)(z-1)^n}{2^n}$.

Atunci $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{n+3}{2^{n+2}}(z-1)^n$. $\square$

Exemplul 1.26. Să se dezvolte funcţia $f(z) = \sin\frac{z}{z-1}$ în jurul punctului $z = 1$.

Demonstraţie. Avem $\sin\frac{z}{z-1} = \sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = \sin 1\cos\frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin\frac{1}{z-1}$.

Se ştie că

$\sin\frac{1}{z-1} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$

$\cos\frac{1}{z-1} = \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}}$

Atunci $f(z) = \sin 1\cdot\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + \cos 1\cdot\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$

$\square$

Exemplul 1.27. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)\sin z}$ în coroana $0 < |z| < 1$.

Demonstraţie. $\frac{1}{\sin z}$ are polii $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, deci în coroana $0 < |z| < 1$ este olomorfă

$\frac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots} = \frac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots}$

$\dfrac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots}$ este olomorfă în interiorul cercului $|z| = 1$, deci se poate dezvolta în serie Taylor şi putem scrie $\dfrac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ şi identificând coeficienţii obţinem $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{6}, a_3 = 0, a_4 = \frac{7}{360}$ etc., deci $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z}\cdot(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \ldots)$ şi ţinând cont de $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$, obţinem $f(z) = \frac{1}{z^3}\cdot(1 + z + z^2 + \ldots)\cdot(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \ldots)$. $\square$

1.5 Puncte singulare. Reziduuri. Teorema reziduurilor

Definiţia 1.17. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă nevidă şi fie $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe A. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte **punct singular izolat al lui** f dacă există un disc $B(z_0, r)(r > 0)$ astfel încât $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset A$ (adică funcţia f este olomorfă pe discul punctat $B(z_0; 0, r) = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$).

Pe coroana $B(z_0; 0, r)$ funcţia olomorfă f are o dezvoltare în serie Laurent $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Exemplul 1.28. Punctul $z = 2$ este un punct singular izolat pentru funcţiile $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z-2}$.

Exemplul 1.29. Punctele $z = 0, \pm \mathrm{i}$ sunt puncte singulare izolate ale funcţiei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0, \pm \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$.

Definiţia 1.18. Fie $f\colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă , unde $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă nevidă şi fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat al lui f. Punctul singular izolat z_0 se numeşte **punct singular aparent** dacă seria Laurent $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ are partea principală nulă , adică $a_n = 0, \forall n < 0$.

Definiţia 1.19. Punctul singular izolat z_0 se numeşte **pol** dacă în seria Laurent $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ partea principală are un număr finit de termeni nenuli, adică există $m \in \mathbb{Z}, m < 0$ astfel încât $a_m \neq 0$ şi $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ cu $n < m$. Numărul natural $-m$ se numeşte **ordinul polului** z_0. Polii de ordinul întâi se mai numesc **simpli**.

Definiţia 1.20. Punctul singular izolat z_0 se numeşte **punct singular esenţial** dacă partea principală a seriei Laurent $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ are o infinitate de termeni nenuli.

Lema 1.3. *Fie $f\colon B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Dacă $|f(z)| \leq M$, pentru orice $z \in B(z_0; 0, r)$, atunci z_0 este punct singular aparent al lui f.*

Demonstraţie. In coroana $B(z_0; 0, r)$ avem seria Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

unde

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

şi $C = \{t \in \mathbb{C} |\ |t - z_0| = \rho\} (0 < \rho < r)$. Putem scrie:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{|f(t)|}{|t-z_0|^{n+1}} ds \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}$$

Pentru $n < 0$ avem $|a_n| \leq M\rho^{-n}$ şi când $\rho \longrightarrow 0$ obţinem $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}, n < 0$, deci $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, adică z_0 este punct singular aparent al lui f. ☐

Propoziţia 1.2. Fie $f\colon B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Atunci punctul z_0 este punct singular aparent pentru f dacă şi numai dacă există şi este finită $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Demonstraţie. Fie z_0 punct singular aparent al lui f. Atunci în coroana $B(z_0;0,r)$ avem dezvoltarea Laurent $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ şi $\lim_{z\to z_0}f(z)=a_0\in\mathbb{C}$.

Reciproc, fie $a_0=\lim_{z\to z_0}f(z)\in\mathbb{C}$. Pentru $\varepsilon=1$ $\exists\delta>0$ astfel încât $|z-z_0|<\delta<r$ $(z\neq z_0)$ rezultă $|f(z)-a_0|<1$. Atunci rezultă $|f(z)|\leq |a_0|+1$, $\forall z\in B(z_0;0,r)$. Conform Lemei 1.3 rezultă că z_0 este punct singular aparent al lui f. □

Exemplul 1.30. Punctul $z=0$ este o singularitate aparentă pentru $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, deoarece $\lim_{z\to 0}f(z)=1$.

Propoziţia 1.3. Fie $f\colon B(z_0;0,r)\to\mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0;0,r)$. Atunci punctul z_0 este pol pentru f dacă şi numai dacă

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty.$$

Demonstraţie. Fie z_0 pol de ordinul $-m=k$ al lui f.

Deci $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^{-m}}[a_m+a_{m-1}(z-z_0)+\ldots+a_0(z-z_0)^{-m}+\ldots]=\frac{h(z)}{(z-z_0)^{-m}}$, unde $h(z)=a_m+a_{m-1}(z-z_0)+\ldots+a_0(z-z_0)^{-m}+\ldots$ este olomorfă în discul $B(z_0,r)$ şi $h(z_0)\neq 0$. Atunci $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

Reciproc, fie $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$. Pentru $\varepsilon=1$ $\exists\delta>0$ astfel încât $|z-z_0|<\delta<r$ $(z\neq z_0)$ rezultă $|f(z)|>1$. Notând $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ avem $|g(z)|<1$ pentru orice $z\in B(z_0;0,\delta)$. Funcţia $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ este definită în coroana $B(z_0;0,\delta)$ $(f(z)\neq 0)$, este olomorfă în această coroană (ca inversa funcţiei olomorfe nenule f) şi mărginită . Aplicând Lema 1.3 rezultă că z_0 este punct singular aparent pentru g. Mai mult, $\lim_{z\to z_0}g(z)=0$, deci seria Laurent pentru g este $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ \ z\in B(z_0,\delta)$. Putem scrie

$$g(z)=(z-z_0)^k\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n-k},k>0,a_k\neq 0,$$

deoarece z_0 este zerou al funcţiei olomorfe g. Atunci

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k\varphi(z)},\ \ \forall z\in B(z_0,\delta_1),$$

cu $0<\delta_1<\delta<r$ şi $\varphi(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n-k}\neq 0$ în $B(z_0,\delta_1)$ (fapt ce rezultă din continuitatea funcţiei olomorfe φ şi din $\varphi(z_0)\neq 0$). Rezultă că $\frac{1}{\varphi(z)}$ este olomorfă în discul $B(z_0,\delta_1)$ şi are o dezvoltare Taylor în acest disc:

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n,\ \ \alpha_0\neq 0.$$

Pentru funcţia f obţinem în coroana $B(z_0; 0, \delta_1)$ seria

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}[\alpha_0 + \alpha_1(z-z_0) + \ldots + \alpha_n(z-z_0)^n + \ldots],$$

adică o serie Laurent cu un număr finit de termeni nenuli în partea principală deci z_0 este pol pentru f. □

Exemplul 1.31. Punctul $z = 1$ este un pol simplu pentru $f(z) = \frac{z}{z-1}$. Intr-adevăr, $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \infty$, iar dezvoltarea Laurent a lui f în jurul lui $z = 1$ este $f(z) = \frac{1+z-1}{z-1} = \frac{1}{z-1} + 1$, cu partea principală $\frac{1}{z-1}$.

Exemplul 1.32. Punctul $z = 2$ este pol dublu pentru $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z-2)^3}$. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem $\sin \pi z = a_0 + a_1(z-2) + a_2(z-2)^2 + \ldots$, unde $a_0 = 0, a_1 = \pi, a_2 = 0, a_3 = -\frac{\pi^3}{6}$ etc., deci $f(z) = \frac{\pi}{(z-2)^2} - \frac{\pi^3}{6} + \ldots$

Propoziţia 1.4. Fie $f\colon B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Atunci punctul z_0 este punct singular esenţial pentru f dacă şi numai dacă nu există $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Demonstraţie. Rezultă din Propoziţia 1.2 şi Propoziţia 1.3. □

Exemplul 1.33. Pentru funcţia $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ punctul $z = 0$ este punct singular esenţial, deoarece $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots$ şi partea principală are o infinitate de termeni nenuli. Analog, $z = 0$ este singular esenţial pentru $g(z) = \sin \frac{1}{z}$ şi $h(z) = \cos \frac{1}{z}$.

Cazul punctului de la infinit

Fie $f\colon B(0; r, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(0; r, \infty)$ (exteriorul unui disc). Vom spune că **punctul ∞ este punct singular izolat al lui f**. Funcţia $(t \mapsto z = \frac{1}{t})\colon B(0; 0, \frac{1}{r}) \to B(0; r, \infty)$ este olomorfă ; compunând cu f obţinem funcţia olomorfă $f^*\colon B(0; 0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$, $f^*(t) = f(\frac{1}{t}), \forall t \in B(0; 0, \frac{1}{r})$ care are punctul $t = 0$ ca punct singular izolat.

Vom spune că $z = \infty$ este un **punct singular aparent al lui** f (sau că funcţia f este olomorfă în $z = \infty$) dacă funcţia f^* are $t = 0$ ca punct singular aparent. Vom spune că $z = \infty$ este **pol al lui** f dacă funcţia f^* are $t = 0$ ca pol. Vom spune că $z = \infty$ este **punctul singular esenţial al lui** f dacă funcţia f^* are $t = 0$ ca punct singular esenţial.

Observaţia 1.6. Fie $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ dezvoltarea în serie Laurent a lui f în coroana $|z| > r$. Atunci $f^*(t) = f(\frac{1}{t}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^{-n}$ este dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f^* în coroana $B(0; 0, \frac{1}{r})$. Rezultă că $z = \infty$ este punct singular aparent al lui f dacă $a_n = 0, \forall n \geq 1$; $z = \infty$ este pol al lui f dacă $a_n = 0, \forall n \geq 1$, cu excepţia unui număr finit de valori şi $z = \infty$ este punct singular esenţial al lui f dacă $a_n \neq 0$ pentru o infinitate de valori ale lui $n \geq 1$.

Exemplul 1.34. Funcţia $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ are $z = 1$ pol simplu şi $z = \infty$ este punct singular esenţial.

Definiţia 1.21. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă nevidă , fie $f \colon A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi fie discul punctat (coroana) $B(z_0; 0, r) \subset A (z_0 \in \mathbb{C}, r > 0)$ astfel încât punctul z_0 să fie punct singular izolat al funcţiei f.

Fie $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f în coroana $B(z_0; 0, r)$. Coeficientul a_{-1} se numeşte **reziduul funcţiei** f în punctul singular z_0 şi se notează $\mathrm{Rez}(f, z_0)$.

Exemplul 1.35. Să se calculeze reziduul funcţiei $f(z) = \frac{1}{z \sin z^2}$ în punctul $z = 0$.

Demonstraţie. Avem $\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \Longrightarrow z \sin z^2 =$
$= z\left(\frac{z^2}{1!} - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \ldots\right) = z^3\left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \ldots\right) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{z^3\left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \ldots\right)}$

Există o serie de puteri $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ astfel încât

$$\left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \ldots\right) \cdot (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) = 1,$$

deci $a_0 = 1, a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 = 0, a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = 0 \Longrightarrow a_2 = 0$.

Atunci $f(z) = \frac{1}{z^3} \displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n z^n = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + a_3 + \ldots$, deci $\mathrm{Rez}(f, 0) =$
$= a_2 = 0$ □

Propoziţia 1.5. Fie $C = \left\{z \in \mathbb{C} / |z - z_0| = \rho < r\right\}$ un cerc de rază $\rho > 0$ parcurs în sens trigonometric direct (orientat pozitiv). Atunci

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C f(z) dz$$

Observaţia 1.7. Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ este un punct singular aparent pentru funcţia f, atunci $\mathrm{Rez}(f, z_0) = a_{-1} = 0$.

Propoziţia 1.6. Fie $f \colon B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$ şi fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un pol de ordinul $k > 0$ pentru f. Atunci

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}$$

Demonstraţie. In coroana $B(z_0; 0, r)$ avem dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$$

cu $a_{-k} \neq 0$. Atunci funcţia

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \ldots$$

este o funcţie olomorfă în coroana $B(z_0; 0, r)$, deoarece $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} \in \mathbb{C}$. Derivând de $k-1$ ori funcţia obţinută rezultă

$$[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)} = (k-1)!a_{-1} + k(k-1)\ldots 2a_0(z-z_0) + \ldots$$

şi atunci obţinem

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)} = (k-1)!a_{-1}$$

□

Corolarul 1.7. *Fie* $f\colon B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ *o funcţie olomorfă în coroana* $B(z_0; 0, r)$ *astfel încât* $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \forall z \in B(z_0; 0, r)$, *cu* P, Q *funcţii olomorfe în discul* $B(z_0; r), P(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$. *Atunci punctul* $z_0 \in \mathbb{C}$ *este un pol de ordinul întâi pentru* f *şi Rez*$(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

Demonstraţie. Punctul z_0 este zerou de ordinul întâi pentru funcţia $\frac{P(z)}{Q(z)}$, deci pol de ordinul întâi pentru f. Aplicând Propoziţia 1.6 pentru $k = 1$ obţinem

$$\mathrm{Rez}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

□

Exemplul 1.36. Calculaţi reziduurile funcţiei $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2(1+z)}$ în punctele singulare.

Demonstraţie. Punctele singulare ale funcţiei f sunt $z = -1$ pol simplu şi $z = 0$ pol dublu.

$$\mathrm{Rez}(f, -1) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2(1+z)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{Rez}(f, 0) = \lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2(1+z)}\right]' = \mathrm{i} - 1$$

□

Definiţia 1.22. Fie $f\colon B(0; r, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă în exteriorul discului $B(0, r)$ (deci $z = \infty$ este punct singular izolat pentru funcţia f). Se numeşte **reziduul funcţiei** f **în punctul** ∞, reziduul funcţiei $(-\frac{1}{t^2})f(\frac{1}{t})$ în punctul $t = 0$.

Propoziţia 1.7. Fie $C = \left\{z \in \mathbb{C}/|z| = \rho > r\right\}$ un cerc de rază ρ parcurs în sens trigonometric direct (orientat pozitiv). Atunci

$$\mathrm{Rez}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(z)dz.$$

Teorema 1.11. ***(teorema reziduurilor)*** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $f\colon D \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pentru care $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt puncte singulare izolate. Fie $K \subset D$ un compact cu frontiera $\Gamma = FrK$ curbă de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni, jordaniană , orientată pozitiv astfel încât $\alpha_j \in IntK, j = \overline{1,k}$. Atunci*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} Rez(f, \alpha_j)$$

Demonstraţie. Fie $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ frontierele orientate pozitiv ale unor discuri centrate în $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ disjuncte două câte două şi conţinute în $\mathrm{Int}K$. Rezultă

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Atunci, din Propoziţia 1.5, obţinem

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, \alpha_j).$$

□

Corolarul 1.8. *Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ punctele singulare izolate ale unei funcţii $f\colon \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \to \mathbb{C}$, olomorfe pe $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. Atunci $\sum\limits_{j=1}^{k} Rez(f, \alpha_j) + Rez(f, \infty) = 0$ (suma tuturor reziduurilor este nulă în cazul unui număr finit de puncte singulare izolate).*

Demonstraţie. Alegem $r > 0$ astfel încât $\alpha_j \in B(0,r), j = \overline{1,k}$. Rezultă că funcţia este olomorfă în exteriorul discului $B(0,r)$, deci punctul $z = \infty$ este punct singular izolat pentru f. Fie $\Gamma = \mathrm{Fr}B(0,r')(r' > r)$ frontiera orientată pozitiv a discului $B(0,r')$ şi aplicând Teorema 1.11,

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, \alpha_j).$$

Din Propoziţia 1.7 rezultă că $\int_\Gamma f(z)dz = -2\pi \mathrm{i}\mathrm{Rez}(f, \infty)$, deci

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, \alpha_j) + \mathrm{Rez}(f, \infty) = 0.$$

□

Exemplul 1.37. Să se rezolve integrala

$$\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)} dz, r > 0, r \neq 1, r \neq 2.$$

Demonstraţie. 1) Dacă $0 < r < 1$, aplicăm teorema lui Cauchy şi obţinem $\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)} dz = 0$.

2) Dacă $1 < r < 2$, aplicăm formula integrală a lui Cauchy şi obţinem $\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)} dz = \int_{|z|=r} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{z-2}}{z-\mathrm{i}} dz = 2\pi \mathrm{i} f(\mathrm{i}) = 2\pi \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-2}$, unde $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z-2}$.

3) Dacă $r > 2$, aplicăm teorema reziduurilor.

Punctele i şi 2 sunt poli simpli. Calculăm reziduurile în aceste puncte :

$\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i}) = \lim\limits_{z \to \mathrm{i}} (z-\mathrm{i}) \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-2}$

$\mathrm{Rez}(f, 2) = \lim\limits_{z \to 2} (z-2) \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2-\mathrm{i}}$

Atunci $\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})(z-2)} dz = 2\pi \mathrm{i} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-2} + \frac{\mathrm{e}^2}{2-\mathrm{i}} \right) = 2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \mathrm{e}^2}{\mathrm{i}-2}$. □

1.6 Calculul unor integrale reale folosind teorema reziduurilor

Tipul I: $I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$, unde $R(x, y)$ este o funcţie raţională al cărei numitor nu se anulează pe cercul unitate.

Aceste integrale se calculează făcând schimbarea $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$. Atunci z va parcurge cercul unitate, adică $|z| = 1$. Avem $dz = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} dt = \mathrm{i} z dt$, deci $dt = \frac{dz}{\mathrm{i}z}$. Cum $\sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2\mathrm{i}}, \cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$, integrala devine $I = \int_{|z|=1} \frac{1}{\mathrm{i}z} R(\frac{z - \frac{1}{z}}{2\mathrm{i}}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}) dz$.

Exemplul 1.38. Să se calculeze $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2} dt$.

Demonstraţie. Deoarece $\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$ vom face schimbarea de variabilă $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi]$, deci $dz = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} dt$ şi $|z| = 1$.

Integrala devine

$$\int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{\mathrm{i}z} dz}{\left(2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = \frac{4}{\mathrm{i}} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} dz.$$

Funcţia $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}, z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -2 \pm \sqrt{3} \right\}$ e olomorfă şi are polii dubli $-2 \pm \sqrt{3}$.

Aplicăm teorema reziduurilor, ţinând cont de faptul că doar $-2 + \sqrt{3}$ se află în interiorul cercului de centru 0 şi rază 1 şi rezultă că

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} dz = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Rez}(f, -2 + \sqrt{3}).$$

Calculăm $\mathrm{Rez}(f, -2+\sqrt{3}) = \lim\limits_{z\to -2+\sqrt{3}} [(z+2-\sqrt{3})^2 f(z)]' = \dfrac{1}{6\sqrt{3}} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+4z+1)^2} dz = \frac{\pi \mathrm{i}}{3\sqrt{3}} \Longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2} dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ □

Tipul II: $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$, unde $R(x)$ este o funcţie raţională fără poli reali cu proprietatea că $\lim\limits_{|x|\to\infty} xR(x) = 0$ (condiţie suficientă ca integrala să fie convergentă).

Considerăm extinderea $R(z)$, $z \in \mathbb{C}$ şi o integrăm pe un semicerc $\gamma_r = [-r, r] \cup \delta(r)$ de rază r cu centrul în O. Obţinem $\int_{\gamma_r} R(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum\limits_k \mathrm{Rez}(R, \alpha_k)$, unde α_k sunt polii din semidisc. Deci

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{\delta(r)} R(z)dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_k \mathrm{Rez}(R, \alpha_k).$$

Cum $\lim\limits_{r\to\infty} \displaystyle\int_{-r}^{r} R(x)dx = I$, vom arăta că $\int_{\delta(r)} R(z)dz \longrightarrow 0$ când $r \longrightarrow \infty$ şi vom obţine că $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi \mathrm{i} \sum\limits_k \mathrm{Rez}(R, \alpha_k)$, unde suma se ia după toţi polii lui $R(z)$ din semiplanul $y > 0$ (funcţia raţională $R(z)$ are un număr finit de poli, deci pentru r suficient de mare toţi polii din semiplanul $y > 0$ se află în semidiscul de rază r). Pentru a arăta că $\int_{\delta(r)} R(z)dz \longrightarrow 0$ când $r \longrightarrow \infty$, vom folosi lema următoare :

Lema 1.4. ***(Jordan)*** *Fie f o funcţie continuă definită în sectorul $\theta_1 \le \theta \le$ $\le \theta_2$ ($z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$). Dacă $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ ($\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$), atunci*

$$\int_{\delta(r)} f(z)dz \longrightarrow 0 \ \ \textit{când} \ \ r \longrightarrow \infty,$$

unde $\delta(r)$ este arcul de cerc centrat în origine de rază r conţinut în sectorul $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

Demonstraţie. Fie $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Atunci avem

$$\left| \int_{\delta(r)} f(z)dz \right| \le M(r) \int_{\delta(r)} ds = M(r) r(\theta_2 - \theta_1),$$

şi cum $\lim\limits_{r\to\infty} rM(r) = 0$, rezultă că $\int_{\delta(r)} f(z)dz \longrightarrow 0$, când $r \longrightarrow \infty$. □

Exemplul 1.39. Să se calculeze integrala $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$.

Demonstraţie. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \dfrac{x^2}{(1+x^2)^3} = 1$ pentru $\alpha = 4 > 1$, deci integrala $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$ este convergentă .

Funcţia $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$ este pară , deci $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$.
Fie $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^3}, z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$ olomorfă .
Punctele $\pm\mathrm{i}$ sunt poli de ordinul 3 pentru f
Fie $r > 1$ şi $\gamma_r = [-r, r] \cup \delta_r$, unde $\delta_r = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, t \in [0, \pi]$.
Aplicăm teorema reziduurilor şi obţinem $\int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i})$
$\mathrm{Rez}(f, \mathrm{i}) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to\mathrm{i}} \left[(z - \mathrm{i})^3 \left(\frac{z^2}{(1+z^2)^3}\right)\right]'' = -\frac{\mathrm{i}}{16}$
Deci $\int_{\gamma_r} f(z)dz = \frac{\pi}{8}$.

Dar $\frac{\pi}{8} = \int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{-r}^r \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx + \int_{\delta_r} f(z)dz$. In această relaţie trecem la limită când $r \longrightarrow \infty$ şi obţinem $\frac{\pi}{8} = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$, deoarece $\lim_{r\to\infty} \int_{\delta_r} f(z)dz = 0$ conform Lemei 1.4 ($\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} z \cdot \frac{z^2}{(1+z^2)^3} = 0$).
Aşadar, $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{\pi}{16}$. □

Lema 1.5. ***(Jordan)*** *Fie f o funcţie continuă definită în sectorul $\theta_1 \le \theta \le$ $\le \theta_2$ $(z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. Dacă $\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0$ $(\theta_1 \le \arg z \le \theta_2)$, atunci*

$$\int_{\delta(r)} f(z)dz \longrightarrow 0 \ \text{ când } \ r \longrightarrow 0,$$

unde $\delta(r)$ este arcul de cerc centrat în origine de rază r conţinut în sectorul $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

Tipul III: $I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}dx$, unde $f(z)$ este olomorfă în semiplanul $y > 0$ cu excepţia, eventual, a unei mulţimi finite de puncte.

Presupunem că punctele singulare nu sunt pe axa reală . Atunci integrala $\int_{-r}^r f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}dx$ are sens (sunt două integrale reale $\int_{-r}^r f(x)\cos x dx$ şi $\int_{-r}^r f(x)\sin x dx$) şi când $r \longrightarrow \infty$, tinde la $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}dx$, dacă acestă integrală converge.

Lema 1.6. *Dacă $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ pentru $y \ge 0$, atunci*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^r f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_k Rez(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}, \alpha_k),$$

unde suma se ia după toate punctele singulare ale lui $f(z)$ situate în semiplanul $y > 0$.

Demonstraţie. Pentru $y \ge 0$ avem $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| = \mathrm{e}^{-y} \le 1$ şi vom aplica aceeaşi metodă ca la integralele de tip II.

Cu aceleaşi notaţii vom arăta că $\int_{\delta(r)} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}dz \longrightarrow 0$ când $r \longrightarrow \infty$ şi rezultă lema. □

Lema 1.7. *Fie f o funcţie continuă definită în sectorul $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ din semiplanul $y \ge 0$. Dacă $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, atunci*

$$\int_{\delta(r)} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} dz \longrightarrow 0 \text{ când } r \longrightarrow \infty,$$

unde $\delta(r)$ este arcul de cerc centrat în origine de rază r conţinut în sectorul $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

Demonstraţie. Fie $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, M(r) = \sup\limits_{\theta_1\le\theta\le\theta_2} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|$.

Avem $\left|\int_{\delta(r)} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}dz\right| \le M(r)\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin\theta} r d\theta$.

Dar $\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin\theta} r d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin\theta} r d\theta$ şi, deoarece, dacă $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, atunci $\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$, rezultă că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin\theta} r d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}r\theta} r d\theta \le \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}r\theta} r d\theta = \frac{\pi}{2},$$

deci $\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin\theta} r d\theta \le \pi$.

Obţinem $\left|\int_{\delta(r)} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}dz\right| \le M(r)\pi$ şi pentru $r \longrightarrow \infty$, $M(r) \longrightarrow 0$ prin ipoteză . □

Exemplul 1.40. Să se calculeze $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^4+4)}dx$.

Demonstraţie. Considerăm integrala $I = \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$, unde $\gamma_r = [-r, r] \cup \delta_r, r > 2$

Funcţia $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ este olomorfă cu polii simpli $\pm\mathrm{i}, \pm 2\mathrm{i}$.

Cum polii i şi 2i sunt in interiorul conturului γ_r, aplicăm teorema reziduurilor şi avem $I = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Rez}(f,\mathrm{i}) + \mathrm{Rez}(f, 2\mathrm{i}))$.

Calculăm $\mathrm{Rez}(f,\mathrm{i}) = \lim\limits_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})f(z) = \lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+4)(z+\mathrm{i})} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{6\mathrm{i}} = \dfrac{1}{6\mathrm{i}\mathrm{e}}$.

$\mathrm{Rez}(f, 2\mathrm{i}) = \lim\limits_{z\to 2\mathrm{i}}(z-2\mathrm{i})f(z) = \lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z+2\mathrm{i})} = -\dfrac{1}{12\mathrm{i}\mathrm{e}^2}$

Deci $I = \frac{(2\mathrm{e}-1)\pi}{6\mathrm{e}^2}$.

Pe de altă parte $I = \int_{-r}^r \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx + \int_{\delta_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$. In această relaţie trecem la limită când $r \longrightarrow \infty$ şi obţinem $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx =$ $= \frac{(2\mathrm{e}-1)\pi}{6\mathrm{e}^2}$, deoarece, conform lemei lui Jordan, $\lim\limits_{r\to\infty}\displaystyle\int_{\gamma_r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}dz =$ $= 0$ $\left(|zf(z)| = \left|\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| < \frac{\mathrm{e}^{-y}}{|z|^3}(y > 0) \Longrightarrow \lim\limits_{|z|\to\infty}|zf(z)| = 0\right)$

Dar $\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{(x^2+1)(x^4+4)}dx \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^4+4)}dx =$ $= \frac{(2\mathrm{e}-1)\pi}{12\mathrm{e}^2}$. □

1.7 Probleme propuse

1. Să se studieze care dintre următoarele funcţii este olomorfă :

   a) $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{1}{z}$; b) $g\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g(z)=z^2+\mathrm{i}\overline{z}$;

   c) $h\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h(z)=\mathrm{e}^{2z}+z$; d) $k\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $k(z)=\overline{z}$

   R: a) f este olomorfă ; b) g nu este olomorfă ; c) h este olomorfă ; d) k nu este olomorfă

2. Să se determine constantele corespunzătoare astfel încât următoarele funcţii să fie olomorfe:

   a) $f_1(z)=x+ay+\mathrm{i}(bx+cy)$;

   b) $f_2(z)=x^2+axy+by^2+\mathrm{i}(cx^2+dxy+y^2)$.

   c) $f_3(z)=\cos x(\mathrm{ch}y+a\mathrm{sh}y)+\mathrm{i}\sin x(\mathrm{ch}y+b\mathrm{sh}y)$.

   R: a) $b=-a, c=1$; b) $a=d=2, b=c=-1$; c) $a=b=-1$.

3. Să se determine punctele în care funcţia $f(z)=x^2-4xy+y+\mathrm{i}(3x-y^2)$ este olomorfă şi să se calculeze derivatele în aceste puncte.

   R: $z=1+\mathrm{i}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(1+\mathrm{i})=-2+3\mathrm{i}$

4. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ pentru funcţiile $f_1(z)=z^2$ şi $f_2(z)=z\cdot|z|^2$.

   R: $\frac{\partial f_1}{\partial z}=2z$, $\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}=0$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}=2|z|^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}}=z^2$

5. Să se determine funcţia olomorfă $f=P+\mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$ astfel încât $P(x,y)=x^2-y^2$ şi $f(0)=0$.

   R: $f(z)=z^2$

6. Să se determine funcţia olomorfă $f=P+\mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$ astfel încât $P(x,y)=\sin x\mathrm{ch}y$ şi $f(0)=0$.

   R: $f(z)=\sin z$

7. Să se determine funcţia olomorfă $f=P+\mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$ astfel încât $Q(x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y$.

   R: $f(z)=2\mathrm{i}\ln z-(2-\mathrm{i})z+k$

8. Să se determine funcţia olomorfă $f=P+\mathrm{i}Q$ pe $\mathbb{C}$ astfel încât $Q(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-\frac{y}{x^2+y^2}$ şi $f(1)=\mathrm{e}$.

   R: $f(z)=\mathrm{e}^z+\frac{1}{z}-1$

9. Calculaţi :

   a) $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\pi}$; b) $\mathrm{e}^{\frac{7\pi\mathrm{i}}{2}}$; c) $\mathrm{Ln}(-10)$; d) $\mathrm{i}^{\frac{1}{2}}$; e) $\sin(\mathrm{i}\mathrm{Ln}(-1))$; f) $\mathrm{i}^{1-\mathrm{i}}$; g) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{\mathrm{i}}$

   R: a) $-\mathrm{e}^{\pi}$; b) $-\mathrm{i}$; c) $\ln 10+\mathrm{i}(\pi+2k\pi)$; d) $(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) 0; f) $\mathrm{i}\mathrm{e}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$; g) $[\cos(\ln 2)+\mathrm{i}\sin(\ln 2)]\mathrm{e}^{-2k\pi-\frac{\pi}{3}}$

10. Rezolvaţi ecuaţiile :

    a) $\cos z = 2\mathrm{i}$; b) $\mathrm{sh}z = 0$; c) $\mathrm{ch}z = -1$; d) $\mathrm{Ln}z = (2 - \frac{\mathrm{i}}{2})\pi$; e) $\mathrm{th}z = 2$; f) $\mathrm{ctg}\, z = 1 + \mathrm{i}$

    R: a) $z = -\mathrm{i}\ln|2 \pm \sqrt{5}| + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; b) $z = k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$; c) $z = \mathrm{i}(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; d) $z = -\mathrm{i}e^{2\pi}$; e) $z = \frac{1}{2}[\ln 3 + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi)]$;
    f) $z = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\ln\sqrt{5} + \mathrm{i}(2k\pi + \mathrm{arctg}\, 2)]$

11. Să se determine discurile de convergenţă pentru următoarele serii :

    a) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}(z - 3\mathrm{i})^n$; b) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^n}{n!}(z + 2\mathrm{i})^n$; c) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{4^n}{(1+\mathrm{i})^n}(z - 5)^n$;
    d) $\sum\limits_{n\geq 0} a^{n^2} z^n, |a| < 1$; e) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\cos \mathrm{i}n}{2^n} z^n$; f) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{\mathrm{i}n}}{n^2} z^n$; g) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(z + 3\mathrm{i})^n}{n2^n}$;
    h) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{1 - 3\mathrm{i}n}{n + 2\mathrm{i}}\right) z^n$.

    R: a) $|z - 3\mathrm{i}| < \frac{1}{4}$; b) $|z + 2\mathrm{i}| < \frac{1}{e}$; c) $|z - 5| < \frac{\sqrt{2}}{4}$; d) $\mathbb{C}$; e) $|z| < \frac{2}{e}$;
    f) $|z| < 1$; g) $|z + 3\mathrm{i}| < 2$; h) $|z| < \frac{1}{3}$

12. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcţia $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ în următoarele domenii:

    a) $|z| < 1$; b) $1 < |z| < 2$; c) $|z| > 2$.

    R: a) $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} z^n$; b) $f(z) = \sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{1}{z^n} + \dfrac{z^n}{2^{n+1}}\right)$;
    c) $f(z) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n - 1}{z^{n+1}}$

13. Să se determine dezvoltările în serie după puterile lui z ale funcţiei $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$.

    R: Dacă $|z| < 1$, $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \left(-1 + \dfrac{3n + 7}{4^{n+2}}\right) \cdot \dfrac{z^{2n}}{9}$

    Dacă $1 < |z| < 2$, $f(z) = \frac{1}{9}\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{z^{2n}} + \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{3n + 7}{4^{n+2}} \dfrac{z^{2n}}{9}$

    Dacă $|z| > 2$, $f(z) = \sum\limits_{n\geq 3} [(3n - 7)4^{n-2} + 1] \dfrac{1}{9z^{2n}}$

14. Să se determine singularităţile şi să se precizeze natura lor:

    a) $f(z) = \frac{2z^4 + 3z - 5}{z^2(z-1)^4}$; b) $f(z) = \frac{z^5}{(z^2+1)^2}$; c) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, d) $f(z) = \sin\frac{\pi}{z}$, e) $f(z) = \frac{1}{\mathrm{ch}z}$, f) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3}$

    R: a) $z = 0$ pol de ordin 2, $z = 1$ pol de ordin 4; b) $z = \pm\mathrm{i}$ poli de ordin 2, c) $z = 0$ pol simplu; d) $z = \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$ poli simpli;
    e) $z = 0$ pol simplu, $z = \infty$ punct singular esenţial

15. Să se calculeze reziduurile în punctele indicate :

    a) $f(z) = z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}, z_0 = 0$; b) $f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z}, z_0 = 0$; c) $f(z) = z^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$, $z_0 = 1$.

    R: a) $\mathrm{Rez}(f, 0) = \frac{1}{2}$; b) $\mathrm{Rez}(f, 0) = \frac{1}{24}$; c) $\mathrm{Rez}(f, 1) = \frac{13}{6}$

16. Să se calculeze următoarele integrale:

    a) $\int_{|z|=1} \frac{1}{\overline{z}}dz$, b) $\int_{|z|=1} \overline{z}^2dz$, c) $\int_{|z|=1} \frac{1}{3z-\pi\mathrm{i}}dz$, d) $\int_{|z-\frac{\pi\mathrm{i}}{4}|=\frac{1}{2}} \mathrm{th}z dz$,
    e) $\int_\gamma \frac{\mathrm{tg}\, z}{z-\mathrm{i}}dz$, unde γ este triunghiul cu vârfurile 0 şi $\pm1 + 2\mathrm{i}$,
    f) $\int_{|z-\mathrm{i}|=3} \frac{\cos z}{(z-\pi\mathrm{i})^2}dz$, g) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2(z^2+4)}dz$, h) $\int_{|z|=3} z^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}dz$,
    i) $\int_{|z|=1} \frac{z^2+\mathrm{e}^z}{z^3}$, j) $\int_\gamma \left(\frac{z\mathrm{e}^{\pi z}}{z^4-16} + z\mathrm{e}^{\frac{\pi}{z}}\right) dz$, unde $\gamma : 9x^2 + y^2 = 9$,
    k) $\int_\gamma \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{z^2+1}dz$, unde $\gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 1) $0 < b < 1$, 2) $b > 1$,
    l) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$, m) $I_1 = \int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+2x+10}, I_2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2+2x+10}$,
    n) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx$, o) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}dt$, p) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos^2 x}, a, b > 0$,
    q) $\int_0^\pi \frac{dx}{(17+8\cos x)^2}$, r) $\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin x\sin nx}{5-4\cos x}dx$

    R: a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, e) $\frac{2\pi(1-e^2)}{1+\mathrm{e}^2}$, f) $2\pi\mathrm{sh}\pi$, g) $-18\pi\mathrm{i}$, h) $-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}$,
    i) $3\pi\mathrm{i}$, j) $\pi\mathrm{i}(-\frac{1}{4} + \pi^2)$, k) 1) $2\pi\mathrm{ish}\pi$, 2) 0, l) $\frac{\pi}{4a}$,
    m) $I_1 = \frac{\pi}{3\mathrm{e}^3}(3\cos 1 + \sin 1), I_2 = \frac{\pi}{3\mathrm{e}^3}(3\sin 1 - \cos 1)$, n) $\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$,
    o) $\frac{4\pi}{3}(3 - 2\sqrt{3})$, p) $\frac{2\pi}{\sqrt{a(a+b)}}$, q) $\frac{17\pi}{15^3}$, r) Fie $I_1 = \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin x\cos nx}{5-4\cos x}dx$.
    Atunci $I_1 + \mathrm{i}I = \mathrm{i}I = \int_{-\pi}^\pi \frac{\mathrm{e}^{inx}\sin x}{5-4\cos x}dx$. Notăm $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ şi aplicăm teorema reziduurilor pentru integrala $\int_{-\pi}^\pi \frac{\mathrm{e}^{inx}\sin x}{5-4\cos x}dx$.Rezultă $I = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Capitolul 2

Transformata Laplace

2.1 Funcţii original Laplace. Formula de inversare Mellin-Fourier

Definiţia 2.1. Se numeşte **funcţie original Laplace** orice funcţie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cu următoarele proprietăţi:

a) $f(t) = 0$ pentru $t < 0$;

b) f este derivabilă pe porţiuni pe intervalul $[0, \infty)$;

c) există constantele $M > 0$ şi $p_0 \geq 0$ astfel încât

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{p_0 t}, \forall t \geq 0. \tag{2.1}$$

Condiţia c) se numeşte **condiţia de creştere exponenţială** (cu p_0 **indicele de creştere a funcţiei** f).

Exemplul 2.1. Cea mai simplă funcţie original este funcţia treapta unitate u definită prin

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } t \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{pentru } t \in [0, \infty) \end{cases}$$

Funcţia unitate joacă un rol important în cele ce urmează datorită faptului că , dată fiind o funcţie φ care îndeplineşte numai condiţiile b) şi c), prin înmulţirea cu u devine o funcţie original, cu păstrarea valorilor sale pe $(0, \infty)$.

Definiţia 2.2. **Transformata Laplace** (sau **funcţia imagine**) a unei funcţii original f este funcţia complexă $F\colon \left\{p \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Re} p > p_0\right\} \to \mathbb{C}$:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt \tag{2.2}$$

adică

$$F(p) = \lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ R \nearrow \infty}} \int_\varepsilon^R f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt \tag{2.3}$$

Se poate demonstra că funcţia imagine F este olomorfă (analitică) în semiplanul $\mathrm{Re}p > p_0$ şi vom nota $F = \mathcal{L}[f]$.

Teorema 2.1. ***(formula de inversare Mellin-Fourier)*** *Fie f o funcţie original, $F = \mathcal{L}[f]$ şi p_0 indicele de creştere a funcţiei f, atunci are loc egalitatea*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha - \mathrm{i}\infty}^{\alpha + \mathrm{i}\infty} F(p) \mathrm{e}^{pt} dp = f(t), \tag{2.4}$$

cu $\alpha > p_0$ arbitrar, oricare $t \in (0, \infty)$ în care f este continuă . In orice punct de discontinuitate al funcţiei f, valoarea funcţiei din membrul stâng este egală cu media limitelor laterale ale funcţiei f în acel punct.

Presupunem că transformata Laplace F admite o prelungire în $\mathbb{C}$ cu excepţia unui număr finit de puncte singulare izolate $p_1, p_2, \ldots p_n$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|p|\le n} |F(p)| = 0$.
Dacă sunt îndeplinite condiţiile în care relaţia (2.4) este adevărată, atunci:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Rez}(F(p)\mathrm{e}^{pt}, p_k) \tag{2.5}$$

In particular, dacă $p_1, p_2, \ldots$ sunt poli de ordin $n_1, n_2, \ldots$ respectiv, atunci (2.5) devine:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} [F(p)(p - p_k)^{n_k} \mathrm{e}^{pt}] \tag{2.6}$$

In cazul particular, deosebit de frecvent în aplicaţii, al funcţiei $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, unde $A(p)$ şi $B(p)$ sunt polinoame cu coeficienţi reali, iar gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului, formula (2.5) se mai scrie

$$f(t) = \sum_k \mathrm{Rez}\left(\frac{A(p)}{B(p)}\mathrm{e}^{pt}, p_k\right) + \sum_k 2\mathrm{Re}\mathrm{Rez}\left(\frac{A(p)}{B(p)}\mathrm{e}^{pt}, p_k\right) \tag{2.7}$$

Prima sumă din formula (2.7) se referă la toţi polii reali ai funcţiei $\frac{A(p)}{B(p)}$, cea de-a doua la toţi polii complecşi cu partea imginară pozitivă .

Tabelul 2.1

Nr.	$f(t)$	$F(p)$
1	u(t)	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
3	$e^{\omega t}$	$\frac{1}{p-\omega}$
4	$\sin \omega t,\ \omega > 0$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos \omega t,\ \omega > 0$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$sh\, \omega t,\ \omega > 0$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$ch\, \omega t,\ \omega > 0$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$

Funcţiile de la nr. 2-7 care apar în tabelul 2.1. sunt subînţelese a fi înmulţite cu $u(t)$, pentru că , în caz contrar, nu ar fi funcţii original; astfel, de exemplu, prin t^n se înţelege $t^n u(t)$. Această convenţie va fi utilizată şi în continuare.

2.2 Proprietăţile transformării Laplace

In continuare sunt date proprietăţile transformării Laplace cu denumirile uzuale.

1. ***(liniaritatea)*** Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci:

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](p) = \alpha \mathcal{L}[f](p) + \beta \mathcal{L}[g](p)$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](p) = \int_0^\infty [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty \alpha f(t) e^{-pt} dt + \int_0^\infty \beta g(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \alpha \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \alpha \mathcal{L}[f](p) + \beta \mathcal{L}[g](p)$$

□

Exemplul 2.2. Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = 3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2\sin 5t$.

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = 3\mathcal{L}[t^4](p) - 2\mathcal{L}[t^3](p) + 4\mathcal{L}[e^{-3t}](p) - 2\mathcal{L}[\sin 5t](p) =$$

$$= 3 \cdot \frac{4!}{p^5} - 2 \cdot \frac{3!}{p^4} + 4 \cdot \frac{1}{p+3} - 2 \cdot \frac{5}{p^2+25}$$

(conform liniarităţii şi tabelului 2.1) □

2. ***(teorema asemănării)*** Dacă $a > 0$ şi $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci:

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Demonstraţie. Avem $\mathcal{L}[f(at)](p) = \int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt$. Cu schimbarea de variabilă $at = \tau$, obţinem

$$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau}d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

□

3. ***(teorema întârzierii)*** Dacă $\tau > 0$ şi $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci:

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)](p) = e^{-p\tau}F(p)$$

Demonstraţie. Cum $f(t) = 0$, $\forall t < 0$, rezultă că $f(t-\tau) = 0$ pentru orice $t < \tau$. Avem

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)](p) = \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt.$$

Cu schimbarea de variabilă $t - \tau = \theta$, integrala devine

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)](p) = \int_0^\infty f(\theta)e^{-p(\tau+\theta)}d\theta = e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\theta)e^{-p\theta}d\theta = e^{-p\tau}F(p).$$

□

4. ***(teorema deplasării)*** Dacă $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci

$$\mathcal{L}[e^{-\lambda t}f(t)](p) = F(p+\lambda)$$

Demonstraţie.

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)](p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(\lambda+p)t}dt = F(\lambda + p).$$

□

Exemplul 2.3. Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \mathrm{e}^t \sin 2t + \mathrm{e}^{-t}\cos 4t$.

Demonstraţie. $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{(p-1)^2+4} + \frac{p+1}{(p+1)^2+16}$ □

5. ***(derivarea imaginii)*** Dacă $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](p) = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

Demonstraţie. $F'(p) = \frac{d}{dp}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}(\mathrm{e}^{-pt} f(t))dt =$
$= \int_0^\infty -t\mathrm{e}^{-pt}dt = \mathcal{L}[-tf(t)](p) \Longrightarrow \mathcal{L}[tf(t)](p) = -F'(p)$
Demonstraţia se continuă prin inducţie. □

Exemplul 2.4. Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = t\mathrm{e}^t \cos 3t$.

Demonstraţie. Cum $\mathcal{L}[\cos 3t](p) = \frac{p}{p^2+9}$, din teorema deplasării $\mathcal{L}[\mathrm{e}^t \cos 3t](p) = \frac{p-1}{(p-1)^2+9}$ şi din derivarea imaginii

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = -\left[\frac{p-1}{(p-1)^2+9}\right]' = \frac{(p-1)^2-9}{[(p-1)^2+9]^2}$$

□

6. ***(derivarea originalului)*** Dacă f este o funcţie original şi presupunem că există $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ pe $(0,\infty)$, $f^{(n)}$ este o funcţie original şi $f^{(k)}(0+0) = \lim\limits_{t\to 0, t>0} f^{(k)}(t)$, $0 \le k \le n$, iar $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p^n F(p) - (p^{n-1}f(0+0) + p^{n-2}f'(0+0) + \ldots + f^{(n-1)}(0+0))$$

Demonstraţie. Avem $\mathcal{L}[f'(t)](p) = \int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}dt$. Integrăm prin părţi $\mathcal{L}[f'(t)](p) = [f(t)\mathrm{e}^{-pt}]/_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt$.

Tinând seama de (2.1), $|f(t)\mathrm{e}^{-pt}| = |f(t)|\mathrm{e}^{-\lambda t} \le M\mathrm{e}^{-(\lambda-p_0)t}$, unde $\lambda = \mathrm{Re}p > p_0$, deci $\lim\limits_{t\to\infty}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}] = 0$. Atunci

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = pF(p) - f(0+0). \tag{2.8}$$

Inlocuim în (2.8) pe f', succesiv cu $f'', f''', \dots, f^{(n)}$,

$$\mathcal{L}[f''(t)](p) = p\mathcal{L}[f'(t)](p) - f'(0+0)$$
$$\mathcal{L}[f'''(t)](p) = p\mathcal{L}[f''(t)](p) - f''(0+0)$$
$$\dots$$
$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](p) = p\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)](p) - f^{(n-1)}(0+0)$$

Inmulţim egalitatea (2.8) cu p^{n-1}, prima egalitate din şirul de mai sus cu p^{n-2}, a doua cu p^{n-3} etc. , ultima cu $p^0 = 1$. Prin adunare obţinem egalitatea din teoremă . □

7. ***(integrarea originalului)*** Dacă $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, atunci:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](p) = \frac{F(p)}{p}$$

Demonstraţie. Notăm $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Evident g este funcţie original şi $g' = f$ aproape peste tot, deci $\mathcal{L}[g'(t)](p) = F(p)$. Adică

$$F(p) = \int_0^\infty g'(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = g(t)\mathrm{e}^{-pt}|_0^\infty + p\int_0^\infty g(t)\mathrm{e}^{-pt}dt =$$
$$= p\mathcal{L}[g(t)](p) - g(0+0) = p\mathcal{L}[g(t)](p),$$

deoarece $g(0+0) = 0$. □

Exemplul 2.5. Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \int_0^t \tau\mathrm{e}^{-\tau}d\tau$.

Demonstraţie. Conform teoremei integrării originalului avem $\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{F(p)}{p}$, unde $F(p) = \mathcal{L}[t\mathrm{e}^{-t}](p) = (-1)F_1'(p)$(conform teoremei derivării imaginii), unde $F_1(p) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}](p) = \frac{1}{p+1}$. Atunci $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$ şi rezultă $\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$. □

Observaţia 2.1. Fie f o funcţie original şi $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$. Atunci $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to\infty} F(p) = 0$.

Demonstraţie. Fie $p \in \mathbb{C}$ cu $\mathrm{Re}p > p_0$, $p = \lambda + \mathrm{i}\mu$.

$f(t)\mathrm{e}^{-pt} = f(t)\mathrm{e}^{-(\lambda+\mathrm{i}\mu)t} = f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu t} \Longrightarrow |f(t)\mathrm{e}^{-pt}| \le |f(t)|\mathrm{e}^{-\lambda t} \le$
$\le M\mathrm{e}^{p_0 t}\mathrm{e}^{-\lambda t} = M\mathrm{e}^{(p_0-\lambda)t}, \forall t \ge 0$

$|F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt\right| = \left|\lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt\right| \le \lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A |\mathrm{e}^{-pt}|dt \le$
$\le \lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A M\mathrm{e}^{(p_0-\lambda)t}dt = M\lim\limits_{A\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{(p_0-\lambda)t}}{p_0-\lambda}|_0^A = \frac{M}{\lambda-p_0}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to\infty} F(p) = 0$ □

8. ***(integrarea imaginii)*** Dacă $\frac{f(t)}{t}$ este funcţie original, iar F este transformata Laplace a funcţiei f, atunci

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^\infty F(v)dv$$

Demonstraţie. Fie $g(t) = \frac{f(t)}{t}, t > 0$, deci $f(t) = t \cdot g(t)$ şi conform teoremei derivării imaginii rezultă $\mathcal{L}[f(t)](p) = -\mathcal{L}'[g(t)](p)$

Notăm $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p), G(p) = \mathcal{L}[g(t)](p)$

Atunci $F(p) = -G'(p) \Longrightarrow \int_p^\infty G'(v)dv = -\int_p^\infty F(v)dv \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim\limits_{p\to\infty} G(p) - G(p) = -\displaystyle\int_p^\infty F(v)dv \Longrightarrow G(p) = \displaystyle\int_p^\infty F(v)dv$ (conform Observaţiei 2.1) □

Exemplul 2.6. Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \frac{\text{sh}\omega t}{t}$.

Demonstraţie. Conform teoremei integrării imaginii avem

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \int_p^\infty \frac{\omega}{q^2 - \omega^2}dq = \omega\int_p^\infty \frac{1}{(q-\omega)(q+\omega)}dq =$$
$$= \omega\frac{1}{2\omega}\ln\frac{q-\omega}{q+\omega}/_p^\infty = \frac{1}{2}\ln\frac{p-\omega}{p+\omega}$$

□

9. ***(teorema de convoluţie)*** Fie $h = f * g$ produsul de convoluţie al funcţiilor f şi g, i.e. $h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ şi fie $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, $G(p) = \mathcal{L}[g(t)](p)$ transformatele Laplace ale funcţiilor original f şi g, atunci

$$H(p) = F(p)G(p),$$

unde $H(p) = \mathcal{L}[h(t)](p)$.

Demonstraţie. Se poate verifica uşor că funcţia h este funcţie original. Cum $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, adică $F(p) = \int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}d\tau$. Inmulţim în ambii membri cu $G(p)$, $F(p)G(p) = \int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}G(p)d\tau$. Conform teoremei întârzierii, $\mathrm{e}^{-p\tau}G(p) = \mathcal{L}[g(t-\tau)](p) = \int_0^\infty g(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}dt$, deci $F(p)G(p) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau\int_0^\infty g(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}dt$. Se poate schimba ordinea de integrare şi rezultă $F(p)G(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}dt\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Cum g este funcţie original, $g(t-\tau) = 0$ pentru $\tau > t$, deci

$$\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = (f*g)(t).$$

Rezultă $F(p)G(p) = \int_0^\infty (f*g)(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = \mathcal{L}[(f*g)(t)](p)$. □

Exemplul 2.7. Să se determine transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cos 2(t-\tau) d\tau$.

Demonstraţie. Cum $f(t) = t^2 * \cos 2t$, avem

$\mathcal{L}[f(t)](p) = \mathcal{L}[t^2](p) \cdot \mathcal{L}[\cos 2t](p) = \frac{2}{p^3} \cdot \frac{p}{p^2+4} = \frac{2}{p^2(p^2+4)}$ □

Exemplul 2.8. Să se rezolve următoarea ecuaţie diferenţială

$$x'' + 2x' + x = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}, x(0) = x'(0) = 0.$$

Demonstraţie. Fie $X(p) = \mathcal{L}[x(t)](p)$. Conform teoremei derivării originalului avem:

$\mathcal{L}[x'(t)](p) = pX(p) - x(0) = pX(p)$

$\mathcal{L}[x''(t)](p) = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p)$.

Ecuaţia devine:

$p^2X(p) + 2pX(p) + X(p) = \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\right](p) \Longrightarrow X(p)(p^2 + 2p + 1) =$
$= \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\right](p) \Longrightarrow X(p) = \frac{1}{(p+1)^2} \cdot \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\right](p) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}t](p) \cdot \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\right](p) =$
$= \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}t * \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}](p)$ şi conform teoremei de convoluţie obţinem

$x(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\tau \cdot \frac{\mathrm{e}^{-t-\tau}}{t-\tau+1} d\tau = \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \frac{\tau}{t-\tau+1} d\tau =$
$= -\mathrm{e}^{-t}[t - (t+1) \ln |-t-1|]$ □

Exemplul 2.9. Să se determine funcţia original a cărei imagine Laplace este $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

Demonstraţie.

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4} \frac{1}{p^2+1} = \mathcal{L}[\cos 2t](p) \mathcal{L}[\sin t](p) = \mathcal{L}[\cos 2t * \sin t](p) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(t) = \int_0^t \cos 2\tau \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$$

(conform teoremei de convoluţie) □

Exemplul 2.10. Să se determine funcţia original a cărei imagine Laplace este $F(p) = \frac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$.

Demonstraţie.

$$\begin{aligned}F(p) &= \frac{1}{(p^2+p+1)^2} = \frac{1}{[(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2} = \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{[(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2} = \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{-(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{[(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2}\end{aligned}$$

Analizăm fiecare termen:

Conform liniarităţii şi teoremei întârzierii avem:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \mathcal{L}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right](p)$$

Conform teoremei derivării imaginii avem:

$$\left[\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right]' = \frac{-(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{[(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]^2} = -\mathcal{L}[tf_1(t)](p),$$

unde

$$\mathcal{L}[f_1(t)](p) = \frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right](p)$$

(conform teoremei deplasării)

Atunci $f_1(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$

Aşadar, $f(t) = \frac{4}{3\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2}{3}t\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$ □

Exemplul 2.11. Să se determine funcţia original a cărei imagine Laplace este $F(p) = \frac{3p-4}{p^2-p-6}$.

Demonstraţie. Vom folosi formula (2.5).

$p_1 = 3, p_2 = -2$ sunt poli simpli

Atunci $f(t) = \mathrm{Rez}\left(\frac{3p-4}{p^2-p-6}\mathrm{e}^{pt}, 3\right) + \mathrm{Rez}\left(\frac{3p-4}{p^2-p-6}\mathrm{e}^{pt}, -2\right)$.

Calculăm $\mathrm{Rez}\left(\frac{3p-4}{p^2-p-6}\mathrm{e}^{pt}, 3\right) = \lim\limits_{p\to 3}\frac{3p-4}{p^2-p-6}\mathrm{e}^{pt}(p-3) = \mathrm{e}^{3t}$.

Analog $\mathrm{Rez}\left(\frac{3p-4}{p^2-p-4}\mathrm{e}^{pt}, -2\right) = 2\mathrm{e}^{-2t}$. Deci $f(t) = \mathrm{e}^{3t} + 2\mathrm{e}^{-2t}$. □

Exemplul 2.12. Să se rezolve ecuaţia integrodiferenţială

$$y'(t) = \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$$

cu condiţia $y(0) = 1$.

Demonstraţie. Conform teoremei derivării originalului avem

$$\mathcal{L}[y'(t)](p) = pY(p) - 1, \text{ unde } Y(p) = \mathcal{L}[y(t)](p)$$

Membrul drept al ecuaţiei este produsul de convoluţie $y(t) * \cos t$; aplicând transformata Laplace ecuaţiei obţinem:

$$pY(p) - 1 = Y(p)\frac{p}{p^2+1}.$$

Atunci $Y(p) = \frac{p^2+1}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} \Longrightarrow y(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$. □

Exemplul 2.13. Cu ajutorul transformatei Laplace să se determine soluţia ecuaţiei cu argumente întârziate

$$3y(t) - 4y(t-1) + y(t-2) = t, \text{ dacă } \ y = 0 \text{ pentru } t < 0.$$

Demonstraţie. Notăm $\mathcal{L}[y(t)](p) = Y(p)$

Conform teoremei întârzierii avem:

$$\mathcal{L}[y(t-1)] = \mathrm{e}^{-p}Y(p)$$

$$\mathcal{L}[y(t-2)] = \mathrm{e}^{-2p}Y(p)$$

După ce aplicăm transformata Laplace, ecuaţia devine:

$$(3 - 4\mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p})Y(p) = \frac{1}{p^2} \Longrightarrow (1-\mathrm{e}^{p})(3-\mathrm{e}^{-p})Y(p) = \frac{1}{p^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Y(p) = \frac{1}{2p^2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-p}} - \frac{1}{3-\mathrm{e}^{-p}}\right) = \frac{1}{2p^2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-p}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{-p}}{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2p^2}[1 + \mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p} + \ldots + \mathrm{e}^{-np} + \ldots - \frac{1}{3}(1 + \frac{\mathrm{e}^{-p}}{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{3^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{\mathrm{e}^{-np}}{3^n} + \ldots)] = \frac{1}{2p^2}[\frac{2}{3} + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\mathrm{e}^{-p} + \left(1 - \frac{1}{3^3}\right)\mathrm{e}^{-2p} + \ldots +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)\mathrm{e}^{-np} + \ldots] = \frac{1}{3p^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)\frac{\mathrm{e}^{-np}}{p^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{t}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(t-n)$$

(am folosit teorema întârzierii) □

Exemplul 2.14. Să se calculeze $I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$.

Demonstraţie. Notăm $I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^3 tx}{x^2} dx$
Calculăm transformata Laplace a funcţiei $I(t)$:

$$\mathcal{L}[I(t)](p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \left(\int_0^\infty \frac{\sin^3 tx}{x^2} dx \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \sin^3 tx dt \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} (\frac{3}{4} \sin tx - \frac{1}{4} \sin 3tx) dt \right) dx$$

Cum $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \sin tx dt = \mathcal{L}[\sin tx](p) = \frac{x}{p^2+x^2}$ şi $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \sin 3tx dt = \mathcal{L}[\sin 3tx](p) = \frac{3x}{p^2+9x^2}$, obţinem

$$\mathcal{L}[I(t)](p) = \frac{3}{4} \int_0^\infty \left[\frac{1}{x(x^2+p^2)} - \frac{1}{x(9x^2+p^2)} \right] dx = \frac{3}{4} \ln 3 \cdot \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{3}{4} \ln 3 \cdot \mathcal{L}[t](p) \Longrightarrow I(t) = \frac{3t}{4} \ln 3 \Longrightarrow I = I(1) = \frac{3}{4} \ln 3$$

□

2.3 Probleme propuse

Să se determine imaginile Laplace ale următoarelor funcţii :

1. $f(t) = \sin^2 \omega t$
   R: $\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$

2. $f(t) = (\sin t + \cos 2t)^2$
   R: $\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{2(p^2+4)} + \frac{p}{2(p^2+16)} + \frac{3}{p^2+9} - \frac{1}{p^2+1}$

3. $f(t) = (t+2)^2 \mathrm{e}^{3t}$
   R: $\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{2}{(p-3)^3} + \frac{4}{(p-3)^2} + \frac{4}{p-3}$ (cf. th. deplasării)

4. $$u(t) = \begin{cases} \int_0^t e^{2\tau}(t-\tau)^2 d\tau, & \text{dacă } t > 0 \\ 0, & \text{dacă } t \le 0 \end{cases}$$
   R: $\mathcal{L}[u(t)](p) = \frac{1}{p-2} \cdot \frac{2}{p^3}$

5. $f(t) = \sin at \sin bt, a, b \in \mathbb{R}$
   R: $\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{p^2+(a-b)^2} - \frac{p}{p^2+(a+b)^2} \right]$

Să se determine funcţiile original ale căror transformate Laplace sunt:

6. $F(p) = \frac{p^2+3p+1}{(p+1)(p+2)(p+3)}$

   R: $f(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$

7. $F(p) = \frac{2p+1}{p(p+1)}$

   R: $f(t) = 3\mathrm{e}^{t} - 1$

8. $F(p) = \frac{4p+10}{p^2-12p+32}$

   R: $f(t) = -\frac{13}{2}\mathrm{e}^{4t} + \frac{21}{2}\mathrm{e}^{8t}$

9. $F(p) = \frac{5p+1}{p^2+1}$

   R: $f(t) = 5\cos t + \sin t$

10. $F(p) = \frac{p+2}{p^2(p+3)}$

    R: $f(t) = -\frac{1}{27} + \frac{t}{9} + \frac{t^3}{3} + \frac{1}{27}\mathrm{e}^{-3t}$

11. $F(p) = \frac{1}{p^2(p-2)^2}$

    R: $f(t) = \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{4} + \frac{3}{16}\right)\mathrm{e}^{2t} - \frac{t}{8} - \frac{3}{16}$

12. $F(p) = \frac{p^3+16p-24}{p^4+20p^2+64}$

    R: $f(t) = \cos 2t - \sin 2t + \frac{1}{2}\sin 4t$

13. $F(p) = \frac{2p-7}{p^2+2p+6}$

    R: $f(t) = 2\mathrm{e}^{-t}\cos\sqrt{5}t - \frac{9}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{5}t$

14. $F(p) = \frac{3p-14}{p^2-4p+8}$

    R: $f(t) = \mathrm{e}^{2t}(3\cos 2t - 4\sin 2t)$

15. $F(p) = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{\sqrt{p+1}}$

    R: $f(t) = \mathrm{e}^{-(t-1)}\frac{1}{\sqrt{\pi(t-1)}}$ (cf. th. întârzierii şi deplasării)

16. $F(p) = \frac{8\mathrm{e}^{-3p}}{p^2+4} - \frac{3p\mathrm{e}^{-2p}}{p^2-4}$

    R: $f(t) = 4\sin 2(t-3) - 3\cosh 2(t-2)$

17. $F(p) = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2-2p+5} + \frac{p\mathrm{e}^{-2p}}{p^2+9}$

    R: $f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-1}\sin 2(t-1) + \cos 3(t-2)$

18. $F(p) = \frac{p\mathrm{e}^{-2p}}{p^2+3p+2}$

    R: $f(t) = 2\mathrm{e}^{-2(t-2)} - \mathrm{e}^{-(t-2)}$

19. $F(p) = \frac{27-12p}{(p+4)(p^2+9)}$

    R: $f(t) = 3\mathrm{e}^{-4t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3it} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3it} = 3\mathrm{e}^{-4t} - 3\cos 3t$ (am folosit descompunerea în fracţii simple sau teorema reziduurilor)

20. $F(p) = \frac{1}{2p^2-2p+5}$

    R: $f(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \sin \frac{3t}{2}$

21. $F(p) = \frac{3p^2-1}{(p^2+1)^2}$

    R: $f(t) = (1+2t)\sin t$

22. $F(p) = \frac{5p^2-15p-11}{(p+1)(p-2)^3}$

    R: $f(t) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} + 4t\mathrm{e}^{2t} - \frac{7}{2}t^2\mathrm{e}^{2t}$

23. $F(p) = \frac{5p+1}{p^2+1}$

    R: $f(t) = 5\cos t + \sin t$

24. $F(p) = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2-2p+5} + \frac{p\mathrm{e}^{-2p}}{p^2+9}$

    R: $f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-1}\sin 2(t-1) + \cos 3(t-2)$

25. $F(p) = \frac{27-12p}{(p+4)(p^2+9)}$

    R: $f(t) = 3\mathrm{e}^{-4t} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3it} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3it} = 3\mathrm{e}^{-4t} - 3\cos 3t$ (am folosit descompunerea în fracţii simple sau teorema reziduurilor)

    Să se calculeze integralele:

26. $I(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2}dx, t > 0$

    R: $I(t) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-t}$

27. $I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x}dx$

    R: $I = \frac{\pi}{4}$

28. $I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

    R: $I = \frac{\pi}{2}$

    Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale :

29. $x'' + 6x' + 9x = 9\mathrm{e}^{3t}, x(0) = 0, x'(0) = 0$

    R: $x(t) = \frac{\mathrm{e}^{3t} - (1+6t)\mathrm{e}^{-3t}}{4}$

30. $y'' - 3y' + 2y = 4\mathrm{e}^t, y(0) = -3, y'(0) = 5$ (cf. teoremei derivării originalului)

    R: $y(t) = -7\mathrm{e}^t + 4t\mathrm{e}^{2t} + 4\mathrm{e}^{2t}$

31. $x'' - 2x' = \mathrm{e}^{2t} + t^2 - 1, x(0) = \frac{1}{8}, x'(0) = 1$

    R: $x(t) = -\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2t}(4t+1)$

32. $x'' - 2x' + 5x = \mathrm{e}^t \cos 2t, x(0) = x'(0) = 1$

    R: $x(t) = \mathrm{e}^t \sin 2t + \frac{1}{4}t\mathrm{e}^t \sin 2t$ (cf. teoremei derivării originalului)

33. $y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2\mathrm{e}^t, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2$

    R: $y(t) = \left(1 - t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{60}\right)\mathrm{e}^t$

34. $x''' + x' = \sin t, x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0$

    R: $x(t) = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t$

35. $y'' + xy' - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

    R: $y(x) = x$

36. $xy'' + 2y' = x - 1, y(0) = 0$

    R: $y(x) = \frac{x(x-3)}{6}$

    Să se rezolve sistemele de ecuaţii diferenţiale:

37.
$$3x' + 2x + y' = 1$$
$$x' + 4y' + 3y = 0$$

    $x(0) = y(0) = 0$

    R: $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\mathrm{e}^{-\frac{6}{11}t} - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-t}, y(t) = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-\frac{6}{11}t})$

38.
$$x' - x + 2y = 0$$
$$x'' + 2y' = 2t - \cos 2t$$

    $x(0) = 0, x'(0) = 2, y(0) = -1$

    R: $x(t) = t^2 - \frac{1}{2}\sin 2t, y(t) = -t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t$

39.
$$x' = 2x - 3y$$
$$y' = y - 2x$$

    $x(0) = 8, y(0) = 3$

    R: $x(t) = 5\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{4t}$,$y(t) = 5\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{4t}$

40.
$$x' + 5x - 2y = \mathrm{e}^t$$
$$y' - x + 6y = \mathrm{e}^{2t}$$

$x(0) = 1, y(0) = -2$

R: $x(t) = \frac{7}{40}\mathrm{e}^t + \frac{1}{27}\mathrm{e}^{2t} - \frac{41}{45}\mathrm{e}^{-4t} + \frac{367}{216}\mathrm{e}^{-7t}$,$y(t) = \frac{1}{40}\mathrm{e}^t + \frac{7}{54}\mathrm{e}^{2t} - \frac{7}{18}\mathrm{e}^{-4t} -$ $- \frac{367}{216}\mathrm{e}^{-7t}$

41.
$$x'' + x' + y'' - y = \mathrm{e}^t$$
$$x' + 2x - y' + y = \mathrm{e}^{-t}$$

$x(0) = x'(0) = 0, y(0) = y'(0) = 0$

R: $x(t) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^t + \frac{1}{8}(2t-1)\mathrm{e}^{-t}, y(t) = \frac{3}{4}(t-1)\mathrm{e}^t - \frac{3}{4}(3t-1)\mathrm{e}^{-t}$

Să se rezolve ecuaţiile integrale:

42. $x(t) - 2\int_0^t x(\tau)d\tau = \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)$

R: $x(t) = \frac{1}{13}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{13}\cos 3t - \frac{2}{13}\sin 3t$ (cf. teoremei integrării originalului)

43. $x(t) = t + 4\int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau$

R: $x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}2t$

44. $x(t) = t\cos 3t + \int_0^t \sin 3(t-\tau)x(\tau)d\tau$

R: $x(t) = 2\sin 3t - \frac{5}{\sqrt{6}}\sin\sqrt{6}t$

45. $x(t) = \cos t + \int_0^t (t-\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}x(\tau)d\tau$

R:$x(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2t} + \frac{4}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$

Capitolul 3

Transformarea Z

3.1 Semnale discrete. Transformata Z

Definiţia 3.1. Se numeşte **semnal discret** o funcţie $x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $n \to x_n$ (sau $x(n)$ sau $x[n]$). Mulţimea semnalelelor discrete se va nota cu S_d. Dacă $x_n = 0$ pentru orice $n < 0$, se spune că semnalul x este cu **suport pozitiv**, iar mulţimea acestor semnale se notează cu S_d^+.

Exemplul 3.1. Se notează cu δ_k, $k \in \mathbb{Z}$ fixat, semnalul definit prin:

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = k \\ 0, & \text{dacă } n \neq k \end{cases}$$

şi numit **impulsul unitar discret la momentul** k şi vom pune $\delta_0 = \delta$.

Definiţia 3.2. Dacă $x \in S_d$, atunci pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ fixat, semnalul $y = (x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ se numeşte **întârziatul** lui x cu k momente. Dacă $x, y \in S_d$ şi seria $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k}y_k$ este convergentă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ cu suma z_n, atunci semnalul $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se numeşte **convoluţia** semnalelor x şi y şi se notează $z = x * y$.

Dacă $x, y \in S_d^+$, atunci $x * y$ există şi avem $x * y = y * x$, de asemenea:

$$x * \delta = x \text{ şi } (x * \delta_k)(n) = x(n-k)$$

Pentru orice funcţie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi $T > 0$(pas de eşantionare) se poate obţine un semnal discret punând $x_n = f(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Definiţia 3.3. Fie $s \in S_d$, $s = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Se numeşte **transformata Z** (sau **transformata Laplace discreta**) a acestui semnal, funcţia complexă L_s definită prin:

$$L_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$$

definită în domeniul de convergenţă al seriei Laurent respective.

Indicăm principalele proprietăţi ale transformării Z:

1. Există $R, r > 0$ astfel încât seria care defineşte transformarea Z converge în coroana $r < |z| < R$.

2. *(Liniaritatea)* Asocierea $s \to L_s$ este $\mathbb{C}$-liniară şi injectivă , aşadar:

$$L_{\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2}(z) = \alpha_1 L_{s_1}(z) + \alpha_2 L_{s_2}(z),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C},\ s_1, s_2 \in S_d.$$

3. Dacă $s \in S_d^+$, $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci $\lim\limits_{z\to\infty} L_s(z) = a_0$, iar dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, atunci $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z-1}{z} L_s(z) = 1$.

4. *(Inversarea transformării Z)* Fie $s \in S_d^+$, $s = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi se presupune că funcţia $L_s(z)$ este olomorfă în domeniul $r < |z| < R$. Pentru orice $r < \rho < R$, fie γ_ρ frontiera discului $|z| \le \rho$ parcursă în sens pozitiv o singură dată. Atunci avem:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\rho} z^{n-1} L_s(z) dz, \quad n \in \mathbb{N}$$

5. *(Teorema de convoluţie)* Dacă $s, t \in S_d^+$, atunci $s * t \in S_d^+$ şi avem:

$$L_{s*t} = L_s L_t$$

In particular,

$$L_{s*\delta_k}(z) = z^{-k} L_s(z), \quad k \in \mathbb{Z}$$

In tabelul 3.1 sunt date transformatele Z ale semnalelor uzuale.

Tabelul 3.1.

Nr.	s	L_s
1	$h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unde $h_n = 0$ pentru $n < 0$ şi $h_n = 1$ pentru $n \ge 0$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\delta_k,\ k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{z^k}$
3	$s = (n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4	$s = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	$s = (a^n)_{n\in\mathbb{N}},\ a \in \mathbb{C}$	$\frac{z}{z-a}$
6	$s = (\mathrm{e}^{an})_{n\in\mathbb{N}},\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^a}$

Exemplul 3.2. Să se arate că următorul semnal nu admite transformată Z :

$$x \in S_d^+, x_n = 2^{n^2} h(n).$$

Demonstraţie. Raza de convergenţă a seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} z^{-n}$ este

$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n^2}}} = 0$, deci $D_x = \emptyset$. □

Exemplul 3.3. Să se determine semnalul $x \in S_d^+$ a cărui transformată Z este dată de $L_s(z) = \frac{z}{z^2+2az+2a^2}, a > 0$ dat.

Demonstraţie. $z_{1,2} = a(-1 \pm \mathrm{i})$ sunt poli simpli, pe care îi putem scrie şi astfel

$$z_1 = a(-1+\mathrm{i}) = a\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$z_2 = a(-1-\mathrm{i}) = a\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$$

Atunci $x_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \mathrm{Rez}(\frac{z^n}{(z^2+2a+2a^2)}, z_i) = \frac{a^n(-1+\mathrm{i})^n}{2z_1+2a} + \frac{a^n(-1-\mathrm{i})^n}{2z_1+2a} =$
$= -\frac{\mathrm{i}}{2a}(z_1^n - z_2^n)$. Deci $x_n = 2^{\frac{n}{2}} a^{n-1} \sin\frac{3n\pi}{4}$. □

Exemplul 3.4. Cu ajutorul transformării Z, să se rezolve în mulţimea semnalelor cu suport pozitiv ecuaţia $y * a = x$ în următorul caz

$$a = \delta_{-2} + \delta_{-1} - 6\delta, x_n = n \cdot h(n), n \in \mathbb{Z}$$

Demonstraţie. Deoarece $x \in S_d^+$, ecuaţia dată are soluţia $y \in S_d^+$ şi aceasta este unică . Intr-adevăr, ecuaţia de convoluţie se scrie

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = n \cdot h(n), n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Cu $x, y \in S_d^+$, relaţia (3.1) este identic satisfăcută pentru $n \leq -3$, iar pentru $n = -2$ şi $n = -1$ ea furnizează valorile lui y_0, respectiv y_1: $y_0 = 0, y_1 = 0$. Pentru $n \geq 0$ relaţia de recurenţă (3.1) devine:

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = n, n \in \mathbb{Z},$$

cu soluţia unică $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de îndată ce y_0 şi y_1 sunt cunoscuţi.

Deoarece membrul drept al ecuaţiei de convoluţie este un semnal care admite transformată Z, aplicăm transformarea Z acestei ecuaţii, în ipoteza că şi semnalul $y \in S_d^+$ are transformată Z, $L_y(z)$, deci $L_y(z)(z^2 + z - 6) = \frac{z}{(z-1)^2}$

Rezultă $L_y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$. Calculăm

$$\operatorname{Rez}(z^{n-1}L_s(z),1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)^2\frac{z^n}{(z-1)^2(z^2+z-6)}]' =$$
$$= \lim_{z\to 1}\frac{nz^{n-1}(z^2+z-6)-z^n(2z+1)}{(z^2+z-6)^2} = -\frac{4n+3}{16}.$$

Analog $\operatorname{Rez}(z^{n-1}L_s(z),2) = \frac{2^n}{5}$ şi $\operatorname{Rez}(z^{n-1}L_s(z),-3) = -\frac{(-3)^n}{80}$.

Deci $y_n = -\frac{4n+3}{16} + \frac{2^n}{5} - \frac{(-3)^3}{80},\ n \in \mathbb{N}$.

Astfel am găsit un semnal $y \in S_d^+$ cu proprietatea că $L_{y*a}(z) = L_x(z)$.

Din injectivitatea aplicaţiei L rezultă $y * a = x$ şi din unicitatea în S_d^+ a soluţiei ecuaţiei de convoluţie rezultă că semnalul găsit cu ajutorul transformării Z este cel căutat.

□

Exemplul 3.5. Cu ajutorul transformării Z, să se determine şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite prin următoarele relaţii:

a) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n \in \mathbb{N}$ (şirul lui Fibonacci)

b) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = (n+1)4^n, n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ca fiind resticţia unui semnal $x \in S_d^+$ la $\mathbb{N}$ şi transcriem informaţiile despre şirul dat sub forma unei ecuaţii de convoluţie $a * x = y$, pe care o rezolvăm în S_d^+ procedând ca la exemplul precedent.

a) Observăm că

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = y_n, n \in \mathbb{Z},$$

unde $y_n = 0$ pentru $n \neq -1$ şi $y_{-1} = 1$.

Aşadar, $x \in S_d^+$ satisface ecuaţia de convoluţie $a * x = y$, cu $a = \delta_{-2} - \delta_{-1} + \delta, y = \delta_{-1}$.

Aplicând transformata Z rezultă :

$L_x(z)(z^2 - z - 1) = z \Longrightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

b) Avem $a * x = y, a = \delta_{-2} - 4\delta_{-1} + 3\delta, y_n = 0, n \leq -2, y_{-1} = 1,$ $y_n = (n+1)4^n, n \in \mathbb{N}$.

Fie $s_1 = (n4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $s_2 = (4^n)_{n\in\mathbb{N}}$

$L_{s_1}(z) = -zL'_{s_2}(z) = -z(\frac{z}{z-4})' = -z(-\frac{4}{(z-4)^2}) = \frac{4z}{(z-4)^2}$

Deci $L_x(z)(z^2 - 4z + 3) = \frac{4z}{(z-4)^2} + \frac{z}{z-4} + z = \frac{z^2}{(z-4)^2} + z \Longrightarrow$

$\Longrightarrow L_x(z) = \frac{z(z^2-7z+16)}{(z-4)^2(z-1)(z-3)}$

Descompunem în fracţii simple şi găsim

$$x_n = \frac{1}{9}[18 \cdot 3^n + (3n-13)4^n - 5], n \in \mathbb{N}.$$

□

3.2 Probleme propuse

1. Să se determine semnalul $x \in S_d^+$ a cărui transformată Z este:

   a)$L_x(z) = \frac{2z+3}{z^2-5z+6}$; b)$L_x(z) = \frac{z^2+1}{z^2-z+1}$; c)$L_x(z) = \frac{z}{(z-3)^2}$

   R: a)$x_0 = 0, x_n = 3^{n+1} - 7 \cdot 2^{n-1}, n \geq 1$

   b)$x_0 = 1, x_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{3}, n \geq 1$

   c)$x_n = n3^{n-1}$

2. Cu ajutorul transformării Z, să se rezolve în mulţimea semnalelor cu suport pozitiv ecuaţia $y * a = x$ în următoarele cazuri:

   a)$a = \delta_{-2} - 4\delta_{-1} + 3\delta, x_n = 2h(n), n \in \mathbb{Z}$

   b)$a = \delta_{-1} - 2\delta, x_n = (n^2 - 2n - 1)h(n), n \in \mathbb{Z}$

   R: a)$L_y(z) = \frac{2z}{(z-1)^2(z-3)}, y_n = \frac{1}{2}(3^n - 2n - 1), n \in \mathbb{N}$

   b)$L_y(z) = -\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, y_n = -n^2, n \in \mathbb{N}$

3. Cu ajutorul transformării Z, să se determine şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite prin următoarele relaţii liniare de recurenţă :

   a)$x_0 = 4, x_1 = 6, x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, n \in \mathbb{N}$

   b)$x_0 = 0, x_1 = 11, x_2 = -8, x_3 = 6, x_{n+4} - \frac{5}{2}x_{n+3} + \frac{5}{2}x_{n+1} -$
   $-x_n = 1, n \in \mathbb{N}$

   c)$x_0 = 0, x_1 = 3, x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2, n \in \mathbb{N}$

   d)$x_0 = 0, x_1 = -1, x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = n, n \in \mathbb{N}$

   e) $x_0 = x_1 = 0, x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2^n, n \in \mathbb{N}$

   f)$x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4 \cdot 5^n, n \in \mathbb{N}$

   g)$x_0 = x_1 = 0, x_2 = 1, x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0, n \in \mathbb{N}$

   R: a) $x_n = 2 + 2^{n+1}, n \in \mathbb{N}$; b) $x_n = 8(-1)^{n+1} + 2^{3-n} - n, n \in \mathbb{N}$;
   c) $x_n = 2 \cdot 3^n - n - 2, n \in \mathbb{N}$; d) $x_n = -\frac{1}{16}[(-3)^{n+1} + 4n + 3], n \in \mathbb{N}$;
   e) $x_n = 1 + 2^{n-1}(n - 2)$; f) $x_n = \frac{1}{3}(2^n - 3^{n+1} + 2 \cdot 5^n), n \in \mathbb{N}$;
   g) $x_n = (-1)^n \frac{n(n-1)}{2}, n \in \mathbb{N}$

Capitolul 4

Transformarea Fourier

4.1 Transformarea Fourier a funcţiilor integrabile pe $\mathbb{R}$

In cele ce urmează se va nota cu $L^1(\mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$

Definiţia 4.1. Se numeşte **transformarea Fourier** a funcţiei $f \in L^1(\mathbb{R})$ o funcţie $\mathcal{F}[f]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt \tag{4.1}$$

Funcţia $\mathcal{F}[f](\omega)$ se mai numeşte **funcţia spectrală** sau **spectrul (în frecvenţă)** al semnalului $f(t)$; prin transformarea Fourier semnalelor în timp le corespund spectrele lor.

Dacă f este o funcţie pară , atunci (4.1) se scrie sub forma:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \;\; \omega \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

şi se numeşte **transformarea Fourier prin cosinus a funcţiei** f, iar dacă f este impară , atunci:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = -2\mathrm{i}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t, \;\; \omega \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

şi se numeşte **transformarea Fourier prin sinus a funcţiei** f.

Teorema 4.1. ***(formula Fourier de inversare)*** *Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie din $L^1(\mathbb{R})$. Notând cu $\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt$ transformata Fourier a lui f şi presupunând că $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|d\omega < \infty$, rezultă*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}d\omega, \;\; \textit{pentru orice } t \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

Propoziţia 4.1. Fie f o funcţie complexă astfel încât f olomorfă pe $\mathbb{C}$ cu excepţia unui număr finit de puncte singulare izolate $a_1, \ldots, a_n$ care nu se găsesc pe axa numerelor reale şi $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}dt = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Rez}(f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}, a_k), & \text{pentru } \omega < 0 \text{ când } \mathrm{Im}a_k > 0 \\ -2\pi\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Rez}(f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}, a_k), & \text{pentru } \omega > 0 \text{ când } \mathrm{Im}a_k < 0 \end{cases}$$

4.2 Proprietăţile transformării Fourier

1. ***(Liniaritatea)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, atunci
$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega).$$

2. ***(Simetria)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$.

3. ***(Schimbarea de scală)*** Pentru $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ avem
$$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|}F(\frac{\omega}{\alpha}).$$

Exemplul 4.1. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei $f(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}, a > 0$.

Demonstraţie. Avem
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)dt =$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos\omega t dt = \frac{2}{\omega^2 + 1}.$$
Conform schimbării de scală obţinem :
$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{2}{a(\frac{\omega^2}{a^2} + 1)} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$
□

4. ***(Translaţia timpului)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi $t_0 \in \mathbb{R}$, atunci
$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}.$$

Exemplul 4.2. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei $f(t) = \mathrm{e}^{-7|t+4|}$.

Demonstraţie. Conform teoremei de translaţie a timpului şi exemplului 4.1 avem:

$$F(\omega) = \frac{14\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\omega}}{\omega^2 + 49}$$

□

5. ***(Translaţia frecvenţei)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi $\omega_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0).$$

6. ***(Derivarea în raport cu timpul)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi f este de n ori derivabilă, atunci $f^{(n)}(t) \leftrightarrow (\mathrm{i}\omega)^n F(\omega)$.

7. ***(Derivarea în raport cu frecvenţa)***

   Dacă funcţiile $f(t), tf(t), \ldots\ t^n f(t)$ sunt integrabile pe $\mathbb{R}$, iar $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci

$$(-\mathrm{i}t)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega).$$

Exemplul 4.3. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei $f(t) = t\mathrm{e}^{-\alpha t^2}, \alpha > 0$.

Demonstraţie. Calculăm transformata Fourier a semnalului gaussian

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{-t^2}.$$

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos\omega t dt - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sin\omega t dt =$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos\omega t dt \Longrightarrow F_1'(\omega) = -2\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t\sin\omega t dt = -\frac{1}{2}\omega F_1(\omega)$$

(s-a integrat prin părţi)

S-a obţinut o ecuaţie cu variabile separabile a cărei soluţie este:

$$F_1(\omega) = c\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$c = F_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt = \sqrt{\pi} \Longrightarrow F_1(\omega) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Scriem $\mathrm{e}^{-\alpha t^2} = \mathrm{e}^{-(\sqrt{\alpha}t)^2}$ şi folosind schimbarea de scală obţinem:

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\alpha t^2}](\omega) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} F_1\left(\frac{\omega}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

Conform teoremei de derivare în raport cu frecvenţa avem:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(-\frac{\omega}{2\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}\omega\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

□

8. ***(Transformata complex conjugatei)*** Dacă $f^*(t)$ este complex conjugata funcţiei f şi $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci $f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$.

9. ***(Teorema de convoluţie în timp)*** Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ şi $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$, iar $h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ este produsul de convoluţie al funcţiilor f şi g, atunci $(f * g)(t) \leftrightarrow F(\omega)G(\omega)$.

10. ***(Teorema de convoluţie în frecvenţa)*** In condiţiile proprietăţii precedente avem $f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)G(\omega - y)dy$.

11. Dacă $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci F este uniform continuă pe $\mathbb{R}$ şi, în plus, $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} |F(\omega)| = 0$.

12. Dacă $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este un şir de funcţii convergent către funcţia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în spaţiul $L^1(\mathbb{R})$, adică

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|dt = 0,$$

iar $f_n(t) \leftrightarrow F_n(\omega)$, $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, atunci şirul F_n converge către F uniform pe $\mathbb{R}$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\omega\in\mathbb{R}} |F_n(\omega) - F(\omega)| = 0$.

Exemplul 4.4. Să se calculeze transformata Fourier a impulsului triunghiular de lungime $2T$

$$q_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & \text{dacă } |t| \le T \\ 0, & \text{dacă } |t| > T \end{cases}$$

Demonstraţie. Cum q_T e funcţie pară , atunci

$$F(\omega) = 2\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos\omega t dt = 2\int_0^T \frac{\sin\omega t}{T\omega} dt =$$
$$= \frac{2(1-\cos\omega T)}{T\omega^2} = \frac{4\sin^2\frac{T\omega}{2}}{T\omega^2}$$

(integrala s-a rezolvat prin părţi) □

Exemplul 4.5. Să se rezolve ecuaţia integrală

$$\int_0^{\infty} x(u)\sin tu du = \begin{cases} \cos t, & \text{dacă } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & \text{dacă } t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Demonstraţie. Notăm membrul drept cu $f(t)$ şi-l prelungim prin imparitate pe $\mathbb{R}$ ca şi funcţia $x(u)$. Atunci
$\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos tu du = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\sin tu du = 2\int_0^{\infty} x(u)\sin tu du = 2f(t)$, deci $\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}du = -2\mathrm{i}f(t)$, dar $\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}du$ reprezintă transformarea Fourier a funcţiei x, deci rezultă din formula Fourier de inversare,

$x(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -2\mathrm{i}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}dt = -\frac{\mathrm{i}}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos tudt + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin tudt\right] =$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin tudt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\sin tudu =$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[\sin(tu+t)+\sin(tu-t)]dt = \frac{2}{\pi}\frac{u-\sin\frac{\pi}{2}u}{u^2-1}$ □

Exemplul 4.6. Să se rezolve ecuaţia integrală :

$$\int_0^{\infty} y(t)\cos txdt = \frac{1}{x^2+1}.$$

Demonstraţie. Prelungim $y(t)$ prin paritate la $(-\infty,\infty)$ şi obţinem: $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\cos txdt = \frac{2}{x^2+1}$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\sin txdt = 0$.

Aşadar, $\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}dt = \frac{2}{x^2+1}$. Inmulţim egalitatea cu $\frac{1}{2\pi}$, deci $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}dt = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{x^2+1} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$.

Funcţie $y(t)$ reprezintă transformarea Fourier a funcţiei $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, deci conform formulei de inversare obţinem $y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}dx$.

Din Propoziţia 4.1 avem

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}dx = \frac{1}{\pi}\begin{cases} 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Rez}(\frac{1}{z^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tz},\mathrm{i}), & \text{pentru } t<0\\ -2\pi\mathrm{i}\mathrm{Rez}(\frac{1}{z^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tz},-\mathrm{i}), & \text{pentru } t>0\end{cases}$$

$$= 2\mathrm{i}\begin{cases} \lim\limits_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\dfrac{1}{z^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tz}, & \text{pentru } t<0\\ -\lim\limits_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})\dfrac{1}{z^2+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tz}, & \text{pentru } t>0\end{cases}$$

$$= 2\mathrm{i}\begin{cases} \frac{\mathrm{e}^t}{2\mathrm{i}}, & \text{pentru } t<0\\ -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{-2\mathrm{i}}, & \text{pentru } t>0\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^t, & \text{pentru } t<0\\ \mathrm{e}^{-t}, & \text{pentru } t>0\end{cases}$$

Rezultă $y(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$. □

4.3 Probleme propuse

1. Să se calculeze transformata Fourier a semnalului dreptunghiular $f(t) = A(u(t-a)-u(t-b))$ cu $A,a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Apoi să se arate că $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} F(\omega) = 0$.

   R: $F(\omega) = -\frac{A}{\mathrm{i}\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega b}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a})$

2. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$f(t) = \frac{1}{2}|t-1| - |t| + \frac{1}{2}|t+1|.$$

   R: $F(\omega) = \frac{2}{\omega^2}(1-\cos\omega)$

3. Să se calculeze transformata Fourier a funcţiei

$$q_T(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{dacă } t > 0 \\ 0, & \text{dacă } t < 0 \end{cases}$$

$a > 0$

R: $F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$

Să se rezolve ecuaţiile integrale:

4.
$$\int_0^\infty x(u) \cos tu du = \begin{cases} 1-t, & \text{dacă } t \in (0,1) \\ 0, & \text{dacă } t \in [1,\infty) \end{cases}$$

R: $x(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t) \cos tu dt$

5. $\int_0^\infty \varphi(\alpha) \sin \alpha x d\alpha = e^{-x}, x > 0$

R: $\varphi(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$

6. $\int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$

R: $f(t) = \frac{e^{-t}}{2}(t+1)$

Capitolul 5

Elemente de analiză combinatorică

5.1 Principiul de bază al analizei combinatorii

In practică , se ajunge adesea la problema de a alege dintr-o mulţime oarecare de obiecte submulţimi de elemente ce posedă anumite proprietăţi, de a dispune elementele uneia sau ale mai multor mulţimi într-o anumită ordine etc. Pentru că în astfel de probleme este vorba despre anumite combinaţii de obiecte, ele se numesc **probleme combinatorii**. Domeniul matematicii în care se studiază astfel de probleme se numeşte **combinatorică** .

Combinatorica poate fi considerată ca o parte a teoriei mulţimilor, orice problemă de combinatorică putând fi redusă la o problemă despre mulţimi finite şi aplicaţii. Această ramură a matematicii este foarte importantă pentru teoria probabilităţilor, cibernetică , logică matematică , teoria numerelor.

Teorema 5.1. *Cu p elemente $a_1, \ldots, a_p$ ale unei mulţimi şi r elemente $b_1, \ldots, b_r$ ale altei mulţimi (mulţimile pot să şi coincidă) pot fi compuse exact pr perechi ordonate (a_i, b_j) diferite ce conţin câte un element din fiecare mulţime.*

Demonstraţie. Asociem elementele din prima mulţime cu elementele din a doua astfel:

$$\begin{gathered}(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_r)\\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_r)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_p, b_1), (a_p, b_2), \ldots, (a_p, b_r)\end{gathered}$$

Tabelul conţine toate perechile ce se pot forma şi fiecare element apare o singură dată . Tabelul are p linii şi r coloane, deci numărul perechilor este pr. $\square$

Observaţia 5.1. Teorema 5.1 poate fi extinsă pentru orice număr m de mulţimi. De exemplu, dacă $m = 3$ şi avem mulţimile $\{a_1, \ldots, a_p\}$, $\{b_1, \ldots, b_r\}$, $\{c_1, \ldots, c_s\}$, procedăm astfel : considerăm mulţimea elementelor (a_i, b_j) ce va conţine pr elemente. Fiecărui element (a_i, b_j) îi asociem un c_k şi obţinem (a_i, b_j, c_k). Conform Teoremei 5.1, numărul acestor triplete este $(pr)s = prs$.

Alt enunţ al Teoremei 5.1 este : *Dacă x_1, x_2 pot fi alese in n_1, respectiv n_2 moduri, atunci perechea ordonată (x_1, x_2) poate fi aleasă în $n_1 n_2$ moduri.*

Generalizare: Dacă elementele $x_1, \ldots, x_m$ pot fi alese in $n_1, \ldots, n_m$ moduri, atunci sistemul ordonat $(x_1, \ldots, x_m)$ poate fi ales in $n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$ moduri.

Exemplul 5.1. Echipajul unei nave cosmice trebuie sa fie alcătuit din 3 persoane: comandantul, inginerul şi medicul. La postul de comandant sunt 3 candidaţi, la cel de inginer 2 candidaţi şi la postul de medic doi. In câte moduri poate fi format echipajul navei?

Demonstraţie. Conform Teoremei 5.1 avem $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ moduri □

5.2 Permutări. Aranjamente. Combinări

5.2.1 Permutări

Fie A o mulţime finită cu $\mathrm{card}A = n$. Fiecare dintre mulţimile ordonate ce se pot forma cu cele n elemente ale mulţimii se numeşte **permutare** a acestei mulţimi; notăm $P_n = n!$.

Exemplul 5.2. Un tren de persoane are 10 vagoane. In câte moduri pot fi aşezate vagoanele pentru formarea trenului?

Răspuns: 10!

Exemplul 5.3. In câte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ astfel încât numerele pare să aibă rang par?

Demonstraţie. Fiind n locuri de rang par, rezultă că numerele pare de la 1 la $2n$ care sunt în număr de n se pot aşeza in $n!$ moduri. Fiecărui astfel de mod de aranjare a numerelor pare îi corespund $n!$ moduri de aranjare a numerelor impare pe locuri de rang impar, deci răspunsul este $n! \cdot n! = (n!)^2$ □

5.2.2 Aranjamente

Fie A o mulţime cu $\mathrm{card}A = n$. Dacă $m \leq n$, atunci se pot forma diferite mulţimi ordonate cu câte m elemente fiecare, în care intră numai elemente ale mulţimii A. Mulţimile ordonate ce se formează cu elementele unei submulţimi oarecare a unei mulţimi finite A se numesc **submulţimi ordonate** sau **aranjamente**.

Dacă A are n elemente, atunci sbmulţimile ordonate ale lui A având k elemente, $0 \leq k \leq n$ se numesc **aranjamente de n elemente luate câte k** şi se notează A_n^k.

Două aranjamente de n elemente luate câte k se deosebesc prin natura elementelor sau prin ordinea lor.

Teorema 5.2. $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 < k < n$

Demonstraţie. Arătăm $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$.

Pentru a repartiza oricare $k+1$ elemente luate din cele n elemente date pe $k+1$ locuri, se pot lua mai întâi oricare k elemente şi aranja pe primele k locuri. Aceasta se poate face în A_n^k moduri. In fiecare dintre aceste cazuri rămân $n-k$ elemente. Oricare dintre aceste elemente se poate pune pe al $k+1$-lea loc. Astfel, în fiecare dintre A_n^k moduri de aranjare a elementelor pe primele k locuri, obţinem $n-k$ posibilităţi prin care al $k+1$-lea loc e ocupat de unul dintre cele $n-k$ elemente rămase. Deci $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$.

Cum $A_n^1 = n$ (un element din n se poate alege in n moduri), $A_n^2 = n(n-1)$ etc.

$A_n^0 = 1$ (orice mulţime conţine mulţimea vidă , despre care am convenit s-o considerăm ordonată într-un singur mod)

Pentru $k = n$, $A_n^n = n! = P_n$

Deci formula este valabilă şi pentru $0 \leq k \leq n$. □

Exemplul 5.4. O grupă de studenţi trebuie să programeze 4 examene în 8 zile. In câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va da în mod obligatoriu în ziua a opta?

Răspuns: $A_8^4, 4 \cdot A_7^3$

Exemplul 5.5. Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele $0, 1, 2, 3, 4$ dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată .

Demonstraţie. Cu 5 cifre se pot forma $A_5^5 = 5!$ aranjamente diferite, dar aranjamentele care încep cu 0 sunt în număr de A_4^4, deci sunt $A_5^5 - A_4^4 = 96$ numere de 5 cifre.

Numărul numerelor cu 4 cifre care se pot forma cu 0,1,2,3,4 este A_5^4 din care scădem numărul aranjamentelor ce încep cu 0, adică A_4^3, deci sunt $A_5^4 - A_4^3 = 96$ numere de 4 cifre.

Numărul numerelor diferite de 3 cifre este $A_5^3 - A_4^2 = 48$, de 2 cifre $A_5^2 - A_4^1 = 16$ şi de o cifră sunt 4.

Deci se pot forma 260 numere. □

5.2.3 Numărul funcţiilor injective şi bijective

Fie $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Fie B o mulţime cu $\text{card}B = n, m \leq n$. Atunci fiecărei funcţii injective $f\colon N_m \to B$ îi corespunde o submulţime ordonată a lui B, formată din elementele $b_1 = f(1), b_2 = f(2), \dots, b_m = f(m)$ (toate aceste elemete sunt diferite între ele, f fiind injectivă). Invers, fiecare submulţime ordonată cu m elemente a lui B defineşte o funcţie injectivă $f\colon N_m \to B$ prin care $f(k) = b_k$.

In loc de N_m se poate lua orice mulţime cu m elemente.

Numărul funcţiilor injective definite pe o mulţime A cu m elemnte cu valori într-o mulţime B cu n elemente ($m \le n$) este egal cu numărul submulţimilor ordonate, având câte m elemente ale lui B, adică A_n^m.

Dacă $m = n$, atunci orice $f\colon A \to B$ este bijectivă . Numărul funcţiilor bijective este $A_n^n = n!$.

5.2.4 Combinări

Dată o mulţime A cu n elemente, atunci submulţimile lui A având fiecare câte k elemente, $0 \le k \le n$ se numesc **combinări de n elemente luate câte k**.

$C_n^0 = 1$, deoarece fiecare mulţime A are numai o submulţime fără niciun element şi anume mulţimea vidă .

$C_n^1 = n$, deoarece o mulţime cu n elemente are exact n submulţimi cu câte un singur element.

Teorema 5.3. $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Demonstraţie. Fie A o mulţime cu n elemente. Considerăm toate submulţimile ordonate ale lui A ce au fiecare câte k elemente, iar numărul lor este A_n^k. Numărul submulţimilor lui A având câte k elemente este C_n^k, iar fiecare dintre acestea se poate ordona în P_k moduri, deeci $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, adică $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. □

Exemplul 5.6. In câte moduri se poate alcătui din 9 persoane o comisie formată din 5 membri?

Răspuns: C_9^5

Exemplul 5.7. Să se găsească numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi?

Demonstraţie. Vârfurile formează o mulţime de n puncte necoliniare câte trei. Numărul diagonalelor şi al laturilor poligonului este egal cu numărul submulţimilor formate din câte două elemente ale unei mulţimi cu n elemente, C_n^2. Scăzând cele n laturi din acest număr obţinem $\frac{n(n-3)}{2}$. □

Exemplul 5.8. In câte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi, dacă oricare trei dintre ele nu sunt concurente?

Demonstraţie. Fiecărui punct de intersecţie a două diagonale îi corespund 4 vârfuri ale poligonului şi reciproc. Numărul tuturor punctelor de intersecţie este egal cu numărul posibilităţilor de a alege 4 din cele n vârfuri, adică C_n^4. □

5.2.5 Proprietăţile combinărilor

1) **Formula combinărilor complementare**
$C_n^k = C_n^{n-k}, 0 \leq k \leq n$

Demonstraţie. Fie A o mulţime cu n elemente. Fiecărei subulţimi X cu k elemente a lui A îi asociem o submulţime bine determinată cu $n-k$ elemente a mulţimii A şi anume CX. Prin această asociere, unei submulţimi cu $n-k$ elemente îi corespunde o singură submulţime cu k elemente. Aşadar, numărul submulţimilor cu k elemente ale lui A este egal cu numărul submulţimilor sale cu $n-k$ elemente. □

2) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n, \forall n \geq 0$

Demonstraţie. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ reprezintă numărul tuturor submulţimilor unei mulţimi cu n elemente

Demonstrăm prin inducţie.

Pentru $n = 0$. Mulţimea vidă are o singură submulţime, pe ea însăşi.

Presupunem adevărat pentru k: o mulţime cu k elemente are 2^k submulţimi.

Fie $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{k+1}\}$; $\text{card}B = k+1$.

$B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subset B$; B' are 2^k submulţimi.

Din fiecare submulţime a lui B' se obţine o nouă submulţime a lui B prin adăugarea elementului b_{k+1}, deci se obţin alte 2^k submulţimi ale lui B, deci în total sunt $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ submulţimi ale lui B. □

3) **Formula de recurenţă**
$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, 0 \leq k < n$

Demonstraţie. Considerăm un element oarecare $a \in A$, $\text{card}A = n$ şi toate submulţimile lui A formate din câte k elemente. Numărul acestor submulţimi este C_n^k. Submulţimile cu k elemente ale lui A le împărţim în două clase disjuncte: submulţmile ce conţin pe a şi submulţimile ce nu-l conţin pe a. Numărul submulţimilor din prima clasă este C_{n-1}^{k-1}, deoarece fiecare astfel de submulţime se obţine prin adăugarea elementului a la o o submulţime oarecare cu $k-1$ elemente a mulţimii A. Numărul submulţimilor din a doua clasă este C_{n-1}^k, deoarece fiecare astfel de submulţime este o submulţime cu k elemente a mulţimii $A \setminus \{a\}$. Deci $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, 0 \leq k < n$. □

5.3 Probleme propuse

1. Un bărbat are 4 cămăşi, 5 cravate şi 2 perechi de pantaloni. Câte costume constând într-o cămaşă , o cravată şi o pereche de pantaloni se pot forma?

   R: 40

2. La o sesiune de comunicări ştiinţifice s-au înregistrat 6 referate. In câte moduri se poate face programarea susţinerii lor?

   R: 6!

3. Se aranjează n dosare numerotate $1, 2, 3, \ldots, n$ în sertare numerotate $1, 2, 3, \ldots, n$ punând un dosar în fiecare sertar ($n \geq 3$). a) Număraţi toate posibilităţile de aranjare; b) Câte posibilităţi de aranjare există astfel încât dosarele 1 şi 2 să se afle în sertarele 1 şi 2?

   R: a) $n!$; b) $(n-2)!$

4. Pe o bancă se aşează 3 fete şi 3 băieţi. in câte moduri se pot aşeza astfel încât sa alterneze fetele şi băieţii?

   R: $2 \cdot 3! \cdot 3!$

5. La un joc LOTO jucătorii completează bilete cu 6 numere diferite alese la întâmplare dintre numerele $1, 2, \ldots, 49$. La o anumită dată are loc extragerea numerelor dintr-o urnă . Un jucător câştigă dacă numerele de pe biletul său coincid cu numerele extrase şi ordinea lor este aceeaşi. a) Câte bilete ar trebui să completeze un jucător pentru a fi sigur de câştig? b) Dacă primul număr extras coincide cu cel de pe biletul jucătorului, câte variante de câştig sunt?

   R: a) A_{49}^6; b) A_{48}^5

6. La 9 clase trebuie repartizate 3 profesori de matematică fiecăruia repartizăndu-i-se câte 3 clase. In câte moduri se poate face repartizarea?

   R: $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$

7. Un decorator de interioare are 8 feluri de culori din care trebuie să aleagă două , 5 tipuri de covoare din care trebuie să aleagă 3, 7 tipuri de perdele din care trebuie să aleagă 4. Câte posibilităţi de alegere există în total?

   R: $C_8^2 \cdot C_5^2 \cdot C_7^4$

8. Un lot de jucători de baschet are 5 fundaşi, 6 atacanţi şi 2 centrali. Câte echipe de 5 jucători, diferite se pot alege astfel încât să avem : a) exact 2 fundaşi, 2 atacanţi şi un central; b) cel puţin 2 fundaşi?

   R: a) $C_5^2 \cdot C_6^2 \cdot C_2^1$;

   b) $C_5^2(C_6^3+C_6^2 \cdot C_2^1+C_6^1 \cdot C_2^2)+C_5^3(C_6^2+C_6^1 \cdot C_2^1+C_2^2)+C_5^4(C_6^1+C_2^1)+C_5^5$

Capitolul 6

Evenimente şi probabilitate

6.1 Evenimente aleatoare

Definiţia 6.1. Se numeşte **experiment aleator** (sau întâmplător sau stocastic), acel experiment al cărui rezultat este imprevizibil până la realizarea sa. De exemplu, procentul de rebuturi la fabricarea unui produs, consumul de electricitate într-un oraş , jocurile de noroc, aruncarea unui zar.

Definiţia 6.2. Orice rezultat prezent sau viitor al experimentului se numeşte **probă** .

Definiţia 6.3. Rezultatele sau probele experimentului se numesc **evenimente elementare**. Notăm cu Ω spaţiul evenimentelor elementare.

Exemplul 6.1. Fie evenimentul aleator : aruncarea unei monede o dată

Atunci $\Omega = \{S, V\}$

Exemplul 6.2. Fie evenimentul aleator : aruncarea unui zar.

Atunci $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplul 6.3. Fie evenimentul aleator : aruncarea unei monede până la prima apariţie a stemei.

Atunci $\Omega = \{S, VS, VVS, VVVS, \ldots, VVVV \ldots\ldots VS, \}$. Deci nu orice spaţiu de evenimente elementare este finit!

Definiţia 6.4. Orice submulţime a mulţimii Ω o vom numi **eveniment aleator** (dacă Ω este finită sau numărabilă).

Definiţia 6.5. Evenimentele elementare ce intră în componenţa unui eveniment A se numesc **evenimente favorabile** lui A.

Exemplul 6.4. Fie experimentul aleator constând în aruncarea de 2 ori a unei monede. Atunci $\Omega = \{SS, SV, VS, VV\}$. Fie evenimentele A= apare cel puţin o dată stema : $\{SS, SV, VS\}$, B = stema va apărea o singură dată : $\{SV, VS\}$, C = rezultatul primei aruncări este identic cu rezultatul celei de-a doua : $\{SS, VV\}$.

Definiţia 6.6. Evenimentul ce coincide cu spaţiul evenimentelor elementare se numeşte **eveniment sigur**.

Evenimentul ce nu conţine niciun eveniment elementar se numeşte **eveniment imposibil**.

Evenimentul sigur se realizează la fiecare efectuare a experimentului, iar cel imposibil nu se produce la nicio efectuare a experimentului.

Exemplul 6.5. Eveniment sigur: la aruncarea unui zar apare un număr mai mic sau egal cu 6.

Eveniment imposibil: apare numărul 20 la aruncarea unui zar

Definiţia 6.7. Două evenimente A şi B se numesc **incompatibile** dacă nu se pot realiza simultan într-o aceeaşi efectuare a experimentului, $A \cap B = \emptyset$.

Dacă $A \cap B \neq \emptyset$, atunci evenimentele A şi B se numesc **compatibile** (se pot produce simultan).

Exemplul 6.6. Evenimentele A= apare faţă pară la aruncarea unui zar şi B=apar faţa 2 sau 6 la aruncarea unui zar sunt evenimente compatibile.

Definiţia 6.8. Intotdeauna unui eveniment îi corespunde un **eveniment contrar**, a cărui producere înseamnă prin definiţie nerealizarea primului şi se notează cu A^c sau $\overline{A}$ sau CA.

Exemplul 6.7. Evenimentele A şi $\overline{A}$ sunt incompatibile.

Exemplul 6.8. Evenimentele Ω şi $\emptyset$ sunt contrare.

Exemplul 6.9. Evenimentele A= apare una dintre feţele 1 sau 5 la aruncarea unui zar şi B= apare una dintre feţele 2,3,4 sau 6 la aruncarea unui zar sunt evenimente contrare.

Observaţia 6.1. Orice eveniment contrar este incompatibil, dar reciproca nu este adevărată .

Exemplul 6.10. Evenimentele A= apare faţă pară la aruncarea unui zar şi B= apare faţă impară la aruncarea unui zar sunt evenimente incompatibile şi contrare.

Exemplul 6.11. Evenimentele A= apare faţă pară la aruncarea unui zar şi B= apare faţa 5 la aruncarea unui zar sunt evenimente incompatibile, dar nu sunt contrare.

Definiţia 6.9. Fie Ω spaţiul evenimentelor elementare şi $\mathcal{P}(\Omega)$ mulţimea submulţimilor lui Ω. O familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se numeşte **câmp de evenimente** (sau **algebră**) dacă :

i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) dacă $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

iii) dacă $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

Consecinţe :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$

Demonstraţie. Conform ii) şi i), rezultă $\overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$ □

2. Dacă $A, B \in \mathcal{F}$, atunci $A \cap B \in \mathcal{F}$

   Demonstraţie. Conform ii), rezultă $\overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{F}$, iar din iii) rezultă $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}$, dar $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, deci $\overline{A \cap B} \in \mathcal{F}$. Din ii) avem $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B \in \mathcal{F}$. □

3. Dacă $A, B \in \mathcal{F}$, atunci $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

   Demonstraţie. Conform ii), rezultă $\overline{B} \in \mathcal{F}$, iar din 2) obţinem $A \cap \overline{B} \in \mathcal{F}$, dar $A \cap \overline{B} = A \setminus B$ □

Exemplul 6.12. Fie $A \subset \Omega$. Atunci $\mathcal{F} = \left\{A, \overline{A}, \Omega, \emptyset\right\}$ este un câmp de evenimente.

Observaţia 6.2. Dacă Ω este o mulţime arbitrară , considerăm evenimente numai elementele unei familii $\mathcal{F}$ de submulţimi ale lui Ω ce satisfac i),ii) şi $iii')A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, 3, \ldots \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. Atunci $\mathcal{F}$ se numeşte **câmp borelian de evenimente** (după numele probabilistului francez Emile Borel (1871-1956)) sau **σ-algebră de părţi ale lui Ω**.

Perechea $(\Omega, \mathcal{F})$ se numeşte **spaţiu măsurabil**.

6.2 Probabilitate

Definiţia 6.10. Fie $\mathcal{F}$ un câmp de evenimente. Se numeşte **probabilitate** pe $\mathcal{F}$ o aplicaţie $P \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ce satisface

1. $P(A) \geq 0, \ \ \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Dacă $A, B \in \mathcal{F}$ şi $A \cap B = \emptyset$, atunci $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se numeşte **câmp de probabilitate**.

Propoziţia 6.1. (**Regula de adunare a probabilităţilor**) Dacă $A_i \in \mathcal{F}, i = \overline{1, n}$ sunt incompatibile două câte două , $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, atunci $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Demonstraţie. Demonstrăm prin inducţie după n.

Pentru $n = 2$ avem 3) din Definiţia 6.10.

Presupunem adevărat pentru $n - 1$ şi demonstrăm pentru n.

Cum $A_i \cap A_n = \emptyset, i = \overline{1, n-1}$ avem $(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) = \emptyset$, deci A_n şi $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ sunt incompatibile şi conform 3) din Definiţia 6.10 şi din ipoteza de inducţie rezultă $P((\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cup A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ □

Definiţia clasică a probabilităţilor

Fie $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un număr finit de evenimente elementare.

Cum $P(\{\omega_i\}) \geq 0$, din Definiţia 6.10, 2) şi regula de adunare a probabilităţilor rezultă $\sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = P(\Omega) = 1$.

Fie $A = \{\omega_{i_1}\} \cup \ldots \cup \{\omega_{i_m}\}$ un eveniment oarecare al câmpului. Atunci $P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + \ldots + P(\{\omega_{i_m}\})$.

Dacă $P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_n\})$ spunem că evenimentele ω_i sunt egal probabile, iar $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \forall i = \overline{1, n}$, deci $P(A) = \frac{m}{n}$.

Probabilitatea unui eveniment A este egală cu raportul dintre numărul evenimentelor elementare favorabile lui A şi numărul total al evenimentelor elementare egal probabile; $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Exemplul 6.13. Care este probabilitatea ca în două aruncări ale monedei stema să apară cel puţin o dată ?

Demonstraţie. $\Omega = \{SS, SV, VS, VV\}$; $A = \{SS, SV, VS\}$

Atunci $P(A) = \frac{3}{4}$. □

Definiţia 6.11. Fie $\mathcal{F}$ un câmp borelian de evenimente. Se numeşte **probabilitate complet aditivă** pe $\mathcal{F}$ o aplicaţie $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ cu $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

   Proprietatea 3) se numeşte **axioma aditivităţii complete**. Tripletul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se numeşte **câmp borelian de probabilitate**.

Exemplul 6.14. Doi studenţi A şi B aruncă succesiv o monedă . Câştigă acela care obţine primul, la aruncarea lui, stema. Primul aruncă A. Să se calculeze probabilitatea ca stema să apară cel mult la a treia aruncare. Să se calculeze probabilitatea de câştig a studentului A.

Demonstraţie. $\Omega = \{S, VS, VVS, \ldots, VVV\ldots VS, \ldots\}$

$P(\{S\}) = \frac{1}{2}, P(\{VS\}) = \frac{1}{2^2}$ etc.

$P(\text{apare stema la cel mult a treia aruncare}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$

$P(\text{câştig}) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ (studentului A îi revin aruncările impare) $\square$

Proprietăţile probabilităţilor

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   Demonstraţie. Dacă $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$ (din Definiţia 6.9 ii)), dar $A \cup \overline{A} = \Omega$ şi $A \cap \overline{A} = \emptyset$, deci $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ (din Definiţia 6.10) $\square$

2. $P(\emptyset) = 0$

   Demonstraţie. Din 1) rezultă $P(\emptyset) = 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 0$ $\square$

3. Dacă $A \subset B$ rezultă $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

   Demonstraţie. $P(B) = P(B \setminus A) + P(A)$, deoarece $B = (B \setminus A) \cup A$ şi $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ $\square$

4. Dacă $A \subset B$ rezultă $P(A) \leq P(B)$.

   Demonstraţie. $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0$ $\square$

5. $0 \leq P(A) \leq 1$

   Demonstraţie. $\emptyset \subset A \subset \Omega \Longrightarrow 0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$ $\square$

6. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$

   Demonstraţie. $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$, dar $A \cap B \subset B$, deci $P(B \setminus A) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$ $\square$

7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Demonstraţie. Cum $A \cup B = A \cup (B \setminus A), A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ rezultă $P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\square$

8. (**formula lui Poincare**) Fie $A_i \in \mathcal{F}, i = \overline{1,n}$. Atunci

   $$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Demonstraţie. Se demonstrează prin inducţie şi folosind proprietatea 7). □

Exemplul 6.15. Intr-un grup de manageri $85^0/_0$ vorbesc limba engleză şi $70^0/_0$ franceză , iar $60^0/_0$ vorbesc ambele limbi. Se alege un manager la întâmplare. Care este probabilitatea ca managerul ales : a) să vorbească cel puţin una dintre cele două limbi; b) să nu vorbească niciuna dintre cele două limbi.

Demonstraţie. Fie evenimentele

$A=$ managerul ales vorbeşte limba engleză

$B=$ managerul ales vorbeşte limba franceză

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,85+0,7-0,6$

b) $P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)=0,05$ □

Exemplul 6.16. O societate compusă din n perechi soţ şi soţie dansează şi se presupune că formarea perechilor la dans este egal probabilă . Care este probabilitatea ca la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu soţia sa?

Demonstraţie. Numerotăm perechile soţ - soţie de la 1 la n.

Fie A_k = evenimentul că s-a format perechea numărul k soţ - soţie, unde $k=\overline{1,n}$

Atunci $P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})=\frac{(n-k)!}{n!}$, deoarece s-au format k perechi soţ - soţie, atunci celelalte $n-k$ perechi bărbat- femeie pot forma $(n-k)!$ perechi de dans

Fie evenimentele A = la un moment dat fiecare bărbat să nu danseze cu soţia sa, B = la un moment dat cel puţin un bărbat dansează cu soţia sa

A şi B sunt evenimente complementare $\Longrightarrow P(A)=1-P(B)$

Cum $B=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ şi $A_1,\ldots A_n$ sunt evenimente compatibile $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow P(B)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_i\cap A_j)+$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)+\ldots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$$

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})=C_n^k\frac{(n-k)!}{n!}$$

Aşadar, $P(B)=C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\Longrightarrow$

$\Longrightarrow P(A)=1-C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}+C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-$
$-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$ □

Definiţia geometrică a probabilităţii

Definiţia clasică a probabilităţii poate fi aplicată doar atunci când spaţiul evenimentelor elementare Ω este o mulţime discretă , finită şi evenimentele elementare sunt echiprobabile.

Fie Ω un domeniu oarecare, iar A o parte a lui Ω. In domeniul Ω se ia la întâmplare un punct ω. Care este probabilitatea ca punctul ales să aparţină şi lui A?

Se presupune că probabilitatea ca punctul ales să aparţină şi unei părţi a lui Ω este proporţională cu măsura acestei părţi (lungime, arie, volum etc.) şi nu depinde de forma şi poziţia ei în interiorul lui Ω. Notând măsura domeniului cu $m(\Omega)$ şi a lui A cu $m(A)$, probabilitatea realizării evenimentului A este $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

Exemplul 6.17. Care este probabilitatea ca suma a 3 numere din intervalul $[0, a]$ alese la întâmplare să fie mai mare decât a?

Demonstraţie. Spaţiul de probabilitate este $\Omega = [0, a]^3$. Evenimentul cerut este format din punctele mulţimii $E = \big\{(x, y, z) \in \Omega / x + y + z \geq a\big\}$

Alegem un sistem ortogonal de axe şi Ω se reprezintă printr-un cub de latură a situat în primul octant, iar E este una din regiunile lui Ω separate de planul $x + y + z = a$ (complementara tetraedrului $OABC$). Atunci $P(E) = \frac{a^3 - \frac{a^3}{6}}{a^3} = \frac{5}{6}$ □

6.3 Probabilităţi condiţionate. Independenţa evenimentelor

Definiţia 6.12. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate şi $A, B \in \mathcal{F}$ evenimente. Atunci **probabilitatea lui A condiţionată de B** se notează cu $P(A/B)$ sau $P_B(A)$ şi este definită prin

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observaţia 6.3. $P(\emptyset/B) = 0, P(\Omega/B) = 1, P(B/B) = 1,$
$P(A/\Omega) = P(A)$

Dacă $B \subset A$, atunci $P(A/B) = 1$

Exemplul 6.18. Se dau $P(A/B) = \frac{7}{10}, P(A/B^c) = \frac{3}{10}, P(B/A) = \frac{6}{10}$. Să se determine $P(A)$.

Demonstraţie. Din definiţia probabilităţilor condiţionate avem $P(B/A) = \\ = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, deci $P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$ şi analog $P(A)P(B^c/A) = P(B^c)P(A/B^c)$

Aşadar, $P(A) = \frac{P(B)P(A/B)}{P(B/A)} = \frac{P(B^c)P(A/B^c)}{P(B^c/A)}$

Avem $P(B^c) = 1 - P(B)$ şi $P(B/A) + P(B^c/A) = 1 \Longrightarrow P(B^c/A) = \\ = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$. Atunci $P(A) = \frac{P(B)\frac{7}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{7}{6}P(B)$, deci

$P(A) = \frac{(1-P(B))\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}(1-P(B)) \Longrightarrow \frac{7}{6}P(B) = \frac{3}{4}(1-P(B)) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow P(B) = \frac{9}{23} \Longrightarrow P(A) = \frac{21}{46}$ $\square$

Teorema 6.1. ***(Formula de înmulţire a probabilităţilor)*** *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un câmp de probabilitate şi* $A_i \in \mathcal{F}, i = \overline{1,n}$ *evenimente astfel încât* $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$. *Atunci*

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Demonstraţie. $P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ $\square$

Exemplul 6.19. Cuvântul "vectorial" este format din litere izolate scrise pe cartonaşe. Amestecăm aceste cartonaşe, apoi extragem din ele pe rând patru, pe care le aşezăm unul după altul. Să se afle probabilitatea de a obţine cuvântul "voce".

Demonstraţie. Considerăm evenimentele A_1= prima literă extrasă este "v", A_2= a doua literă extrasă este "o", A_3= a treia literă extrasă este "c", A_4= a patra literă extrasă este "e".

Atunci $P(A_1 \cap \ldots \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot$
$\cdot P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$. $\square$

Teorema 6.2. ***(Formula probabilităţii totale)*** *Fie* $(B_i)_{i \in I}$ *(I cel mult numărabilă) un sistem complet de evenimente (i.e.* $\Omega = \bigcup_{i \in I} B_i$ *şi* B_i *sunt incompatibile două câte două) cu* $P(B_i) > 0, \forall i \in I$. *Atunci* $\forall A \in \mathcal{F}$ *avem*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A/B_i)P(B_i).$$

Demonstraţie. $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)$

Cum B_i sunt incompatibile două câte două , rezultă $A \cap B_i$ sunt incompatibile două câte două , întrucât pentru $i \neq j$ avem $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = A \cap (B_i \cap B_j) = A \cap \emptyset = \emptyset$. Aşadar,
$P(A) = P(\bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} P(B_i)P(A/B_i)$ $\square$

Teorema 6.3. ***(Formula lui Bayes)*** *Fie* $(B_i)_{i \in I}$ *(I cel mult numărabilă) un sistem complet de evenimente cu* $P(B_i) > 0, \forall i \in I$ *şi* $A \in \mathcal{F}$ *un eveniment pentru care* $P(A) > 0$. *Atunci*

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A/B_j)P(B_j)}$$

Demonstraţie. Din definiţia probabilităţii condiţionate şi formula probabilităţilor totale rezultă $P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A/B_j)P(B_j)}$ □

Observaţia 6.4. In particular, pentru orice două evenimente A, B avem

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c)$$

şi

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c)}$$

Exemplul 6.20. Printre n bilete de examen, m sunt preferate de studenţi, unde $0 < m \leq n, n \geq 2$. Studenţii vin pe rând să tragă câte un bilet. Dintre primii 2 studenţi care are şansa cea mai mare de a trage un bilet preferat?

Demonstraţie. Fie evenimentele A = primul student trage un bilet preferat, B = al doilea student trage un bilet preferat.

Avem $P(A) = \frac{m}{n}$ Avem $P(B) = P(A)(B/A) + P(A^c)P(B/A^c) =$
$= \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} + \left(1 - \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{m}{n-1} = \frac{m}{n}$

Aşadar, $P(A) = P(B)$, deci nu contează ordinea tragerii biletelor pentru primii doi studenţi. □

Exemplul 6.21. O informaţie telegrafică constă din semnale "liniuţe" şi "puncte". In medie se deformează $\frac{2}{5}$ din semnalele cu "puncte" şi $\frac{1}{3}$ din cele cu "liniuţe". Este cunoscut că semnalele cu "puncte" şi "liniuţe" se întâlnesc în raportul $\frac{5}{3}$. Să se determine probabilitatea ca:

a) primind un semnal consacrat, acesta să fie "punct";

b) probabilitatea ca el să fie liniuţă .

Demonstraţie. Fie evenimentele A = primirea unui semnal "punct", B = primirea unui semnal "liniuţă ", H_1 = este transmis semnalul "punct", H_2 = este transmis semnalul "liniuţă ".

Stim că $\frac{P(H_1)}{P(H_2)} = \frac{5}{3}$ şi $P(H_1) + P(H_2) = 1 \Longrightarrow P(H_1) = \frac{5}{8}, P(H_2) =$
$= \frac{3}{8}$.

Din ipoteză avem că $P(A/H_2) = \frac{1}{3}, P(B/H_1) = \frac{2}{5}$. Atunci $P(A/H_1) =$
$= 1 - P(B/H_1) = \frac{3}{5}, P(B/H_2) = 1 - P(A/H_2) = \frac{2}{3}$.

Conform formulei probabilităţilor totale avem $P(A) = P(H_1)P(A/H_1)+$
$+P(H_2)P(A/H_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ şi $P(B) = P(H_1)P(B/H_1)+$
$+P(H_2)P(B/H_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

a) Din formula lui Bayes $\Longrightarrow P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{3}{4}$.

b) $P(H_2/B) = \frac{P(H_2)P(B/H_2)}{P(B)} = \frac{1}{2}$ □

Definiţia 6.13. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate şi $A, B \in \mathcal{F}$. Evenimentele A şi B se numesc **independente** dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplul 6.22. Independente una de alta se fac operaţiile: se aruncă o monedă , un zar şi se extrage o carte dintr-un pachet de cărţi de joc. Care este probabilitatea ca să obţinem faţa cu stema, un număr par (pe zar) şi să extragem un zece?

R: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{52}$

Teorema 6.4. *Dacă evenimentele $A, B \in \mathcal{F}$ sunt independente, atunci A şi $\overline{B}$, $\overline{A}$ şi B, $\overline{A}$ şi $\overline{B}$ sunt independente.*

Demonstraţie. $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$

Analog se arată independenţa celorlalte evenimente. □

Definiţia 6.14. Evenimentele $A_1, \ldots A_n$ se numesc **independente în ansamblu** (sau **în totalitatea lor**) dacă pentru orice $m \leq n$ şi $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_m \leq n$, avem

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \ldots P(A_{j_m})$$

Observaţia 6.5. Dacă n evenimente sunt independente două câte două nu sunt neapărat independente în totalitatea lor.

Exemplul 6.23. Următorul exemplu este datorat lui S.N. Bernstein : Se consideră un tetraedru omogen cu feţele colorate în alb, negru, roşu şi a patra în cele trei culori. Efectuăm experimentul aruncării acestui corp o singură dată . Să notăm cu A_i evenimetul ca tetraedrul să se aşeze pe faţa cu numărul i,$i = \overline{1,4}$. Evenimentele A_i sunt evenimente elementare ale câmpului asociat experimentului descris.

Avem $P(A_i) = \frac{1}{4}, i = \overline{1,4}$

Dacă notăm $A = A_1 \cup A_2, B = A_1 \cup A_3, C = A_1 \cup A_4$ avem $P(A) = = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, deoarece pentru fiecare culoare sunt patru cazuri posibile şi două cazuri favorabile - faţa ce are culoarea respectivă şi faţa cu toate culorile.

De asemenea, $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{4}$, deci evenimentele A, B, C sunt independente două câte două .

Din $P(A \cap B \cap C) = P(A_1) = \frac{1}{4}$,$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$ rezultă că evenimentele A, B, C nu sunt independente în ansamblul lor.

6.4 Scheme de probabilitate

1. **Schema lui Bernoulli (schema binomială)**

   Se efectuează n experimente independente şi fiecare dintre ele pune în evidenţă un eveniment A cu aceeaşi probabilitate de apariţie p. Să se determine probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze de k ori.

   $$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = \overline{0,n}, \text{ unde } q = 1 - p$$

   Exemplul 6.24. Un muncitor deserveşte simultan 10 maşini de acelaşi tip. Probabilitatea ca o maşină să necesite o intervenţie într-un interval de timp t este $p = \frac{1}{3}$. Să se determine probabilitatea ca:

   a) 6 din cele 10 maşini să necesite intervenţia muncitorului în intervalul de timp t;

   b) cel mult 4 din cele 10 maşini să necesite câte o intervenţie în intervalul t.

   Demonstraţie. a) $C_{10}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^4$

   b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$ □

2. **Schema hipergeometrică (schema bilei neîntoarse)**

   Fie N bile, a albe şi b negre ($N = a + b$). Se extrag n bile şi se cere probabilitatea ca x bile să fie albe şi $n - x$ negre.

   $$p = \frac{C_a^x \cdot C_b^{n-x}}{C_N^n}$$

   Exemplul 6.25. Intr-o tabără studenţească de ski sunt 60 de băieţi şi 40 de fete. In scopul unui sondaj privind opinia studenţilor asupra programului de antrenament se aleg la întâmplare 10 persoane. Care este probabilitatea ca grupul ales să fie compus din 9 fete şi un băiat?

   R: $\frac{C_{40}^9 \cdot C_{60}^1}{C_{100}^{10}}$

3. **Schema polinomială (schema lui Bernoulli cu mai multe stări)**

   Se efectuează n experimente independente care pun în evidenţă un sistem complet de evenimente $A_1, \ldots, A_r$ cu probabilităţile $p_1, \ldots, p_r$ ($p_1 + \ldots + p_r = 1$). Să se determine probabilitatea ca fiecare A_i să se realizeze de k_i ori ($k_1 + \ldots + k_r = n$).

   $$P_n(k_1, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_r^{k_r}$$

Pentru $r = 2$ se obţine schema lui Bernoulli.

Model: Considerăm o urnă cu bile de culori $c_1, \ldots, c_r$ şi p_i probabilitatea de apariţie într-o extragere a unei bile de culoare c_i. Se fac n extrageri a câte o bilă cu condiţia ca la fiecare extragere urna să aibă aceeaşi compoziţie. Care este probabilitatea ca în extragerile efectuate să apară k_i bile de culoarea c_i, $i = \overline{1, r}$.

Exemplul 6.26. La un magazin se vând 3 sortimente de produse electrice s_1, s_2, s_3. In perioada precedentă din volumul total al vânzărilor cele 3 produse au avut următoarele procente $20^0/_0$, $65^0/_0$, $15^0/_0$. Se anticipează solicitările a 30 de cumpărători dintre clienţii magazinului. Care este probabilitatea ca 10 să cumpere din sortimentul s_1, 5 din s_2 şi 15 din s_3?

Demonstraţie. $\frac{30!}{10! \cdot 5! \cdot 15!} \cdot (0,2)^{10} \cdot (0,65)^5 \cdot (0,15)^{15}$ □

4. **Schema lui Poisson**

Schema binomială poate fi generalizată astfel: în diferite experimente independente evenimentul A apare cu diferite probabilităţi. De exemplu, dacă probabilitatea evenimentului A în experimentul al i-lea este p_i, atunci probabilitatea ca în n experimente independente evenimentul A să apară de k ori este dată de coeficientul lui x^k din dezvoltarea $\prod_{i=1}^{n}(p_i x + q_i)$, unde $q_i = 1 - p_i$.

Model: Se extrage câte o bilă din n urne ce conţin bile albe şi negre în diferite proporţii, asigurând probabilitatea p_i de obţinere a unei bile albe din urna U_i, $i = \overline{1, n}$. Probabilitatea ca din cele n bile extrase k să fie albe şi $n - k$ negre este $\sum p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k} q_{i_{k+1}} q_{i_{k+2}} \ldots q_{i_n}$

Exemplul 6.27. La un concurs de matematică 3 candidaţi primesc câte un plic care conţine n ($n > 3$) bilete cu probleme de algebră şi geometrie. Cele 3 plicuri conţin respectiv câte 1,2,3 subiecte de algebră . Fiind examinaţi, cei 3 candidaţi extrag fiecare câte un bilet din plic. Extragerea făcându-se la întâmplare, să se afle probabilitatea următoarelor evenimente :

a) 3 candidaţi să fie examinaţi la geometrie;

b) nici un candidat să nu fie examinat la geometrie;

c) cel puţin un candidat să fie examinat la algebră .

Demonstraţie. a) Aplicăm schema lui Poisson şi avem :
$\left(\frac{1}{n}t + \frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}t + \frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}t + \frac{n-3}{n}\right) = \frac{1}{n^3}[6t^3 + (11n - 18)t^2 +$
$+(6n^2 - 22n + 18)t + (n-1)(n-2)(n-3)]$

$p_1 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}$ (termenul liber din polinomul de mai sus)

b) $p_2 = \frac{6}{n^3}$ (coeficientul lui t^3 din polinomul de mai sus)

c) $p_3 = 1 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}$ $\square$

6.5 Probleme propuse

1. O urnă conţine 99 de bile identice, numerotate $1, 2, \ldots 99$. Care e probabilitatea ca printr-o extragere să obţinem o bilă numerotată cu un pătrat perfect?

   R: $\frac{9}{99}$

2. Intr-o urnă sunt 7 bile albe şi 5 negre, iar în alta 6 albe şi 8 negre. Se extrage din fiecare câte o bilă . Care e probabilitatea ca ambele bile să fie albe?

   R: $\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{14}$

3. Aruncând 4 zaruri , să se determine probabilitatea de a obţine faţa 1 cel puţin o dată . Să se determine probabilitatea de a obţine faţa 1 o singură dată .

   R: $p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

   $p_2 = C_4^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

4. Intr-o uzină se fabrică lămpi cu incandescenţă . La aceste lămpi întâlnim 2 $^0/_0$ defecte de fabricaţie şi 5 $^0/_0$ defecte de montaj. Să se calculeze probabilitatea ca o lampă să fie înlăturată ca necorespunzătoare.

   R: $\frac{2}{100} + \frac{5}{100} - \frac{2}{100} \cdot \frac{5}{100}$

5. Un scafandru are 2 sisteme de oxigen independente, astfel încât dacă unul se defectează scafandrul să primească în continuare oxigen. Presupunem că probabilitatea ca sistemul I să funcţioneze este 0,9, în timp ce probabilitatea ca sistemul II să funcţioneze este 0,8.

   a) Găsiţi probabilitatea ca nici un sistem să nu se defecteze;

   b) Găsiţi probabilitatea ca cel puţin un sistem să funcţioneze.

   R: S_1=sistemul I funcţionează şi S_2=sistemul II funcţionează

   a) $P(S_1 \cap S_2) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72$; b) $P(S_1 \cup S_2) = 0,98$

6. Trăgătorul A nimereşte ţinta de 8 ori din 11 trageri, iar B de 9 ori din 10 trageri. Dacă trag simultan în aceeaşi ţintă , care e probabilitatea ca ţinta să fie atinsă .

   R: $A_1 = A$ să nimerească ţinta, $A_2 = B$ să nimerească ţinta

   $P(A_1 \cup A_2) = \frac{8}{11} + \frac{9}{10} - \frac{8}{11} \cdot \frac{9}{10}$

7. Doi studenţi care se reprezintă la un examen au probabilităţile de promovare 0,5, respectiv 0,8. Care este probabilitatea ca:

   a) ambii studenţi să promoveze examenul;

   b) un singur student să promoveze;

   c) cel puţin un student să promoveze;

   d) nici un student să nu promoveze.

   R: A=primul student să promoveze, B= al doilea student să promoveze

   a)$P(A \cap B) = 0,4$; b) $P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = 0,5$; c) $P(A \cup B) = 0,9$; d) $P(A^c \cap B^c) = 0,1$

8. Se dau $P(A) = 0,5$ şi $P(A \cup B) = 0,6$. Găsiţi $P(B)$ dacă :

   a) A şi B sunt incompatibile;

   b) A şi B sunt independente;

   c) $P(A/B) = 0,4$

   R: a) $P(B) = 0,1$; b) $P(B) = 0,2$; c) $P(B) = \frac{1}{6}$

9. Sase vânători au zărit o vulpe şi au tras simultan. Presupunem că de la distanţa respectivă , fiecare vânător nimereşte în mod obişnuit vulpea şi o ucide cu probabilitatea $\frac{1}{3}$. Să se afle probabilitatea ca vulpea să fie ucisă .

   R: $\frac{665}{729}$

10. Se consideră n plicuri pe care sunt scrise n adrese diferite. In aceste plicuri sunt introduse la întâmplare n scrisori, câte una pentru fiecare din cele n adrese. Să se determine probabilitatea ca cel puţin o scrisoare să nimerească în plicul cu adresa corespunzătoare?

    R: $p = 1 - \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$ (formula lui Poincare)

11. Dintr-o urnă conţinând 9 bile albe şi 10 bile negre se extrag (succesiv, fără înlocuire) 4 bile. Să se determine probabilitatea ca cel puţin una să fie albă ?

    R: $p = 1 - \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{7}{16}$ (formula de înmulţire a probabilităţilor)

12. O urnă conţine 10 bile printre care 3 sunt negre şi 7 albe. Intr-o probă este selectată la întâmplare o bilă , se observă culoarea ei şi apoi se reintroduce în urnă împreună cu alte 2 bile de aceeaşi culoare. Care este probabilitatea ca o bilă neagră să fie selectată în fiecare din primele 3 probe?

    R: $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{14}$

13. Intr-o urnă sunt 24 de bile albe şi 9 bile negre. Se extrag pe rând 3 bile fără a pune bila extrasă înapoi în urnă . Care este probabilitatea ca bilele să fie extrase în ordinea alb, alb, negru? Dar alb, negru, alb? Dar negru, alb, alb? Dar probabilitatea ca două din cele trei bile extrase să fie albe?

    R: $P(A, A, N) = \frac{24}{33} \cdot \frac{23}{32} \cdot \frac{9}{31}$
    $P(A, N, A) = \frac{24}{33} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{23}{31}$
    $P(N, A, A) = \frac{9}{33} \cdot \frac{24}{32} \cdot \frac{23}{31}$
    Fie A_i=la extragerea i obţinem o bilă albă , $i = 1, 2, 3$
    $P((A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)) = 3 \cdot \frac{9}{33} \cdot \frac{24}{32} \cdot \frac{23}{31}$

14. Intr-un lot 20 de televizoare sunt bune şi 6 defecte. Patru cumpărători extrag succesiv câte un televizor.

    a) Care este probabilitatea ca cele 4 televizoare să fie bune?

    b) Care este probabilitatea ca primele 2 să fie bune şi ultimele 2 să fie defecte?

    R: a) $\frac{20}{26} \cdot \frac{19}{25} \cdot \frac{18}{24} \cdot \frac{17}{23}$; b) $\frac{20}{26} \cdot \frac{19}{25} \cdot \frac{6}{24} \cdot \frac{5}{23}$

15. Avem o urnă cu 2 bile albe şi 3 negre şi alta cu 3 bile albe şi 5 negre. Urnele se aleg la întâmplare cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ fiecare. Se extrage o bilă la întâmplare din una din urne. Care e probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră ?

    R: $p = \frac{49}{80}$ (Observaţia 6.4)

16. Tabelul următor arată nivelele presiunii sângelui şi obiceiurile unui grup de 300 de bărbaţi de vârstă medie:

	Nefumător	Fumător moderat	Fumător " înrăit"	Total
Presiunea normală a sângelui	81	84	27	192
Presiune mare a sângelui	21	51	36	108
Total	102	135	63	300

    Presupunem că cineva este selectat la întâmplare din acest grup. Găsiţi probabilitatea ca persoana selectată :

    a) să fie un fumător " înrăit";

    b) are presiunea mare a sângelui;

    c) are presiune mare şi e un fumător " înrăit";

    d) are presiune mare a sângelui dat fiind faptul că este un fumător " înrăit";

    e) să fie un fumător "înrăit" dat fiind faptul că el are presiune mare a sângelui.

R: H= evenimentul că persoana selectată este un fumător " înrăit" şi B= evenimentul că persoana selectată are presiunea mare a sângelui

a) $P(H) = \frac{63}{300} = 0,21$; b) $P(B) = \frac{108}{300} = 0,36$; c) $P(B \cap H) = \frac{36}{300} = 0,12$; d) $P(B/H) = \frac{36}{63} = 0,57$; e) $P(H/B) = \frac{0,21 \cdot 0,57}{0,36} = 0,33$

17. Un studiu asupra atitudinii despre slujba unei persoane este dat în următorul tabel:

	fericit	nefericit	Total
Soferi de autobuz	50	75	125
Avocaţi	40	35	75
Total	90	110	200

O persoană din acest grup este selectată la întâmplare. Dat fiind că persoana selectată este şofer de autobuz, găsiţi probabilitatea ca el să fie fericit.

R: H=persoana fericită este selectată şi B=un şofer de autobuz este selectat

$P(H/B) = \frac{\frac{50}{200}}{\frac{125}{200}}$

18. Se consideră o populaţie formată din $48^0/_0$ bărbaţi şi 52 $^0/_0$ femei. Probabilitatea ca un bărbat să fie daltonist este 0,05, iar ca o femeie să sufere de această afecţiune este 0,0025. Care este proporţia de daltonişti la nivelul întregii populaţii?

R: B =persoana aleasă este bărbat, F =persoana aleasă este femeie, D =persoana aleasă suferă de daltonism

$P(D) = 0,0253$. Deci procentul cerut este de 2,53 $^0/_0$.

19. Tragerea de pe un avion contra altui avion poate să se producă de la distanţele 600m,400m şi 200m. Probabilitatea ca tragerea să se producă la distanţa 600m este 0,2, la 400m este 0,3, la 200m este 0,5. Probabilitatea doborârii avionului inamic la distanţa 600m este 0,1, la 400m este 0,2, la 200m este 0,4. Se efectuează tragerea al cărei efect este doborârea avionului. Să se găsească probabilitatea ca tragerea să se fi produs de la 200m.

R: $0,715$

20. Se dau şase urne cu următoarele structuri:

(S_1) 2 urne ce conţin câte 2 bile albe şi 6 negre;

(S_2) 3 urne ce conţin câte 3 bile albe şi 5 negre;

(S_3) o urnă ce conţine 6 bile albe şi 2 negre.

Se extrage la întâmplare o bilă dintr-o urnă . Se cer:

a) Care e probabilitatea de a extrage o bilă neagră ?

b) Presupunem că dintr-o urnă oarecare s-a extras o bilă neagră . Care e probabilitatea ca ea să aparţină uneia din structurile (S_1),(S_2),(S_3)?

R: a) $\frac{29}{48}$ b) $\frac{12}{29}, \frac{15}{29}, \frac{2}{29}$

21. O fabrică produce piese de schimb prin 3 tehnologii diferite I,II,III astfel :

    I : $\frac{5}{10}$ din producţie şi $\frac{1}{10}$ din piese sunt defecte;

    II : $\frac{2}{10}$ din producţie şi $\frac{3}{20}$ din piese sunt defecte;

    III : $\frac{3}{10}$ din producţie şi $\frac{1}{25}$ din piese sunt defecte.

    O persoană alege la întâmplare o piesă . Care e probabilitatea ca aceasta să fie defectă ? Care e probabilitatea ca piesa aleasă să provină din I?

    R: Fie A_i = piesa provine din tehnologia I,II sau III, $i = \overline{1,3}$ şi B = piesa aleasă e defectă

    cu formula probabilităţii totale $P(B) = \frac{92}{1000}$

    cu formula lui Bayes $P(A_1/B) = \frac{50}{92}$

22. Din 100 de piese lucrate la un strung, 5 sunt defecte. Se iau la întâmplare 45 de piese.

    a) Care e probabilitatea ca să existe între cele 45 de piese o singură piesă defectă ?

    b) Care e probabilitatea ca să existe cel puţin o piesă defectă ?

    R: a) $p_1 = \frac{C_5^1 C_{95}^{44}}{C_{100}^{45}}$; b) $p_2 = \frac{C_5^1 C_{95}^{44} + C_5^2 C_{95}^{43} + C_5^3 C_{95}^{42} + C_5^4 C_{95}^{41} + C_5^5 C_{95}^{40}}{C_{100}^{45}}$

23. Intr-o ladă cu 80 pachete de ţigări, 4 pachete au câte o ţigară ruptă Care e probabilitatea ca o persoană care cumpără 4 pachete să primească toate pachetele cu ţigări rupte? Care e probabilitatea ca să primească cel puţin 2 pachete cu ţigări rupte?

    R: $p_1 = \frac{C_4^4 C_{76}^0}{C_{80}^4}$; $p_2 = \frac{C_4^2 C_{76}^2 + C_4^3 C_{76}^1 + C_4^4 C_{76}^0}{C_{80}^4}$

24. Dintr-un lot de 100 tranzistori, 20 au defecte. Se extrag 10 tranzistori. Care este probabilitatea ca toţi tranzistorii extraşi să fie buni, dar ca unul singur să fie defect, dar cel puţin unul să fie defect?

    R: $p_1 = \frac{C_{80}^{10} \cdot C_{20}^0}{C_{100}^{20}}$

    $p_2 = \frac{C_{80}^9 \cdot C_{20}^1}{C_{100}^{20}}$

    $p_3 = 1 - \frac{C_{80}^{10} \cdot C_{20}^0}{C_{100}^{20}}$

25. Din 16 borcane de câte 1 kg, 4 conţin dulceaţă de caise şi 12 de prune. Grupându-se la întâmplare câte 4 borcane, să se determine

probabilitatea ca fiecare grupă să conţină un borcan cu dulceaţă de caise.

R: $p = \frac{C_{12}^3 C_4^1}{C_{16}^4} \cdot \frac{C_9^3 C_3^1}{C_{12}^4} \cdot \frac{C_6^3 C_2^1}{C_8^4}$

26. Se aruncă o monedă de 8 ori. Să se afle probabilitatea ca stema să apară de 6 ori.

    R: $p = C_8^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2$

27. Probabilitatea ca un nou născut să fie sex masculin este egală cu 0,51 (pentru o anumită populaţie). Să se calculeze probabilitatea ca într-o familie cu 7 copii 5 să fie de sex masculin.

    R: $p = C_7^5(0,51)^5(0,49)^2$

28. Probabilitatea ca o zi din luna martie să fie ploioasă este 0,8. Care este probabilitatea ca în prima decadă a acestei luni să fie 4 zile ploioase? Dar cel mult 4 zile ploioase? Dar probabilitatea ca toate zilele să fie însorite?

    R: $p_1 = C_{10}^4(0,8)^4(0,2)^6$

    $p_2 = (0,2)^{10} + C_{10}^1(0,8)(0,2)^9 + C_{10}^2(0,8)^2(0,2)^8 + C_{10}^3(0,8)^3(0,2)^7+$
    $+C_{10}^4(0,8)^4(0,2)^6$

    $p_3 = (0,2)^{10}$

29. Un muncitor produce cu probabilităţile 0,99; 0,07 şi 0,03 o piesă bună o piesă cu un defect remediabil şi un rebut. Muncitorul a produs 3 piese. Care este probabilitatea ca între cele 3 piese să fie cel puţin o piesă bună şi cel puţin un rebut?

    R: $P = \frac{3!}{1!1!1!} \cdot 0,9 \cdot 0,07 \cdot 0,03 + \frac{3!}{2!1!}(0,9)^2 \cdot 0,03 + \frac{3!}{2!1!} \cdot 0,9 \cdot (0,03)^2 =$
    $= 0,08667$

30. Un aparat se compune din 5 elemente; fiabilitatea (probabilitatea de funcţionare fără defecţiune într-un interval de timp) elementelor este : $p_1 = 0,9, p_2 = 0,95, p_3 = 0,8, p_4 = 0,85, p_5 = 0,91$. Dacă nici unul din elemente nu este în pană , probabilitatea de funcţionare a aparatului fără defecţiuni este egală cu 1; dacă unul din cele 5 elemente este în pană această probabilitate este 0,7, iar dacă două elemente sunt în pană aparatul nu poate funcţiona. Să se determine probabilitatea ca aparatul să poată efectua munca pentru care este destinat.

    R: A_1=nici un element nu este în pană ; A_2=un element este în pană ; A evenimentul "aparatul efectuează munca pentru care este destinat"

    $P(A_1) = 0,53, P(A_2) = 0,364$ (schema lui Poisson)

    $P(A) = 0,53 \cdot 1 + 0,364 \cdot 0,7 = 0,784$ (formula probabilităţilor totale)

Capitolul 7

Variabile aleatoare

Intuitiv, prin variabilă aleatoare se înţelege o mărime care, în funcţie de rezultatul unui experiment, poate lua o valoare dintr-o mulţime bine definită de valori reale. Această valoare nu poate fi cunoscută înainte de efectuarea experimentului din cauza factorilor întâmplători ce influenţează experimentul. Exemple de variabile aleatoare: numărul de defecţiuni ale unui dispozitiv într-o anumită perioadă , numărul de nimeriri la ţintă într-un experiment de n trageri, timpul de funcţionare a unei lămpi.

Variabila aleatoare care are o mulţime finită sau infinită numărabilă de valori se numeşte **discretă** . Exemple de variabile aleatoare discrete: numărul celor născuţi în luna august dintr-un grup de 100 de persoane, numărul de apeluri telefonice la o centrală într-o unitate de timp, numărul de piese rebutate dintr-un lot.

Variabila aleatoare a cărei mulţime de valori posibile este un interval finit sau infinit al dreptei reale se numeşte **continuă** . Exemple de variabile aleatoare continue: rezultatul obţinut în urma măsurării unei mărimi fizice, viteza moeculei de gaz, timpul de funcţionare a unui utilaj.

Definiţia 7.1. Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate. Se numeşte **variabilă aleatoare** orice funcţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ pentru care

$$\big\{\omega / X(\omega) < x\big\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sistemul de egalităţi $P(\big\{\omega/X(\omega) = x_i\big\}) = p_i, i \in I$ defineşte **distribuţia** sau **repartiţia** v. a. X.

Repartiţia v.a. discrete se scrie sub forma unui tabel:

$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, i \in I$ (I mulţime numărabilă de indici)

Cum $\bigcup\limits_{i\in I}\big\{X = x_i\big\} = \Omega$ şi $\big\{X = x_i\big\}, i \in I$ sunt incompatibile, rezultă

$1 = P(\Omega) = P(\bigcup\limits_{i\in I}\big\{X = x_i\big\}) = \sum\limits_{i\in I} p_i$

7.1 Legi de repartiţie discrete clasice

1. **Repartiţia binomială** $Bi(n, p)$

   Să presupunem că se fac n experimente independente, în fiecare dintre ele probabilitatea de realizare a unui eveniment A fiind constantă şi egală cu p (probabilitatea ca A să nu se realizeze este $q = 1 - p$). Numărul de realizări ale evenimentului A în cele n experimente este o variabilă aleatoare X, ale cărei valori posibile sunt $k = 0, 1, \dots n$.

   Intr-adevăr, evenimentul A poate să nu se realizeze niciodată sau poate să se realizeze o dată , de două ori, ..., de n ori în cele n experimente cu probabilităţile $P(X = k) = p_k$. Vom scrie formula ce dă probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze de k ori, pentru valorile p şi n date. Mulţimea perechilor $(k, p_k), k = 0, 1, \dots n$ se numeşte **repartiţie binomială** . Repartiţiile binomiale au fost studiate de James Bernoulli, motiv pentru care adeseori vom folosi termenul de **experimente Bernoulli**.

   $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}$

   Termenul de repartiţie binomială provine din faptul că probabilităţile sunt termenii din dezvoltarea $(p + q)^n$.

   Exemplul 7.1. La un antrenament, un jucător de baschet nimereşte la coş cu probabilitatea 0,6. Să se scrie repartiţia v.a. X care ia ca valori numărul de nimeriri la coş când jucătorul aruncă mingea de 10 ori.

   Demonstraţie. $P(X = k) = C_{10}^k (0,6)^k (0,4)^{10-k}, k = \overline{0, 10}$ □

2. **Repartiţia Poisson de parametru** $\lambda > 0$

   $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}, k \in \mathbb{N}$

   Repartiţia Poisson este frecvent întâlnită în studiul fenomenelor din biologie, telecomunicaţii, evenimente rare, catastrofe etc.

   Exemplul 7.2. Intr-o mină au loc în medie 2 accidente pe săptămână

   Să se calculeze probabilitatea de a exista cel mult 2 accidente :

   a) într-o săptămână ;

   b) în 2 săptămâni;

   c) în fiecare săptămână dintr-un interval de 2 săptămâni.

   Demonstraţie. a) Fie X v. a. ce desemnează numărul de accidente dintr-o săptămână ; X este poissoniană cu $\lambda = 2$, deci $P(X \leq 2) =$ $= \mathrm{e}^{-2} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{4}{2!}\right) = 5\mathrm{e}^{-2}$.

b) Fie Y v. a. ce desemnează numărul de accidente în 2 săptămâni; X este poissoniană cu $\lambda = 4$, deci $P(Y \leq 2) = \mathrm{e}^{-4}\left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{16}{2!}\right) = 13\mathrm{e}^{-4}$.

c) probabilitatea cerută este $[P(X \leq 2)]^2 = 25\mathrm{e}^{-4}$ □

Observaţia 7.1. Considerăm v.a. X ce urmează o repartiţie binomială $Bi(n,p)$. Dacă n creşte, iar p descreşte astfel încât $np = \lambda$ rămâne constant, atunci repartiţia binomială tinde către repartiţia Poisson.

Demonstraţie. $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$ □

Exemplul 7.3. La fiecare o mie de persoane, una este victima unui accident de maşină O companie de asigurări a asigurat 5000 de persoane. Care este probabilitatea ca cel mult 2 dintre acestea să încaseze asigurarea?

Demonstraţie. Dacă X reprezintă numărul de persoane care încasează asigurarea într-un an, atunci X urmează o repartiţie binomială cu $n = 5000$ şi $p = \frac{1}{1000}$. Deoarece $\lambda = np = 5$ (valori mari ale lui n şi valori mici ale lui p se poate folosi Observaţia 7.1) şi obţinem $P(X \leq 2) \cong \mathrm{e}^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!}\right) = \frac{31\mathrm{e}^{-5}}{2}$ □

3. **Repartiţia hipergeometrică**

Dacă X este v. a. ce reprezintă numărul de bile albe obţinute după n extrageri fără înlocuire dintr-o urnă ce conţine a bile albe şi b negre , atunci

$$P(X = x) = \frac{C_a^x C_b^{n-x}}{C_{a+b}^n}, x = \overline{0,n}.$$

Exemplul 7.4. La o agenţie LOTO din 10000 de bilete, 10 sunt câştigătoare. Un jucător cumpără 6 bilete şi fie X v.a. ce reprezintă numărul biletelor câştigătoare. Se cer:

a) repartiţia v. a. X;

b) $P(X \leq 5), P(X > 3/X \leq 5), P(X = 6)$

Demonstraţie. a) X ia valorile $x = \overline{0,6}$ cu probabilităţile
$P(X = x) = \frac{C_{10}^{x} C_{9990}^{6-x}}{C_{10000}^{6}}$

b) $P(X \leq 5) = \sum\limits_{x=0}^{5} \frac{C_{10}^{x} C_{9990}^{6-x}}{C_{10000}^{6}}$

$$P(X > 3/X \leq 5) = \frac{P(3 \leq X \leq 5)}{P(X \leq 5)} = \frac{\sum\limits_{x=3}^{5} \frac{C_{10}^{x} C_{9990}^{6-x}}{C_{10000}^{6}}}{\sum\limits_{x=0}^{5} \frac{C_{10}^{x} C_{9990}^{6-x}}{C_{10000}^{6}}}$$

$P(X = 6) = \frac{C_{10}^{6} C_{9990}^{0}}{C_{10000}^{6}}$ □

4. **Repartiţia geometrică**

   Un experiment aleator cu două rezultate posibile s "succes" şi e "eşec" având probabilitatea p, respectiv $q = 1 - p$ se efectuează independent până la obţinerea prima dată a succesului, după care este oprit.

   Spaţiul evenimentelor elementare este $\Omega = \{s, es, ees, \ldots, ee \ldots es, \ldots\}$. Fie X numărul de efectuări ale experimentului până la obţinerea succesului; X este o v.a. cu valorile posibile $0, 1, 2, \ldots$
   $P(X = k) = p(1-p)^k, k \in \mathbb{N}$.

   Dacă experimentul se efectuează până la apariţia eşecului avem
   $P(X = k) = p^k q$, unde $q = 1 - p$.

   Exemplul 7.5. Sunt construite 5 aparate cosmice; 4 dintre ele sunt alese la întâmplare şi sunt lansate fără echipaj. Dacă toate cele 4 aparate se înscriu cu succes pe orbite, atunci aparatul rămas va fi lansat cu echipaj. Care este probabilitatea ca după lansarea cu succes a primelor 4 aparate va urma lansarea cu eşec, dacă p este probabilitatea de înscriere pe orbită a unui aparat?

   R: $P(X = 4) = p^4(1 - p)$

7.2 Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare

Definiţia 7.2. Se numeşte **funcţia de repartiţie** a unei v.a. X aplicaţia $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1], F_X(x) = P(\{\omega/X(\omega) < x\})$

Fie X o v.a. discretă , $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$

$F_X(x) = \sum\limits_{x_i < x} P(X = x_i)$ (adică funcţia de repartiţie în punctul x este egală cu suma probabilităţilor valorilor $X(\omega)$ situate la stânga lui x)

Exemplul 7.6. O monedă este aruncată de 2 ori şi fie X numărul de apariţii ale stemei. Să se determine funcţia de repartiţie a v.a. X.

Demonstraţie. $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

□

Proprietăţile funcţiei de repartiţie

1. Fie X o v.a. şi $F_X(x)$ funcţia ei de repartiţie. Atunci

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1), \ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. $\{x_1 \leq X < x_2\} = \{X < x_2\} \setminus \{X < x_1\} \Longrightarrow$ $P(\{x_1 \leq X < x_2\}) = P(\{X < x_2\}) - P(\{X < x_1\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$, deoarece $\{X < x_1\} \subset \{X < x_2\}$, pentru că $x_1 < x_2$ □

2. Dacă $x_1 < x_2$, atunci $F_X(x_1) \leq F_X(x_2), \forall x_1, x_2 \in R$.

Demonstraţie. $0 \leq P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \Longrightarrow$ $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ □

3. Orice funcţie de repartiţie F_X este continuă la stânga :

$$F_X(x - 0) = F_X(x).$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1; \ \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Observaţia 7.2. Se poate arăta că orice funcţie F monotonă , crescătoare, continuă la stânga şi astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1; \ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ este funcţia de repartiţie a unei v.a.

Exemplul 7.7. Să presupunem că durata în minute a unei convorbiri telefonice la distanţă mare este dată de următoarea funcţie de repartiţie:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-[\frac{x}{3}]}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Se cere să se determine probabilitatea ca o convorbire :

a) să dureze 6 minute sau mai mult de 6 minute;

b) să fie mai mică de 4 minute;

c) să fie egală cu 3 minute;

d) să fie mai mică decât 9 minute dat fiind faptul că a fost mai mare de 5 minute;

e) să fie mai mare de 5 minute, dacă a fost mai mică de 9 minute.

Demonstraţie. a) $P(X \geq 6) = 1 - F(6) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-[2]} = 0,135$

b) $P(X < 4) = F(4) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} = 0,684$

c) $P(X = 3) = F(3+0) - F(3-0)$, unde $F(3+0) = \lim\limits_{x\to\ 3, x>3} F(x)$, $F(3-0) = \lim\limits_{x\to\ 3, x<3} F(x) \Longrightarrow P(X=3) = \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\right) -$
$- \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\left[\frac{2}{3}\right]}\right) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1}) = 0,316$

d) $P(X < 9/X > 5) = \frac{P(5<X<9)}{P(X>5)} = \frac{F(9)-F(5)}{1-F(5)}$

e) $P(X > 5/X < 9) = \frac{P(5<X<9)}{P(X<9)} = \frac{F(9)-F(5)}{F(9)}$ □

7.3 Densitatea de probabilitate

Definiţia 7.3. Fie X o v.a. şi F_X funcţia sa de repartiţie. Dacă există o funcţie reală f definită şi integrabilă pe $\mathbb{R}$ astfel încât

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \forall x \in \mathbb{R},$$

atunci funcţia f se numeşte **densitatea de probabilitate** a v.a. X, iar v.a. care are densitate de probabilitate se numeşte **variabilă aleatoare de tip continuu**.

Teorema 7.1. *Probabilitatea ca o v. a. continuă X să ia o valoare din $[x_1, x_2)$ este egală cu integrala densităţii de probabilitate pe $[x_1, x_2)$:*

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Demonstraţie. $P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ □

Observaţia 7.3. Probabilitatea ca v.a. X de tip continuu să ia o valoare individuală este nulă .

Demonstraţie. $P(X = x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} P(x_1 \leq X < x_1 + \frac{1}{n}) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \int_{x_1}^{x_1+\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$ □

Atunci $\forall x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$ au loc:

$P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) =$
$= P(x_1 < X < x_2)$

Faptul că $P(X = x_1) = 0$ pentru o v.a. continuă nu înseamnă că evenimentul $\{X = x_1\}$ e imposibil. Intr-adevăr, în urma unui experiment, v.a. ia una dintre valorile sale posibile, în particular, această valoare poate fi x_1.

Proprietăţile densităţii de probabilitate

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

   Deoarece f este derivata unei funcţii crescătoare.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Trecem la limită când $x \longrightarrow \infty$ şi obţinem $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

Exemplul 7.8. Se dă variabila aleatoare X cu următoarea funcţie de repartiţie:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Se cer:
a) $P(1 \leq X < 2), P(1 \leq X < 2/1 \leq X < 3)$;
b) densitatea de repartiţie $f_X(x)$;

Demonstraţie. a) $P(1 \leq X < 2) = F(2) - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$P(1 \leq X < 2/1 \leq X < 3) = \frac{P(1 \leq X < 2)}{P(1 \leq X < 3)} = \frac{\frac{3}{4}}{F(3) - F(1)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1$
b)

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

□

Exemplul 7.9. Se dă funcţia $f(x) = \frac{k}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$. Se cer:
a) să se determine constanta "k" astfel încât $f(x)$ să fie o densitate de repartiţie a unei variabile aleatoare X ;
b) probabilitatea ca în două observaţii independente X să ia o valoare mai mică decât 1 şi alta mai mare sau cel mult egală cu 1.

Demonstraţie. a) Punem condiţia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} dx = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1 + (\mathrm{e}^x)^2} dx = k \operatorname{arctg} \mathrm{e}^x /_0^\infty = k\frac{\pi}{2} \Longrightarrow$
$k = \frac{2}{\pi} \Longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}$
b) Cum observaţiile făcute asupra v. a. X sunt independente $\Longrightarrow$ $P(X_1 < 1, X_2 \geq 1) = P(X_1 < 1)P(X_2 \geq 1) = F(1)(1 - F(1)) =$
$= \int_{-\infty}^{1} f(x)dx \left(1 - \int_{-\infty}^{1} f(x)dx\right) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} dx \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} dx\right) =$
$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \mathrm{e}(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \mathrm{e})$ □

7.4 Legi de repartiţie continue clasice

1. **Repartiţia uniformă** într-un interval $[a, b]$ este repartiţia unei v. a. X cu densitatea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

şi notăm $X \sim U[a, b]$

Exemplul 7.10. Fie X o variabilă aleatoare care urmeaza o repartiţie uniformă în intervalul $[-1, 1]$. Să se determine densitatea de probabilitate corespunzătoare variabilei aleatoare $Y = 2X^2 + 1$.

Demonstraţie. Densitatea de probabilitate a lui X este

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Funcţia de repartiţie a variabilei Y este

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P\left(|X| < \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} < X < \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) =$$
$$= F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \Longrightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) -$$
$$-F_X'\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)' \cdot f_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - \left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)' \cdot f_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \Longrightarrow$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{y-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}, & -1 < y < 3 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

□

2. **Repartiţia exponenţială de parametru** $\lambda > 0$ corespunde densităţii de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

şi se notează $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Repartiţia exponenţială este un model foarte util în probleme referitoare la durate de aşteptare ce apar în telefonie, aprovizionare, reţele de servire, teoria fiabilităţii etc.

Exemplul 7.11. Densitatea de repartiţie a vieţii unei lămpi dintr-un aparat de radio cu 6 lămpi este $\lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}, t > 0$, dat în ani şi $\lambda = \frac{1}{3}$. Să se determine probabilitatea ca în mai puţin de 6 ani nici o lampă să nu fie schimbată

Demonstraţie. Vieţile medii ale lămpilor sunt considerate evenimente independente. Probabilitatea ca viaţa medie a unei lămpi să fie mai mare de 6 ani este $p = \int_6^\infty \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \mathrm{e}^{-6\lambda} = \mathrm{e}^{-2}$. Probabilitatea căutată este $p^6 = \mathrm{e}^{-12}$. □

3. **Repartiţia Gamma cu parametrii** $\lambda, \alpha > 0$ este repartiţia unei v. a. X cu densitatea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Pentru $\alpha = 1$ se obţine repartiţia exponenţială , iar pentru $\lambda = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{n}{2}$, repartiţia $\chi^2(n)$ ("hi pătrat" cu n grade de libertate).

4. **Repartiţia Cauchy** este repartiţia unei v.a. X cu densitatea $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

5. **Repartiţia normală** cu media m şi abaterea pătratică σ este repartiţia unei v. a. X cu densitatea $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. In acest caz se scrie $X \sim N(m, \sigma)$. Dacă $m = 0$ şi $\sigma = 1$, X se numeşte **variabilă normală standard**.

Funcţia de repartiţie a unei variabile normale standard este $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt$ şi este numită **funcţia lui Laplace**.

In cazul general, funcţia de repartiţie F a unei v. a. normale de tip $N(m, \sigma)$ se poate exprima cu ajutorul funcţiei lui Laplace astfel $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, deci $P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$, de unde rezultă $P(|X - m| < \varepsilon\sigma) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon) - 1$.

Abraham de Moivre a fost printre primii (în sec. 18) care a încercat să pătrundă mai adânc în teoria probabilităţilor. El a descoperit distribuţia normală , dar nu a completat lucrarea şi nici nu i-a apreciat importanţa. In studiile lui Carl Friedriech Gauss şi Pierre -Simon Laplace s-a subliniat mai bine importanţa acestei distribuţii, de aceea este cunoscută şi sub numele de **distribuţie Gaussiană** sau **clopotul lui Gauss**.

Exemplul 7.12. Inălţimea bărbaţilor este repartizată $N(m, \sigma)$, m =167 cm, $\sigma = 3$ cm.

1) Care este procentul din populaţie cu înălţimea :

a) mai mare de 167 cm;

b) mai mare de 170 cm;

c) cuprinsă între 161 cm şi 173 cm?

2) Se selectează la întâmplare (binomial) 4 bărbaţi. Care este probabilitatea ca:

a) înălţimea tuturor să depăşească 170 cm;

b) doi să aibă înălţimea mai mică decât media, iar doi mai mare decât media?

Demonstraţie. 1) Fie X înălţimea unui bărbat în cm.

a) $P(X > 167) = 1 - P(X \leq 167) = 1 - \Phi\left(\frac{167-167}{3}\right) = 1 - \Phi(0) = 50^0/_0$

b) $P(X > 170) = 1 - \Phi\left(\frac{170-167}{3}\right) = 1 - \Phi(1) = 16^0/_0$

c) $P(161 < X < 173) = \Phi\left(\frac{173-167}{3}\right) - \Phi\left(\frac{161-167}{3}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = = \Phi(2) - 1 + \Phi(2) = 2\Phi(2) - 1 = 95^0/_0$

2) a) Fie Y = numărul bărbaţilor cu înălţimea mai mare de 170 cm. V. a. urmează o lege binomială cu $n = 4$ şi $p = P(X > 170) = 0,16$. De aceea $P(Y = 4) = (0,16)^4 = 0,0007$.

b) Dacă Z reprezintă numărul bărbaţilor cu înălţimea mai mare ca media de 167 cm, atunci Z este binomială cu $n = 4$ şi $p = P(X > 167) = 0,5$. Astfel $P(Z = 2) = C_4^2(0,5)^4 = 0,375$. □

Exemplul 7.13. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = \mathrm{e}^X$, unde variabila aleatoare X urmează o repartiţie normală de parametri m şi σ.

Demonstraţie. Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare X este $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Funcţia de repartiţie a lui Y este $F_Y(y) = P(Y < y) = P(\mathrm{e}^X < y) = P(X < \ln y) = F_X(\ln y) \Longrightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\ln y) = f_X(\ln y) \cdot (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln y-m)^2}{2\sigma^2}}$ □

7.5 Probleme propuse

1. La examenul de matematică , probabilitatea ca o teză să fie notată cu notă de trecere este 0,75. Se aleg la întâmplare 10 lucrări şi fie X v.a. ce reprezintă numărul tezelor ce vor fi notate cu notă de trecere. Se cer: a) repartiţia lui X; b) $P(X \geq 5), P(7 \leq X \leq 10/X \geq 8), P(X = 10)$

   R: a) V. a. X are o repartiţie binomială cu $n = 10, p = 0,75$. X ia valorile $x = 0, 1, \ldots 10$ cu probabilităţile $p(x) = C_{10}^x(0,75)^x(0,25)^{10-x}$.

   b) $P(X \geq 5) = \sum\limits_{x=5}^{10} C_{10}^x(0,75)^x(0,25)^{10-x}$

   $P(7 \leq X \leq 10/X \geq 8) = \frac{P(8 \leq X \leq 10)}{P(X \geq 8)} = 1$

   $P(X = 10) = (0,75)^{10}$

2. Presupunem că la 100 de convorbiri telefonice au loc 1000 de bruiaje neturale. Care e probabilitatea de a avea o convorbire fără bruiaje? Dar una cu cel puţin 2 bruiaje?

   R: $P(X = 0) = \mathrm{e}^{-10} \cdot \frac{10^0}{0!} = \mathrm{e}^{-10}$

   $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-10} - 10 \cdot \mathrm{e}^{-10}$

3. Numărul pâinilor ce pot fi vândute într-o zi de un supermarket e normal distribuit cu $m = 1000$ pâini şi $\sigma = 100$ pâini. Dacă marketul stochează 1200 de pâini în fiecare zi, care este probabilitatea ca pâinile să fie vândute până ca ziua să se termine?

   R: $P(X \geq 1200) = 1 - \Phi(2) = 0,0228$

4. Se consideră variabilele aleatoare X de densităţi

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ bx\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

   Să se determine constanta b astfel încât funcţia dată să fie densitate de probabilitate.

   R: $b = 1$

5. Fie X o variabilă aleatoare a cărei funcţie de repartiţie este

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{x}{6}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{1}{2}, & 3 < x \leq 4 \\ \frac{x}{8}, & 4 < x \leq 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases}$$

   Se cer:

   a) densitatea de probabilitate; b) $P(2 < X \leq 5)$;

   c) $P(2 < X \leq 5/1 < X \leq 6)$

   R: a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{1}{8}, & 4 < x \leq 8 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

   b) $P(2 < X \leq 5) = \frac{7}{24}$

   c) $P(2 < X \leq 5/1 < X \leq 6) = \frac{7}{12}$

6. Se dă funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{l^2-x^2}}, & -l < x < l \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Se cer:

a) să se determine constanta a astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare X;

b) funcţia de repartiţie;

c) $P(0 < X \leq l)$

R: a) $a = \frac{1}{\pi}$ b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -l \\ \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{l} + \frac{1}{2}, & -l < x < l \\ 1, & x \geq l \end{cases}$$

c) $P(0 < X \leq l) = \frac{1}{2}$

7. Se consideră v. a. X cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x^2 \mathrm{e}^{-kx}, & 0 \leq x, k > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se determine constanta α;

b) Să se afle funcţia de repartiţie;

c) Să se calculeze $P(0 < X < \frac{1}{k})$

R: a) $\alpha = \frac{k^3}{2}$

b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \frac{k^2x^2+2kx+2}{2} \mathrm{e}^{-kx}, & 0 \leq x \end{cases}$$

c) $P(0 < X < \frac{1}{k}) = 1 - \frac{5}{2\mathrm{e}}$

8. Fie X o variabilă aleatoare ce urmează o repartiţie uniformă în intervalul $[-1, 1]$. Să se determine densitatea de probabilitate corespunzătoare variabilei aleatoare:

a) $Y = \mathrm{e}^X$;

b) $Y = 2X + 1$

R: a)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & \frac{1}{\mathrm{e}} < y < \mathrm{e} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 < y < 3 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

9. Să presupunem că un fenomen aleator X urmează o lege normală de parametrii $m = 2$ şi $\sigma = 2$. Să se calculeze: a) $P(0 \leq X \leq 3)$;
   b) $P(|X| \leq 1)$; c) $P(-1 \leq X \leq 1/0 \leq X \leq 3)$.

   R: a) $P(0 \leq X \leq 3) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi(1) - 1 = 0,533$

   b) $P(|X| \leq 1) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0,242$

   c) $P(-1 \leq X \leq 1/0 \leq X \leq 3) = 0,281$

10. Să presupunem că variabila aleatoare X urmează o lege normală de parametrii 0 şi 1. Să se determine densitatea de probabilitate corespunzătoare variabilei aleatoare $Y = |X|^{\frac{1}{2}}$.

    R: $f_Y(y) = \frac{4y}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^4}{2}}$

Capitolul 8

Vectori aleatori bidimensionali

8.1 Funcţia de repartiţie. Densitatea de probabilitate. Densităţi marginale

Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare, atunci perechea (X, Y) este un **vector aleator bidimensional**, iar X şi Y se numesc **componentele** vectorului aleator.

Fie X şi Y v.a. definite pe acelaşi spaţiu de evenimente, ale căror valori posibile sunt $x_1, \dots, x_n$, respectiv $y_1, \dots, y_m$, cu probabilităţile corespunzătoare $p_i, i = \overline{1,n}$, respectiv $q_j, j = \overline{1,m}$. Totalitatea evenimentelor elementare pentru care se îndeplinesc condiţiile $X = x_i$ şi $Y = y_j$ formează un eveniment $\{X = x_i, Y = y_j\}$ a cărui probabilitate o notăm cu p_{ij}.

Sistemul de egalităţi $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$ se numeşte **repartiţia (distribuţia)** vectorului aleator (X, Y).

Pentru orice i fixat avem

$$\bigcup_j \{X = x_i, Y = y_j\} = \{X = x_i\} \cap (\bigcup_j \{Y = y_j\}) = \{X = x_i\} \cap \Omega = \{X = x_i\} \Longrightarrow$$

$$\sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_j p_{ij} = P\{X = x_i\} = p_i$$

Analog $\sum_i p_{ij} = P\{Y = y_j\} = q_j$.

Probabilităţile p_i şi q_j se numesc **probabilităţi marginale**

Atunci $\sum_{i,j} p_{ij} = \sum_i \sum_j p_{ij} = \sum_i p_i = 1$.

Funcţia $F_{(X,Y)}(x, y) = P(X < x, Y < y)$ se numeşte **funcţia de repartiţie** a vectorului aleator bidimensional (X, Y).

Proprietăţile funcţiei de repartiţie

1. $x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \forall y \in \mathbb{R}$

   $y_1 < y_2 \Longrightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2), \forall x \in \mathbb{R}$

2. $F(x, y) \longrightarrow 0$ dacă cel puţin una dintre variabilele x, y tinde la $-\infty$

3. $F(x, y) \longrightarrow 1$ dacă ambele variabile tind la ∞

4. $F(x, y)$ este continuă la stânga în raport cu fiecare argument

5. $F_X(x) = \lim\limits_{y \to \infty} F(x, y)$

   $F_Y(y) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x, y)$

   Funcţiile $F_X(x)$ şi $F_Y(y)$ se numesc **funcţii de repartiţie marginale** ale vectorului aleator (X, Y).

6. $P(x_1 \leq X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$

   $P(X < x, y_1 \leq Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1)$

   $P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]$

Vectorul aleator (X, Y) se numeşte de **tip continuu** dacă funcţia sa de repartiţie se poate reprezenta sub forma

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv, \quad (*)$$

unde f se numeşte **densitate de probabilitate** şi are proprietăţile $f(x, y) \geq 0$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv = 1$.

Evident $f(x, y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,y)}{\partial x \partial y}$ în punctele de continuitate ale funcţiei f.

Din punct de vedere geometric, funcţia f definită într-un domeniu dat reprezintă o suprafaţă numită graficul densităţii de probabilitate, iar volumul cuprins intre suprafaţa $z = f(x, y)$ şi planul xOy este 1.

Probabilitatea ca vectorul aleator (X, Y) să aparţină domeniului D este $P((X, Y) \in D) = \int\int_D f(x, y) dx dy$.

Din proprietatea 5 şi relaţia (*), rezultă $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$. Derivăm în raport cu x şi obţinem $f_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$.

Analog $f_Y(y) = F'_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ numite **densităţile de probabilitate marginale**.

Exemplul 8.1. Fie vectorul (X, Y) cu densitatea de repartiţie $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, x, y \in \mathbb{R}$. Să se afle $F_{(X,Y)}(x, y), F_X(x), F_Y(y), f_X(x), f_Y(y)$.

Demonstraţie. $F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dudv}{(1+u^2)(1+v^2)} =$
$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}\cdot\int_{-\infty}^{y}\frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right)$

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right)$$
$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ □

Exemplul 8.2. Fie vectorul (X,Y) cu densitatea de repartiţie

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se calculeze a) $P(X \leq 1, Y \leq 1)$; b) $P(X+Y \leq 1)$;
c) $P(X+Y > 2)$; d) $P(Y > 1/X \leq 1)$;e) $P(X > 1/Y > 1)$; f) $P(X < 2Y)$.

Demonstraţie. a) $P(X \leq 1, Y \leq 1) = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{e}^{-(x+y)}dxdy = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}dx\cdot$
$\cdot\int_0^1 \mathrm{e}^{-y}dy = (\mathrm{e}^{-1}-1)^2$

b) $P(X+Y \leq 1) = \int_0^1\int_0^{1-x} \mathrm{e}^{-(x+y)}dydx = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{x-1})dx =$
$= 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$

c) $P(X+Y > 2) = 1 - P(X+Y \leq 2) = 1 - \int_0^2\int_0^{2-x} \mathrm{e}^{-(x+y)}dydx = 2\mathrm{e}^{-2}$

d) Fie evenimentele $A = \{Y > 1\}$,$B = \{X \leq 1\}$

Vrem să calculăm $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cap B) = \int_1^\infty\int_0^1 \mathrm{e}^{-x-y}dxdy = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-y}dy\cdot\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}dx = \mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})$

$P(B) = P(X \leq 1) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}dx = 1 - \mathrm{e}^{-1}$

Atunci $P(A/B) = \mathrm{e}^{-1}$

e) Fie evenimentele $A = \{X > 1\}$, $B = \{Y > 1\}$

Avem de calculat $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cap B) = \int_1^\infty\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x-y}dxdy = \mathrm{e}^{-2}$

$P(B) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-y}dy = \mathrm{e}^{-1}$

Atunci $P(A/B) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{-1}$

f) $P(X < 2Y) = \int\int_{\frac{x}{y}<2,x,y\geq 0} \mathrm{e}^{-(x+y)}dxdy = \int_0^\infty\int_0^{2y} \mathrm{e}^{-(x+y)}dxdy =$
$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}(1-\mathrm{e}^{-2y})dy = \frac{2}{3}$ □

Exemplul 8.3. Fie (X,Y) un vector aleator cu densitatea

$$f(x,y) = \begin{cases} k(2x+y+2), & (x,y) \in [0,1]\times[-2,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine:

a) $k \in \mathbb{R}$;

b) densităţile de probabilitate marginale;

c) densităţile de probabilitate ale vectorilor aleatori $(U,V) = (3X, 2Y - 5)$ şi $(Z,W) = (X, Y^2)$.

Demonstraţie. a) Avem condiţiile: $f(x,y) \geq 0 \Longrightarrow k \geq 0$
$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{1} k(2x+y+2)dxdy = 1 \Longrightarrow k = \frac{1}{12}$
b)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}\int_{-2}^{2}(2x+y+2)dy, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2x+3}{3}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{12}\int_{0}^{1}(2x+y+2)dx, & y \in [-2,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{y+3}{12}, & y \in [-2,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

c) $F_{(U,V)}(x,y) = P(3X < x, 2Y-5 < y) = P\left(X < \frac{x}{3}, Y < \frac{5+y}{2}\right) =$
$= F_{(X,Y)}\left(\frac{x}{3}, \frac{5+y}{2}\right)$

$$f_{(U,V)}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(U,V)}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}\left(\frac{x}{3}, \frac{5+y}{2}\right)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{3}, \frac{5+y}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{72}\left(\frac{2x}{3} + \frac{5+y}{2} + 2\right), & \frac{x}{3} \in [0,1], \frac{5+y}{2} \in [-2,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{4x+3y+27}{432}, & (x,y) \in [0,3]\times[-9,-1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$F_{(Z,W)}(x,y) = P(X < x, Y^2 < y) = P(X < x, Y < \sqrt{y}) = F_{(X,Y)}(x,\sqrt{y})$

$$f_{(Z,W)}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(Z,W)}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x,\sqrt{y})}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(x,\sqrt{y}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{12\sqrt{y}}(2x+\sqrt{y}+2), & (x,y) \in [0,1]\times[0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

□

8.2 Repartiţii condiţionate

Fie (X,Y) un vector aleator bidimensional discret definit pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Presupunem că în urma unui experiment Y a luat valoarea y_j şi notăm cu $P(x_i/y_j)$ probabilitatea evenimentului $\{X = x_i\}$ condiţionată de evenimentul $\{Y = y_j\}$.

Dacă se cunoaşte repartiţia vectorului (X,Y), atunci

$$P(x_i/y_j) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{q_j}, i = 1, 2, \ldots$$

$$P(y_j/x_i) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_i}, j = 1, 2, \ldots$$

Avem $\sum_i P(x_i/y_j) = \sum_i \frac{p_{ij}}{q_j} = \frac{q_j}{q_j} = 1$. Analog $\sum_j P(y_j/x_i) = 1$.

Fie f densitatea de probabilitate a vectorului (X, Y).

Funcţia de repartiţie a lui X condiţionată de $\{Y = y\}$ este $F(x/y) = = P\{X < x/Y = y\} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)}$. Derivând în raport cu x, obţinem densitatea de probabilitate a lui X condiţionată de $\{Y = y\}$

$$f_X(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Rezultă $f(x, y) = f_X(x/y) \cdot f_Y(y)$ şi integrând în raport cu y obţinem $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x/y) \cdot f_Y(y)dy$ analoagă formulei probabilităţii totale.

Deci $F(x/y) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u/y)du$.

8.3 Independenţa variabilelor aleatoare

V.a. X şi Y se numesc **independente** dacă evenimentele $\{X = x_i\}$ şi $\{Y = y_j\}$ sunt independente, adică

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}.$$

Echivalent $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Teorema 8.1. *Fie X şi Y v.a. cu densităţile de probabilitate f_X, respectiv f_Y. Atunci X, Y sunt independente dacă şi numai dacă*

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

unde $f(x, y)$ este densitatea de probabilitate a vectorului (X, Y).

Fie (X, Y) un vector aleator cu densitatea $f_{(X,Y)}(x, y)$ Se dau variabilele aleatoare $U = \varphi(X, Y), V = \psi(X, Y)$. Dacă vrem să determinăm densitatea de probabilitate a vectorului (U, V), $f_{(U,V)}(u, v)$, facem schimbarea de variabile $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ sau $x = \varphi_1(u, v), y = \psi_1(u, v)$ şi atunci

$$f_{(U,V)}(u, v) = \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \cdot f_{(X,Y)}(\varphi_1(u, v), \psi_1(u, v)).$$

Exemplul 8.4. Fie X, Y variabile aleatoare $N(0, 1)$ independente. Calculaţi probabilitatea ca vectorul aleator (X, Y) să aparţină discului $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Demonstraţie. Densităţile de probabilitate ale v. a X, Y sunt:
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, resp. $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$

Cum X şi Y sunt independente, densitatea de probabilitate a vectorului (X, Y) va fi $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

Probabilitatea cerută este $P((X, Y) \in D) = \frac{1}{2\pi}\int\int_D \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho d\theta = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,3934$ □

Exemplul 8.5. Fie X,Y v. a. independente şi identic repartizate exponenţial cu parametrul $\lambda = 1$. Calculaţi densitatea vectorului (U, V), unde $U = X + Y$,$V = \frac{X}{X+Y}$ şi deduceţi că v. a. V e repartizată uniform în $(0, 1)$.

Demonstraţie. Facem shimbările de variabile $u = x + y, v = \frac{x}{x+y} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x = uv, y = u - uv$

Avem $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$

Cum X, Y sunt independente şi identic repartizate exponenţial cu parametrul $\lambda = 1$, densitatea de probabilitate a vectorului (X, Y) va fi

$$f(x, y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{-y}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Deci $f_{(U,V)}(u, v) = |J| \cdot \mathrm{e}^{-(uv+u-uv)} = u \cdot \mathrm{e}^{-u}, u \geq 0, 0 \leq v \leq 1$ (deoarece $x \geq 0 \Longrightarrow uv \geq 0, y \geq 0 \Longrightarrow u - uv \geq 0 \Longrightarrow u \geq uv \geq 0$; pe de altă parte, cum $x, y \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq v \leq 1$)

$f_V(v) = \int_0^\infty u \cdot \mathrm{e}^{-u}du = -u \cdot \mathrm{e}^{-u}/_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}du = -e^{-u}/_0^\infty = \mathrm{e}^0 =$
$= 1 \Longrightarrow V \sim U(0, 1)$ □

Exemplul 8.6. Dacă X_1 şi X_2 sunt v. a. independente, repartizate uniform $U(0, 1)$, să se arate că $U = \sqrt{-2\ln X_1}\cos 2\pi X_2$ şi $V = \sqrt{-2\ln X_1}\sin 2\pi X_2$ sunt independente şi repartizate $N(0, 1)$.

Demonstraţie. Facem schimbarea $u = \sqrt{-2\ln x_1}\cos 2\pi x_2, v = \sqrt{-2\ln x_1}\sin 2\pi x_2$

Avem $u^2 + v^2 = -2\ln x_1 \cos^2 2\pi x_2 - 2\ln x_1 \sin^2 2\pi x_2 = -2\ln x_1 \Longrightarrow$
$x_1 = \mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$

$u = \sqrt{u^2 + v^2}\cos 2\pi x_2 \Longrightarrow x_2 = \frac{\arccos \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}{2\pi}$

$\frac{D(x_1,x_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -u\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}} & -v\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \\ -\frac{v}{2\pi(u^2+v^2)} & \frac{u}{2\pi(u^2+v^2)} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$

Cum X_1 şi X_2 sunt v. a. repartizate uniform $U(0, 1)$ avem

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in (0, 1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

şi

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 \in (0, 1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Deoarece X_1 şi X_2 sunt v. a. independente avem

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1,x_2) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Obţinem $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$.

Atunci $f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}dv = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}dv = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \cdot 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}dv = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$ (cu ajutorul funcţiei Γ a lui Euler)

Analog $f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}$.

Aşadar, U şi V sunt repartizate normal standard.

Cum $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}} = f_U(u)\cdot f_V(v)$, deci U şi V sunt independente. □

8.4 Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

8.4.1 Valoarea medie (sau speranţa matematică)

Comportarea unei v.a. este descrisă de repartiţia sa. De multe ori repartiţia v.a. nu este cunoscută . Insă în numeroase aplicaţii practice ale teoriei probabilităţilor nu este necesară o caracterizare completă a v.a. De exemplu, pentru determinarea numărului de maşini necesare pentru obţinerea unui produs într-o cantitate determinată este suficient să cunoaştem numai produsul mediu realizat de fiecare maşină (într-o perioadă dată de timp). Aşadar, în aceste cazuri, pentru caracterizarea v.a. este suficient să ne folosim de anumite mărimi numite **caracteristici numerice** asociate v.a.

Intrucât probabilitatea unui eveniment este bine aproximată de frecvenţa de apariţie a evenimentuli într-o lungă serie de experienţe, valoarea medie constituie o bună evaluare a câştigurilor sau pierderilor medii pe care le putem avea într-o serie lungă de experienţe.

Fie v.a. $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$.

Presupunem că s-au făcut m experimente independente şi notăm cu m_i numărul de apariţii ale valorilor x_i ($i = \overline{1,n}, \sum\limits_i m_i = m$). Atunci suma tuturor valorilor luate de X este $x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n$. Impărţind suma obţinută la numărul total de experimente obţinem media aritmetică $\overline{x}$ a valorilor luate de X :

$$\overline{x} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m} = \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{m_i}{m}$$

$\frac{m_i}{m}, i = \overline{1,n}$ sunt **frecvenţele relative** ale evenimentelor $\{X = x_i\}, i = \overline{1,n}$

Dacă numărul m al evenimentelor este mare, frecvenţele relative $\frac{m_i}{m}, i = \overline{1,n}$ sunt aproximativ egale cu probabilităţile p_i. Deci

$$E(X) = (\text{sau } M(X)) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Exemplul 8.7. Dacă X este v.a. binomială , atunci $E(X) = np$.

Demonstraţie. $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$

$kC_n^k = k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = nC_{n-1}^{k-1}$

$E(X) = np\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$ □

Exemplul 8.8. Dacă X este repartizată Poisson de parametru λ, atunci $E(X) = \lambda$.

Demonstraţie. $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda$ □

Dacă X este o v.a. continuă cu densitatea f, atunci

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Exemplul 8.9. Dacă $X \sim Exp(\lambda)$, atunci $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Demonstraţie. $E(X) = \int_0^\infty x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}dx = \lambda\left(\frac{x\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}dx\right) =$
$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}dx = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{-\lambda}|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$ □

Interpretare geometrică . Aria cuprinsă între graficul funcţiei de repartiţie F_X, dreapta $F_X(x) = 1$ şi axele de coordonate este egală cu valoarea medie a v.a. X.

Fie X o v.a. şi $\varphi(X)$ o funcţie de v.a., adică o v.a. Atunci

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i\in I}\varphi(x_i)p_i,$$

unde X este o v.a discretă $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, i \in I$

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx,$$

unde f este densitatea de probabilitate a v.a. X

Dacă (X,Y) este un vector aleator şi $Z=\varphi(X,Y)$, atunci

$$E(\varphi(X,Y)) = \sum_i \sum_j \varphi(x_i,y_j)p_{ij},$$

unde $p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$

$$E(\varphi(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dxdy,$$

unde f este densitatea vectorului (X,Y)

Proprietăţile valorii medii

1. $E(c)=c$, c constantă

   Demonstraţie. $X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$
   $E(X)=c\cdot 1=c$ □

2. $E(\alpha X)=\alpha E(X), \alpha\in\mathbb{R}$

   Demonstraţie. Dacă X este discretă , atunci
   $E(\alpha X)=\sum\limits_i \alpha x_i p_i = \alpha\sum\limits_i x_i p_i = \alpha E(X)$
   Dacă X este continuă cu densitatea de probabilitate f, atunci
   $E(\alpha X)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha x f(x)dx = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \alpha E(X)$ □

3. Dacă (X,Y) este un vector aleator, atunci $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

   Demonstraţie. Dacă (X,Y) este un vector aleator discret şi $\varphi(X,Y)=X+Y$, atunci
   $E(X+Y)=\sum\limits_i\sum\limits_j(x_i+y_j)p_{ij} = \sum\limits_i\sum\limits_j x_i p_{ij} + \sum\limits_i\sum\limits_j y_j p_{ij} = \sum\limits_i x_i\sum\limits_j p_{ij}+$
   $+\sum\limits_j y_j\sum\limits_i p_{ij} = \sum\limits_i x_i p_i + \sum\limits_j y_j q_j = E(X)+E(Y)$
   Dacă (X,Y) este un vector aleator continuu cu densitatea $f(x,y)$, atunci
   $E(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right)dx+$
   $+\int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = E(X)+$
   $+E(Y)$ □

4. Dacă X şi Y sunt v.a. independente, atunci $E(XY)=E(X)E(Y)$.

Demonstraţie. Dacă (X,Y) este un vector aleator discret, $\varphi(X,Y) =$ $= XY$ şi X şi Y sunt v.a. independente, adică $p_{ij} = p_i q_j$, atunci
$E(XY) = \sum\limits_i \sum\limits_j x_i y_j p_{ij} = \sum\limits_i \sum\limits_j x_i y_j p_i q_j = \sum\limits_i x_i p_i \sum\limits_j y_j q_j = E(X)E(Y)$

Dacă (X,Y) este un vector aleator continuu cu densitatea $f(x,y)$ şi X şi Y sunt v.a. independente, adică $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, atunci
$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = E(X)E(Y)$ □

Valori medii condiţionate
Dacă X, Y sunt v.a. discrete, atunci

$$E(X/Y = y_j) = \sum_i x_i P(x_i/y_j)$$

$$E(Y/X = x_i) = \sum_j y_j P(y_j/x_i)$$

Dacă X, Y sunt v.a. continue, atunci

$$E(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x/y)dx$$

$$E(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y/x)dy$$

$E(Y/X = x) = \phi(x)$ se numeşte **funcţia de regresie a lui Y asupra lui X**

$E(X/Y = y) = \xi(y)$ se numeşte **funcţia de regresie a lui X asupra lui Y**

Liniile definite de aceste funcţii se numesc **curbe de regresie**.

8.4.2 Dispersia (sau variaţia)

Informaţia dată de valoarea medie despre v.a. este insuficientă . Valoarea medie nu dă nicio informaţie despre împrăştierea valorilor v.a. Valorile posibile ale v.a. sunt diferit împrăştiate în jurul valorilor medii. O primă diferenţiere se poate face luând în considerare diferenţa dintre valorile extreme.

Diferenţa dintre cea mai mare şi cea mai mică valoare posibilă a v.a. se numeşte **amplitudine**.

Dar nici amplitudinea nu este suficientă pentru caracterizarea împrăştierii v.a. nedând nicio informaţie asupra celorlalte valori posibile şi nici asupra distribuirii probabilităţii între acestea.

V.a. $X - E(X)$ se numeşte **abaterea** lui X de la valoarea medie.

Nici valoarea medie a abaterii de la medie nu poate caracteriza această împrăştiere, deoarece ea este nulă pentru orice v.a. $(E(X - E(X)) =$

$E(X)-$
$-E(X)=0)$

Uneori, gradul de împrăştiere a valorilor unei v.a. în jurul mediei se măsoară prin valoarea medie a modulului abaterii, $E(|X-E(X)|)$, dar ea este incomodă în calcule.

Pentru a măsura gradul de împrăştiere este mai comod folosirea unei alte măsuri, dispersia $D^2(X)$.

Dispersia $D^2(X)$ sau **varianţa** $\mathrm{Var}(X)$ unei v.a. se numeşte valoarea medie a pătratului abaterii $X-E(X)$, i.e.

$$D^2(X)=E((X-E(X))^2)$$

Deci dispersia dă o măsură pentru împrăştierea valorilor variabilei X în jurul valorii medii.

Interpretare: Dacă valoarea medie a unei v.a. este interpretată ca centrul maselor p_i concentrate în punctele de abscise x_i, dispersia poate fi interpretată ca momentul de inerţie al repartiţiei probabilităţii în raport cu centrul său de masă .

Teorema 8.2. *Fie X o v.a. Atunci* $D^2(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

Demonstraţie. $D^2(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2-2XE(X)+E^2(X))=$
$=E(X^2)-2E(X)E(X)+E^2(X)=E(X^2)-2E^2(X)+E^2(X)=E(X^2)-$
$-E^2(X)$ □

Uneori gradul de împrăştiere a valorilor unei v.a. X se exprimă nu prin dispersie, ci prin **abaterea medie pătratică** (sau **deviaţia standard**) $\sigma=\sqrt{D^2(X)}$.

Proprietăţile dispersiei

1. $D^2(c)=0$, unde $c\in\mathbb{R}$

   Demonstraţie. $D^2(c)=E((c-E(c))^2)=E((c-c)^2)=E(0)=0$ □

2. $D^2(\alpha X)=\alpha^2D^2(X),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$

   Demonstraţie. $D^2(\alpha X)=E((\alpha X-E(\alpha X))^2)=E((\alpha X-\alpha E(X))^2)=$
   $=E(\alpha^2(X-E(X))^2)=\alpha^2E((X-E(X))^2)=\alpha^2D^2(X)$ □

3. Dacă X şi Y sunt v.a. independente, atunci

$$D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y).$$

   Demonstraţie. $D^2(X+Y)=E((X+Y)^2)-E^2(X+Y)=$
   $=E(X^2+2XY+Y^2)-(E(X)+E(Y))^2=E(X^2)+2E(X)E(Y)+$
   $+E(Y^2)-E^2(X)-2E(X)E(Y)-E^2(Y)=D^2(X)+D^2(Y)$ □

Exemplul 8.10. Fie X o variabilă repartizată Poisson de parametru λ. Atunci $D^2(X) = \lambda$.

Demonstraţie. $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$
$= \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda$
$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ □

Exemplul 8.11. Fie $X \sim N(m, \sigma)$. Atunci $D^2(X) = \sigma^2$.

Demonstraţie. $D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$
Facem schimbarea de variabilă $t = \frac{x-m}{\sigma}$ şi obţinem $D^2(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt =$
$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Cu schimbarea $p = \frac{t^2}{2}$ obţinem $D^2(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} 2p \mathrm{e}^{-p} \frac{1}{\sqrt{2p}} dp =$
$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} p^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-p} dp = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \sigma^2$ □

8.4.3 Momente

Momentul generalizează noţiunea de medie şi dispersie.

Momentul iniţial de ordinul k al v.a. X se numeşte media v.a. X^k
:

$$m_k = E(X^k)$$

Dacă X este discretă , atunci $m_k = \sum\limits_i x_i^k p_i$.

Dacă X este continuă cu densitatea de probabilitate $f(x)$, atunci

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Atunci $m_1 = E(X)$, $m_2 = E(X^2)$.

Momentul absolut de ordinul k al v.a. X se numeşte media v.a. $|X|^k$:

$$m'_k = E(|X|^k)$$

Momentul centrat de ordinul k al v.a. X se numeşte media v.a. $(X - E(X))^k$:

$$\mu_k = E((X - E(X))^k)$$

Atunci $\mu_1 = E(X - E(X)) = 0$, $\mu_2 = E((X - E(X))^2) = D^2(X)$.

Se numeşte **moment centrat absolut de ordinul** k al v.a. X numărul $E(|X - E(X)|^k)$.

8.4.4 Covarianţa şi coeficientul de corelaţie

Covarianţa şi coeficientul de corelaţie sunt doi indicatori numerici care pot fi consideraţi drept măsuri ale gradului de dependenţă a două v.a.

Covarianţa se notează cu $\operatorname{cov}(X,Y)$ şi se defineşte ca fiind media produsului abaterilor :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Observaţia 8.1. 1. $\operatorname{cov}(X,X) = E((X - E(X))(X - E(X))) =$
$= E((X - E(X))^2) = D^2(X)$

2. $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X,Y),\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$

Teorema 8.3. *Fie X, Y două v.a. Atunci $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.*

Demonstraţie. $\operatorname{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) =$
$= E(XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y)) = E(XY) - 2E(X)E(Y)+$
$+E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ □

Teorema 8.4. *Fie X, Y două v.a. independente. Atunci $cov(X,Y) = 0$.*

Demonstraţie. Cum X, Y sunt independente, atunci $E(XY) = E(X)E(Y)$, deci $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$. □

Observaţia 8.2. Dacă $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$, atunci X, Y sunt v.a. dependente.

Covarianţa depinde de unităţile în care se măsoară v.a. X şi Y. Pentru a înlătura acest neajuns, se consideră coeficientul de corelaţie, ce nu depinde de unităţile în care se măsoară X şi Y.

Se numeşte **coeficient de corelaţie** al v.a. X şi Y,

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}}$$

Dacă X, Y sunt v.a. independente, atunci $\rho(X,Y) = 0$.

Dacă $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ sau $\rho(X,Y) = 0$, atunci X, Y se numesc **necorelate**.

Observaţia 8.3. Teorema 8.4 arată că independenţa implică necorelare, dar necorelarea nu implică independenţă .

Exemplul 8.12. Fie $X \sim U[-1,1]$ şi $Y = X^2$. Arătaţi că v.a. X şi Y sunt necorelate.

Demonstraţie. Evident variabilele X şi Y nu sunt independente.

Cum $X \sim U[-1,1]$, atunci densitatea de probabilitate este

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$E(X) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{2} dx = 0$, $E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3}$

$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(X^2 - E(X^2))) = \int_{-1}^{1} x \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} dx = 0$, deci X şi Y sunt necorelate □

Teorema 8.5. *Fie v.a. X şi Y ce admit dispersii finite. Atunci*

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2cov(X,Y)$$

Demonstraţie. $D^2(X+Y) = E((X+Y-E(X+Y))^2) =$
$E((X+Y-E(X)-E(Y))^2) =$
$E((X-E(X))^2 + (Y-E(Y))^2 + 2(X-E(X))(Y-E(Y))) =$
$E((X-E(X))^2) + E((Y-E(Y))^2) + 2E((X-E(X))(Y-E(Y))) =$
$D^2(X) + D^2(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$ □

Teorema 8.6. *Fie v.a. X şi Y. Atunci $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.*

Demonstraţie. Fie σ_X^2 şi σ_Y^2 dispersiile lui X şi Y şi fie $W = X - aY$, $a \in \mathbb{R}$.

$D^2(W) = E(W^2) - E^2(W) = E((X-aY)^2) - E^2(X-aY) =$
$E(X^2 - 2aXY + a^2Y^2) - (E^2(X) - 2aE(X)E(Y) + a^2E^2(Y)) =$
$E(X^2) - 2aE(XY) + a^2E(Y^2) - E^2(X) + 2aE(X)E(Y) - a^2E^2(Y) =$
$E(X^2) - E^2(X) + a^2(E(Y^2) - E^2(Y)) - 2a(E(XY) - E(X)E(Y)) =$
$D^2(X) + a^2D^2(Y) - 2a\mathrm{cov}(X,Y)$

Cum $D^2(W) \geq 0,\ \forall a$, rezultă $2a\mathrm{cov}(X,Y) \leq D^2(X) + a^2D^2(Y)$.

Alegând $a = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$, obţinem $\mathrm{cov}(X,Y) \leq \sigma_X\sigma_Y$, deci $\rho(X,Y) \leq 1$.

Alegând $a = -\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$, obţinem $\mathrm{cov}(X,Y) \geq -\sigma_X\sigma_Y$, deci $\rho(X,Y) \geq -1$. □

Teorema 8.7. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. Atunci*

$$D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j).$$

Exemplul 8.13. Doi parteneri cu forţă egală boxează 12 runde (probabilitatea ca oricare din ei să câştige o rundă este $\frac{1}{2}$). Să se calculeze valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică a v. a. care reprezintă numărul de runde câştigate de unul din parteneri.

Demonstraţie. V. a. X are repartiţia binomială $P(X=k) = C_{12}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k}$, $k = \overline{0,12}$

Atunci $E(X) = np = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6, D^2(X) = npq = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3, D(X) =$
$= \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{3}$ □

Exemplul 8.14. O firmă se aprovizionează de la 3 furnizori. Din datele statistice privind furnizorii, firma estimează că probabilitatea cu care furnizorii nu pot onora contractul sunt $p_1 = 0,1, p_2 = 0,3, p_3 = 0,2$. Fie X variabila aleatoare ce indică numărul furnizorilor ce nu-şi pot onora contractul . Să se afle:

a) repartiţia v.a. X;
b) $E(X), D(X)$;
c) să se determine riscul pe care şi-l asumă firma.

Demonstraţie. a) Situaţia dată se poate modela probabilistic cu schema lui Poisson cu 3 urne, în care $p_1 = 0,1, q_1 = 0,9, p_2 = 0,3, q_2 = 0,7, p_3 = 0,2,$ $q_3 = 0,8$ şi se obţine polinomul de gradul 3 :
$P_3(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)(p_3 t + q_3) = 0,006t^3 + 0,092t^2 + 0,398t + 0,504$

X ia valorile 0,1,2,3 cu probabilităţile 0,504; 0,398; 0,092; 0,006.

b) $E(X) = 0 \cdot 0,504 + 1 \cdot 0,398 + 2 \cdot 0,092 + 3 \cdot 0,006 = 0,6$

$E(X^2) = 0^2 \cdot 0,504 + 1^2 \cdot 0,398 + 2^2 \cdot 0,092 + 3^2 \cdot 0,006 = 0,82$

$D^2(X) = 0,82 - 0,6^2 = 0,46$

c) Riscul pe care şi-l asumă firma este dat de următoarea probabilitate $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,496$ □

Exemplul 8.15. Se fac experimente asupra alegerii filamentului unui girofar până când acesta este aprins. La fiecare experiment probabilitatea de succes este $\frac{1}{5}$. Se cer media şi dispersia numărului de experimente.

Demonstraţie. Fie X v. a. ce reprezintă numărul de experimente. Atunci
$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} & \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} & \dots & \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5} & \dots \end{pmatrix}$$
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{5} \cdot 25 = 5$$

Am calculat astfel : fie $q = \frac{4}{5} < 1$. Stim $\sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q} \Longrightarrow$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \left(q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}\right)' = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = 25$$
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2} / \cdot q \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k q^k = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 q^{k-1} = \left(\frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2}\right)' =$$
$$= \frac{1 + q - (n+1)^2 q^n + q^{n+1}(2n^2 + 2n - 1) + q^{n+2}(n^2 + 4n + 1)}{(1-q)^3} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} k^2 q^{k-1} = \frac{1 + q}{(1-q)^3} = 9 \cdot 25$$

Deci $E(X^2) = \frac{1}{5} \cdot 9 \cdot 25 = 45$

$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 45 - 25 = 20$ □

Exemplul 8.16. Jucătorul A plăteşte 1 dolar pentru fiecare participare la jocul următor: sunt aruncate 3 zaruri; dacă apare o singură dată faţa 1 atunci el primeşte 1 dolar; dacă apare de două ori primeşte 2 dolari; dacă apare pe toate zarurile primeşte 8 dolari; în alte cazuri nu primeşte nimic.

a) Jocul este corect? (adică valoarea medie a câştigului e nulă ?)

b) Dacă jocul nu este corect, cât ar trebui să primească jucătorul atunci când apare 1 pe toate zarurile, pentru ca jocul să devină corect?

Demonstraţie. a) Fie X câştigul total; este o v. a. ce ia valorile $-1, 0, 1, 7$. Atunci $P(X=-1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}, P(X=0) = C_3^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$, $P(X=1) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}, P(X=7) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

Deci $E(X) = -\frac{103}{216}$, ceea ce înseamnă că jocul nu este corect.

b) Dacă a este câştigul când apare 1 de 3 ori, atunci $E(X) = \frac{a-111}{216}$, astfel că valoarea cerută este $a = 111$ $\square$

Exemplul 8.17. Se dă funcţia $f(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} x^{n-1}, 0 \le x \le \infty$. Se cer:

a) Să se determine constanta k astfel încât $f(x)$ să fie o densitate de repartiţie;

b) Să se arate că $E(X) = \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ şi $E(X^2) = n$.

Demonstraţie. a) $1 = k\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} x^{n-1} dx$

Făcând schimbarea de variabilă $u = \frac{x^2}{2}$, obţinem
$1 = 2^{\frac{n}{2}-1} k \int_0^\infty u^{\frac{n-2}{2}} \mathrm{e}^{-u} du = k \cdot 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Longrightarrow k = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

b) $E(X) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} du = \sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

$E(X^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{n+1} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^{\frac{n}{2}} du =$
$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n$ $\square$

Exemplul 8.18. Fie X o v.a. repartizată exponenţial de parametru $\lambda = \frac{1}{2}$. Să se afle $P(1 < X < 3)$ şi $E(X^n)$.

Demonstraţie. Cum $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda = \frac{1}{2})$, densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Atunci $P(1 < X < 3) = \int_1^3 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} dx = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}|_1^3 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} dx = \int_0^\infty 2^n t^n \mathrm{e}^{-t} dt = 2^n\Gamma(n+1) = 2^n n!$ $\square$

Exemplul 8.19. Fie X o variabilă aleatoare a cărei densitate de repartiţie este

$$f_X(x) = \begin{cases} c\ln\left(\frac{a}{x}\right), & 0 \le x < a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine constanta c şi să se calculeze valoarea medie, momentul de ordinul doi şi dispersia variabilei X.

Demonstraţie. Din condiţia $\int_0^a c\ln\left(\frac{a}{x}\right) dx = 1 \Longrightarrow c\left(x\ln\frac{a}{x}|_0^a + \int_0^a dx\right) = ca \Longrightarrow c = \frac{1}{a}$

$E(X) = \frac{1}{a}\int_0^a x\ln\left(\frac{a}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{a}{x}\right)|_0^a + \int_0^a \frac{x}{2}dx\right) = \frac{a}{4}$

$E(X^2) = \frac{1}{a}\int_0^a x^2\ln\left(\frac{a}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x^3}{3}\ln\left(\frac{a}{x}\right)|_0^a + \int_0^a \frac{x^2}{3}dx\right) = \frac{a^2}{9}$

$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7a^2}{144}$ □

Exemplul 8.20. Calitatea unui produs electronic este rezultanta acţiunii a 2 grupuri de factori U şi V ale căror modele probabilistice sunt $U = 2X+3Y$ şi $V = 4X-Y$, unde X şi Y sunt variabile aleatoare independente, $X \sim N(3,2)$ şi $Y \sim Bi(10;0,9)$. Să se afle:

a) $D^2(U), D^2(V)$;

b) $\rho(U,V)$;

c)$P(7 \leq X \leq 13)$.

Demonstraţie. a) $D^2(U) = D^2(2X+3Y) = 4D^2(X) + 9D^2(Y) = 4\cdot 2^2 + 9\cdot$ $\cdot 0,9 = 24,1$, unde $D^2(X) = 2^2 = 4, D^2(Y) = npq = 10\cdot 0,9\cdot 0,1 = 0,9$

$D^2(V) = D^2(4X-Y) = 4^2D^2(X) + (-1)^2D^2(Y) = 16\cdot 4 + 0,9 = 64,9$

b) $E(U) = E(2X+3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2\cdot 3 + 3\cdot 10\cdot 0,9 = 33$

$E(V) = E(4X-Y) = 4E(X) - E(Y) = 4\cdot 3 - 10\cdot 0,9 = 3$

$UV = (2X+3Y)(4X-Y) = 8X^2 + 10XY - 3Y^2 \Longrightarrow E(UV) =$ $= 8E(X^2) + 10E(XY) - 3E(Y^2) = 8E(X^2) + 10E(X)E(Y) - 3E(Y^2) =$ $= 128,3$, deoarece X, Y sunt independente şi $E(X^2) = D^2(X) +$ $+[E(X)]^2 = 4 + 3^2 = 13, E(Y^2) = D^2(Y) + [E(Y)]^2 = 0,9 + (10\cdot 0,9)^2 =$ $= 81,9$

Atunci $\rho(U,V) = \frac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D^2(X)\cdot D^2(Y)}} = \frac{128,3-33\cdot 3}{\sqrt{24,1\cdot 64,9}} = 0,741$

c) $P(7 \leq X \leq 13) = \Phi\left(\frac{13-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{7-3}{2}\right) = \Phi(5) - \Phi(2) \simeq 0,0227$ □

Exemplul 8.21. Fie X şi Y variabile aleatoare pentru care $E(X) = -2, E(Y) = 4, D^2(X) = 4, D^2(Y) = 9$, iar coeficientul de corelaţie $\rho(X,Y) = -0,5$. Să se calculeze valoarea medie a variabilei $Z = 3X^2 - 2XY + Y^2 - 3$.

Demonstraţie. $E(Z) = 3E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2) - 3$

Cum $D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \Longrightarrow E(X^2) = D^2(X) + [E(X)]^2 =$ $= 4 + (-2)^2 = 8$ şi $E(Y^2) = D^2(Y) + [E(Y)]^2 = 9 + 4^2 = 25$

$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \Longrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) +$ $+cov(X,Y) = E(X)E(Y) + \rho(X,Y)\sqrt{D^2(X)D^2(Y)} = (-2)\cdot 4 +$ $+(-0,5)\cdot\sqrt{4\cdot 9} = -11$

Deci $E(Z) = 3\cdot 8 - 2\cdot(-11) + 25 - 3 = 68$ □

Exemplul 8.22. Intr-o bibliotecă sunt n cărţi numerotate de la 1 la n. Se scot la întâmplare cărţile din bibliotecă . Avem o "întâlnire" dacă numărul de pe carte coincide cu numărul extragerii. Să se calculeze media şi dispersia numărului total de întâlniri.

Demonstraţie. La fiecare carte vom asocia o v. a. $X_i, i = \overline{1,n}$ definită astfel: dacă la extragerea i cartea scoasă poartă numărul i, atunci $X_i = 1$, în celelalte cazuri $X_i = 0$. Probabilitatea ca la extragerea i să obţinem cartea cu numărul i este $P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$, deoarece există o carte favorabilă printre cele n.

Deoarece fiecare variabilă X_i poate să ia numai valorile 1 sau 0 $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow P(X_i = 0) = 1 - P(X_i = 1) = 1 - \frac{1}{n}$.

Avem $E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

$E(X_i^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

$D^2(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$

Numărul total de întâlniri este dat de $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

$$E(Y) = E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

$$D^2(Y) = D^2\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{cov}(X_i, X_j), \text{ dar}$$

$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$

Cum valorile posibile ale lui $X_i X_j$ sunt 0 şi 1 $\Longrightarrow E(X_i X_j) = 1 \cdot$ $\cdot P(X_i X_j = 1) + 0 \cdot P(X_i X_j = 0) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$, deoarece $X_i X_j =$ $= 1 \Longleftrightarrow$ cărţile cu numerele i şi j au fost extrase la rândul lor şi sunt $(n-2)!$ permutări de cele $n-2$ cărţi corespunzătoare acestui eveniment.

Dacă $i \neq j, \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2(n-1)}$

Deci $D^2(Y) = nD^2(X_i) + n(n-1)\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 1$ □

Exemplul 8.23. Fie X, Y v. a. discrete cu repartiţiile $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Dacă $P(X = -1, Y = -1) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, să se calculeze:

a) repartiţia vectorului (X, Y);

b) coeficientul de corelaţie $\rho(X, Y)$ în funcţie de λ;

c) valoarea lui λ pentru care X şi Y sunt necorelate; în acest caz să se cerceteze şi independenţa v. a. X şi Y.

Demonstraţie. a) $P(X = -1, Y = -1) = \lambda; P(X = -1, Y = 2) = \frac{1}{2} -$ $-\lambda; P(X = 1, Y = -1) = \frac{2}{3} - \lambda; P(X = 1, Y = 2) = \lambda - \frac{1}{6}$

b) $\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}}$

$$XY \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} - \lambda & \frac{2}{3} - \lambda & \lambda & \lambda - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Calculăm $E(XY) = 6\lambda - 2, E(X) = 0, E(Y) = 0, D^2(X) = 1, D^2(Y) =$ $= 2$ şi avem $\rho(X, Y) = \frac{6\lambda - 2}{\sqrt{2}}$

c) $\rho(X,Y)=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{3} \Longrightarrow X,Y$ sunt necorelate

Pentru $\lambda=\frac{1}{3}$ are loc $p_{ij}=p_iq_j, i,j=1,2$, unde $p_i=P(X=x_i), q_j=$ $=P(Y=y_j), p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$, deci X,Y sunt independente. □

Exemplul 8.24. Fiind dată densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases} 2xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să se determine $E(X), E(Y), D^2(X), D^2(Y)$.

Demonstraţie. Aflăm mai întâi densităţile de probabilitate ale componentelor:

$f_X(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^\infty y\mathrm{e}^{-y^2}dy = x\mathrm{e}^{-x^2}(-\mathrm{e}^{-y^2})/_0^\infty =$ $=x\mathrm{e}^{-x^2}, x>0$

$f_Y(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx = y\mathrm{e}^{-y^2}, y>0$

Atunci $E(X)=\int_0^\infty xf_X(x)dx=\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ (am făcut substituţia $x^2=t$ şi am folosit proprietăţile funcţiei Γ). Analog $E(Y)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

$E(X^2)=\int_0^\infty x^2f_X(x)dx=\int_0^\infty x^3\mathrm{e}^{-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(2)=\frac{1}{2}$

Aşadar, $D^2(X)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{16}$. Analog $D^2(Y)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{16}$. □

Exemplul 8.25. Fie (X,Y) un vector aleator cu densitatea

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & (x,y)\in(0,2)\times(2,4) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se afle:

a) densităţile de repartiţie condiţionate $f(x/y), f(y/x)$;

b) $E(X/Y=y), E(Y/X=x)$

Demonstraţie. a) $f_X(x)=\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{3-x}{4}, x\in(0,2) \Longrightarrow f(y/x)=$ $=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{3-x}{4}}=\frac{6-x-y}{2(3-x)}, y\in(2,4)$

$f_Y(y)=\int_0^2\frac{1}{8}(6-x-y)dx=\frac{1}{4}(5-y), y\in(2,4) \Longrightarrow f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=$ $=\frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{1}{4}(5-y)}=\frac{6-x-y}{2(5-y)}, x\in(0,2)$

b) $E(X/Y=y)=\int_0^2 x\cdot f(x/y)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{6-x-y}{2(5-y)}dx=\frac{14-3y}{3(5-y)}$

$E(Y/X=x)=\int_2^4 y\cdot f(y/x)dy=\int_2^4 y\cdot\frac{6-x-y}{2(3-x)}=\frac{26-9y}{3(2-x)}$ □

Exemplul 8.26. Fie $f(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{xy}}, D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0<x\leq y\leq 1\right\}$ densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X,Y). Să se determine :

a) densităţile de probabilitate marginale;

b) densităţile de probabilitate condiţionate;

c) funcţiile de repartiţie condiţionate;

d) Sunt v.a. X şi Y independente?;
e) Să se calculeze coeficientul de corelaţie al componentelor X şi Y.

Demonstraţie. a) $f_X(x) = \int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{xy}}dy = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1, 0 < x \leq 1$
$f_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{xy}}dx = 1, 0 < y \leq 1$
b) $f(x/y) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{xy}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}, 0 < x \leq y \leq 1$
$f(y/x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{xy}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} = \frac{1}{2\sqrt{y}(1-\sqrt{x})}, 0 < x \leq y \leq 1$
c) $F_X(x/y) = \int_0^x f_X(u/y)du = \frac{1}{\sqrt{y}}\int_0^x \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
$F_Y(y/x) = \int_x^y f_Y(u/x)du = \frac{1}{1-\sqrt{x}}\int_x^y \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
d) $f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \neq \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \cdot 1 = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, deci X şi Y nu sunt independente
e) $E(X) = \int_0^1 xf_X(x)dx = \int_0^1(\sqrt{x} - x)dx = \frac{1}{6}$
$E(Y) = \int_0^1 yf_Y(y)dy = \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}$
$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)dx = \frac{1}{15}$
$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 f_Y(y)dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}$
$D^2(X) = \frac{1}{15} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{180}$
$D^2(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$
$E(XY) = \int\int_D xy \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy}}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1\int_x^1 \sqrt{xy}dxdy = \frac{1}{9}$
$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{9} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{36}$
$\rho(X,Y) = \frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{7}{180}\cdot\frac{1}{12}}} = \sqrt{\frac{5}{21}}$ □

8.5 Probleme propuse

1. Fie
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$
densitatea de probabilitate a vectorului (X,Y). Să se determine $F_{(X,Y)}(x,y), F_X(x), F_Y(y), f_X(x), f_Y(y)$.
R: $F_{(X,Y)}(x,y) = [1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x}][1 - (1+y)\mathrm{e}^{-y}], x, y \geq 0$
$F_X(x) = 1 - (1+x)\mathrm{e}^{-x}, x \geq 0$
$F_Y(y) = 1 - (1+y)\mathrm{e}^{-y}, y \geq 0$
$f_X(x) = x\mathrm{e}^{-x}, x \geq 0$
$f_Y(y) = y\mathrm{e}^{-y}, y \geq 0$

2. Fie vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine: a) $P(X \leq 1, Y \leq 1)$; b) $P(X+Y \leq 1)$;
c) $P(X+Y > 2)$; d) $P(X < 2Y)$;e) $P(X > 1)$.

R: a) $P(X \leq 1, Y \leq 1) = \frac{1}{4}$; b) $P(X+Y \leq 1) = \frac{1}{8}$;
c) $P(X+Y > 2) = \frac{1}{2}$; d) $P(X < 2Y) = 1$; e) $P(X > 1) = \frac{1}{2}$

3. Fie vectorul aleator (X,Y) cu densitatea

$$f(x,y) = \begin{cases} a\mathrm{e}^{-x-2y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine "a", funcţia de repartiţie a vectorului (X,Y) şi funcţiile de repartiţie ale variabilelor $X+Y, \frac{X}{Y}, X^2, \sqrt{X}$.

R: $a = 2$

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$F_{X+Y}(z) = 1 + \mathrm{e}^{-2z} - 2\mathrm{e}^{-z}$; $F_{\frac{X}{Y}}(z) = \frac{z}{z+2}$; $F_{X^2}(z) = 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{z}}$;
$F_{\sqrt{X}}(z) = 1 - \mathrm{e}^{-z^2}$

4. Fie (X,Y) un vector aleator cu densitatea de probabilitate

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Se cere să se determine densităţile de probabilitate corespunzătoare variabilelor aleatoare X^2 şi Y^2.

R:

$$f_{X^2}(u) = \begin{cases} 1, & 0 < u < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_{Y^2}(v) = \begin{cases} 1, & 0 < v < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

5. Fie vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{20}(x+y+2), & (x,y) \in [0,2] \times [1,3] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se afle:

a) densităţile de probabilitate marginale $f_X(x), f_Y(y)$;

b) funcţiile de repartiţie marginale;

c) densităţile de probabilitate condiţionate.

R: a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{10}, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y+3}{10}, & y\in[1,3]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

b)

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2+8x}{20}, & x\in[0,2]\\ 1, & x>2\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ \frac{y^2+6y-7}{20}, & y\in[1,3]\\ 1, & y>3\end{cases}$$

c) Pentru $y\in[1,3]$,

$$f(x/y)=\begin{cases}\frac{x+y+2}{2(y+3)}, & x\in[0,2]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

Pentru $x\in[0,2]$,

$$f(y/x)=\begin{cases}\frac{x+y+2}{2(x+4)}, & y\in[1,3]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

6. Fie X şi Y v. a. independente urmând fiecare o lege normală de parametrii 0 şi 1. Să se determine raza cercului cu centrul în origine astfel încât $P((X,Y)\in D(0,R))=0,95$.

   R: $R=\sqrt{2\ln 20}$

7. Fie X şi Y v. a. independente repartizate exponenţial cu parametrii λ şi μ. Să se determine densitatea de probabilitate a vectorului (X,Y) şi funcţia de repartiţie a vectorului (X,Y).

   R:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\lambda\mu \mathrm{e}^{-\lambda x-\mu y}, & x,y\ge 0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

$$F_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})(1-\mathrm{e}^{-\mu y}), & x,y\ge 0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

8. Fie (X,Y) un vector aleator a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x,y\ge 0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

   Să se afle densitatea de probabilitate a variabilelor $U=X+Y, V=\frac{X}{Y}$.

   R: $f_U(u)=u\mathrm{e}^{-u}$,$f_V(v)=\frac{1}{(1+v)^2}$

9. Fie X_1 şi X_2 v. a. continue şi $Y_1=X_1+X_2, Y_2=X_1-X_2$. Să se arate că pentru orice u_1,u_2 avem $f_{(Y_1,Y_2)}(u_1,u_2)=\frac{1}{2}f_{(X_1,X_2)}\left(\frac{u_1+u_2}{2},\frac{u_1-u_2}{2}\right)$.

10. Fie X_1 şi X_2 v. a. şi $Y_1 = X_1 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha, Y_2 = -X_1 \sin\alpha +$ $+X_2 \cos\alpha$ pentru orice $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Să se arate că $f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) =$ $= f_{(X_1,X_2)}(y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha)$

11. Variabila aleatoare X are repartiţia $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$. Să se calculeze valorile medii $E(X), E(2X), E(X+1), E(2X+1), E(X^2)$, $E((X-0,3)^2)$.

    R: $E(X) = 0,3, E(2X) = 0,6, E(X+1) = 1,3, E(2X+1) = 1,6$, $E(X^2) = 0,7, E((X-0,3)^2) = 0,61$

12. Doi jucători de tenis joacă în 4 meciuri 12 seturi. Considerând că probabilităţile celor 2 jucători de a câştiga un set sunt egale, să se calculeze valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare ce reprezintă numărul de seturi câştigate de unul dintre jucători.

    R: $P(X = x) = C_{12}^x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{12-x}, x = \overline{0,12}$

    $E(X) = 6, D^2(X) = 3, \sigma = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{3}$

13. Fie X, Y variabile aleatoare independente, $X, Y \sim N(a, \sigma)$. Să se calculeze coeficientul de corelaţie al variabilelor aleatoare $U = \alpha X + \beta Y, V = \alpha X - \beta Y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \neq 0$.

    R: $\rho(U, V) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$

14. Fie vectorul (X, Y) cu densitatea

$$f(x,y) = \begin{cases} a \sin(x+y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

    Să se determine "a", $E(X), E(Y), D^2(X), D^2(Y), \mathrm{cov}(X,Y)$.

    R: $a = \frac{1}{2}, E(X) = \frac{\pi}{4} = E(Y), D^2(X) = D^2(Y) = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2$

15. Densitatea de probabilitate a v. a. X este dată de funcţia

$$f(x) = \begin{cases} k(1 + \frac{a}{2}x)^{\frac{4}{a^2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{2x}{a}}, & -\frac{2}{a} \leq x < \infty \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

    Să se determine constanta k şi primele două momente centrate ale acestei v. a.

    R: $k = \frac{b^{2b^2-1}}{\mathrm{e}^{b^2}\Gamma(b^2)}$; $E(X) = 0$; $E(X^2) = 1$

Capitolul 9

Şiruri de variabile aleatoare. Teoreme limită

9.1 Inegalitatea lui Cebâşev

Teorema 9.1. ***(Inegalitatea lui Cebâşev)*** *Fie X o v.a. cu dispersia finită*

Atunci $\forall \varepsilon > 0$ au loc

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$$

sau echivalent

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Demonstraţie. Fie Y v.a. definită astfel

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |X - E(X)| < \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{dacă } |X - E(X)| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Atunci $Y^2 \leq |X - E(X)|^2 \Longrightarrow E(Y^2) \leq E((X - E(X))^2) = D^2(X)$

Dar $E(Y^2) = \varepsilon^2 P(|X-E(X)| \geq \varepsilon)$, deci $\varepsilon^2 P(|X-E(X)| \geq \varepsilon) \leq D^2(X)$

Evenimentele $\{|X - E(X)| < \varepsilon\}$ şi $\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}$ sunt contrare şi $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) + P(|X - E(X)| < \varepsilon) = 1$, de unde rezultă a doua variantă a inegalitaţii lui Cebâşev. □

Exemplul 9.1. Media timpului de răspuns şi abaterea medie pătratică într-un computer multi-user sunt 15 secunde, respectiv 3 secunde. Estimaţi probabilitatea ca timpul de răspuns să fie cu 5 secunde mai mare decât media.

Demonstraţie. $E(X) = 15, D^2(X) = 3^2 = 9, \varepsilon = 5$, deci
$P(|X - 15| \geq 5) \leq \frac{9}{25}$ □

Exemplul 9.2. O variabilă aleatoare X are $E(X) = 80, E(X^2) = 6416$. Să se determine o limită inferioară a probabilităţii $P(40 < X < 120)$.

Demonstraţie. $P(40 < X < 120) = P(80 - 40 < X < 80 + 40) =$
$P(-40 < X - 80 < 40) = P(|X - 80| < 40)$

Folosim inegalitatea lui Cebâşev şi luăm $\varepsilon = 40$.

Calculăm $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 16$.

Avem $P(|X - 80| < 40) > 1 - \frac{16}{1600} = 0,99$ □

Exemplul 9.3. Se aruncă o monedă de n ori. Cât de mare trebuie să fie n pentru ca $P\left(\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}\right) > 0,99$, ştiind că α reprezintă numărul de apariţii ale unei feţe alese de mai înainte.

Demonstraţie. Se ştie că $D^2(X) = E((X - E(X))^2) = E_2(|X - E(X)|)$

Folosim inegalitatea lui Cebîşev şi obţinem

$P\left(\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}\right) > 1 - \frac{E_2\left(\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\right|\right)}{10^{-4}}$

$E\left(\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\right|\right) = E\left(\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\right|^2\right) = E\left(\frac{\alpha^2}{n^2} - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{4}\right) = \frac{E(\alpha^2)}{n^2} - \frac{E(\alpha)}{n} + \frac{1}{4} =$
$= \frac{n^2p^2}{n^2} + \frac{npq}{n^2} - \frac{np}{n} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4n}$, deoarece $p = q = \frac{1}{2}$

Deci $P\left(\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}\right) > 1 - \frac{10^4}{4n}$

Aflăm n din inegalitatea $1 - \frac{10^4}{4n} > 0,99 \Longrightarrow n > 5^2 \cdot 10^4$ □

Exemplul 9.4. Fie X o v. a. a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^m}{m!} \cdot \mathrm{e}^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se arate că $P(0 < X < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1}$.

Demonstraţie. Folosim inegalitatea lui Cebîşev:
$P(|X - E(X)| < \varepsilon) > 1 - \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$

Avem $E(X) = \int_0^\infty x \cdot f(x)dx = \frac{1}{m!}\int_0^\infty x^{m+1} \cdot \mathrm{e}^{-x}dx = \frac{\Gamma(m+2)}{m!} =$
$= \frac{(m+1)!}{m!} = m + 1$

$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)dx = \frac{1}{m!}\int_0^\infty x^{m+2} \cdot \mathrm{e}^{-x}dx = \frac{\Gamma(m+3)}{m!} =$
$= \frac{(m+2)!}{m!} = (m+1)(m+2)$

$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m + 1$

Luăm $\varepsilon = m + 1 \Longrightarrow P(|X - (m+1)| < m + 1) > 1 - \frac{m+1}{(m+1)^2} =$
$= \frac{m}{m+1} \Longrightarrow P(0 < X < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1}$ □

9.2 Tipuri de convergenţă

Definiţia 9.1. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v. a. reale sau complexe definite pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, iar X o altă v.a. definită pe acelaşi spaţiu de probabilitate.

1) Sirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge în probabilitate către** X ($X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} X$, când $n \longrightarrow \infty$), dacă $\forall\varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$ sau $\forall\varepsilon > 0, P(|X_n - X| < \varepsilon) \longrightarrow 1, n \longrightarrow \infty$.

2) Sirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge aproape sigur (tare) către** X ($X_n \stackrel{a.s.}{\longrightarrow} X$, când $n \longrightarrow \infty$), dacă $P(\{\omega/ \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$.

3) Sirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge în medie de ordinul** r **către** X ($X_n \stackrel{r}{\to} X$, când $n \longrightarrow \infty$), dacă există momentele absolute $E(|X_n|^r), n \in \mathbb{N}^*$ şi $E(|X|)$ şi dacă $E(|X_n - X|^r) \longrightarrow 0$, când $n \longrightarrow \infty$.

4) Sirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge în repartiţie sau slab către** X ($X_n \stackrel{w}{\to} X$, când $n \longrightarrow \infty$), dacă $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x), n \longrightarrow \infty, \forall x$ punct de continuitate al funcţiei F_X, unde $F_{X_n}, n \in \mathbb{N}^*$ şi F_X sunt funcţii de repartiţie ale v. a. $X_n, n \in \mathbb{N}^*$ şi respectiv X.

Relaţii între tipurile de convergenţă

1) Dacă $X_n \stackrel{a.s.}{\longrightarrow} X, n \longrightarrow \infty$, atunci $X_n \stackrel{P}{\to} X, n \longrightarrow \infty$.

2) Dacă $X_n \stackrel{P}{\to} X, n \longrightarrow \infty$, atunci există un subşir $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $X_{n_k} \stackrel{a.s.}{\longrightarrow} X, k \longrightarrow \infty$.

3) Dacă $X_n \stackrel{r}{\to} X, n \longrightarrow \infty$, atunci $X_n \stackrel{P}{\to} X, n \longrightarrow \infty$. Implicaţia reciprocă nu are loc, deoarece $E(|X_n - X|^r)$ s-ar putea să nu existe.

4) Dacă $X_n \stackrel{r}{\to} X, n \longrightarrow \infty$, atunci $X_n \stackrel{r'}{\to} X, n \longrightarrow \infty$, pentru $r' < r$.

5) Dacă $X_n \stackrel{P}{\to} X, n \longrightarrow \infty$, atunci $X_n \stackrel{w}{\to} X, n \longrightarrow \infty$.

Exemplul 9.5. Fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare Poisson, independente cu $E(X_k) = \lambda_k$ şi $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Să se arate că dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k = \lambda$, atunci şirul de variabile aleatoare $(Y_n)_n$ converge în probabilitate către λ.

Demonstraţie. Cum $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare Poisson avem $\lambda_k = E(X_k) = D^2(X_k)$

Cum variabilele X_n sunt independente rezultă $D^2(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} D^2(X_k) =$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}{n} \longrightarrow 0, \text{ când } n \longrightarrow \infty$$

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \longrightarrow \lambda$$

Folosind inegalitatea lui Cebîşev $\Longrightarrow 0 \le P(|Y_n - \lambda| \ge \varepsilon) < \frac{D^2(Y_n)}{\varepsilon^2} \longrightarrow$ $\longrightarrow 0$ când $n \longrightarrow \infty$, deci $P(|Y_n - \lambda| \ge \varepsilon) \longrightarrow 0 \Longrightarrow Y_n \stackrel{P}{\to} \lambda$. $\square$

Exemplul 9.6. Fie $\alpha > 0$ şi $(X_n)_n$ un şir de v. a. astfel încât $P(X_n =$

$1) =$
$= 1 - \frac{1}{n^\alpha}, P(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}, n > 1$. Să se arate că $(X_n)_n$ converge în probabilitate la 1 şi $(X_n)_n$ converge în medie de ordinul r la 1, când $r < \alpha$, dar $(X_n)_n$ nu converge în medie de ordinul r la 1, când $r \geq \alpha$.

Demonstraţie. $P(|X_n - 1| > \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha} \longrightarrow 0 \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} 1$

Cum $E(|X_n - 1|^r) = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) + |n-1|^r \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{(n-1)^r}{n^\alpha} \Longrightarrow$

$$E(|X_n - 1|^r) \longrightarrow \begin{cases} 0, & r < \alpha \\ 1, & r = \alpha \\ \infty, & r > \alpha \end{cases}$$

□

Exemplul 9.7. Fie $(X_n)_{n \geq 1}$ un şir de v.a. independente şi identic repartizate Cauchy şi $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Să se arate că $\frac{\pi Y_n}{n} \xrightarrow{w} X$, unde X are funcţia de repartiţie

$$F_X(x) \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Demonstraţie. Cum $(X_n)_{n \geq 1}$ este un şir de v.a. identic repartizate Cauchy avem $f_{X_i}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \forall i$, deci $F_{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2})$

Cum $(X_n)_{n \geq 1}$ este un şir de v.a. independente, atunci

$P(Y_n < y) = P(\max(X_1, \ldots, X_n) < y) = P(X_1 < y, \ldots, X_n < y) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i < y) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{z} + \frac{1}{2} \right)$$

Fie $Z_n = \frac{\pi Y_n}{n}$. Atunci $F_{Z_n}(z) = P(Z_n < z) = P(\frac{\pi Y_n}{n} < z) =$
$= P(Y_n < \frac{nz}{\pi}) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{z} + \frac{1}{2}\right)^n$

Dacă $z > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{z} + \frac{1}{2} \right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{z} - \frac{1}{2} \right)^n =$

$$= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{z} - \frac{1}{2} \right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}$$

Dacă $z \leq 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{n\pi}{z} + \frac{1}{2} \right)^n = 0$

Aşadar,

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(z) \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

□

9.3 Legea numerelor mari

Am văzut că nu putem şti înainte de efectuarea experienţei ce valoare va lua variabila aleatoare pe care o studiem. S-ar părea că , întrucât despre fiecare variabilă aleatoare dispunem de informaţii reduse, cu greu am putea determina comportarea mediei aritmetice a unui număr suficient de mare de variabile aleatoare. In realitate, în condiţii puţin restrictive media aritmetică a unui număr suficient de mare de variabile aleatoare îşi pierde caracterul întâmplător. Pentru practică este foarte important să cunoaştem condiţiile în care acţiunea combinată a mai mulţi factori întâmplători conduce la un rezultat care să nu depindă de întâmplare, deci care să ne permită să prevedem mersul fenomenului studiat. Astfel de condiţii se dau în teoremele cunoscute în calculul probabilităţilor sub denumirea comună de **legea numerelor mari**. Termenul de lege a numerelor mari a fost folosit pentru prima oară de Poisson, deşi, cu aproximativ un secol înainte, Jacob Bernoulli a pus în evidenţă acţiunea legii numerelor mari cu referire la repartiţia binomială . In 1867, Cebâşev precizează riguros din punct de vedere matematic legea numerelor mari în condiţii generale.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un spaţiu de probabilitate şi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de v. a. reale definite pe acest spaţiu.

Ne interesează cazul în care există un şir de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât:

1) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - a_n \xrightarrow{P} 0, n \longrightarrow \infty$

sau

2) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - a_n \xrightarrow{a.s.} 0, n \longrightarrow \infty$

De obicei se consideră cazul în care $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} E(X_k)$.

In cazul 1) (resp. 2)) se spune că şirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisface **legea slabă a numerelor mari** (resp. **legea tare a numerelor mari**) sau că $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este **slab stabil** (resp. **tare stabil**).

Teorema 9.2. ***(Cebâşev)*** *Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de v. a. independente două câte două ale căror dispersii verifică $D^2(X_i) < c, \forall i \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{R}$. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| < \varepsilon) = 1$$

sau echivalent

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| \geq \varepsilon) = 0$$

Demonstraţie. Fie $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

$E(Y_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$

$D^2(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) \leq \frac{1}{n^2} \cdot c \cdot n = \frac{c}{n}$

Din inegalitatea lui Cebâşev rezultă $P(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2(Y_n)}{\varepsilon^2} \geq$ $\geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}$ sau $P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}$, deci

$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| < \varepsilon) = 1$, adică

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \xrightarrow{P} 0$ □

Deşi v.a. independente pot lua valori depărtate de mediile lor, media aritmetică a unui număr suficient de mare de astfel de v.a. ia, cu o probabilitate mare, valori apropiate de un număr constant $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

In acest fel, între comportarea fiecărei v.a. şi a mediei lor aritmetice există o mare deosebire: nu este posibil să prevedem ce valoare va lua fiecare dintre v.a., însă cu o probabilitate mare putem prevedea ce valoare va lua media aritmetică a acestor v.a. De aici tragem concluzia că media aritmetică a unui număr suficient de mare de v.a. (cu dispersii mărginite) îşi pierde caracterul de v.a.

Exemplul 9.8. Fie şirurile de variabile aleatoare definite pe acelaşi câmp de probabilitate $(X_n)_{n\geq 1}, (Y_n)_{n\geq 1}, (Z_n)_{n\geq 1}$, unde $X_n \sim \begin{pmatrix} -5n & 0 & 5n \\ \frac{1}{3n^2} & 1 - \frac{2}{3n^2} & \frac{1}{3n^2} \end{pmatrix}$, $Y_n \sim \begin{pmatrix} -n^2 & 0 & n^2 \\ \alpha^{-n} & 1 - 2\alpha^{-n} & \alpha^{-n} \end{pmatrix}$ şi Z_n are densitatea de probabilitate

$$f_n(x) = \begin{cases} \lambda^{-n} e^{-\frac{x}{\lambda^n}}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$\forall n \geq 1, \lambda > 0$. Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Cebîşev celor trei şiruri.

Demonstraţie. Teorema este aplicabilă dacă media este finită şi dispersia este mărginită .

$E(X_n) = (-5n) \cdot \frac{1}{3n^2} + 0 \cdot (1 - \frac{2}{3n^2}) + 5n \cdot \frac{1}{3n^2} = 0, E(X_n^2) = (-5n)^2 \cdot$ $\cdot \frac{1}{3n^2} + 0^2 \cdot (1 - \frac{2}{3n^2}) + (5n)^2 \cdot \frac{1}{3n^2} = \frac{50}{3}, D^2(X_n) = \frac{50}{3} \Longrightarrow$ teorema se aplică

$E(Y_n) = (-n^2) \cdot \alpha^{-n} + 0 \cdot (1 - 2\alpha^{-n}) + n^2 \cdot \alpha^{-n} = 0, E(Y_n^2) =$ $= (-n^2)^2 \cdot \cdot \alpha^{-n} + 0^2 \cdot (1 - 2\alpha^{-n}) + (n^2)^2 \cdot \alpha^{-n} = \frac{2n^4}{\alpha^n}, D^2(Y_n) = \frac{2n^4}{\alpha^n} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} D^2(Y_n) = 0 \Longrightarrow \exists c \in (0, \infty)$ astfel încât $\forall n \geq 1, D^2(Y_n) \leq c \Longrightarrow$ teorema se aplică

$E(Z_n) = \int_0^\infty x\lambda^{-n} e^{-\frac{x}{\lambda^n}} dx = \lambda^n, E(Z_n^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda^{-n} e^{-\frac{x}{\lambda^n}} dx = 2\lambda^{2n} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow D^2(Z_n) = \lambda^{2n} \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} D^2(Z_n) = \begin{cases} 0, & \lambda \in (0,1) \\ 1, & \lambda = 1 \\ \infty, & \lambda > 1 \end{cases}$$

deci teorema se aplică numai dacă $\lambda \in (0,1]$ □

Teorema 9.3. ***(Teorema lui Bernoulli)*** *Fie ν_n numărul de realizări ale unui eveniment A în n experimente independente şi p probabilitatea de realizare a lui A în fiecare experiment. Atunci pentru*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(|\frac{\nu_n}{n} - p| < \varepsilon) = 1$$

sau echivalent

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\nu_n}{n} - p| \geq \varepsilon) = 0$$

Demonstraţie. Fie v.a. X_i ce ia valori numărul de realizări ale evenimentului A în experimentul de rang i:

$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, i = \overline{1,n}$

Atunci $\nu_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Cum X_i^2 are aceeaşi repartiţie ca X_i rezultă $E(X_i) = E(X_i^2) = p$, $D^2(X_i) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}, i = \overline{1,n}$. Conform teoremei lui Cebâşev obţinem $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P(|\frac{\nu_n}{n} - p| < \varepsilon) =$
$= 1$ □

Observaţia 9.1. Rezultatul poate fi formulat şi astfel: şirul de v.a. $(\frac{\nu_n}{n})_n$ converge în probabilitate către p.

In condiţiile teoremei lui Bernoulli, Borel a arătat în 1909 un rezultat mai profund : $\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{a.s.} p$.

Observaţia 9.2. In cazul unei populaţii de volum mare, dacă se efectuează o selecţie de volum n şi se obţin ν_n rezultate favorabile, atunci cu o probabilitate apropiată de unitate, putem afirma că probabilitatea evenimentului cercetat este dată de frecvenţa relativă . Prin urmare, în studiul populaţiilor pentru care nu putem determina apriori probabilitatea de realizare a unui eveniment, probabilitatea teoretică p se poate exprima pe cale experimentală prin frecvenţa relativă $\frac{\nu_n}{n}$ a evenimentului considerat, fapt ce constituie justificarea teoretică a folosirii frecvenţei în loc de probabilitate.

Corolarul 9.1. *Pentru $\forall \varepsilon > 0$ avem $\lim_{n\to\infty} P(|f_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$, unde $f_n = \frac{\nu_n}{n}$, ν_n=de câte ori s-a realizat evenimentul A în n probe independente.*

Exemplul 9.9. Pentru un studiu biologic sunt cercetate 1000 de probe independente, dacă au sau nu o anumită caracteristică biologică . Să se determine o margine inferioară a probabilităţii ca diferenţa, în valoare absolută , dintre frecvenţa relativă şi probabilitatea p de a apărea caracteristica într-o probă , să fie mai mică decât 0,03.

Demonstraţie. Cf. consecinţei teoremei lui Bernoulli $\Longrightarrow p = q = \frac{1}{2}, \varepsilon = = 0,03 \Longrightarrow P(|\frac{x}{n} - p| < 0,03) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1000\cdot 0,03^2} = 0,72$ □

Teorema 9.4. ***(Teorema limită centrală*** *) Fie $(X_n)_n$ un şir de v.a. independente, identic repartizate. Presupunem că $E(X_i) = m, D^2(X_i) = \sigma^2, i = \overline{1,n}$ există şi notăm $Z_n = \frac{Y_n - E(Y_n)}{D^2(Y_n)}$, unde $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Atunci $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$, adică şirul $(Z_n)_n$ converge în repartiţie către o v.a. $Z \sim N(0,1)$.*

Exemplul 9.10. Un modem transmite 1 milion de biţi. Fiecare bit este 0 sau 1 independenţi şi egali probabil. Estimaţi probabilitatea să fie transmişi cel puţin 499000 şi nu mai mult de 501000.

Demonstraţie. Fie X_i v.a. asociată bitului i (0 sau 1). Numărul de 1 milion de biţi este v.a. $Y_n = \sum_{i=1}^{10^6} X_i$.

X_i este o v.a. binomială , deci $E(X_i) = \frac{1}{2} = 0,5, D^2(X_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,25, \forall i = \overline{1,10^6}$

Atunci $E(Y_n) = 10^6 \cdot 0,5 = 500000, D^2(Y_n) = 10^6 \cdot 0,25 = 250000$

Deci $P(499000 < Y_n < 501000) =$
$P\left(\frac{499000-500000}{\sqrt{250000}} < \frac{Y_n - 500000}{\sqrt{250000}} < \frac{501000-500000}{\sqrt{250000}}\right) = P(-2 < \frac{Y_n - 500000}{\sqrt{250000}} < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0,9544$ □

Exemplul 9.11. Câştigul zilnic al unui jucator de cărţi e uniform repartizat în intervalul (-40,50). Care este probabilitatea ca el să câştige 500 de dolari în 60 de zile?

Demonstraţie. Fie X_i v.a. ce reprezintă câştigul zilnic şi $Y_n = \sum_{i=1}^{60} X_i$.

Densitatea de probabilitate a v.a. X_i este

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{90}, & x \in (-40, 50) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Atunci $E(X_i) = \int_{-40}^{50} \frac{x}{90} dx = 5$, $E(X_i^2) = \int_{-40}^{50} \frac{x^2}{90} dx$, $D^2(X_i) = E(X_i^2) - -(E(X_i))^2 = \frac{90^2}{12}$, $E(Y_n) = 60 \cdot 5 = 300, D^2(Y_n) = 60 \cdot \frac{90^2}{12} = 5 \cdot 90^2$

Deci $P(Y_n > 500) = 1 - P(Y_n \le 500) = 1 - P\left(\frac{Y_n - 300}{\sqrt{5\cdot 90^2}} \le \frac{500-300}{90\cdot\sqrt{5}}\right) =$
$= 1 - \Phi\left(\frac{200}{90\cdot\sqrt{5}}\right)$ □

Când v.a. au repartiţii diferite avem o altă variantă a celebrei teoreme limită centrală :

Teorema 9.5. ***(Teorema lui A. M. Leapunov).*** *Fie $(X_n)_n$ un şir de v.a. independente. Presupunem că $E(X_k) = m_k, D^2(X_k) = \sigma_k^2$, $E(|X_k - m_k|^3) = \rho_k^3, 1 \le k \le n$ există şi notăm $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k, \sigma^2(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2, \rho^3(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k^3, Z_n = \dfrac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(n)}$ şi F_n funcţia de repartiţie a v.a. Z_n. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\rho(n)}{\sigma(n)} = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n < x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du$, adică $(Z_n)_n$ converge în repartiţie către v. a. $Z \sim N(0,1)$.*

Exemplul 9.12. Fie $(X_n)_{n\ge 1}$ un şir de variabile aleatoare independente astfel încât $P(X_n = \frac{1}{n^\beta}) = P(X_n = -\frac{1}{n^\beta}) = p$, cu $\frac{1}{3} < \beta \le \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*$ şi $P(X_n = 0) = 1 - 2p$. Să se arate că şirului $(X_n)_{n\ge 1}$ i se poate aplica teorema lui Leapunov.

Demonstraţie. Obţinem $E(X_k) = \frac{1}{k^\beta}\cdot p + (-\frac{1}{k^\beta})\cdot p = 0$

$E(X_k^2) = (\frac{1}{k^\beta})^2 \cdot p + (-\frac{1}{k^\beta})^2\cdot p = \frac{2p}{k^{2\beta}} = \mu_k^2$

$E(|X_k|^3) = \frac{2p}{k^{3\beta}} = \rho_k^3$

Atunci $\sigma^2(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2 = 2p\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{2\beta}}, \rho^3(n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k^3 = 2p\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{3\beta}}$

Cum $\frac{1}{3} < \beta \le \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 < 3\beta \le \frac{3}{2} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{3\beta}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{3\beta}}$ este o serie convergentă (serie Riemann)

$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{2\beta}} > \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ ce tinde la ∞ când $n \longrightarrow \infty$

Condiţia lui Leapunov $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\rho(n)^3}}{\sqrt{\sigma(n)^2}} = 0$ este îndeplinită , deci şirului $(X_n)_{n\ge 1}$ i se poate aplica teorema lui Leapunov □

Un caz particular al teoremei limită centrală este:

Teorema 9.6. ***(Teorema integrală a lui Moivre-Laplace)*** *Fie un şir de experimente independente astfel încât în fiecare experiment probabilitatea de realizare a unui eveniment A este p. Dacă ν_n este numărul de apariţii ale lui A în primele n experimente, atunci*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi(x)$$

sau

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} P\left(x_1 < \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} < x_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Exemplul 9.13. La un restaurant pot servi prânzul 75 de clienţi. Din practică , proprietarul ştie ca $20^0/_0$ dintre clienţii care au rezervat loc nu se mai prezintă .

a) Proprietarul acceptă 90 de rezervări. Care este probabilitatea ca să se prezinte mai mult de 50 de clienţi?

b) Câte rezervări trebuie să accepte proprietarul pentru ca, cu o probabilitate mai mare sau egală cu 0,9, să poată servi toţi clienţii care se prezintă ? $(\Phi(1,281) = 0,9)$

Demonstraţie. a) Fie X v. a. ce reprezintă numărul de clienţi care se prezintă la restaurant ; X este repartizată binomial cu $p = 0,8$.

Avem $n = 90, E(X) = np = 72, D^2(X) = npq = 14,4 \Longrightarrow \sigma = \sqrt{14,4} \simeq 3,795$

Cf. th. Moivre -Laplace obţinem $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - P\left(\frac{X-np}{\sigma} \leq \frac{50-72}{3,795}\right) = 1 - \Phi(-5,797) = 1 - 1 + \Phi(5,975) = \Phi(5,975) \simeq \simeq 1$

b) Vom determina n astfel încât $P(X \leq 75) \geq 0,9$

$P(X \leq 75) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{75-0,8n}{\sqrt{0,16n}}\right) \geq 0,9 = \Phi(1,281) \Longrightarrow \frac{75-0,8n}{\sqrt{0,16n}} \geq \geq 1,281 \Longrightarrow n < 88$ □

9.4 Probleme propuse

1. Limita superioară a probabilităţii ca abaterile, în modul, ale valorilor v. a. X faţă de medie, să fie mai mare decât 3, este 0,96. Să se afle $D^2(X)$.

   R: $D^2(X) = 8,64$

2. Aplicând inegalitatea lui Cebîşev, să se găsească limita inferioară a probabilităţii inegalităţii $\left|\frac{\alpha}{10^5} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}$, unde α reprezintă numărul de apariţii ale feţei 5 în 100000 aruncări de zar.

   R: $\frac{71}{72}$

3. Fie $(X_n)_n$ un şir de v.a. cu densitatea de probabilitate $f_{X_n}(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, n \in \mathbb{N}^\star$. Să se arate că şirul $(X_n)_n$ converge în probabilitate la 0.

4. Să se determine numărul n al probelor independente începând cu care are loc $P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| < 0,1\right) \geq 0,97$, dacă într-o singură probă evenimentul se realizează cu o probabilitate $p = 0,8$.

   R: Cf. teoremei lui Bernoulli $\Longrightarrow n \geq 534$

5. Cu ce probabilitate putem afirma că din 100 de aruncări ale unei monede, stema apare de un număr de ori cuprins între 40 şi 60?

   R: $P(40 \leq X \leq 60) \simeq \Phi(2) - \Phi(-2) = 0,9544$

6. De câte ori trebuie aruncată o monedă pentru ca să putem spune cu o probabilitate de 0,6 că abaterea frecvenţei de apariţie a stemei de la probabilitatea $p = \frac{1}{2}$ să fie mai mică decât 0,01?

   R: $n = 1764$

7. Se aruncă de 360 de ori o pereche de zaruri. Cu ce probabilitate ne putem aştepta să apară 12 puncte (dubla 6) de un număr de ori cuprins între 8 şi 12?

   R: $0,48$

8. Probabilitatea ca o anumită operaţie chirurgicală să fie un succes este 0,8. Dacă operaţia este făcută la 120 de persoane, găsiţi probabilitatea ca mai mult de 90 de operaţii să aibă succces?

   R: $P(X \geq 90) = 0,9147$.

9. Probabilitatea obţinerii unei piese rebut din producţia unei maşini automate este $p = 0,005$. Să se determine probabilitatea ca din 10000 de piese fabricate la această maşină , numărul pieselor rebut să fie:

   a) între 60 şi 70; b) cel mult 70.

   R: a) $P(60 \leq S_n \leq 70) \simeq 0,07$; b) $P(0 \leq S_n \leq 70) \simeq 0,997$

10. Presupunem că 120 de persoane stau la coada unei casierii pentru a-şi primi drepturile băneşti. Sumele care trebuie primite de fiecare sunt v. a. $X_1, \ldots, X_{120}$ independente şi identic repartizate cu media $m = 50$ şi abaterea standard $\sigma = 30$. Casieria dispune de 6500 unităţi monetare. Calculaţi probabilitatea ca toate persoanele să-şi primească drepturile.

    R: $P(S_n \leq 6500) \simeq 0,936$

Capitolul 10

Lanţuri Markov

10.1 Lanţ Markov omogen. Criteriu de ergodicitate. Repartiţie staţionară

Definiţia 10.1. Fie $(X_n)_{n\geq 0}$ un şir de v. a. discrete, luând valori într-o mulţime finită sau numărabilă S, numită **spaţiul stărilor**.

a) Şirul $(X_n)_{n\geq 0}$ formează **un lanţ Markov** dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $i_0, \ldots, i_n \in S$, avem

$$P(X_n = i_n / X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1})$$

b) Un lanţ Markov se numeşte **omogen** dacă probabilităţile

$$P(X_n = j / X_{n-1} = i) = p_{ij}$$

sunt independente de n.

In cazul când lanţul Markov are un număr finit de stări $1, 2, \ldots, N$, el se numeşte **finit**.

Matricea $P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & & \\ p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$ se numeşte **matricea probabilităţilor de trecere (tranziţie)** a lanţului Markov considerat.

Proprietăţi

1. Linia i a matricei P, formată din elementele $p_{i1} p_{i2} \ldots p_{iN}$ conţine probabilităţile de trecere din starea i în stările $1, 2, \ldots, N$.

2. P este o **matrice sochastică** , adică este formată din elemente pozitive, iar suma elementelor fiecărei linii este 1.

3. Notând $p_{ij}(n) = P(X_n = j / X_0 = i)$, probabilitatea de a trece după n paşi din starea i în starea j, se obţine **matricea de trecere după** n **paşi** $P(n) = (p_{ij}(n))_{i,j}$ care verifică relaţia $P(n) = P^n$.

In particular, $P(n) = P(n-1)P$ şi $P(n) = PP(n-1)$, de unde rezultă ecuaţiile directe ale lui Kolmogorov $p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(n-1)p_{kj}, i, j \in S,$

precum şi ecuaţiile inverse $p_{ij}(n) = \sum\limits_k p_{ik}p_{kj}(n-1), i, j \in S$.

4. Repartiţia v. a. $X_n \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots N \\ p_1(n) & p_2(n) & \dots p_N(n) \end{pmatrix}$ este definită de **vectorul de probabilitate** $p(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots, p_N(n))$, unde $p(n) = p(0)P^n$

Definiţia 10.2. Un lanţ Markov cu matricea de trecere P este **ergodic** dacă $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \Pi$, unde Π este o matrice stochastică , având toate liniile egale cu un anumit vector de probabilitate $\sigma = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n)$ numit **repartiţia staţionară** a procesului.

Criteriu de ergodicitate Dacă $\exists n > 0$ astfel încât matricea P^n să aibă toate elementele strict pozitive, atunci lanţul este ergodic.

Găsirea repartiţiei staţionare Fie P matricea de trecere a unui lanţ Markov ergodic. Atunci distribuţia limită este unicul vector de probabilitate σ satisfăcând ecuaţia vectorială $\sigma P = \sigma$.

Observaţia 10.1. Dacă σ este repartiţia staţionară a unui lanţ Markov ergodic, atunci şirul distribuţiilor $p(n)$ la momentul n satisface relaţia

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \sigma$$

Exemplul 10.1. Un meteorolog a dezvoltat următorul model pentru prezicerea vremii. Dacă plouă azi, proabilitatea este 0,6 că va ploua şi mâine şi 0,4 că nu va mai ploua mâine. Dacă nu plouă azi, probabilitatea este 0,2 că va ploua şi mâine şi 0,8 că nu va ploua mâine.

a) Găsiţi matricea de trecere P pentru acest lanţ Markov şi matricea de trecere după 2 paşi.

b) Dacă plouă azi, care este probabilitatea că va ploua şi poimâine?

c) Dacă nu plouă azi, care este probabilitatea ca să plouă şi poimâine?

Demonstraţie. a) Fie starea 1: ”plouă ” şi starea 2 ”nu plouă ”

$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

$P^2 = \begin{pmatrix} 0,44 & 0,56 \\ 0,28 & 0,72 \end{pmatrix}$

b) $p_{11}(2) = 0,44$

c) $p_{21}(2) = 0,28$ □

Exemplul 10.2. Fie un lanţ Markov a cărui matrice de trecere este $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze matricea probabilităţilor de trecere după 2, respectiv 3 paşi.

b) Lanţul este ergodic?

c) Dacă este ergodic, atunci să se determine probabilităţile limită .

Demonstraţie. a) $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{36} & \frac{7}{24} & \frac{37}{72} \\ \frac{4}{27} & \frac{7}{18} & \frac{25}{54} \end{pmatrix}$

b) Deoarece există un astfel de număr natural $n = 3$, pentru care toate elementele matricei P^3 sunt strict pozitive, atunci, cf. criteriului de ergodicitate, lanţul este ergodic.

c) Deoarece lanţul este ergodic, atunci există unicul vector (p_1, p_2, p_3) pentru care $(p_1, p_2, p_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = (p_1, p_2, p_3)$

De aici obţinem următorul sistem de ecuaţii :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p_3 = p_1 \\ p_1 + \frac{1}{2}p_2 = p_2 \\ \frac{1}{2}p_2 + \frac{2}{3}p_3 = p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

a cărui soluţie este vectorul $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

Prin urmare, dacă $n \longrightarrow \infty$, P^n tinde către matricea $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ □

Exemplul 10.3. Presupunem că înainte de a fi făcută o evidenţă a legăturii dintre fumat şi bolile respiratorii, $40^0/_0$ din adulţii de sex masculin erau fumători şi $60^0/_0$ erau nefumători. La un an dupaă această evidenţă a fost făcută public, $30^0/_0$ dintre fumători s-au oprit din fumat, în timp ce $10^0/_0$ din nefumători au început să fumeze.

a) Scrieţi matricea de trecere a lanţului Markov cu 2 stări;

b) Reprezentaţi distribuţia iniţială a fumătorilor şi nefumătorilor ca un vector probabilitate;

c) Găsiţi vectorul probabilitate ce descrie distribuţia fumătorilor şi nefumătorilor după un an;

d) Găsiţi vectorul probabilitate ce descrie distribuţia fumătorilor şi nefumătorilor după 2 ani.

Demonstraţie. a) Stările sunt "fumător" (starea 1) şi "nefumător" (starea 2) şi matricea de trecere este $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

b) $(0,4; 0,6)$

c) $(0,4; 0,6) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,34; 0,66)$

d)$P^2 = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \\ 0,16 & 0,84 \end{pmatrix}$

$$(0,4;0,6)P^2 = (0,4;0,6)\begin{pmatrix}0,52 & 0,48\\ 0,16 & 0,84\end{pmatrix} = (0,304;0,696) \qquad \square$$

Exemplul 10.4. In modelul stochastic de învăţare bazat pe teoria selectării stimulilor propus de W.K. Estes în 1950, se consideră un lanţ Markov cu 2 stări. Astfel starea 1 semnifică faptul că subiectul a învăţat, de exemplu, să primească o alună sau să evite un şoc electric. Starea 2 semnifică faptul că subiectul nu a învăţat încă . Se presupune că de îndată ce subiectul a învăţat el nu mai uită , iar dacă nu a învăţat încă , el va reuşi cu probabilitatea α să înveţe după fiecare încercare. Să se determine matricea de trecere şi să se calculeze $p_{21}(n)$.

Demonstraţie. $P = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1-\alpha\end{pmatrix}$

Pentru a calcula $p_{21}(n)$, adică probabilitatea de trecere din starea 2 în starea 1 după n paşi, trebuie să determinăm matricea P^n. Calculăm valorile proprii : $\det(P - \lambda I_2) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1-\alpha$

Determinăm vectorii proprii corespunzători din sistemele :
$Pu = \lambda_1 u, Pv = \lambda_2 v$ şi rezultă $u = (1,1)^t, v = (0,1)^t$

Fie $T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-\alpha\end{pmatrix}$

Atunci $T^{-1}PT = D \Longrightarrow P = TDT^{-1} \Longrightarrow P^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot$
$\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-\alpha)^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1-(1-\alpha)^n & (1-\alpha)^n\end{pmatrix} \Longrightarrow p_{21}(n) =$
$= 1-(1-\alpha)^n$ $\square$

Exemplul 10.5. Matricea probabilităţilor de trecere ale unui lanţ Markov omogen este $P = \begin{pmatrix}0,1 & 0,5 & 0,4\\ 0,6 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}$, iar $X_0 \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0,7 & 0,2 & 0,1\end{pmatrix}$. Calculaţi repartiţia variabilei X_1 şi probabilitatea ca la momentele $n = 0,1,2$ lanţul să se găsească în stările 1,2,2 respectiv.

Demonstraţie. $p(1) = p(0)P = (0,7,;0,2;0,1)\begin{pmatrix}0,1 & 0,5 & 0,4\\ 0,6 & 0,2 & 0,2\\ 0,3 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix} =$
$= (0,22;0,43;0,35)$

Deci $X_1 \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0,22 & 0,43 & 0,35\end{pmatrix}$

Aplicând problema precedentă obţinem $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 2) =$
$= P(X_0 = 1)P(X_1 = 2/X_0 = 1)P(X_2 = 2/X_1 = 2, X_0 = 1) =$
$= P(X_0 = 1)p_{12}p_{22} = 0,7\cdot 0,5\cdot 0,2 = 0,07$ $\square$

Exemplul 10.6. Un sistem de telecomunicaţii transmite cifrele 0 şi 1. Fiecare cifră trece prin mai multe stadii de prelucrare, în fiecare stadiu existând probabilitatea p ca să fie transmisă corect şi probabilitatea $q = 1 - p$ ca ea să fie transmisă greşit. Fie X_k cifra care intră în stadiul k de prelucrare.

a) Scrieţi matricea P a lanţului Markov omogen cu stările $\{0, 1\}$ astfel obţinut şi calculaţi $P^n, n \in \mathbb{N}^*$, precum şi $P(X_2 = 1/X_0 = 1)$, $P(X_7 = 0/X_3 = 1)$

b) Determinaţi repartiţia staţionară

c) Dacă $X_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, calculaţi repartiţia v. a. X_n şi $P(X_0 = 0/X_n = 1)$

Demonstraţie. a) Din ipoteză $P(X_{n+1} = 1/X_n = 1) =$
$= P(X_{n+1} = 0/X_n = 0) = p$

$P(X_{n+1} = 1/X_n = 0) = P(X_{n+1} = 0/X_n = 1) = q$, deci

$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$

Determinăm valorile proprii ale lui $P : \det(P - \lambda I_2) = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \lambda_1 = p - q, \lambda_2 = 1$

Determinăm vectorii proprii din sistemele $Pu = \lambda_1 u$ şi $Pv = \lambda_2 v \Longrightarrow$
$u = (1, -1)^t, v = (1, 1)^t$

Fie $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} p - q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obţinem $T^{-1}PT = D \Longrightarrow P = TDT^{-1} \Longrightarrow P^n = TD^nT^{-1} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (p-q)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{pmatrix}$

Atunci $P(X_2 = 1/X_0 = 1) = p_{11}(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^2$

$P(X_7 = 0/X_3 = 1) = p_{10}(4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^4$

b) Avem $\lim\limits_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, deci repartiţia staţionară este $\sigma = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c) Notând $p(n) = (P(X_n = 0), P(X_n = 1))$ obţinem $p(n) = p(0)P^n =$
$= (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{pmatrix} =$
$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(p-q)^n, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(p-q)^n)$

Atunci $P(X_0 = 0/X_n = 1) = \frac{P(X_n=1/X_0=0)P(X_0=0)}{P(X_n=1)} = \frac{[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n]\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(p-q)^n} =$
$= \frac{1-(p-q)^n}{3+(p-q)^n}$ □

10.2 Probleme propuse

1. Să se calculeze matricea probabilităţilor de trecere după 2 paşi, respectiv 3 paşi pentru lanţul Markov a cărui matrice de trecere este

$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

R: $P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2. Fie un lanţ Markov dat de matricea de trecere $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   Să se calculeze probabilităţile staţionare stabilind mai întâi că lanţul este ergodic.

   R: $(\frac{4}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11})$

3. Vremea în ţara vrăjitorului din Oz este un lanţ Markov omogen cu 3 stări :s_1 : "ploaie", s_2 : "vreme bună ", s_3 : "zăpadă : şi matricea probabilităţilor de trecere $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Să se calculeze :

   a) probabilitatea ca după 3 zile de la o zi cu vreme bună să avem o zi cu zăpadă ;

   b) repartiţia staţionară .

   R: a) $\frac{13}{32}$, b) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

4. Calculaţi repartiţia staţionară a unui lanţ Markov cu matricea de trecere $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   R: $\frac{1}{37}(8, 9, 20)$

5. Două firme de distribuit pizza, Pizza Hut (H) şi Cuptorul cu lemne (C), monopolizează piaţa în Bucureşti. Studiile de piaţă indică $60^0/_0$ şanse ca un client de la Pizza Hut să se ducă la Cuptorul cu lemne, în timp ce sunt 25 $^0/_0$ şanse ca un client de la Cuptorul cu lemne să treacă la Pizza Hut. Presupunem că un client obişnuit comandă pizza zilnic şi că luni pizza vine de la Pizza Hut. Care este probabilitatea ca miercuri pizza să vină de la Cuptorul cu lemne?

   R: $p_{12}(2) = 0,69$

6. Intr-un anumit model psihologic comportamentul unui copil la şcoală într-o anumită zi e clasificat "bun" sau "rău". Dacă un anumit copil e bun azi, există o şansă de 0,9 că va fi bun şi mâine , în timp ce dacă acest copil e rău azi, există o şansă de 0,3 ca el să fie rău şi mâine.

Dat fiind că acest copil e bun azi, găsiţi probabilitatea ca el să fie bun încă 4 zile.

R: $p_{11}(4) = 0,875$

7. Preşedintele Statelor Unite spune persoanei A intenţia sa de a candida la următoarele alegeri. Apoi A relatează ştirile lui B, care le spune lui C şi aşa mai departe, întotdeauna unei noi persoane. Presupunem că este o probabilitate egală cu a ca o persoană să schimbe răspunsul din da în nu în momentul în care transmite mesajul unei persoane şi probabilitatea b ca acesta să fie schimbat din nu în da. Alegem ca stări mesajul da sau nu. Scrieţi matricea probablităţilor de trecere şi aflaţi probabilitatea ca dacă preşedintele îşi exprimă intenţia de a candida, persoana B sa afle că nu va candida.

   R: $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, $p_{12}(2) = 2a - a^2 - ab$

8. In Evul Mediu, universităţile Harvard, Dartmouth şi Yale admiteau numai studenţi bărbaţi. Presupunem că în acea perioadă $80^0/_0$ dintre fiii celor de la Harvard mergeau tot la Harvard şi restul la Yale, $40^0/_0$ dintre fiii celor de la Yale mergeau la Yale şi restul se împărţeau în mod egal între Harvard şi Dartmouth şi $70^0/_0$ dintre fiii celor de la Dartmouth mergeau tot la Dartmouth, $20^0/_0$ la Harvard şi $10^0/_0$ la Yale. Scrieţi matricea probabilităţilor de trecere şi calculaţi probabilitatea ca dacă bunicul a fosta la Yale, nepotul sa urmeze cursurile Universităţii Harvard.

   R: $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$, $p_{21}(2) = 0,42$

9. Un lanţ Markov cu 2 stări poate fi folosit să modeleze o varietate largă de sisteme ce alterneazaă între stările ON şi OFF. După fiecare unitate de timp în starea OFF, sistemul trece pe ON cu probabilitatea p. După fiecare unitate de timp în starea ON, sistemul trece în OFF cu probabilitatea q. Folosind 0 şi 1 să notăm stările OFF şi ON, care este matricea probabilităţilor de trecere? Stiind că sistemul este în starea OFF la momentul 0, care este probabilitatea ca sistemul să fie în starea OFF la momentul $n = 33$?

   R: $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$, $p_{00}(33) = \frac{q+[1-(p+q)]^{33}p}{p+q}$

10. Fie lanţul Markov cu 2 stări E_1 şi E_2 cu probabilităţile de trecere $p_{11} = p_{22} = p, p_{12} = p_{21} = q (0 < p < 1, p+q = 1)$ şi repartiţia iniţială $P(X_0 = 1) = \alpha, P(X_0 = 2) = \beta (\alpha + \beta = 1)$. Se cer:

    a) să se determine probabilităţile de trecere după n paşi $(p_{jk}(n))$;

b) să se determine probabilităţile limită ;

c) să se determine probabilitatea $P(X_0 = 1/X_n = 1)$.

R: a) $P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{(p-q)^n}{2} & \frac{1}{2} - \frac{(p-q)^n}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{(p-q)^n}{2} & \frac{1}{2} + \frac{(p-q)^n}{2} \end{pmatrix}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha \cdot p_{11}(n) + \beta \cdot p_{21}(n) = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha \cdot p_{21}(n) + \beta \cdot p_{22}(n) = \dfrac{1}{2}$

Lanţul este ergodic şi distribuţia lui limită (p_1, p_2) se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} p_1 = p_1 \cdot p + p_2 \cdot q \\ p_2 = p_1 \cdot q + p_2 \cdot p \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

c) $P(X_0 = 1/X_n = 1) = \frac{P(X_0=1)P(X_n=1/X_0=1)}{P(X_n=1)} = \frac{\alpha \cdot p_{11}(n)}{p_1(n)} = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1+(\alpha-\beta)(p-q)^n}$

Capitolul 11

Statistică matematică

Statistica matematică se ocupă cu gruparea, analiza şi interpretarea datelor referitoare la anumite fenomene şi unele previziuni privind producerea lor în viitor. Spre deosebire de teoria probabilităţilor al cărei demers este deductiv, în care se obţin concluzii dintr-o repartiţie, statistica matematică urmează calea inductivă care face trecerea în sens invers, de la un rezultat la o repartiţie. Statistică matematică este solicitată de fizică , biologie, medicină , arheologie. Inceputurile statisticii matematice sunt prefigurate în special în lucrările lui Laplace. Construirea ei, spre sfârşitul secolului XIX, a fost pregătită de teoria probabilităţilor, statistica demografică , teoria erorilor, unele contribuţii ale psihologiei şi sociologiei. Crearea ei este legată de şcoala anlo-saxonă de statistică matematică , de numele lui Galton (1829-1911) şi Pearson (1857-1936).

11.1 Teoria selecţiei

Orice mulţime de obiecte care au cel puţin o proprietate comună şi este supusă unei prelucrări statistice se numeşte **populaţie statistică** . Numărul elementelor mulţimii, care se numeşte **volumul populaţiei**, poate fi finit sau infinit. Proprietăţile (trăsăturile) comune ale elementelor unei populaţii statistice se numesc **caracteristici**. Dacă o anumită caracteristică a elementelor se schimbă cantitativ se numeşte **variabilă** . Caracteristicile variabile pot fi discrete sau continue.

Fie X o v. a. reprezentând o anumită caracteristică numerică (durata de viaţă , venitul, număr de defecţiuni etc.) a unei populaţii statistice. Rezultatele numerice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obţinute prin n măsurători (interogări, observări etc.) formează o **selecţie empirică de volum** n a v. a. X. Elementele mulţimii $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ numite **variabile de selecţie** au o dublă interpretare:

1) considerate după efectuarea selecţiei, variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reprezintă valori concrete pe care le folosim ca informaţii asupra v. a. X şi le notăm $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$;

2) considerate înainte de efectuarea selecţiei, variabilele $X_1, \ldots, X_n$ pot fi privite ca v. a. independente şi identic repartizate din punct de vedere probabilistic cu v. a. X

Se consideră că fiecare v. a. $X_j, j = \overline{1,n}$ se realizează cu aceeaşi probabilitate egală cu $\frac{1}{n}$. Pe baza acestui fapt se construieşte v. a. de selecţie (variabila empirică).

Variabila aleatoare de selecţie are următoarea repartiţie
$X^* \sim \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, în care $P(X^* = x_k) = \frac{1}{n}, \forall k = \overline{1,n}$

Presupunând că după efectuarea a n observaţii am obţinut : de n_1 ori a apărut $X_1, \ldots$, de n_k ori a apărut X_k, unde $n_1 + \ldots + n_k = n$, atunci $X^* \sim \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \frac{n_1}{n} & \ldots & \frac{n_k}{n} \end{pmatrix}$

Funcţia empirică de repartiţie se va nota cu F^* sau F_n^*.

Media de selecţie este $\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$

Dispersia de selecţie este $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2$

Exemplul 11.1. Cercetându-se numărul de accidente dintr-o unitate economică au fost obţinute următoarele date în urma efectuării unei selecţii de volum $n = 1000$ muncitori.

Nr. accidente	0	1	2	3	4
Nr. muncitori afectaţi	500	200	150	80	70

Stabiliţi:

a) media şi dispersia de selecţie;

b) funcţia empirică de repartiţie şi valorile ei în punctele $x = 4$ şi $x = 6$.

Demonstraţie. a) $\overline{x} = \frac{1}{1000}(0 \cdot 500 + 1 \cdot 200 + 2 \cdot 150 + 3 \cdot 80 + 4 \cdot 70) = 1,02$

$S^2 = \frac{1}{1000}[500 \cdot (0 - 1,02)^2 + 200 \cdot (1 - 1,02)^2 + 150 \cdot (2 - 1,02)^2 + 80 \cdot$
$\cdot (3 - 1,02)^2 + 70 \cdot (4 - 1,02)^2] = 1,589$

b) $X^* \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{500}{1000} & \frac{200}{1000} & \frac{150}{1000} & \frac{80}{1000} & \frac{70}{1000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,15 & 0,08 & 0,07 \end{pmatrix}$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,2, & 0 < x \leq 1 \\ 0,7, & 1 < x \leq 2 \\ 0,85, & 2 < x \leq 3 \\ 0,93, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$F^*(4) = 0,93, F^*(6) = 1$ □

Teorema 11.1. *Dacă* $E(X) = m$ *şi* $D^2(X) = \sigma^2$, *atunci* $E(\overline{X}) = m$ *şi* $D^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Demonstraţie. $E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) =$
$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m$

$$D^2(\overline{X}) = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \square$$

11.2 Selecţii dintr-o populaţie normală

11.2.1 Repartiţia mediei de selecţie dintr-o populaţie normală

Teorema 11.2. *Dacă* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *este o selecţie de volum* n *dintr-o populaţie normală* $N(m, \sigma)$*, atunci media de selecţie* $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ *urmează o repartiţie normală* $N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$*.*

Corolarul 11.1. *In condiţiile anterioare* $\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ *are o repartiţie normală standard* $N(0, 1)$*.*

Exemplul 11.2. Durata de execuţie a unei lucrări într-o bandă de montaj este repartizată normal cu media m şi abaterea $\sigma = 4$ minute. S-a cronometrat durata de efectuare a operaţiei la un număr de $n = 9$ muncitori. Determinaţi probabilitatea ca media duratei determinate pe baza celor n observaţii să nu difere de m în valoare absolută cu mai mult de 3 minute la un muncitor. ($\Phi(2, 25) = 0, 9878$)

Demonstraţie. $P(|\overline{X} - m| < 3) = P(-3 < \overline{X} - m < 3) =$
$= P(-\frac{3\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{3\sqrt{n}}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{3\sqrt{n}}{\sigma}) - 1 = 2\Phi(\frac{3\cdot 3}{4}) - 1 = 2\Phi(2, 25)-$
$-1 = 2 \cdot 0, 9878 - 1 = 0, 975$ $\square$

Exemplul 11.3. Presupunând că diametrul unor piese fabricate la un strung este repartizat normal $N(m, 2)$, care trebuie să fie volumul n al selecţiei astfel încât $P(|\overline{X} - m| < 1) = 0, 99$? ($\Phi(2, 58) = 0, 995$)

Demonstraţie. $0, 99 = P(|\overline{X} - m| < 1) = P(-1 < \overline{X} - m < 1) =$
$= P(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}) - 1 = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) - 1 \Longrightarrow 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) =$
$= 1, 99 \Longrightarrow \Phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) = 0, 995 \Longrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} = 2, 58 \Longrightarrow n \simeq 27$ $\square$

Exemplul 11.4. Dintr-o populaţie normală cu media $m = 12$, probabilitatea ca media de selecţie corespunzătoare unei selecţii de volum $n = 25$ să nu depăşească 16 (în modul) este de 0,24. Care este probabilitatea ca o singură observaţie din această selecţie să aibă o valoare mai mare decât 16? ($\Phi(0, 31) = 1, 24$,$\Phi(0, 02) = 0, 5$)

Demonstraţie. $0,24 = P(|\overline{X} - m| < 16) = P(-16 < \overline{X} - m < 16) =$
$= P(-16 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 16 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma}) = P(-16 \cdot \frac{5}{\sigma} < \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 16 \cdot \frac{5}{\sigma}) =$
$= 2\Phi(\frac{80}{\sigma}) - 1 \Longrightarrow 2\Phi(\frac{80}{\sigma}) = 1,24 \Longrightarrow \frac{80}{\sigma} = 0,31 \Longrightarrow \sigma = 258$
$P(X_k > 16) = 1 - P(X_k < 16) = 1 - P(\frac{X_k - m}{\sigma} \leq \frac{16-12}{258}) =$
$= 1 - P(\frac{X_k-m}{\sigma} \leq 0,02) = 1 - \Phi(0,02) = 1 - 0,5 = 0,5$ □

Teorema 11.3. *Dacă* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *reprezintă o selecţie de volum* n *dintr-o populaţie normală* $N(0,1)$*, atunci v. a.* $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$ *urmează o repartiţie* χ^2 *cu* n *grade de libertate.*

11.2.2 Repartiţia dispersiei de selecţie pentru selecţii dintr-o populaţie normală

Fiind dată o populaţie statistică şi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecţie de volum n se pot defini:

a) media de selecţie $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$

b) dispersia de selecţie cu ajutorul căreia putem evalua dispersia populaţiei:

1) dacă media m a populaţiei generale este cunoscută atunci dispersia de selecţie este dată de $s_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2$

2) dacă media m a populaţiei generale nu este cunoscută , dispersia de selecţie este $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$

3) în cazul selecţiilor de volum mic ($n < 30$) este indicat să fie folosită dispersia modificată de selecţie $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$, $s^2 = \frac{n}{n-1}S^2$

Teorema 11.4. *Dacă* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *este o selecţie dintr-o populaţie normală* $N(m, \sigma)$*, atunci v. a.* $\frac{n \cdot s_0^2}{\sigma^2}$ *are o repartiţie* χ^2 *cu* n *grade de libertate.*

Teorema 11.5. *Dacă* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *este o selecţie dintr-o populaţie normală* $N(m, \sigma)$*, atunci*

(1) statisticile $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ *şi* $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$ *sunt independente;*

(2) statistica $V = \frac{n \cdot S^2}{\sigma^2}$ *are o repartiţie* χ^2 *cu* $n-1$ *grade de libertate.*

Teorema 11.6. *Dacă* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *este o selecţie dintr-o populaţie normală* $N(m, \sigma)$*, atunci v. a.* $t = \frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ *are o repartiţie Student cu* $n-1$ *grade de libertate*

11.3 Elemente de teoria estimaţiei

11.3.1 Estimator nedeplasat, consistent, eficient

Operaţia prin care determinăm valorile parametrilor repartiţiilor se numeşte **estimare**.

Considerăm o v. a. X dintr-o populaţie Γ având repartiţia $f(x,\theta)$. Fie $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ o selecţie de volum n din Γ.

Definiţia 11.1. Un **estimator** $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ pentru θ este o statistică (adică o variabilă aleatoare de variabile aleatoare) care ia valori numerice (adică valoarea lui $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ îl aproximează pe θ).

Definiţia 11.2. $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se numeşte **estimator consistent** pentru θ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \theta| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$, adică $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ converge în probabilitate către θ.

Definiţia 11.3. $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se numeşte **estimator nedeplasat** pentru θ dacă $E(\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \theta$.

Definiţia 11.4. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} E(\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} D^2(\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 0$$

spunem că $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este un **estimator corect** al parametrului θ.

Definiţia 11.5. Dacă

$$E(\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} D^2(\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 0$$

spunem că $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este un **estimator absolut corect** al parametrului θ.

Teorema 11.7. *Dacă $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este un estimator pentru θ astfel încât $E(\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \theta$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} D^2(\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 0$, atunci $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este un estimator consistent pentru σ.*

Teorema 11.8. ***(Rao-Cramer)*** *Dacă $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este un estimator nedeplasat pentru θ, atunci $D^2(\theta^*) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$, unde $I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right) = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$*

Definiţia 11.6. Dacă $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este un estimator nedeplasat astfel încât $D^2(\theta^*) = \frac{1}{nI(\theta)}$, atunci el se numeşte **eficient**.

Corolarul 11.2. *Orice estimator eficient este consistent.*

Exemplul 11.5. Să se arate că media de selecţie $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ este un estimator nedeplasat şi consistent pentru media m a oricărei populaţii.

Demonstraţie. $E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \dfrac{1}{n}\cdot nm = m \Longrightarrow \overline{X}$ e nedeplasat

$D^2(\overline{X}) = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$ rezultă cf. Teoremei 11.7 că $\overline{X}$ este consistent □

Exemplul 11.6. Să se arate că media de selecţie este un estimator eficient pentru parametrul λ al repartiţiei exponenţiale cu densitatea $f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}$, unde $\lambda > 0, x > 0$.

Demonstraţie. $I(\lambda) = -E(\frac{\partial^2 \ln f(x,\lambda)}{\partial\lambda^2}) = -E(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(-\ln\lambda - \frac{x}{\lambda})) = -E(\frac{\partial}{\partial\lambda}(-\frac{1}{\lambda} + \frac{x}{\lambda^2})) = -E(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2x}{\lambda^3}) = \frac{-\lambda+2E(x)}{\lambda^3} = \frac{\lambda}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda^2}$

$D^2(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\cdot\lambda^2 n = \frac{\lambda^2}{n} = \frac{1}{n\cdot\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{nI(\lambda)}$, deoarece $D^2(X_k) = \lambda^2 \Longrightarrow \overline{X}$ este estimator eficient □

11.3.2 Metoda verosimilităţii maxime

Metoda verosimilităţii maxime este una dintre cele mai vechi metode de estimare. Ea a fost folosită de Gauss când a dezvoltat metoda celor mai mici pătrate şi reintrodusă în 1912 de Fischer.

Se consideră o selecţie $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de volum n dintr-o populaţie în care caracteristica sub cercetare X este o v.a. având densitatea de probabilitate $f(x,\theta)$ presupusă cunoscută , iar parametrul θ este necunoscut şi poate lua valori într-o mulţime $\Theta \subset \mathbb{R}^k$.

Definiţia 11.7. Vom numi **funcţie de verosimilitate** corespunzătoare valorilor $x_1,\ldots,x_n$, o funcţie $L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$, considerată ca funcţie de θ, definită prin $L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$, unde $f(x_i;\theta)$ este fie densitatea de probabilitate a v. a. X, fie repartiţia sa , adică $f(x;\theta) = P(X = x)$, dacă X este discretă .

Definiţia 11.8. **Estimatorul de verosimilitate maximă** pentru θ este acea valoare $\theta^* = \theta^*(x_1,\ldots,x_n)$ cu proprietatea că $L(x_1,\ldots,x_n;\theta^*) = \max_{\theta\in\Theta} L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$.

Intrucât funcţiile L şi $\ln L$ au aceleaşi puncte de maxim rezultă că , dacă $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_k)$, atunci $\theta^*(x_1,\ldots,x_n) = (\theta_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\theta_k(x_1,\ldots,x_n))$ trebuie să verifice sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta_1,\ldots,\theta_k) = 0, j = \overline{1,k}$$

Observaţia 11.1. Orice estimator eficient al parametrului θ este un estimator de verosimilitate maximă .

Exemplul 11.7. Să se estimeze prin metoda verosimilităţii maxime parametrul θ al repartiţiei $f(x,\theta) = \frac{x}{\theta} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}, x > 0, \theta > 0$.

Demonstraţie. $L(x_1, x_2, \dots x_n; \theta) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\theta^n} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \Longrightarrow \ln L = \ln \prod\limits_{i=1}^{n} x_i -$
$-n \ln \theta - \frac{1}{2\theta}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \Longrightarrow \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{1}{2\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Longrightarrow \theta^* = \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$

Verificăm $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}(\theta^*) < 0$.

Cum $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, atunci $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}(\theta^*) = -\frac{4n^3}{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^2} < 0$ □

11.4 Intervale de încredere

Fie dată densitatea de probabilitate $f(x,\theta)$. In urma efectuării unei selecţii de volum n, $\{x_1, \dots, x_n\}$, putem determina două statistici $\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ şi $\overline{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ astfel încât $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ să conţină valoarea adevărată a parametrului θ cu probabilitatea dată $p = 1 - \alpha$, adică $P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}) = p$, unde p nu depinde de θ.

Intervalul $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ care acoperă pe θ cu probabilitatea dată $1 - \alpha$ se numeşte **interval de încredere**. Cu cât intervalul de încredere este mai mic şi probabilitatea $1-\alpha$ este mai apropiată de 1, cu atât avem o indicaţie mai precisă despre θ. Intervalul încredere $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ este **bilateral**. Intervalul de încredere poate fi şi **unilateral superior** sau **inferior**: $P(\theta < \overline{\theta}) = 1-\alpha$ sau $P(\underline{\theta} < \theta) = 1 - \alpha$.

Fie $F(x)$ o funcţie de repartiţie şi $\alpha \in (0,1)$. Se numeşte **α-cuantilă** a repartiţiei F un număr $c \in \mathbb{R}$ pentru care $F(c) = \alpha$.

In cele ce urmează α-cuantilele repartiţiilor $N(0,1), \chi^2(n), T(n)$ vor fi notate respectiv $z_\alpha, \chi^2_\alpha(n), t_\alpha(n)$.

11.4.1 Intervale de încredere pentru media şi dispersia repartiţiei normale

1. σ cunoscut, m necunoscut

$$m \in \left(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

2. m cunoscut, σ necunoscut

$$\sigma^2 \in \left(\frac{n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \cdot s_0^2, \frac{n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \cdot s_0^2 \right)$$

3. m şi σ necunoscuţi

$$\sigma^2 \in \left(\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \cdot s^2, \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \cdot s^2 \right)$$

$$m \in \left(\overline{x} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{x} + \sqrt{\frac{s^2}{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$$

Exemplul 11.8. Rectorul Universităţii Politehnice Bucureşti vrea să ştie care este media vârstei studenţilor. Din anii trecuţi se cunoaşte că abaterea standard este de 2 ani. Un sondaj asupra a 50 de studenţi arată că media este de 23,2 ani. Cu un nivel de semnificaţie de 0,05, să se determine un interval de încredere pentru medie. Se presupune că populaţia are caracteristica normală .

Demonstraţie. Se ştiu $\overline{X} = 23,2, \sigma = 2, n = 50, \alpha = 0,05$
$m \in (23,2 - 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}}, 23,2 + 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}}) = (22,65; 23,75)$ □

Exemplul 11.9. Pentru a testa viteza cu care este absorbit pe piaţă un roman de Octavian Paler, o editură particulară pune în vânzare, prin 9 librării, loturi identice. Cantităţile se epuizează după un număr de zile valabil după cum urmează :

Magazine i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nr. de zile x_i	51	54	49	50	50	48	49	50	49

a) Să se estimeze printr-un interval de încredere $95^0/_0$ viteza medie cu care este absorbit pe piaţă romanul (nr. mediu de zile m)

b) Să se determine un interval de încredere $90^0/_0$ pentru dispersia σ^2 a numărului de zile X în care se epuizează romanul. ($t_{0,975}(8) =$
$= 2,33, \chi^2_{0,95}(8) = 15,5, \chi^2_{0,05}(8) = 2,73$)

Demonstraţie. a) σ şi m sunt necunoscuţi, deci
$m \in \left(\overline{x} - \sqrt{\frac{s^2}{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{x} + \sqrt{\frac{s^2}{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$
$\overline{X} = \frac{1}{9}(51 + 54 + \ldots + 49) = 50$
$s^2 = \frac{1}{8}[(51-50)^2 + (54-50)^2 + (49-50)^2 + \ldots + (49-50)^2] = 3$
$m \in \left(50 - 2,33 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}}, 50 + 2,33 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} \right) = (48,674; 51,236)$
b) $\sigma^2 \in \left(\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \cdot s^2, \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \cdot s^2 \right) = \left(\frac{8}{15,5} \cdot 3, \frac{8}{2,73} \cdot 3 \right) =$
$= (1,548; 8,791)$ □

11.5 Verificarea ipotezelor statistice parametrice

In statistica matematică prin ipoteză înţelegem o presupunere ce se poate face asupra unuia sau mai multor parametri ce caracterizează anumite repartiţii sau asupra tipului legilor de repartiţie ce caracterizează anumite populaţii.

Ipoteza statistică poate fi parametrică atunci când se referă la parametrul unei funcţii de repartiţie cunoscute şi neparametrică atunci când se referă la forma funcţiei de repartiţie necunoscută .

Considerăm o v.a. a cărei densitate de probabilitate $f(x, \theta)$ depinde de un singur parametru θ. Ne propunem să verificăm ipoteza că parametrul θ are valoarea θ_0. Notăm această ipoteză $H_0 : \theta = \theta_0$ şi o vom numi **ipoteza nulă** faţă de ipoteza $H_1 : \theta = \theta_1$ cu care este confruntată şi este numită **ipoteză alternativă** .

Verificarea ipotezei nule H_0 se face pe baza unei selecţii $\{x_1, \ldots, x_n\}$ cu ajutorul valorii observate a unei statistici. Metoda aleasă pentru verificarea unei ipoteze statistice se numeşte **test** sau **criteriu statistic**.

Fie θ un parametru asociat v. a. X şi ipoteza nulă $H_0 : \theta = \theta_0$ care trebuie testată (verificată) astfel încât probabilitatea **unei erori de prima speţă** (respingerea lui H_0 atunci când ea este adevărată) să fie egală cu α. Numărul $\alpha \in (0, 1)$ se numeşte **nivelul de semnificaţie** al testului. Etapele aplicării testului sunt următoarele:

a) Alegerea **ipotezei alternative** H_1 care poate fi **unilaterală** $H_1 : \theta < \theta_0, \theta > \theta_0$ sau **bilaterală** $H_1 : \theta \neq \theta_0$;

b) Alegerea unei statistici $T = T(x_1, \ldots, x_n)$ astfel încât, în ipoteza H_0, repartiţia lui T să fie cunoscută ;

c) In funcţie de ipoteza alternativă H_1 şi de nivelul de semnificaţie α, fixarea unei regiuni critice de forma

$$R_{cr} = \{T/T < c_\alpha\}, R_{cr} = \{T/T > c_{1-\alpha}\}$$

în cazul unui test unilateral, sau

$$R_{cr} = \{T/T < c_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup R_{cr} = \{T/T > c_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$

în cazul unui test bilateral. Cu $c_\alpha, c_{1-\alpha}, c_{\frac{\alpha}{2}}, c_{1-\frac{\alpha}{2}}$ s-au notat cuantilele repartiţiei lui T în ipoteza H_0; deci, în această ipoteză , probabilitatea unei erori de prima speţă este $P(T \in R_{cr}) = \alpha$.

d) Se calculează valoarea $T(x_1, \ldots, x_n)$ luată de statistica T pe elementele unei anumite selecţii empirice $x_1, \ldots, x_n$

e) Se respinge ipoteza H_0 dacă şi numai dacă $T(x_1, \ldots, x_n) \in R_{cr}$

11.5.1 Verificarea ipotezei asupra mediei m a unei populaţii normale cu σ^2 cunoscut

1.1. Testul bilateral
$H_0 : m = m_0$
$H_1 : m = m_1 \neq m_0$
Regiunea critică este $R_{cr} : |\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
1.2. Testul unilateral stânga
$H_0 : m = m_0$
$H_1 : m = m_1 < m_0$
Regiunea critică este $R_{cr} : \frac{\overline{x}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_\alpha$
1.3. Testul unilateral dreapta
$H_0 : m = m_0$
$H_1 : m = m_1 > m_0$
Regiunea critică este $R_{cr} : \frac{\overline{x}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{1-\alpha}$

11.5.2 Verificarea ipotezei asupra mediei m a unei populaţii normale cu σ^2 necunoscut

2.1. Testul bilateral
$H_0 : m = m_0$
$H_1 : m = m_1 \neq m_0$
Regiunea critică este $R_{cr} : |\frac{\overline{x}-m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
2.2. Testul unilateral stânga
$H_0 : m = m_0$
$H_1 : m = m_1 < m_0$
Regiunea critică este $R_{cr} : \frac{\overline{x}-m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq t_\alpha(n-1)$
2.3. Testul unilateral dreapta
$H_0 : m = m_0$
$H_1 : m = m_1 > m_0$
Regiunea critică este $R_{cr} : \frac{\overline{x}-m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq t_{1-\alpha}(n-1)$

11.5.3 Verificarea ipotezei asupra dispersiei unei populaţii normale

Fie ipoteza $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ şi alternativa ei $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$
3.1. Testul unilateral stânga
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$
Regiunea critică este $R_{cr} : \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_\alpha(n-1)$
3.2. Testul unilateral dreapta
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$

Regiunea critică este $R_{cr}: \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
3.3. Testul bilateral
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$
Regiunea critică este $R_{cr}: \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

Exemplul 11.10. Durata de funcţionare a unei rezistenţe de 1000 w este o v. a. normală cu $\sigma = 250$ ore. O selecţie de volum $n = 36$ de astfel de rezistenţe a dat o durată medie de funcţionare de $\overline{X} = 1200$ ore. Să se testeze ipoteza $H_0 : m = m_0 = 1300$ ore faţă de alternativa $H_1 : m = m_1 < 1300$ ore la pragul de semnificaţie $\alpha = 0,01$. $(z_{0,99} = 2,33)$

Demonstraţie. $z_c = \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1200-1300}{\frac{250}{6}} = -\frac{600}{250} = -2,4$
$z_\alpha = z_{0,01} = -z_{0,99} = -2,33 > -2,4 = z_c \Longrightarrow$ respingem ipoteza H_0 şi acceptăm ipoteza H_1 □

Exemplul 11.11. Durabilitatea unor motoare de automobile poate fi considerată o v. a. normală cu media $m = 200000$ km şi dispersia 50000^2 km. Se face o schimbare în procesul de producţie prin introducerea unei metode noi de fabricaţie. O selecţie de volum $n = 100$ de motoare a dat $\overline{X} = 220000$ km. Considerând $\alpha = 0,05$ se poate afirma că noua metodă duce la creşterea durabilităţii motoarelor?

Demonstraţie. Avem $H_0 : m = m_0 = 200000$
$H_1 : m = m_1 > m_0$
Calculăm $z_c = \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{220000-200000}{\frac{50000}{10}} = 4$
$z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,64 \Longrightarrow z_c = 4 > z_{0,95} = 1,64$, deci acceptăm ipoteza conform căreia noua metodă duce la creşterea durabilităţii motoarelor □

Exemplul 11.12. S-a stabilit că greutatea tabletelor dintr-un medicament cu acţiune toxică puternică trebuie să fie $m_0 = 0,5$ mg. O cercetare selectivă de $n = 121$ tablete a dat o greutate medie observată a tabletelor egală cu $\overline{X} = 0,53$ mg. Se cere să se verifice la pragul de semnificaţie $\alpha = 0,01$ ipoteza $H_0 : m = m_0 = 0,5$ faţă de $H_1 : m \neq 0,5$. O observare atentă (prin cântăriri numeroase) a tabletelor a condus la concluzia că variabila greutate a tabletelor are o repartiţie normală cu $\sigma = 0,11$ mg. $(z_{0,995} = 2,58)$

Demonstraţie. Aplicăm testul bilateral şi obţinem $z_c = \frac{\overline{X}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0,53-0,5}{\frac{0,11}{11}} = 3$
$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,995} = 2,58 \Longrightarrow z_c = 3 > z_{0,995} = 2,58$, deci respingem H_0
Greutatea medie a tabletelor diferă semnificativ de greutatea admisă deci administrarea acestui medicament bolnavilor trebuie interzisă . □

Exemplul 11.13. Douăzeci de determinări a procentului de NaCl într-o anumită soluţie au condus $\overline{X} = 0,7^0/_0$ şi $s = 0,03^0/_0$. Stiind că procentul de NaCl într-o anumită soluţie este o v. a. normală , să se verifie la pragul de semnificaţie $\alpha = 0,05$ ipoteza $H_0 : m = 0,8^0/_0$ faţă de alternativa $H_1 : m < 0,8^0/_0$. $(t_{0,95}(19) = 1,729)$

Demonstraţie. $t_c = \frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{0,7-0,8}{\frac{0,03}{\sqrt{20}}} = -15$

$t_\alpha(19) = t_{0,05}(19) = -t_{0,95}(19) = -1,729 \Longrightarrow t_c = -15 < t_{0,05}(19) =$
$= -1,729 \Longrightarrow$respingem ipoteza H_0 şi acceptăm H_1 □

Exemplul 11.14. Pentru efectuarea unei anumite piese, norma tehnică prevede o durată medie de 40 minute. Pentru verificarea executării piesei respective în condiţii optime, se cronometrează durata de fabricaţie la un număr de $n = 16$ muncitori găsindu-se astfel o durată medie de $\overline{X} = 45$ minute şi o abatere medie pătratică $S = 3,5$ minute. Putem la un prag de semnificaţie $\alpha = 0,01$ să respingem ipoteza conform căreia durata medie reală de execuţie a unei piese este mai mare decât norma tehnică $(t_{0,99}(15) = 2,6)$

Demonstraţie. $s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot S^2 = \frac{16}{15} \cdot 12,25 = 13,06 \Longrightarrow s = 3,61$

Avem $H_0 : m = 40$

$H_1 : m > 40$

$t_c = \frac{\overline{X}-m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{45-40}{\frac{3,61}{4}} = 5,54$

$t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0,99}(15) = 2,6 < t_c = 5,54 \Longrightarrow$ se acceptă ipoteza conform căreia durata medie de fabricaţie a unei piese este mai mare decât norma tehnică □

Exemplul 11.15. Precizia unui cântar electronic se verifică cu ajutorul dispersiei măsurătorilor efectuate asupra unui etalon. Dispersia măsurătorilor nu trebuie să depăşească valoarea nominală $\sigma_0^2 = 0,04$. S-au efectuat $n = 11$ cântăriri ale unui etalon şi s-au obţinut rezultatele :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	100,6	99,6	100	100,1	100,3	100	99,9	100,2	100,4	100,6	100,5

Să se verifice, la un prag de semnificaţie $\alpha = 0,05$, dacă cântarul asigură precizia standard stabilită , presupunând că datele de selecţie sunt observaţii asupra unei v. a. normale. $(\chi^2_{0,95}(10) = 18,3)$

Demonstraţie. Avem de testat ipoteza $H_0 : \sigma^2 = 0,04$ cu alternativa $H_1 : \sigma^2 > 0,04$ (cântarul nu asigură precizia cerută). Ipoteza alternativă $H_2 : \sigma^2 < 0,04$ nu prezintă interes, deoarece nu ne temem că precizia cântarului ar fi mai mare decât cea impusă de standarde.

Avem $\overline{x} = \frac{1}{11}(100,6 + 99,6 + \ldots + 100,5) = 100,2$,

$s^2 = \frac{1}{10}[(100,2 - 100,6)^2 + (100,2 - 99,6)^2 + \ldots + (100,2 - 100,5)^2]$

$\chi^2_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = 25 > \chi^2_{0,95}(10) = 18,3$, deci respingem ipoteza H_0, cântarul nu asigură precizia cerută , prin urmare trebuie reglat. □

Exemplul 11.16. Pentru analiza preciziei unor măsurători s-au făcut $n = 16$ măsurıtori şi s-a stabilit $s^2 = 0,56$. Verificaţi ipoteza $H_0 : \sigma^2 = 0,41$ faţă de alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq 0,41$ la pragul de semnificaţie $\alpha = 0,1$, ştiind că populaţia în studiu este normală . $(\chi^2_{0,95}(15) = 25, \chi^2_{0,05}(15) = 7,28)$

Demonstraţie. $\chi^2_c = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{15 \cdot 0,56}{0,41} = 20,49$

Rezultă $\chi^2_{0,05}(15) < \chi^2_c < \chi^2_{0,95}(15)$, deci se acceptă ipoteza H_0 şi se respinge ipoteza H_1. □

11.6 Probleme propuse

1. Repartiţia valorilor defecţiunilor unor aparate de măsură şi control a fost analizată pe baza a 100 de observaţii care au furnizat următoarele valori cu privire la numărul de porniri (puneri în funcţiune) după care acestea se defectează :

x_i	1	3	6	8	10
n_i	15	20	30	10	25

Stabiliţi:

a) media şi dispersia de selecţie;

b) funcţia de repartiţie a selecţiei şi valorile ei în punctele $x = 2$ şi $x = 7$.

R: a) $\overline{x} = 5,85; S^2 = 9,925$

b)

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0,15, & 1 < x \leq 3 \\ 0,35, & 3 < x \leq 6 \\ 0,65, & 6 < x \leq 8 \\ 0,75, & 8 < x \leq 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

$F^*(2) = 0,15, F^*(7) = 0,65$

2. Pentru a cerceta prezenţa studenţilor la un anumit curs s-a ales un eşantion de n studenţi şi s-a înregistrat numărul absenţelor acestora la patru cursuri consecutive.

Nr. studenţi n_i	50	20	15	8	7
Nr. absenţe x_i	0	1	2	3	4

a) Să se scrie repartiţia empirică şi funcţia de repartiţie empirică $F_n^*(x)$;

b) Să se calculeze media şi dispersia de selecţie;

c) Să se calculeze $F_{100}^*(3)$

R: a) $X^* \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,15 & 0,08 & 0,07 \end{pmatrix}$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,2, & 0 < x \leq 1 \\ 0,7, & 1 < x \leq 2 \\ 0,85, & 2 < x \leq 3 \\ 0,93, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

b) $\overline{x} = 1,02, S^2 = 1,5996$

c) $F^*_{100}(3) = 0,85$

3. Se controlează greutatea unor pachete şi, pentru aceasta, se extrage o selecţie de volum n, care dă următoarele valori:

Pachetul	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Greutatea	21,5	21,6	21,75	22	22,45	22,6	23,2	23,4	23,5	23.65

Să se calculeze $F^*_{10}(20), F^*_{10}(22), F^*_{10}(23)$. Să se scrie repartiţia empirică şi să se calculeze media de selecţie.

R: $X^* \sim \begin{pmatrix} 21,5 & 21,6 & 21,75 & 22 & 22,45 & 22,6 & 23,2 & 23,4 & 23,5 & 23.65 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

$$F^*_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 21,5 \\ 0,1, & 21,5 < x \leq 21,6 \\ 0,2, & 21,6 < x \leq 21,75 \\ 0,3, & 21,75 < x \leq 22 \\ 0,4, & 22 < x \leq 22,45 \\ 0,5, & 22,45 < x \leq 22,6 \\ 0,6, & 22,6 < x \leq 23,2 \\ 0,7, & 23,2 < x \leq 23,4 \\ 0,8, & 23,4 < x \leq 23,5 \\ 0,9, & 23,5 < x \leq 23,65 \\ 1, & x > 23,65 \end{cases}$$

$F^*_{10}(20) = 0, F^*_{10}(22) = 0,3, F^*_{10}(23) = 0,6$

$\overline{x} = 22,565$

4. Repartiţia valorilor rezistenţei la rupere a unor fire de bumbac (în kg) a fost analizată pe baza a 100 de observaţii. Valorile observate împreună cu frecvenţele lor absolute sunt date în tabelul următor:

x_i (valorile rezistenţei la rupere în kg)	0,5	0,65	0,75	0,8	0,9	1	1,12	1,35
n_i (frecvenţe absolute)	2	4	5	26	30	25	6	2

Se cer:

a) Valoarea medie şi dispersia de selecţie a rezistenţei la rupere;

b) $F^*(0,78), F^*(0,9)$, unde $F^*(x)$ este funcţia empirică de repartiţie

R: a) $\overline{X} = 0,8957, S^2 \simeq 0,0189$

b) $F^*(0,78) = 0,11, F^*(0,9) = 0,37$

5. Dintr-o populaţie normală cu media $m = 12$, probabilitatea ca media de selecţie corespunzătoare unei selecţii de volum $n = 16$ să nu depăşească 14 (în modul) este de 0,24. Care este probabilitatea ca o singură observaţie din această selecţie să aibă o valoare mai mare decât 14? ($\Phi(0,71) = 0,76, \Phi(0,1776) = 0,9616$)

   R: $P(X_k > 14) = 0,0384$

6. Dintr-o populaţie normală se extrag toate selecţiile posibile de volum $n = 25$. Dacă $5^0/_0$ dintre ele au medii care diferă de media populaţiei cu cel puţin 5 unităţi în valoare absolută , aflaţi abaterea medie pătratică a populaţiei.

   R: Stim $P(|\overline{X} - m| \geq 5) = 0,05 \Longrightarrow \sigma = 12,76$

7. Arătaţi că media de selecţie este un estimator eficient pentru parametrul λ al repartiţiei Poisson.

8. Arătaţi că media de selecţie este un estimator eficient pentru media m a repartiţiei normale.

9. Să se estimeze prin metoda verosimilităţii maxime parametrul θ al repartiţiilor:

   a) $f(x,\theta) = (2-\theta)x^{(\ln 2)^{-1}\ln\frac{\theta-1}{2-\theta}}, 1 < \theta < 2$

   b) $f(x,\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}, \frac{1}{2} < \theta < 1$

   c) $f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta}(x-\theta)^2}, 0 < x < 1, \theta > 0$

   d) $f(x,\theta) = \theta(1-\theta)^x, x = 0,1,2\ldots, 0 < \theta < 1$

   e) $f(x,\theta) = (1+\theta)x^\theta, 0 < x < 1, \theta > 0$

   f) $f(x,\theta) = \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}}, x > x_0(x_0$ constantă dată $), \theta > 0$

   g) $f(x,\theta) = \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}, x > 0, \theta > 0, \alpha$ dat

   h) $f(x,\theta) = \theta\mathrm{e}^{-\theta x}, x \geq 0, \theta > 0$

   R: a) $\theta^* = 1 + \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln x_i$; b) $\theta^* = \left[1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln x_i\right]^{-1}$;

   c) $\theta^* = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n}}\right)$ d) $\theta^* = \frac{n}{n + \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{1+\overline{x}}$;

e) $\theta^* = -\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$; f) $\theta^* = -\dfrac{n}{\ln \dfrac{x_0}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}}$; g) $\theta^* = \frac{1}{n\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{\overline{x}}{\alpha}$;

h) $\theta^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x}}$

10. Fie X o v. a. cu densitatea $f(x,\theta) = \frac{A}{x^{\frac{\theta+1}{\theta}}}, x \geq 1, \theta > 0$ şi să considerăm o selecţie aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ din populaţia de caracteristică X.

    a) Să se determine A în funcţie de θ;

    b) Să se afle estimatorul de verosimilitate al parametrului θ şi să se studieze proprietăţile acestuia.

    R: a) $A = \frac{1}{\theta}$; b) $\theta^* = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln X_k$

    θ^* este nedeplasat, consistent, eficient

11. Intr-o fabrică de ţesut s-a constatat că rezistenţa la rupere a unui anumit fir de bumbac are o repartiţie normală cu media necunoscută m şi abaterea medie pătratică $\sigma = 36$g (calitatea standard). Pentru a cerceta calitatea unui lot de fire de bumbac în ceea ce priveşte rezistenţa la rupere s-a făcut o selecţie de volum $n = 9$ fire, obţinându-se media de selecţie $\overline{X} = 195$ g. Să estimeze rezistenţa la rupere m a lotului de fire controlat, printr-un interval de încredere $1 - \alpha = 0,95$. $(z_{0,975} = 1,96)$

    R: $m \in (171,48; 218,52)$

12. Fie X v. a. normală care reprezintă greutatea unor ouă . O selecţie de volum $n = 200$ a dat rezultatele următoare :

Greutatea (g)	37,5	42,5	47,5	52,5	57,5	62,5	67,5	72,5
Nr. observaţiilor	8	14	26	44	68	20	14	6

    Stiind că dispersia lui X este $\sigma^2 = 64$, aflaţi un interval de încredere $95^0/_0$ şi $90^0/_0$ pentru media m. $(z_{0,975} = 1,96, z_{0,95} = 1,65)$

    R: $53,79 < m < 56,01$

    $53,97 < m < 55,83$

13. Fie X o v. a. care reprezintă numărul de zile după care un anumit produs alimentar este absorbit pe piaţă . In urma unei selecţii de volum $n = 8$ în rândul centrelor de desfacere, s-au obţinut următoarele rezultate cu privire la numărul de zile după care se epuizează produsul respectiv :

Centru de desfacere i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nr. de zile x_i	40	54	40	50	38	40	50	60

Presupunând că X are o repartiţie normală să se afle:

a) un interval de încredere $95^0/_0$ pentru viteza media cu care este absorbit produsul pe piaţă ;

b) un interval de încredere $95^0/_0$ pentru abaterea medie pătratică a numărului de zile după care se epuizează produsul respectiv. ($t_{0,975}(7) = 2,36, \chi^2_{0,975}(7) = 16, \chi^2_{0,025}(7) = 1,69$)

R: a) $39,73 < m < 53,27$; b) $5,37 < \sigma < 16,53$

14. Pentru a estima precizia unui termometru se realizează 15 măsurători independente asupra temperaturii unui lichid menţinut constant la $20°C$. Presupunem că rezulttele măsurătorilor sunt realizări ale variabilelor aleatoare normale $X_k, k = \overline{1,15}$ de medie $m = 20$ şi σ necunoscută . Construiţi un interval de încredere $1 - \alpha = 0,99$ pentru σ^2, ştiind că $\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{15}(x_k - 20)^2 = 18$.

    R: $8,23 < \sigma^2 < 58,7$

15. O fabrică de acumulatori afirmă că durata de funcţionare a acumulatorilor este 300 de zile. Un laborator cercetează 4 acumulatori şi obţine rezultatele 298,290,306,302. Aceste rezultate indică faptul că acest tip de acumulatori are o durată de funcţionare mai mică decât afirmă fabrica ($\alpha = 0,02$,$t_{0,02}(3) = -4,541$)?

    R: se acceptă ipoteza H_0 şi se respinge H_1

16. S-a stabilit experimental că nivelul colesterolului în organismul unui adult este o v. a. normală . O selecţie aleatoare de volum $n = 41$ adulţi a dat un nivel mediu observat al colesterolului $\overline{X} = 213$ cu $s^2 = 48,4$. Să se testeze ipoteza $H_0 : m = m_0 = 200$ cu alternativa $H_1 : m = m_1 > 200$ la un prag de semnificaţie $\alpha = 0,05$. ($t_{0,95}(40) = 1,684$)

    R: respingem ipoteza H_0 şi acceptăm H_1

17. Pentru stabilirea rezistenţei la rupere a unor cabluri s-au efectuat $n = 36$ măsurători şi s-a stabilit media de selecţie $\overline{X} = 500$ kg. Stiind că rezistenţa la rupere este o v. a. normală cu $\sigma^2 = 100$ kg, să se verifice ipoteza $H_0 : m = 496$ kg faţă de alternativele : a) $H_1 : m \neq 496$ kg; b) $H_1 : m < 496$ kg la pragul de semnificaţie $\alpha = 0,01$. ($z_{0,995} = 2,58, z_{0,99} = 2,33$)

    R: a) respingem ipoteza H_1 şi acceptăm H_0

    b) se respinge H_1 şi se acceptă H_0

18. S-a stabilit că greutatea unor ouă pentru a fi importate trebuie să fie de $m_0 = 50$ g. O cercetare selectivă asupra unui volum $n = 150$ ouă dintr-un lot importat a determinat o greutate medie observată de $\overline{X} = 43$ g. Se cere să se verifice la un prag de semnificaţie $\alpha = 0,01$, ipoteza $H_0 : m = m_0 = 50$ g faţă de ipoteza alternativă $H_1 : m < 50$ g, dacă greutatea ouălelor este o v. a. normală $N(m, 16)$.

    R: respingem ipoteza H_0 şi acceptăm ipoteza H_1

19. Durata de funcţionare a unui tip oarecare de bec electric de 100 waţi poate fi considerată ca o v. a. X repartizată normal cu media $m = 1500$ şi $\sigma^2 = 200^2$. O selecţie de volum $n = 25$ de astfel de becuri dă o durată medie de funcţionare de 1380 ore. La pragul $\alpha = 0,01$, să se verifice ipoteza $H_0 : m = m_0 = 1500$ faţă de $H_1 : m = m_1 < 1500$.

    R: respingem H_0 şi acceptăm H_1

20. O firmă producătoare de becuri afirmă că durata medie de viaţă a becurilor produse este de 170 ore. Un reprezentant al Oficiului pentru Protecţia Consumatorilor cercetează un eşantion aleator de $n = 100$ de becuri, obţinând o durată medie observată de viaţă de 158 ore şi o abatere standard $s = 30$ ore. Determinaţi un interval de încredere $1 - \alpha = 0,99$ pentru durata medie de viaţă m, în ipoteza că durata de viaţă a becurilor este o v. a. normală . Poate fi acuzată firma producătoare de publicitate mincinoasă ? ($t_{0,995}(99) = 2,63$)

    R: $150 < m < 166$; firma poate fi acuzată de publicitate mincinoasă (folosim testul t unilateral la stânga)

21. Consumul nominal de benzină al unui anumit motor de maşină este de 10 l la 100 km. Se aleg la întâmplare 25 de motoare fabricate după o tehnologie modernizată , obţinându-se media $\overline{x} = 9,3$ l şi varianţa $s^2 = 4l^2$. Presupunând că selecţia provine dintr-o populaţie normală , folosiţi un test unilateral cu nivelul de semnificaţie $\alpha = 0,05$, pentru a testa ipoteza că noua tehnologie nu a influenţat consumul de benzină ($t_{0,95}(24) = 1,711$)

    R: ipoteza H_0 este respinsă (avem motive să credem că noua tehnologie a micşorat consumul de benzină)

22. Dintr-o populaţie normală o slecţie de volum $n = 30$ a dat rezultatele:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	2	3	6	7	7	3	2

    Să se verifice ipoteza $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 1$ faţă de alternativa $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2 > 1$ la pragul de semnificaţie $\alpha = 0,05$. ($\chi^2_{0,95}(29) = 42,6$)

    R: $\overline{x} = 3,03, s^2 = 1,22$

    se respinge ipoteza H_0 şi se acceptă ipoteza H_1

Bibliografie

[1] Th. Angheluţă , *Curs de teoria funcţiilor de variabilă complexă* Ed. Tehnică , Bucureşti 1957.

[2] Gabriela Beganu, Luiza Bădin, Mihaela Covrig, LianaManu, Aida Toma, *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică . Culegere de probleme*, Meteor Press, Bucureşti 2004.

[3] V. Brânzănescu, O. Stănăşilă , *Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicaţii*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[4] D. Baz, C. Cozma, O. Popescu, *Matematici aplicate în economie şi aplicaţii* , ASE, Catedra de Matematici , Bucureşti 1981.

[5] G. Ciucu , V. Craiu, I. Săcuiu, *Probleme de teoria probabilităţilor* , Ed. Tehnică , Bucureşti 1974.

[6] G. Ciucu , V. Craiu, *Introducere în teoria probabilităţilor şi statistică matematică* , Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1971.

[7] G. Ciucu, C. Tudor, *Teoria probabilităţilor şi aplicaţii*, Ed. Stiintifică şi Enciclopedică , Bucureşti 1983.

[8] Tania- Luminiţa Costache, Gh. Oprişan, *Transformări integrale*, Ed. Printech, Bucureşti 2004.

[9] Tania- Luminiţa Costache, *Culegere de teoria probabilităţilor şi statistică matematică* , Ed. Printech, Bucureşti 2006.

[10] Tania- Luminiţa Costache, *Matematici speciale. Culegere de probleme*, Ed. Printech, Bucureşti 2008.

[11] Tania- Luminiţa Costache, *Curs de Analiză Matematică 2*, Ed. Printech, Bucureşti 2010.

[12] Gh. Constantin, Ioana Istrăţescu, *Elements of Probabilistic Analysis* , Ed. Academiei , Bucureşti 1989.

[13] P. Ciumac, Viorica Ciumac, Mariana Ciumac, *Teoria probabilităţilor şi elemente de statistică matematică* , Ed. Tehnică UTM , Chişinău 2003.

[14] I. Cuculescu, *Teoria probabilităţilor* , Ed. ALL , Bucureşti 1998.

[15] R. Despa, Cătălina Andronache, B. Ciocănel, Ioana Ghenciu, Cristina Tetileanu, Cristina Toropu, *Culegere de probleme de matematici aplicate în economie vol.I-II* , Ed. SYLVI , Bucureşti 1998.

[16] C. Dinescu, I. Fătu, *Matematici pentru economişti vol.I-III* , Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1995.

[17] C. Dochiţoiu, A. Matei, *Matematici economice generale* , Ed. Economică , Bucureşti 1995.

[18] R. Elwes, *Maths in 100 key breakthroughs*, Quercurs.

[19] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I, Wiley 1950.

[20] D. Filipescu, Rodica Trandafir, D. Zorilescu, *Probabilităţi geometrice şi aplicaţii* , Ed. Dacia, Cluj-Napoca 1981.

[21] A. L. Garcia, *Probability, Statistics and Random Processes for Electrical Engineering*, Pearson Education, Inc. 2008.

[22] C. M. Grinstead, J. L. Snell, *Introduction to Probability*, American Mathematical Society 1997.

[23] H. M. Ionescu, *Elemente de statistică matematică* , Ed. Stiintifică , Bucureşti 1957.

[24] O. Kreindler, *Curs de matematici superioare*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1956.

[25] E. Kreyszig, E. J. Nornminton, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley 2011.

[26] A. Leonte, Rodica Trandafir, *Clasic şi actual în teoria probabilităţilor*, Ed. Dacia, Cluj 1974.

[27] O. Mayer, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă* , vol.1, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti 1981.

[28] N. Mihăilă , *Introducere în teoria probabilităţilor şi statistică matematică* , Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1965.

[29] N. Mihăilă , O. Popescu, *Matematici speciale aplicate în economie*, Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1978.

[30] Gh. Mihoc, V. Craiu, *Tratat de statistică matematică . Volumul II. Verificarea ipotezelor statistice*, Ed. Academiei, Bucureşti 1977.

[31] Gh. Mihoc, N. Micu, *Introducere în teoria probabilităţilor*, Ed.Tehnică Bucureşti 1970.

[32] Gh. Mihoc, V. Urseanu, Emiliana Ursianu, *Modele de analiză statistică* Ed. Stiintifică şi Enciclopedică , Bucureşti 1982.

[33] C. Moineagu, I. Negură , V. Urseanu, *Statistică* , Ed. Stiintifică şi Enciclopedică , Bucureşti 1976.

[34] M. Moroianu, Gh. Oprişan, *Caiet de seminar- Probabilităţi şi statistică* Ed. Printech , Bucureşti 2002.

[35] A. D. Myskis, *Introductory mathematics for engineers* , MIR Publishers, Moscow 1972.

[36] S. Nistor, I. Tofan, *Introducere în teoria funcţiilor complexe*, Ed. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi 1997.

[37] Alina Niţă , Tania-Luminiţa Costache, Raluca Dumitrescu, *Matematici speciale. Noţiuni teoretice. Aplicaţii.*, Editura Printech, Bucureşti, 2007.

[38] Ana Niţă , Tatiana Stănăşilă , *1000 de probleme rezolvate şi exerciţii fundamentale pentru studenti şi elevi*, Ed. ALL, 1997.

[39] V. Olariu, V. Prepeliţă , *Teoria distribuţiilor. Funcţii complexe şi aplicaţii*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică , Bucureşti 1986.

[40] O. Onicescu, *Teoria probabilităţilor şi aplicaţii*, Ed.Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1963.

[41] O. Onicescu, Gh. Mihog, C. T. Ionescu Tulcea, *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii* , Ed. Academiei, Bucureşti 1956.

[42] I. Popescu, D. Baz, G. Beganu, A. Filip, C. Raischi, P. Vasiliu, V. Butescu, M. Enăchescu, O. Firică , N. Stremţan, M. Toma, G. Zaharia, S. Baz, L. Bădin, *Matematici aplicate în economie-Culegere de probleme*, Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1999.

[43] A. Papoulis, *The Fourier integral and its applications*, McGraw Hill Book Co., New York 1962.

[44] Garofiţa Pavel, Floare Ileana Tomuţa, I. Gavrea, *Matematici speciale*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca 1981.

[45] M. Postolache, S. Corbu, *Exercise Manual in Probability Theory* , Fair Parteners Ltd., Bucharest 1998.

[46] W. Rudin, *Analiză reală şi complexă* , Texte Matematice Esenţiale, Vol. 1, Ed. Theta, Bucureşti 1999.

[47] V. Rudner, *Probleme de matematici speciale*, Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1970.

[48] V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare II*, Editura Tehnică , Bucureşti, 1954.

[49] D. Stanomir, O. Stănăşilă, *Metode matematice în teoria semnalelor*, Ed.Tehnică, Bucureşti 1980.

[50] O. Stănăşilă , V. Brânzănescu, *Matematici speciale- teorie, exemple, aplicaţii*, Ed. ALL 1994.

[51] S. Stoilow, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă* , vol,I,II, Ed. de Stat Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1962.

[52] M. Stoka, *Culegere de probleme de funcţii complexe*, Ed. Tehnică Bucureşti 1965.

[53] M. Stoka, *Funcţii de variabilă reală şi funcţii de variabilă complexă* , Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1964.

[54] I. Gh. Şabac, *Matematici Speciale*, Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti 1965.

[55] Rodica Tomescu, Daniela Ijacu, *Probabilităţi şi statistică matematică* , Ed. Printech, Bucureşti 2005.

[56] Rodica Trandafir, *Introducere în teoria probabilităţilor*, Ed. Albatros , Bucureşti 1979.

[57] Rodica Trandafir, *Probleme de matematici pentru ingineri* , Ed. Tehnică , Bucureşti 1977.

[58] S. Turbatu, *Funcţii complexe de variabilă complexă* , Univ. Bucureşti, Facultatea de Fizică 1980.

[59] Emilia Ţiţian, Simona Ghiţă , *Bazele Statisticii-Aplicaţii*, Meteora Press, Bucureşti 2001.

[60] R. D. Yates, D. J. Goodman, *Probability and Stochastic Processes. A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*, Wiley 2005.