

Jakob Wolitzki 136830 I2
Ćwiczenie nr 5.

Temat: Programowanie dynamiczne

Wymagania:

1. Znajomość metody programowania dynamicznego (PD).
2. Znajomość metody przeglądu wyczerpującego.
3. Znajomość złożoności obliczeniowej obu powyższych metod.
4. Znajomość sformułowania problemu plecakowego.
5. algorytmy przybliżone (zachłanne)

Przebieg ćwiczenia:

1. Problem plecakowy.
2. Problem z pkt. 1. rozwiąż za pomocą algorytmu programowania dynamicznego. Efektywność uzyskanego rozwiązania porównaj z innymi algorytmami: dokładnym - przeszukiwania wyczerpującego przestrzeń rozwiązań i algorytmem zachłannym, mierząc czas uzyskania rozwiązania dla wszystkich metod, dla tych samych instancji problemu. Podaj wykres porównawczy użytych metod.
3. Porównaj jakość uzyskanych rozwiązań. Podaj wnioski i komentarze
4. Sformułuj wnioski dotyczące efektywności zastosowanych metod ich złożoności obliczeniowej. Podaj przynależność badanego problemu do określonej klasy problemów ze względu na jego złożoność obliczeniową.

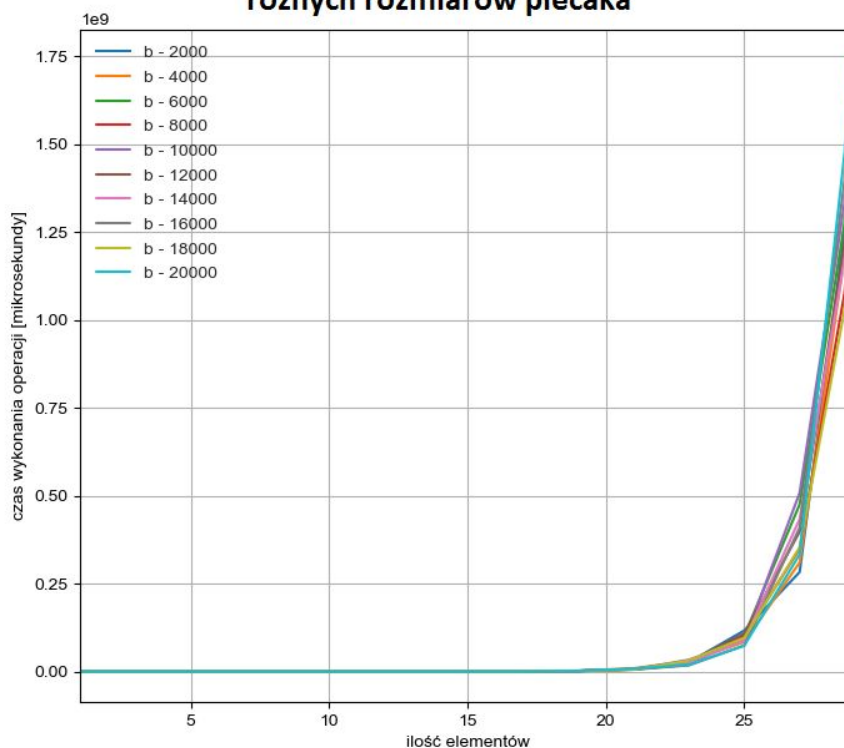
Czas realizacji: 2 tygodnie

Wszystkie pomiary, były powtórzone dla różnej ilości elementów, zostały przeprowadzone na komputerze domowym z procesorem Intel Core i5-4200H CPU 2.80GHz.

Zacznę od opisania poszczególnych algorytmów.

1. Metoda programowania dynamicznego, opiera się na metodzie “Dziel i zwyciężaj”. Wyniki obliczeń są zapamiętywane w tablicy pomocniczej, którą wykorzystujemy w kolejnych krokach algorytmu, co eliminuje potrzebę wielokrotnego wykonywania tych samych obliczeń.
2. Metoda przeglądu wyczerpującego, polega na przejrzaniu wszystkich możliwych opcji (wygenerowanych za pomocą liczb binarnych), i wybraniu najlepszej.
3. Metoda zachłanna polega na wybraniu pokolei posortowanych przedmiotów według ustalonej wagi, w naszym przypadku jest to stosunek wartości do wielkości.

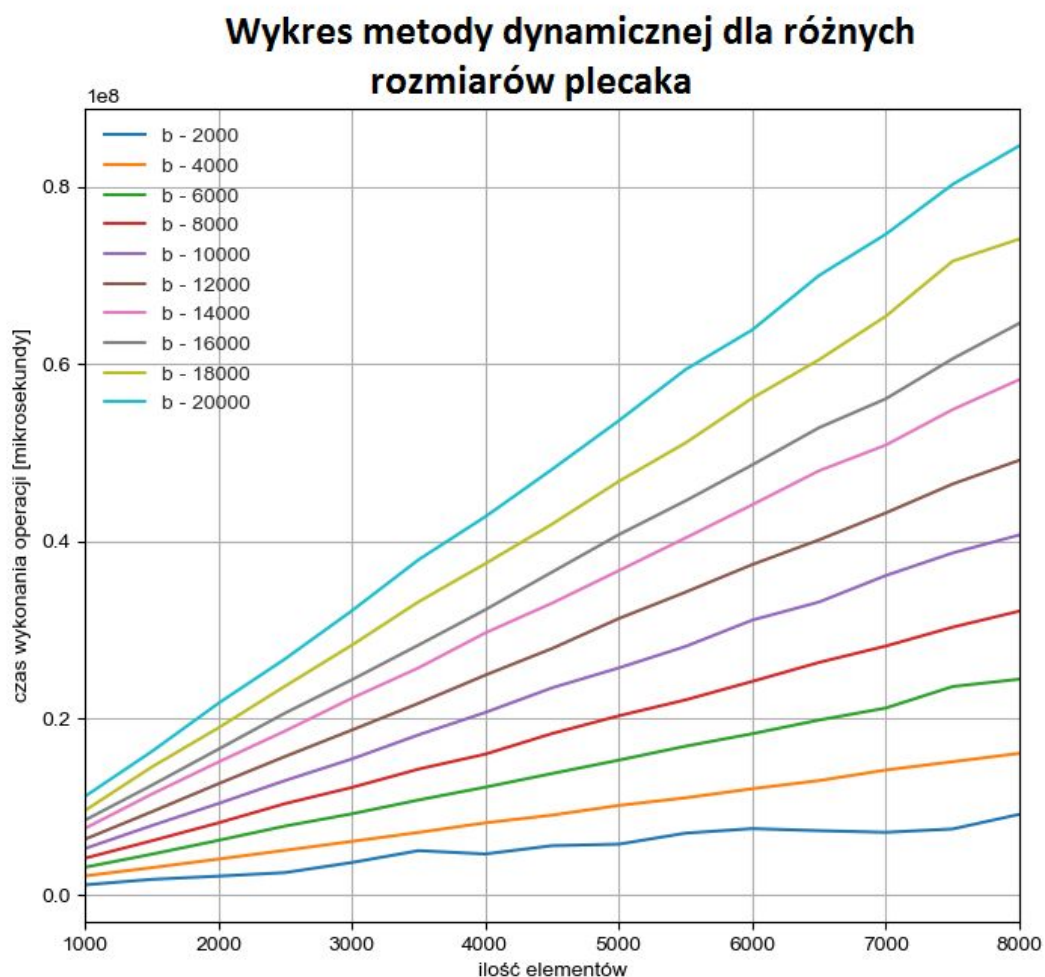
Wykres metody przeglądu wyczerpującego dla różnych rozmiarów plecaka



Złożoność obliczeniowa rozwiązywania problemu plecakowego metodą przeglądu wyczerpującego to $O(2^n)$, dlatego już dla niewielkich ilości danych algorytm przestaje być efektywny.

Złożoność wynika, iż sprawdzane są wszystkie kombinacje przedmiotów, które można umieścić w plecaku.

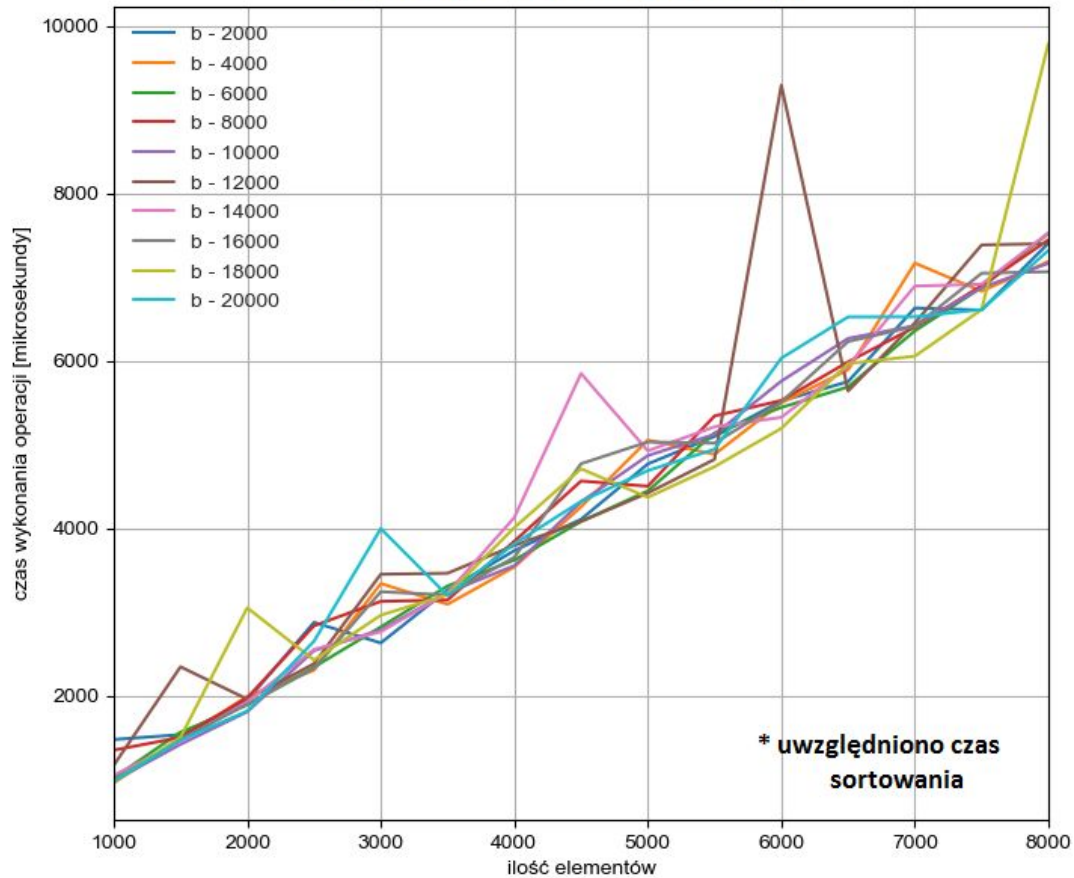
Otrzymany wynik jest zawsze optymalny, gdyż sprawdzamy zawsze wszystkie rozwiązania. Czas trwania algorytmu nie zależy od pojemności plecaka. Różnice dla poszczególnych wykresów wynikają jedynie z różnych wartości i wag przedmiotów. Algorytm dla danej permutacji ułożenia przedmiotów w plecaku może się zatrzymać po innym czasie, jednak czasy te są bardzo do siebie zbliżone.



Złożoność obliczeniowa i pamięciowa rozwiązywania problemu plecakowego za pomocą metody programowania dynamicznego wynoszą $O(n \cdot b)$, gdzie n jest ilością elementów, a b jest pojemnością plecaka. Wynika to z faktu, iż do rozwiązania tego problemu potrzebna jest macierz o n wierszach i b kolumnach, która należy wypełnić zgodnie z określonymi zasadami.

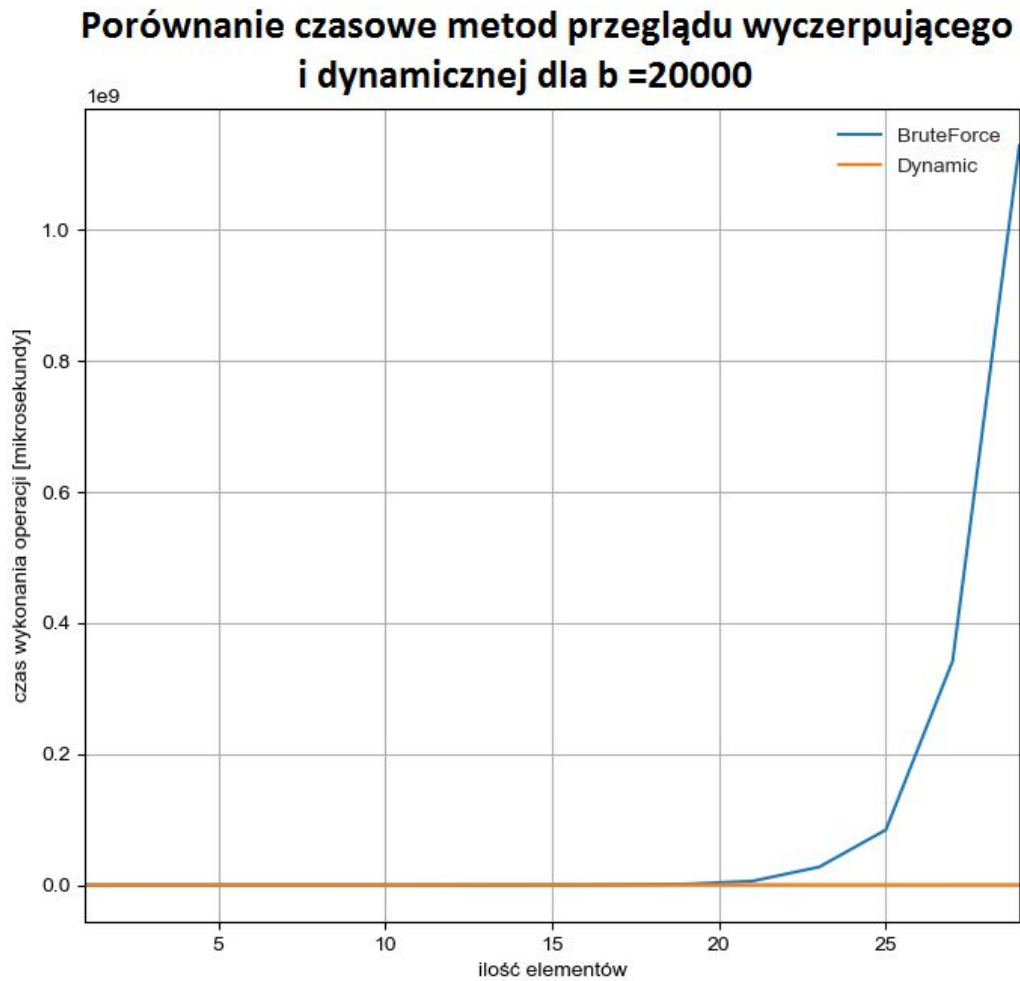
Złożoność obliczeniowa metody programowania dynamicznego jest określana za pomocą iloczynu dwóch parametrów, zatem jest to złożoność pseudowielomianowa, czyli należy do klasy problemów NP-zupełnych (takich, dla których w ogólności nie da się znaleźć rozwiązania optymalnego w czasie wielomianowym).

**Wykres metody zachłannej w stosunku wartość / wielkość
dla różnych rozmiarów plecaka**



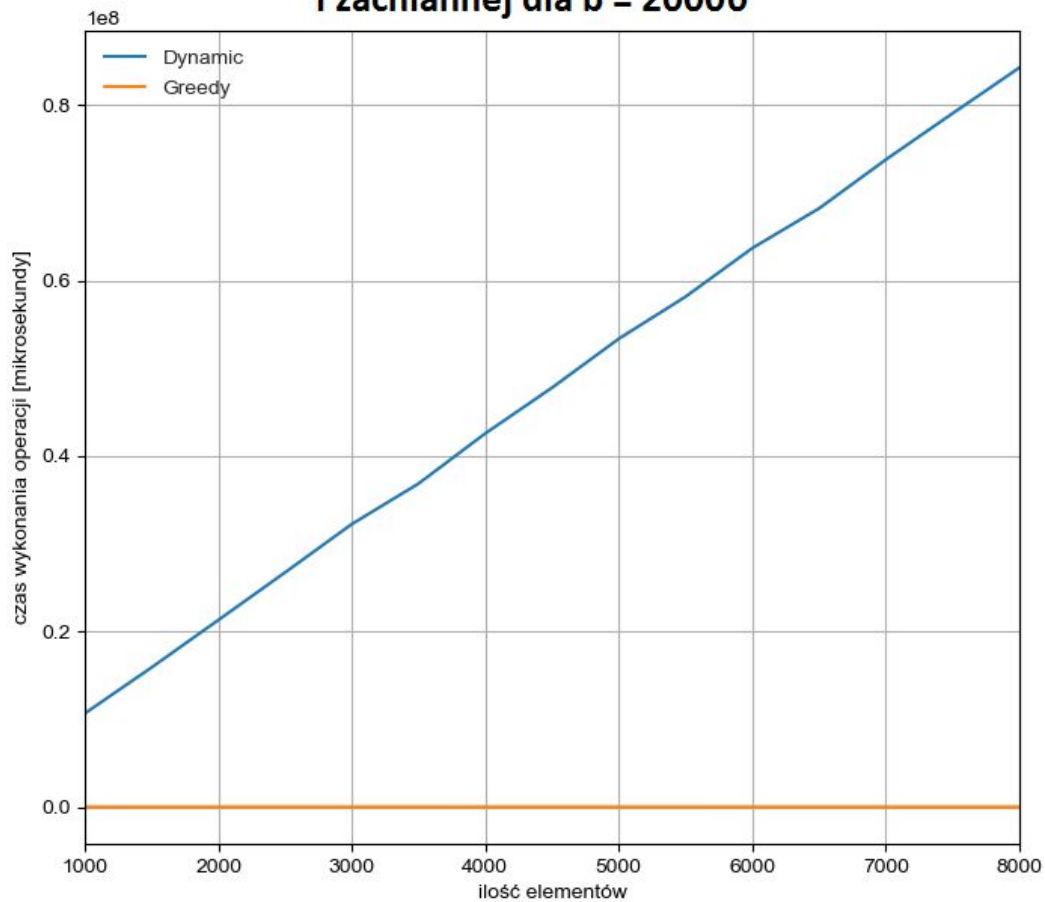
Złożoność obliczeniowa algorytmu plecakowego metodą zachłanną zależy głównie od algorytmu sortującego elementy wg wskazanego parametru. W naszym przypadku są one sortowane wg stosunku wartości / wagi. Do przeprowadzenia badań wybrano algorytm sortowania szybkiego, a zatem złożoność tej metody w średnim przypadku wynosi $O(n \cdot \log n)$. Sam algorytm przechodzi przez przedmioty w czasie liniowym, dlatego zamieściłem 2 wykresy, 1 nie uwzględniający czasu sortowania, 2 uwzględniający ten czas. Algorytm daje rozwiązania przybliżone, nie zawsze optymalne. Jednak gdy uzyskanie rozwiązania w pełni optymalnego nie jest najistotniejsze i wystarczy rozwiązanie przybliżone, warto wziąć pod uwagę wykorzystanie algorytmu zachłannego.

Ad3.



Obydwie metody, dynamiczna i wyczerpująca zwracają tą samą optymalną wartość przedmiotów, jednak jak widzimy na wykresie metoda dynamiczna jest dużo szybsza dla $n > 20$ przedmiotów. Wynika to z niekorzystnej złożoności obliczeniowej wykładniczej 2^n metody wyczerpującej, przez co staje się ona nieefektywna. Jednak możliwy jest przypadek dla odpowiednio małego n , że pojemność plecaka będzie na tyle duża, że czas uzyskania rozwiązania optymalnego metodą wyczerpującą będzie znacznie niższy niż metodą dynamiczną.

Porównanie czasowe dla metody dynamicznej i zachłannej dla $b = 20000$



Jak widzimy na wykresie, algorytm zachłanny znacznie szybciej działa od metody programowania dynamicznego. Jest tak, dlatego, że złożoność metody wykorzystującej algorytm zachłanny zależy głównie od wyboru sortowania i może wynosić $O(n \cdot \log n)$. Natomiast w przypadku metody programowania dynamicznego, złożoność wynosi $O(n \cdot b)$, zatem jest on w stanie znaleźć rozwiązanie szybciej tylko dla odpowiednio małych pojemności plecaka.

Porównanie efektywności metody dynamicznej z zachłanną

n	Dynamic Score	Greedy Score	G/D %
1000	924666	923503	99.8742
1500	1155715	1152245	99.6998
2000	1310122	1309317	99.9386
2500	1491171	1490708	99.9689
3000	1732266	1732266	100
3500	1755990	1751085	99.7207
4000	2109855	2108238	99.9234
4500	2347562	2346535	99.9563
5000	2201492	2198311	99.8555
5500	2303332	2302056	99.9446
6000	2671615	2671615	100
6500	2343019	2340265	99.8825
7000	2665722	2665067	99.9754
7500	2672629	2671241	99.9481
8000	2808737	2808054	99.9757

Na podstawie tabeli, widzimy, że algorytm zachłanny nie daje nam w pełni optymalnych rezultatów, jednak są do nich bardzo przybliżone. Rozbieżność między wynikami zależy od odpowiednio wygenerowanych przedmiotów, jak widzimy, mój generator sprzyja wybieraniu przedmiotów przez algorytm zachłanny.

Podsumowując:

Jeżeli nam na szybkości działania algorytmu i uzyskaniu w pełni optymalnego rozwiązania to najlepiej korzystać z algorytmu dynamicznego. Jeżeli jednak najbardziej zależy nam na szybkości, a wynik może być zbliżony do najlepszego to powinniśmy użyć algorytmu zachłannego. (Jego złożoność zależy głównie od algorytmu użytego do sortowania, czyli może być rzędu $O(n \cdot \log n)$). Metoda wyczerpująca okazała się być nieefektywna, należy ją wybierać tylko w bardzo szczególnych przypadkach, dla małej ilości przedmiotów.

Znalezienie optymalnego rozwiązania problemu plecakowego nie jest możliwe w każdym przypadku w czasie wielomianowym. Dla algorytmu wyczerpującego wynika, to z jego złożoności $O(2^n)$, natomiast w metodzie dynamicznej, złożoność określona jest za pomocą iloczynu dwóch parametrów, zatem jest to złożoność pseudowielomianowa, a metoda zachłanna nie daje nam gwarancji uzyskania optymalnego wyniku, zatem problem plecakowy należy do klasy problemów NP - zupełnych.