



Exercício 4 — Horizonte Infinito Sem Eliminação do Transiente

Alunos

- Phelipe Silva Malheiros
- Daniel Nunes



Objetivo

- Simular uma fila M/M/1 sem eliminar o transiente para:
 - $\lambda = 9.5$ clientes/unidade de tempo
 - $\mu = 10$ clientes/unidade de tempo
 - $n = 10^3$ clientes
 - $r = 30$ repetições
- Calcular $\bar{X}(n)$, o valor teórico $E[X]$ e o viés $B = \bar{X}(n) - E[X]$.



Parâmetros

```
lambda_ = 9.5
mu = 10
n = 10**3
r = 30
```

- `lambda_` : taxa média de chegada de clientes (9.5).
- `mu` : taxa média de atendimento (10).
- `n` : número de clientes por simulação (1000).
- `r` : número de repetições (30).



Função para Simular a Fila M/M/1

```
def simulate_mm1_queue(n_clients, lambda_, mu):
    esperas = []
    tempo_chegada = 0
    tempo_fim = 0

    for _ in range(n_clients):
        chegada = np.random.exponential(1 / lambda_)
        servico = np.random.exponential(1 / mu)
        tempo_chegada += chegada
        inicio = max(tempo_chegada, tempo_fim)
        tempo_fim = inicio + servico
        espera = inicio - tempo_chegada
        esperas.append(espera)
```

```
return np.array(esperas)
```

Explicação:

- `esperas` : lista que armazena o tempo de espera de cada cliente.
- `tempo_chegada` : soma acumulada dos tempos entre chegadas.
- `tempo_fim` : instante em que o último atendimento terminou.
- Para cada cliente:
 - Gera tempo entre chegadas (exponencial) e tempo de serviço (exponencial).
 - Atualiza os tempos de chegada, início de atendimento e fim de atendimento.
 - Calcula o tempo de espera e armazena.



Valor Teórico $E[X]$

```
def theoretical_wait(lambda_, mu):  
    rho = lambda_ / mu  
    return rho / (mu * (1 - rho))
```

Explicação:

- Calcula a utilização do servidor $\rho = \lambda/\mu$.
- Usa a fórmula teórica do tempo médio de espera na fila M/M/1.



Loop Principal de Simulação

```
E_X = theoretical_wait(lambda_, mu)  
medias = []  
biases = []  
  
print(f"{'Simulação':<10} {' $\bar{X}(n)$ ':<15} {'E[X]':<15} {'Bias':<15}")  
print("=" * 55)  
  
for sim in range(1, r + 1):  
    esperas = simulate_mm1_queue(n, lambda_, mu)  
    media = np.mean(esperas)  
    bias = media - E_X  
  
    medias.append(media)  
    biases.append(bias)  
  
print(f"{'sim':<10} {'media':<15.5f} {'E_X':<15.5f} {'bias':<15.5f}")
```

Explicação:

- Calcula o valor teórico antes das simulações.

- Para cada repetição:
 - Executa a simulação com 1000 clientes.
 - Calcula a média de espera ($\bar{X}(n)$).
 - Calcula o viés B .
 - Armazena os resultados.
 - Imprime os resultados de cada simulação em formato de tabela.



Estatísticas Finais

```
print("\n=== Estatísticas Finais ===")
print(f"Tempo médio de espera (média das 30 simulações): {np.mean(medias):.5f}")
print(f"Viés médio: {np.mean(biases):.5f}")
print(f"Desvio padrão do viés: {np.std(biases, ddof=1):.5f}")
```

Explicação:

- Após as 30 simulações:
 - Calcula a média geral dos tempos de espera.
 - Calcula o viés médio.
 - Calcula o desvio padrão do viés.
- Esses dados ajudam a analisar o comportamento do sistema sem a eliminação do transiente.



Análise

Valor Teórico

O valor teórico do tempo médio de espera para uma fila M/M/1 com $\lambda = 9.5$ e $\mu = 10$ é:

$$E[X] = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = 1.9$$

Tabela

Simulação	$\bar{X}(n)$	$E[X]$	Bias
1	1.41706	1.90000	-0.48294
2	1.19544	1.90000	-0.70456
3	0.99675	1.90000	-0.90325
4	0.84620	1.90000	-1.05380
5	1.05147	1.90000	-0.84853
6	1.56355	1.90000	-0.33645
7	0.78149	1.90000	-1.11851
8	1.18912	1.90000	-0.71088
9	0.77587	1.90000	-1.12413
10	0.62014	1.90000	-1.27986
11	1.77334	1.90000	-0.12666

Simulação	$\bar{X}(n)$	$E[X]$	Bias
12	2.66906	1.90000	0.76906
13	0.69945	1.90000	-1.20055
14	0.50679	1.90000	-1.39321
15	1.67824	1.90000	-0.22176
16	1.26946	1.90000	-0.63054
17	1.22611	1.90000	-0.67389
18	1.43257	1.90000	-0.46743
19	0.79235	1.90000	-1.10765
20	1.16915	1.90000	-0.73085
21	0.54283	1.90000	-1.35717
22	1.31013	1.90000	-0.58987
23	0.66307	1.90000	-1.23693
24	0.81113	1.90000	-1.08887
25	1.90037	1.90000	0.00037
26	1.13778	1.90000	-0.76222
27	0.84578	1.90000	-1.05422
28	0.64024	1.90000	-1.25976
29	1.03743	1.90000	-0.86257
30	0.90341	1.90000	-0.99659

=== Estatísticas Finais ===

Tempo médio de espera (média das 30 simulações): 1.11486

Viés médio: -0.78514

Desvio padrão do viés: 0.47147

Tempo Médio de Espera Simulado

A média dos tempos simulados para as 30 repetições foi aproximadamente **1.11486**, ou seja, a simulação estimou um tempo de espera *menor* que o valor teórico.

Viés

O viés médio foi **-0.78514**, indicando que na maioria das simulações o tempo estimado ficou abaixo do valor teórico. Isso é esperado, pois:

Sem eliminar o transiente, o sistema inicia vazio e os primeiros clientes não precisam esperar, puxando a média para baixo.

Variabilidade entre Simulações

O desvio padrão do viés foi **0.47147**, mostrando a variação natural entre as simulações (uns experimentos mais próximos do teórico, outros mais distantes).

Simulações Individuais

Apenas duas simulações apresentaram viés positivo (tempo de espera acima do teórico). A maioria apresentou viés negativo, confirmando o efeito do transiente.

Exemplos:

Simulação 1: 1.41706 (viés -0.48294)

Simulação 10: 0.62014 (viés -1.27986)

Simulação 12: 2.66906 (viés +0.76906)

Conclusão

O transiente reduz significativamente o tempo médio de espera estimado. O viés médio negativo mostra que o sistema subestima o tempo real de espera. Para reduzir o viés, recomenda-se eliminar o transiente ou aplicar métodos de aquecimento (warm-up).