贝尔曼期望方程

有了模型和奖励，就可以进一步地研究价值问题了。如同马尔可夫奖励过程中的状态价值函数一样，在马尔可夫奖励过程过程中，同样会有价值函数，而且概念进一步地深化和扩展了。

比较奖励过程和决策过程

我们首先用图 1 来比较一下两种过程，避免概念混淆。

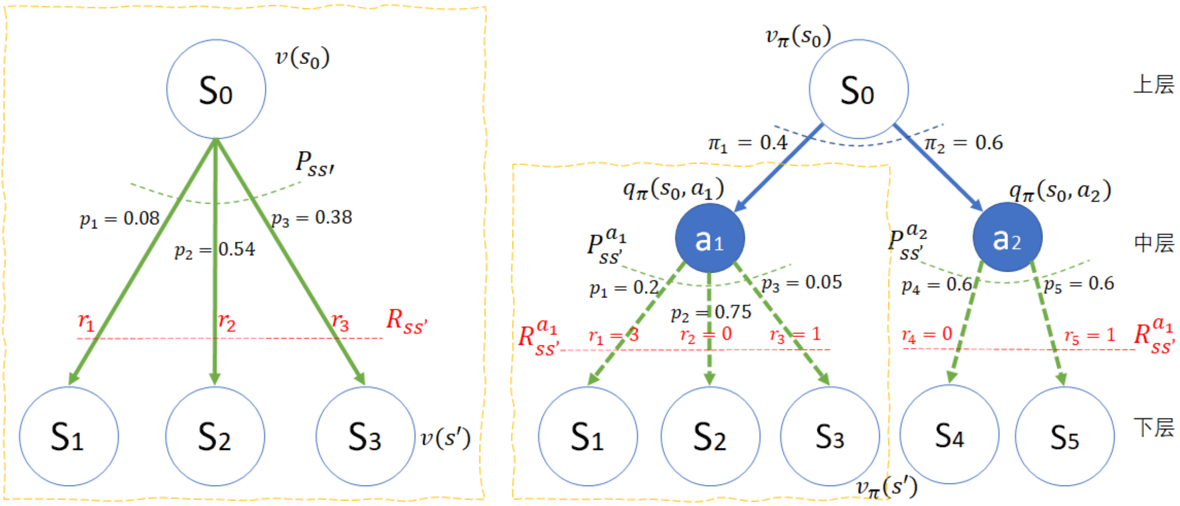


图 1 左侧：马尔可夫奖励过程模型（贝尔曼方程）；右侧：马尔可夫决策过程模型（贝尔曼期望方程）。

表 1 比较图 1 中的左右两部分

	左侧	**右侧**
名称	马尔科夫奖励过程 MRP	马尔可夫决策过程 MDP
模型	两层节点，一层过程	三层节点，两层过程
上层节点	源状态	源状态
中层节点	无	动作节点
下层节点	目标状态	目标状态
过程	实线箭头为状态转移 $P_{ss'}$ 以及过程奖励 $R_{ss'}$	实线箭头为策略选择$\pi(a \mid s)$，虚线箭头为状态转移$P_{ss'}^a$,以及过程奖励$R_{ss'}^a$
解法	贝尔曼方程	贝尔曼期望方程
状态价值函数定义	$v(s) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s]$	$v_\pi(s, a) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s]$
动作价值函数定义	无	$q_\pi(s, a) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s, A_t = a]$

$v_\pi(s)$ 比 $v(s)$ 多了一个下标 π，是为了区分二者，没有实际的数学含义。

在有的资料中，给贝尔曼期望方程的 $\mathbb{E}$ 写作 $\mathbb{E}_\pi$，也是这个意思，没有实际的数学含义。

表 2 虚线框内的部分的局部比较

	左侧	右侧
顶端节点	源状态 s_0，需要计算状态价值函数 $v(s_0)$	源动作 a_1，需要计算动作价值函数 $q_\pi(s_0,a_1)$
中间过程	状态转移概率$P_{ss'}$，过程奖励向量$R_{ss'}$	状态转移概率$P_{ss'}^{a_1}$，过程奖励向量$R_{ss'}^{a_1}$
底端节点	下游状态s_1,s_2,s_3，假设已知状态价值函数$v(s')$	下游状态s_1,s_2,s_3，假设已知状态价值函数$v_\pi(s')$

比较图 1 中左侧和右侧虚线框内的部分，可以说除了符号不同，其它都是相同的，包括位置和含义。

动作价值函数 q_π

先回忆一下在马尔可夫奖励过程中学习过的状态价值函数，温故而知新。

$$\begin{aligned} v(s) &= \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s] + \gamma \mathbb{E}[G_{t+1} \mid S_t = s] \\ &= \sum_{s'} p_{ss'} r_{ss'} + \gamma \sum_{s'} p_{ss'} v(s') = \sum_{s'} p_{ss'}[r_{ss'} + \gamma v(s')] \\ &= P_{ss'} R_{ss'} + \gamma P_{ss'} V(s') \\ &= R(s) + \gamma P_{ss'} V(s') \end{aligned} \tag{1}$$

观察贝尔曼方程的推导，其本质是：某个状态的价值函数 $v(s)$ 由三部分组成：

1. 其下游状态的价值 $v(s')$；
2. 转移概率 p；
3. 转移过程中的奖励 r。

无巧不成书，在下面推导动作价值函数 q_π 的公式时，我们也遇到了和式 1 同样的表达。所以，我们可以大胆地预测，计算动作价值函数 $q_\pi(s,a)$ 的公式与计算状态价值函数的贝尔曼方程完全一致。

$$\begin{aligned} q_\pi(s,a) &= \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s, A_t = a] \\ &= \mathbb{E}[R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a] + \gamma \mathbb{E}[G_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a] \\ &= \sum_{s'} p_{ss'}^a r_{ss'}^a + \gamma \sum_{s'} p_{ss'}^a v_\pi(s') = \sum_{s'} p_{ss'}^a [r_{ss'}^a + \gamma v_\pi(s')] && (2.1) \\ &= P_{ss'}^a R_{ss'}^a + \gamma P_{ss'}^a V_\pi(s') = P_{ss'}^a [R_{ss'}^a + \gamma V_\pi(s')] && (2.2) \\ &= R^a(s) + \gamma P_{ss'}^a V_\pi(s') && (2.3) \end{aligned} \tag{2}$$

比较式 1 和式 2，对于本章的动作价值函数来说，除了在条件部分多出来一个 $A_t = a$ 以外，其它的部分完全相同，所以式 2 的 q 等同于式 1 的 v。

那么多出来的这个 $A_t = a$ 会造成什么不同吗？答案是不会。因为这个条件相当于在图 1 中右侧的部分确定了是选择 a_1 还是 a_2，正是因为有了这个条件存在，才会让黄色虚线框部分的模型结构高度相似。

状态价值函数 v_π

函数名称定义为 v_π 的原因是为了和马尔可夫过程的状态价值函数 v 区分开来，其定义是：

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s] \tag{3}$$

同式 1,2 一样，式 3 仍然是要求回报 G_t 的数学期望。在图 1 的右侧，我们考虑以 $v_\pi(s_0)$ 为例推出通用的价值函数公式。

状态 s_0 并不直接接触到奖励机制，而是通过策略 π 与下游的两个动作 a_1, a_2 连接，所以，一旦知道了 a_1, a_2 的动作价值函数 q_π，那么 s_0 的状态价值函数就可以表示为 q_π 的期望了，即：

$$\begin{aligned} v_\pi(s_0) &= \pi_1 q_\pi(s_0, a_1) + \pi_2 q_\pi(s_0, a_2) \\ &= \sum_{a \in A(s)} \pi(a \mid s_0) q_\pi(s_0, a) \end{aligned} \tag{4}$$

所以，式 3 可以引申为：

$$v_\pi(s) = \mathbb{E}[G_t \mid S_t = s] = \sum_{a \in A(s)} \pi(a|s) q_\pi(s, a) \tag{5}$$

实例演算

下面我们通过对图 5 全模型图的实例化计算，来解释贝尔曼期望方程中的动作价值函数即状态价值函数的含义。

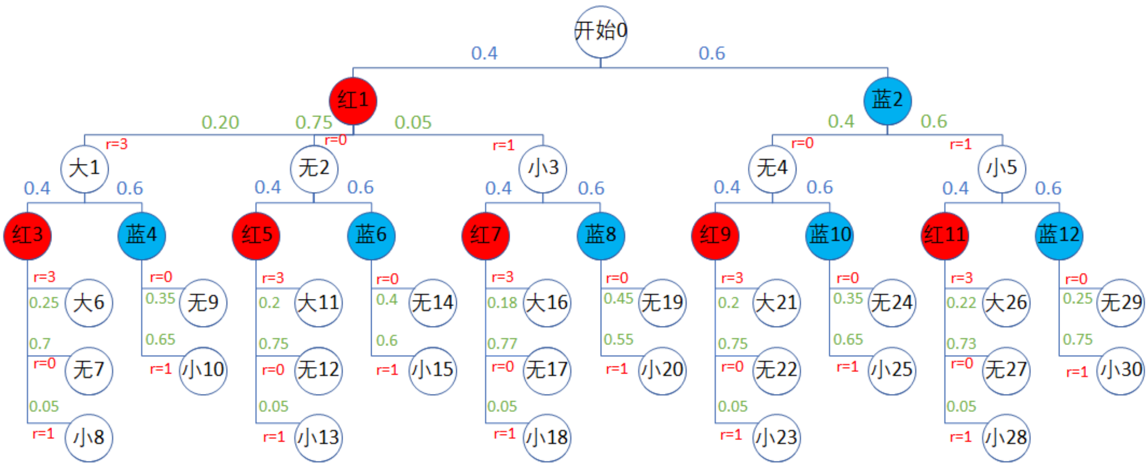


图 3 全模型

因为上层节点依赖下层节点，为了简化问题，我们要从下向上反向推演。

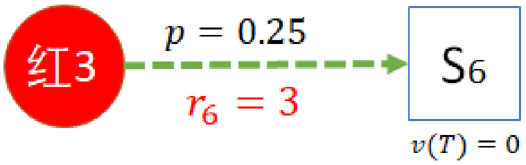
有一些特别的说明：

- 在本例中我们设 $\gamma = 1$ 以简化计算过程。
- 空心圆状态序号 s_n，$n \in [0, 30]$。
- 实心圆动作序号 a_m，$m \in [1, 12]$。

处于第五层的状态价值函数

我们以“大6”状态为例，命名为 s_6，来解释第三层的状态价值函数的计算方法。

由于 s_6 在本例中的含义是中大奖，奖励值为 3，所以很容易**误认为** $v(s_6) = 3$。可以通过下面两种方法来澄清这个问题。如图 4 所示。



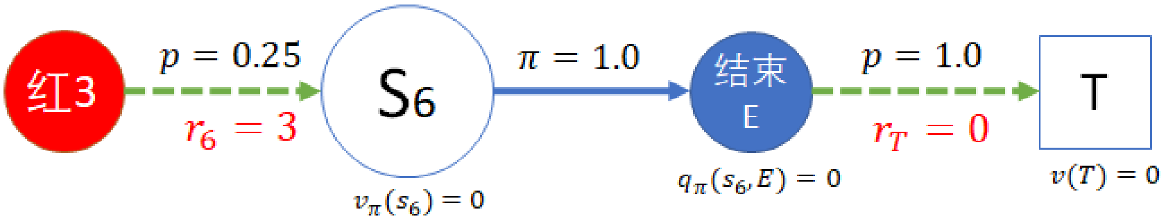


图 4

第一种方法

图 4 中的上子图。

可以认为 s_6 为终止状态，这样按照定义，终止状态的价值函数值必须为 0。

有的读者可能会有疑问：那么 $r_6 = 3$ 的奖励给了谁？难道不是给了 s_6 吗？

虽然在从动作"红3"到状态 s_6 的转移过程中，得到了奖励 $r_6 = 3$，但是按照式 2，这个奖励是计算到"红3"的动作价值函数上的，并不是计算到下游的 s_3 状态上的，否则就会重复计算了。

第二种方法

图 4 中的下子图。

如果不认为 s_6 为终止状态，可以在其后增加一个动作，叫做"结束E"，执行此动作的策略为 1，也就是 s_6 只有这一个下游动作，并且这个动作以 1 的概率转移到另外定义的终止状态 T，奖励为 $r_T = 0$。

那么反向计算过程为：

1. 终止状态的 $v(T) = 0$，这是必须的。
2. 按式 2，$q_\pi(s_6, E) = P^a_{ss'}R^a_{ss'} + \gamma P^a_{ss'}V_\pi(s') = 1 \times r_T + 1 \times 1 \times v(T) = 0$。
3. 按式 5，$v_\pi(s_6) = \sum_a \pi(a|s)q_\pi(s,a) = 1 \times q_\pi(s_6, E) = 0$

所以，这两种方法都可以解释清楚 $v_\pi(s_6) = 0$ 这个事实。依此类推，状态 6 到状态 30 的价值函数都是 0。

处于第四层的动作价值函数

即"红3"（命名为a_3）到"蓝12"（命名为a_{12}）这 10 个动作。

由式 2.2 可知：$q_\pi(s,a) = P^a_{ss'}R^a_{ss'} + \gamma P^a_{ss'}V_\pi(s')$，这是矩阵形式，便于书写，节省篇幅，读者可以自行用最原始的式 2.1 来佐证。

由于在上面一步中，已经解得 $v(s_n) = 0, n \in [6, 30]$，所以式 2.2 的后半部分 $V(s')$ 都是 0，因此可以轻易解得这 10 个动作的价值函数为：

$$
\begin{cases}
q_\pi(s_1, a_3) = (0.25, 0.7, 0.05) \cdot (3, 0, 1)^T = 0.8 \\
q_\pi(s_1, a_4) = (0.35, 0.65) \cdot (0, 1)^T = 0.65 \\
q_\pi(s_2, a_5) = (0.2, 0.75, 0.05) \cdot (3, 0, 1)^T = 0.65 \\
q_\pi(s_2, a_6) = (0.4, 0.6) \cdot (0, 1)^T = 0.6 \\
q_\pi(s_3, a_7) = (0.18, 0.77, 0.05) \cdot (3, 0, 1)^T = 0.59 \\
q_\pi(s_3, a_8) = (0.45, 0.55) \cdot (0, 1)^T = 0.55 \\
q_\pi(s_4, a_9) = (0.2, 0.75, 0.05) \cdot (3, 0, 1)^T = 0.65
\end{cases}
\tag{6}
$$

$$\begin{cases} q_\pi(s_4,a_{10}) = (0.35,0.65)\cdot(0,1)^T = 0.65 \\ q_\pi(s_5,a_{11}) = (0.22,0.73,0.05)\cdot(3,0,1)^T = 0.71 \\ q_\pi(s_5,a_{12}) = (0.25,0.75)\cdot(0,1)^T = 0.75 \end{cases}$$

处于第三层的状态价值函数

即 s_1 到 s_5 这五个状态。

由式 5 知：$v_\pi(s)=\sum_a \pi(a|s)q_\pi(s,a)$，所以有：

$$\begin{cases} v_\pi(s_1) = 0.4q_\pi(s_1,a_3)+0.6q_\pi(s_1,a_4) = 0.4\times 0.8+0.6\times 0.65 = 0.71 \\ v_\pi(s_2) = 0.4q_\pi(s_2,a_5)+0.6q_\pi(s_2,a_6) = 0.4\times 0.65+0.6\times 0.6 = 0.62 \\ v_\pi(s_3) = 0.4q_\pi(s_3,a_7)+0.6q_\pi(s_3,a_8) = 0.4\times 0.59+0.6\times 0.55 = 0.566 \\ v_\pi(s_4) = 0.4q_\pi(s_4,a_9)+0.6q_\pi(s_4,a_{10}) = 0.4\times 0.65+0.6\times 0.65 = 0.65 \\ v_\pi(s_5) = 0.4q_\pi(s_5,a_{11})+0.6q_\pi(s_5,a_{12}) = 0.4\times 0.71+0.6\times 0.75 = 0.734 \end{cases} \tag{7}$$

处于第二层的动作价值函数

只有 a_1 和 a_2 两个动作，这次与第四层的情况不一样，处于下游的 v_π 都不是 0，所以用式 2.2 比较方便：$q_\pi(s,a)=P^a_{ss'}[R^a_{ss'}+\gamma V_\pi(s')]$。

其中：

- 对于 $q_\pi(s_0,a_1)$ 来说
  - $P^a_{ss'}=[0.2,0.75,0.05]$
  - $R^a_{ss'}=[3,0,1]$
  - $V_\pi(s')=[v_\pi(s_1),v_\pi(s_2),v_\pi(s_3)]$
- 对于 $q_\pi(s_0,a_2)$ 来说
  - $P^a_{ss'}=[0.4,0.6]$
  - $R^a_{ss'}=[0,1]$
  - $V_\pi(s')=[v_\pi(s_4),v_\pi(s_5)]$

$$\begin{cases} q_\pi(s_0,a_1) = (0.2,0.75,0.05)\cdot[(3,0,1)+(0.71,0.62,0.566)]^T = 1.2853 \\ q_\pi(s_0,a_2) = (0.4,0.6)\cdot[(0,1)+(0.65,0.734)]^T = 1.3004 \end{cases} \tag{8}$$

从式 8 的结果可得，选择射击蓝色大气球的动作价值为 1.3004，大于射击红色小气球的值。

处于第一层的开始状态价值函数

$$v_\pi(s_0)=\sum_a \pi(a|s)q_\pi(s,a)=(0.4,0.6)\cdot(1.2853,1.3004)^T=1.2944 \tag{9}$$

计算 v_π 时可以用变量相乘再相加，也可以直接变成矩阵运算，原理一样。

到了这里，有些读者可能会产生疑问：为什么在没有引入动作之前，计算的（马尔可夫奖励过程的）开始状态的价值函数为 -2.7268，但是在上面的计算中，马尔可夫奖励过程的状态价值函数为 1.2944 呢？不是说值不一样，而是一正一负！

原因是我们在本节中的马尔可夫奖励过程中，没有把最开始买子弹的 4 元钱纳入模型中。

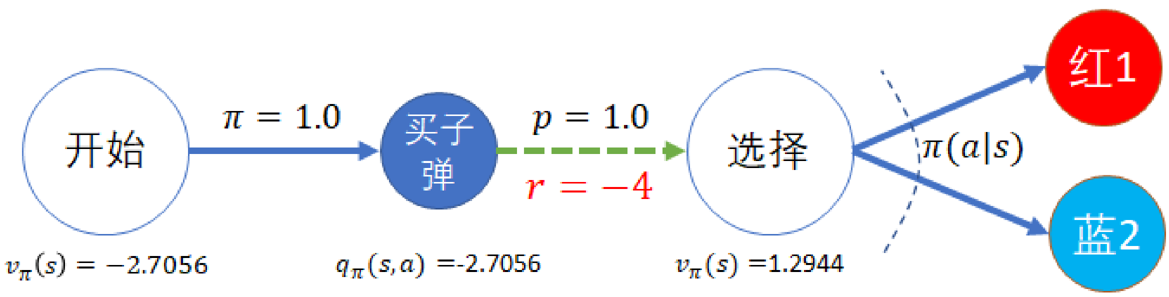


图 6

如果我们像图 6 这样设计模型，那么在“选择”的状态价值是 1.2944，“买子弹”的动作价值就等于 1.2944-4=-2.7056，开始状态的价值也是 -2.7056，而且也不会影响后续状态的价值计算。

最终得到所有的价值函数值，标在图 7 中。

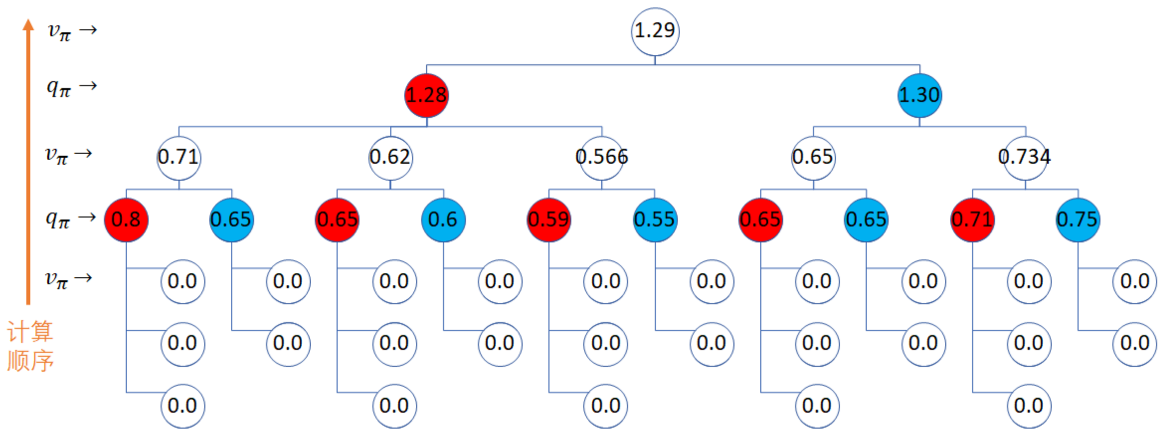


图 7

观察图 7，读者可以做同层节点的值大小的比较，再结合其实际含义找出原因。比如：

从动作节点中可以看到：

- 第一次选择蓝色气球的价值是 1.30，比选择红色气球的动作 1.28 要大，因为从统计上看，蓝色气球更容易打中，且更多的游客选择了它。
- 一旦在第一次选择了红色，无论结果如何，则后续的过程中再次选择红色的动作价值较大。
- 一旦在第一次选择了蓝色，无论结果如何，则后续的过程中再次选择蓝色的动作价值较大。
- 第四层最左侧的红色动作节点的值最高（0.8），因为它是在第一枪是射中了红色气球后，第二枪再选择红色气球，中大奖的机会更大。
- 值而最低的是第四层中间的蓝色节点（0.55），因为是选择射击红球但误伤蓝球。

从状态节点中可以看到：

- 第五层的状态值都是 0，因为它们属于终止状态，达到这些节点而得到的奖励都归属于它们的上级节点。
- 第三层最右侧的状态值（中小奖）在本层的五个状态中最高（0.734），原因是它下方的蓝色动作节点的值（0.75）很高。
- 最有趣的是第三层左侧第二个状态节点“脱靶”的状态值为 0.62，第三个状态节点的“中小奖”的状态值 0.566 要大，这是为什么呢？按理说“脱靶”应该更糟糕才对。
    - 因为它们的上游动作是选择红色气球，射击时很容易脱靶，如果在射击红色气球时却打中了蓝色气球中了小奖，那只能说明歪得离谱（哈哈），在实际中不能给这种“运气”以更高的估值。

思考与练习

1. 虽然 v_π 和 q_π 可以相互换算，但是和先有鸡还是先有蛋的问题不一样。那么在一个马尔科夫决策过程中，v_π 和 q_π 谁先出现呢？谁又是链条的最后一个呢？