矩阵论复习

仅例题和简单知识点，帮助最快应试

施密特正交化

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{<\alpha_2, \beta_1>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{<\alpha_3, \beta_1>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1 - \frac{<\alpha_2, \beta_2>}{<\beta_2, \beta_2>}\beta_2$$

Jordan标准形

标准形

1. 求$\lambda E - A$
2. 算行列式因子$D_1(\lambda), D_2(\lambda), D_3(\lambda)$，就是k阶行列式子式
3. 算不变因子$d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda)$

   $d_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}$

   如$d_1 = 1, d_2 = \lambda - 1, d_3 = (\lambda - 1)^2$

   一次方项表示J1，平方项表示J2，平方项带上三角

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵P

定义为$P^{-1}AP = J$，且已知J

1. $AP = PJ \Rightarrow P = (p_1, p_2, p_3), PJ$可以表示出来
2. 得到$Ap_1 = ?, Ap_2 = ?, Ap_3 = ?$ 三个方程
3. 每个方程化为标准形后求线性方程组的解就行（齐次）

Hamilton-Cayley定理

- 定义

  $f(\lambda) = |\lambda E - A| \rightarrow f(A) = 0$

- 多项式除法

  $$a^2 + 2a\overset{\displaystyle a}{\sqrt{a^3 + 2a^2 + 3a + 4}}$$

学会多项式除法基本没问题

Smith标准形

1. 多项式

   全是λ

2. 和Jordan方法一样
3. 最后做出来形如这样的，1一定在左上角，向右下次数递增

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+1\end{pmatrix}$$

QR分解

1. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$
2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化成β_1,β_2,β_3

记录α和β之间的关系，如

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-2\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-3\beta_2-4\beta_1$$

等式右边全部代入得到$\vec{\beta}$和$\vec{\alpha}$的关系

3. $\vec{\beta}$单位化成$\vec{c}$，保留单位化的映射关系
4. 结果如图

$$A=(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{7}{6}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(\sqrt{6}q_1,\sqrt{3}q_2,\sqrt{2}q_3)\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{7}{6}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(q_1,q_2,q_3)\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{7}{6}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}}\\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}=QR$$

奇异值分解

$$A = U \begin{pmatrix} \sum & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H$$

1. U由AA^H的特征向量构成，正交化单位化
2. V由A^HA的特征向量构成，正交化单位化
3. $\sum$是特征值开根号
4. UV的向量要和特征值一一对应

矩阵范数

2.矩阵范数

(1) 1－范数 $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

(2) 2－范数 $\|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$

(3) ∞－范数 $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A^H\|_1$

(4) F－范数 $\|A\|_F = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(tr(A^H A)\right)^{\frac{1}{2}}$

1范数就是每列绝对值加和的最大值，无穷范数就是每行绝对值和的最大值，F范数就是所有元素绝对值平方和开根号，2范数就是最大特征根的开根号

- 待定系数法求矩阵函数

> 例3.5 设$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$，求$e^A$和$e^{tA}$ $(t\in R)$

（1）容易得到最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-2)^2$，故取$\psi(\lambda)=(\lambda-2)^2$，此时最高次数为2，故设$r(\lambda)=a+b\lambda$，由于2为特征值，所以有下面的方程组：

$$\begin{cases}f(2)=e^2\\f'(2)=e^2\end{cases}$$

容易解得$a=-e^2$，$b=e^2$，于是$r(\lambda)=e^2(\lambda-1)$，故

$$e^A=f(A)=r(A)=e^2(A-I)=e^2\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

（2）仍取$\psi(\lambda)=(\lambda-2)^2$，此时最高次数为2，故设$r(\lambda)=a+b\lambda$，由于2为特征值，所以有下面的方程组：

$$\begin{cases}f(2)=e^{2t}\\f'(2)=te^{2t}\end{cases}$$

容易解得$a=(1-2t)e^{2t}$，$b=te^{2t}$，于是$r(\lambda)=e^{2t}[(1-2t)+t\lambda]$，故

$$e^{tA}=f(A)=r(A)=e^{2t}[(1-2t)I+tA]=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{bmatrix}$$

特征值估计

1. 特征值和的平方小于等于矩阵F范数的平方

定理 5-1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$A$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\|A\|_F^2.$$

且等号当且仅当A为正规矩阵时成立.

2. 圆盘定理

定理 5-2（圆盘定理 1） 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，则$A$的一切特征值都在它的$n$个盖尔圆的并集之内，即$A$的任一特征值$\lambda$满足

$$\lambda\in S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i=\bigcup_{i=1}^{n}\{z\,|\,|z-a_{ii}|\le R_i,z\in C\}.$$

广义逆矩阵

1. 最小二乘解

$A^HAX=A^Hb$，求X就行了

2. 最小范数解、极小范数解

求加号逆A^+

加号逆的计算

（1）设A的奇异值分解为$A=U\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^T$，则

$$A^+=V\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^T$$

（2）利用公式(设 $A\in C^{m\times n}$)

$$A^+=\begin{cases}A^H(AA^H)^{-1} & \text{当 } \operatorname{rank}(A)=m\\ (A^HA)^{-1}A^H & \text{当 } \operatorname{rank}(A)=n\end{cases},$$

3. 求减号逆

例 求$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$的减号逆$A^-$.

解 因为

$$\begin{pmatrix}A & E_2\\ E_3 & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & *\\ 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2 & & \\ 0 & 1 & 0 & & *\\ 0 & 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ -3 & -7 & -2 & & \\ 0 & 1 & 0 & & *\\ 2 & 4 & 1 & & \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ -3 & 2 & -7 & & \\ 0 & 0 & 1 & & *\\ 2 & -1 & 4 & & \end{pmatrix},$$

因此，$Q=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，并且

$$A^-=Q\begin{pmatrix}E_r & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ g_{31} & g_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3-7g_{31} & 2-7g_{32}\\ g_{31} & g_{32}\\ 2+4g_{31} & -1+4g_{32}\end{pmatrix},$$

其中，g_{31},g_{32}是任意常数.

特别地，取$g_{31}=0,g_{32}=0$，得A的一个减号逆：

$$A^-=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

其他性质

不太可能考到，就象征性记一下

$$(1) N(s), D(s) 右互质 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} 的Smith形为 \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) A(s), B(s) 左互质 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} 的Smith形为 \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$$

左右互质

即对$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$进行一系列行初等变换,变成形如$\begin{bmatrix} R(s)_{p\times p} \\ 0 \end{bmatrix}$,

则$R(s)$即为$D(s)$和$N(s)$的一个$gcrd$.

最大公因子 既约性

2 行次

多项式矩阵$M(\lambda)$第 i 行的次数，记为 $\delta_{ri}M(\lambda)$ ，又可写成k_{ri}。

3 列次

多项式矩阵$M(\lambda)$第 i 列的次数，记为 $\delta_{ci}M(\lambda$ ，又可写成k_{ci} 。

【例】

$$M(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s^2+2s+1 & s \\ s-1 & s^3 & 0 \end{bmatrix}$$

有，行次 $k_{r1}=2$， $k_{r2}=3$；列次 $k_{c1}=1$，$k_{c2}=3$， $k_{c3}=1$。

【例】二个多项式矩阵如下

$$A(s) = \begin{bmatrix} 3s^2+2s & 2s+1 \\ s^2+s-3 & s \end{bmatrix}; \qquad B(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s-1 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}$$

根据$A(s)$，容易求出

$$k_{c1}=2，\quad k_{c2}=1；\quad k_{r1}=2, k_{r2}=2$$

$$\deg \det A(s) = 3$$

因而，有

$$\sum_{i=1}^{2} k_{ci} = 3 = \deg\det A(s) = 3; \qquad \sum_{i=1}^{2} k_{ri} = 4 > \deg\det A(s) = 3$$

即$A(s)$列既约的，但不是行既约的。

同理可得，$B(s)$既不是行既约的，也不是列既约的

随机过程基础

定义 1.10 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，称

$$g(t) \xlongequal{d} E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad -\infty < t < \infty$$

为 X 的**特征函数**.

分布	分布律或概率密度	期望	方差	特征函数
两点分布 (0－1 分布)	$P(X=1)=p, P(X=0)=q$, $0<p<1, p+q=1$	p	pq	$q+pe^{it}$
二项分布	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $0<p<1, p+q=1, k=0,1,\cdots,n$	np	npq	$(q+pe^{it})^n$
泊松分布	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda>0$, $k=0,1,\cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
几何分布	$P(X=k)=pq^{k-1}, 0<p<1$, $p+q=1, k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & 其他\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t}$
$N(a,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0\end{cases} \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$

定义 2.3 设 $X_T=\{X(t), t\in T\}$ 是随机过程，如果对任意 $t\in T$，$EX(t)$ 存在，则称函数

$$m_X(t) \xlongequal{d} EX(t), \quad t\in T$$

为 X_T 的**均值函数**.

若对任意 $t\in T$，$E(X(t))^2$ 存在，则称 X_T 为**二阶矩过程**，而称 $B_X(s,t)$

$\overset{\mathrm{d}}{=\!=}E[(X(s)-m_X(s))(X(t)-m_X(t))]$，$s,t\in T$ 为 X_T 的**协方差函数**.称

$$D_X(t)=B_X(t,t)=E[X(t)-m_X(t)]^2,\quad t\in T$$

为 X_T 的**方差函数**.称

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)],\quad s,t\in T$$

为 X_T 的**相关函数**.

由 Schwarz 不等式知，二阶矩过程的协方差函数和相关函数一定存在，且有下列关系：

$$B_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t), \tag{2.3}$$

特别，当 X_T 的均值函数 $m_X(t)=0$，则 $B_X(s,t)=R_X(s,t)$.

定义 2.4 设 $\{X(t),t\in T\}$，$\{Y(t),t\in T\}$ 是两个二阶矩过程，则称

$$B_{XY}(s,t)\overset{\mathrm{d}}{=\!=}E[(X(s)-m_X(s))(Y(t)-m_Y(t))],\quad s,t\in T$$

为 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 的**互协方差函数**，称

$$R_{XY}(s,t)\overset{\mathrm{d}}{=\!=}E[X(s)Y(t)]$$

为 $\{X(t),t\in T\}$ 与 $\{Y(t),t\in T\}$ 的**互相关函数**.

定义 2.5 设$\{X_t, t\in T\}$，$\{Y_t, t\in T\}$是取实数值的两个随机过程，若对任意 $t\in T$

$$Z_t = X_t + \mathrm{i}Y_t,$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，则称$\{Z_t, t\in T\}$为**复随机过程**.

当$\{X_t, t\in T\}$和$\{Y_t, t\in T\}$是二阶矩过程时，其均值函数、方差函数、相关函数和协方差函数的定义如下：

$$m_Z(t) = E(Z_t) = EX_t + \mathrm{i}EY_t,$$

$$D_Z(t) = E[|Z_t - m_Z(t)|^2]$$

$$= E[(Z_t - m_Z(t))\overline{(Z_t - m_Z(t))}],$$

$$R_Z(s,t) = E[Z_s\bar{Z}_t],$$

$$B_Z(s,t) = E[(Z_s - m_Z(s))\overline{(Z_t - m_Z(t))}].$$

由定义，易见

$$B_Z(s,t) = R_Z(s,t) - m_Z(s)\overline{m_Z(t)}.$$

复随机过程的协方差函数具有如下重要性质.

定义 2.13 设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，如果

(1) $\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程；

(2) 对任意 $t\in T$，$m_X(t) = EX(t) =$ 常数；

(3) 对任意 $s,t\in T$，$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)] = R_X(s-t)$，则称$\{X(t), t\in T\}$为**广义平稳过程**，简称为(宽)**平稳过程**.

练习

2.1 设随机过程 $X(t)=Vt+b, t\in(0,\infty)$，$b$ 为常数，V 为服从正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量.求 $X(t)$ 的一维概率密度、均值和相关函数.

2.2 设随机变量 Y 具有概率密度 $f(y)$，令

$$X(t)=e^{-Yt} \quad (t>0, Y>0),$$

求随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度及 $EX(t), R_X(t_1,t_2)$.

2.3 若从 $t=0$ 开始每隔 1/2 秒抛掷一枚均匀的硬币做试验，定义随机过程

$$X(t)=\begin{cases}\cos(\pi t), & t\text{ 时刻抛得正面},\\ 2t, & t\text{ 时刻抛得反面},\end{cases}$$

试求：(1) $X(t)$ 的一维分布函数 $F(1/2;x)$，$F(1;x)$；

(2) $X(t)$ 的二维分布函数 $F(1/2,1;x_1,x_2)$；

(3) $X(t)$ 的均值 $m_X(t)$，$m_X(1)$，方差 $\sigma_X^2(t)$，$\sigma_X^2(1)$.

2.4 设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$，其中 ω 为常数，A,B 是相互独立且服从正态 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量，求随机过程的均值和相关函数.

2.6 设随机过程 $X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$，其中 A,ω 为常数，Θ 是在 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布的随机变量，令 $Y(t)=X^2(t)$，求 $R_Y(t,t+\tau)$ 和 $R_{XY}(t,t+\tau)$.

2.7 设随机过程 $X(t)=X+Yt+Zt^2$，其中 X,Y,Z 是相互独立的随机变量，且具有均值为零，方差为 1，求随机过程 $X(t)$ 的协方差函数.

2.1 $X(t)=Vt+b$ $V\sim N(0,1)$ $X(t)$ 是 V 的 [illegible] $\sim N$

$m_X(t)=EX(t)=E(Vt+b)=tEV+Eb=0+b=b$

$D_X(t)=E[X(t)-m_X(t)]^2=E(Vt+b-b)^2=EV^2t^2=t^2EV^2$

$DV=1=EV^2-(EV)^2$ $EV^2=1$

则 $D_X(t)=t^2$

由 $\begin{cases}m_X(t)=b\\ D_X(t)=t^2\end{cases} \Rightarrow f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}t}e^{-\frac{(x-b)^2}{2t^2}}$

$m_X(t)=b.$

$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[(Vs+b)(Vt+b)]$

$=E(V^2st+Vsb+Vtb+b^2)=st+b^2.$

2.2

$\cancel{f_t(x)=f(y)\ y(x)=\frac{f(y)}{x'(y)}}$ $\cancel{X(y)=e^{-Yy}}$

$X(y)=e^{-yt}.$

$EX(t)=E(e^{-Yt})=\int_0^\infty f(y)e^{-Yt}dy.$

$R_X(t_1,t_2)=E(X(s)X(t))=E(e^{-y(t+s)})$

$=\int_0^\infty f(y)e^{-y(t+s)}dy.$

$y=y(x)$; $F'(y)=f(y)\cdot y'(x)$ $\quad Y=\frac{\ln X}{-t}$ $\quad y'(x)=-\frac{1}{tx}$

$=-\frac{f(y)}{tx}$

2.3 令A为掷○的概率　A的分布列

正	反
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t & t时刻\ 正\\ 2t & t时刻\ 反\end{cases}$$

$t=\frac{1}{2}$　$X(t)=\begin{cases}0 & 正\ \frac{1}{2}\\ 1 & 反.\ \frac{1}{2}\end{cases}$　$F(\frac{1}{2}:x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}$

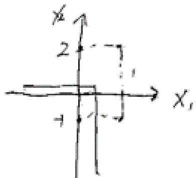
$t=1$　$x(t)\begin{cases}-1 & 正\ \frac{1}{2}\\ 2 & 反\ \frac{1}{2}\end{cases}$　$F(1:x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{2} & -1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$

(2)　$P\{X(\frac{1}{2}),X(1)\}=P\{X(\frac{1}{2})=0,X(1)=-1\}$

$X(1)$ \ $X(\frac{1}{2})$	0 正	1 反
-1 正	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2 反	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$F(\frac{1}{2},1;x_1,x_2)=$

$$\begin{cases}0 & x_1<0 或 x_2<-1\\ \frac{1}{4} & 0\le x_1<1 且 -1\le x_2<2\\ \frac{1}{2} & 1\le x_1 且 -1\le x_2<2 或 0\le x_1<1 且 x_2\ge 2\\ 1 & x_1\ge 1 且 x_2\ge 2\end{cases}$$



(3)　$m_X(t)=EX(t)=P(A=正)\cdot X(t)\big|_{正t}+P(A=反)\cdot X(t)\big|_{反t}$

$=\frac{1}{2}\cdot\cos\pi t+\frac{1}{2}\cdot 2t=\frac{\cos\pi t+2t}{2}$.

$m_X(1)=\frac{1}{2}$

$\sigma^2_X(t)=EX^2(t)-[EX(t)]^2=\frac{1}{2}\cdot X^2(t)\big|_{正t}+\frac{1}{2}X^2(t)\big|_{反t}-m_X^2(t)$

$=\frac{\cos^2\pi t+4t^2}{2}-\left(\frac{\cos\pi t+2t}{2}\right)^2=-2t\cos\pi t$.　$\sigma^2_X(1)=+2$

2.4 $EA=EB=0 \quad DA=DB=\sigma^2. \quad EA^2=EB^2=\sigma^2 \quad EAB=EAEB=0$

$m_X(t)=EX(t)=E(A\cos wt+B\sin wt)=\cos wt\,EA+\sin wt\,EB=0$

$R_X(s,t)=E(X(s)X(t))=E[(A\cos ws+B\sin ws)(A\cos wt+B\sin wt)]$

$=E[A^2\cos ws\cos wt+AB\cos ws\sin wt+AB\sin ws\cos wt+B^2\sin ws\sin wt]$

$=\sigma^2\cos ws\cos wt+\sigma^2\sin ws\sin wt$

$=\cancel{\sigma^2\cos[w(s+t)]}\ \sigma^2\cos[w(s-t)]$

2.5 $m_Y(t)=EY(t)=E(X(t)+\varphi(t))=m_X(t)+\varphi(t).$

$B_Y(s,t)=E\{[Y(s)-m_Y(s)][Y(t)-m_Y(t)]\}$

st 顺序换了，只是写错顺序

$=E\{[X(t)+\varphi(t)-m_X(t)-\varphi(t)][X(s)+\varphi(s)-m_X(s)-\varphi(s)]\}$

$=E\{[X(t)-m_X(t)][X(s)-m_X(s)]\}=B_X(s,t)$

$=B_X(t_1,t_2).$

2.6 $X(t)=A\sin(wt+\theta) \qquad E\theta=\frac{-\pi+\pi}{2}=0 \qquad D\theta=\frac{(\pi-(-\pi))^2}{12}=\frac{\pi}{3}.$

$Y(t)=X^2(t). \qquad f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & -\pi<\theta<\pi.\\ 0 & 其他.\end{cases}$

$R_Y(t,t+\tau)=E(Y(t)Y(t+\tau))=E(X^2(t)\,X^2(t+\tau))$

$=E(A^2\sin^2(wt+\theta)\cdot A^2\sin^2(wt+\tau w+\theta)) \qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}.$

$=A^4E\left(\frac{1-\cos(2wt+2\theta)}{2}\cdot\frac{1-\cos[2w(t+\tau)+2\theta]}{2}\right)=\cancel{\frac{A^4}{4}E(}$

令 $A=2wt+2\theta \quad B=2w(t+\tau)+2\theta$

$=\frac{A^4}{4}\cdot E(1+\cos A\cos B-\cos A-\cos B)$

$=\frac{A^4}{4}+E\cos A\cos B-E\cos A-E\cos B. \qquad EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.$

$=\frac{A^4}{4}(1+\frac{1}{2}\cos 2w\tau).$

$$EA=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2wt+2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2wt+2\theta)d(2wt+2\theta).$$ 周期

$$=\frac{1}{4\pi}\sin(2wt+2\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}[\underbrace{\sin(2wt+2\pi)}_{\sin 2wt}-\underbrace{\sin(2wt-2\pi)}_{\sin 2wt}]=0$$

$$EB=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2wt+2wr+2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{4\pi}[\sin(2wt+2wr+2\pi)-\sin(2wt+2wr-2\pi)]=0$$

$$EAB=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(2wt+2\theta)\cos(2wt+\overset{2wr}{\cancel{2wt}}+2\theta)d\theta$$

令 $2wt+2\theta=A$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\cos A\cos(A+\overset{2wr}{\cancel{2wt}})d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}[\cos A(\cos A\cos\overset{2wr}{\cancel{2wt}}-\sin A\sin\overset{2wr}{\cancel{2wt}})]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2A\,d\theta\cdot\cos 2rt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos A\sin A\,d\theta\cdot\sin 2rt$$

$$=\frac{\cos\overset{2wr}{\cancel{2wt}}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2A}{2}d\theta-\frac{\sin\overset{2wr}{\cancel{2wt}}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin A\,d(\sin A)$$

$$=\frac{\cos\overset{2wr}{\cancel{2wt}}}{2\pi}\cdot\Big[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}d\theta}_{\pi}+\underbrace{\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(4wt+4\theta)}{2}d(4wt+4\theta)}_{0}\Big]-\frac{\sin\overset{2wr}{\cancel{2wt}}}{2\pi}\cdot\underbrace{\frac{\sin^2A}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2wr$$

2.7 $B_X(s,t)=E\{[X(s)-m_X(s)][X(t)-m_X(t)]\}$ $EX=EY=EZ=0$

$X(t)=X+Yt+Zt^2$ $EX^2=EY^2=EZ^2=1$

$\cancel{EX(t)=m_X(t)=0}$

$\cancel{B_X(t)=1\quad EX^2(t)=1}$

$$=E\{[X+Ys+Zs^2-0][X+Yt+Zt^2-0]\}$$

$$=E[X^2+XYt+XZt^2+XYs+Y^2ts+YZst^2+XZs^2+YZs^2t+Z^2s^2t^2]$$

$$=1+0+0+0+ts+0+0+0+s^2t^2$$

$$=1+ts+s^2t^2$$

泊松过程

- 定义

  1. $X(0)=0$
  2. $X(t)$是独立、平稳增量过程
  3. 满足两个式子：

$$PX(t+h)-X(t)=1=\lambda h+o(h)$$

$$PX(t+h)-X(t)\geq 2=o(h)$$

- 数字特征

设$X(t),t\geq 0$是泊松过程，对任意t，$s\in[0,\inf)$，且$s<t$，有：

$$E[X(t)-X(s)]=D[X(t)-X(s)]=\lambda(t-s) \tag{1}$$

$$m_X(t)=\sigma_X^2=\lambda t \tag{2}$$

$$R_X(s,t)=\lambda s(\lambda t+1) \tag{3}$$

$$B_X(s,t)=\lambda\min(s,t) \tag{4}$$

$$g_X(u)=e^{\lambda t(e^{iu}-1)} \tag{5}$$

- 重要分布

设$X(t),t\geq 0$是具有参数的泊松过程，表示在任一长度为t的区间中，事件A发生的次数，$T_n,n\geq 1$是对应的时间间隔序列，$W_n,n\geq 1$是与泊松过程对应的一个等待时间序列，则：

$$PX(t+s)-X(s)=n=e^{-\lambda t}\frac{\lambda t^n}{n!} \quad n=0,1,\cdots \; F_{T_n}(t)=1-e^{\lambda t} \quad t\geq 0 \; f_{T_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t} \quad t\geq 0 \; f_{W_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad t\geq 0 \tag{5}$$

如果在$[0,t]$内事件发生了n次，则这n次到达时间W_n的分布是：

$$f(t_1,\cdots,t_n|X(t)=n)=\frac{n!}{t^n} \quad 0<t1<t2<\cdots<t_n<t \tag{6}$$

练习

3.1 设 $X_1(t)$和 $X_2(t)$是分别具有参数 λ_1和 λ_2的相互独立的泊松过程，证明

(1) $Y(t)=X_1(t)+X_2(t)$是具有参数 $\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程；

(2) $Z(t)=X_1(t)-X_2(t)$不是泊松过程.

3.1 (1) 显然$\{Y(t)\}$是独立增量过程，且

$$\begin{aligned}
&P(Y(t+\tau)-Y(t)=n)\\
&=P(X_1(t+\tau)+X_2(t+\tau)-X_1(t)-X_2(t)=n)\\
&=P(X_1(t+\tau)-X_1(t)+X_2(t+\tau)-X_2(t)=n)\\
&=\sum_{i=0}^{n}P(X_2(t+\tau)-X_2(t)=n-i,X_1(t+\tau)-X_1(t)=i)\\
&=\sum_{i=0}^{n}P(X_2(t+\tau)-X_2(t)=n-i)\\
&\quad\cdot P(X_1(t+\tau)-X_1(t)=i)\\
&=\sum_{i=0}^{n}e^{-\lambda_1\tau}\cdot\frac{(\lambda_1\tau)^i}{i!}\cdot e^{-\lambda_2\tau}\cdot\frac{(\lambda_2\tau)^{n-i}}{(n-i)!}\\
&=e^{-\lambda\tau}\cdot\frac{(\lambda\tau)^n}{n!},\ n=0,1,2,\cdots
\end{aligned}$$

故$\{Y(t)\}$服从参数$(\lambda_1+\lambda_2)$的泊松过程.

(2) $EZ(t)=E(X_1(t)-X_2(t))=EX_1(t)-EX_2(t)$
$=(\lambda_1-\lambda_2)t$,

$DZ(t)=D(X_1(t)-X_2(t))$
$=DX_1(t)+DX_2(t)=(\lambda_1+\lambda_2)t$.

由于 $EZ(t)\neq DZ(t)$，故 $Z(t)$不是泊松过程.

3.3 设电话总机在$(0,t]$内接到电话呼叫数 $X(t)$是具有强度(每分钟)为 λ 的泊松过程,求

(1) 两分钟内接到 3 次呼叫的概率;

(2) "第二分钟内收到第三次呼叫"的概率.

3.3 (1) $P(X(t+2)-X(t)=3)=\frac{(2\lambda)^3}{3!}e^{-2\lambda}=\frac{4}{3}\lambda^3 e^{-2\lambda}$.

(2)
$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{2} P(X(1)-X(0)=k, X(2)-X(1)\geqslant 3-k) \\ &= \sum_{k=0}^{2} P(X(1)-X(0)=k)P(X(2)-X(1)\geqslant 3-k) \\ &= e^{-\lambda}\left(1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}-\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}\right) \\ &\quad +\lambda e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda})+\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

3.5 设到达某路口的绿、黑、灰色的汽车的到达率分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,且均为泊松过程,它们相互独立.若把这些汽车合并成单个输出过程(假定无长度、无延时),求

(1) 相邻绿色汽车之间的不同到达时间间隔的概率密度;

(2) 汽车之间的不同到达时刻间隔的概率密度.

3.5 (1) 由定理 3.2 知绿色汽车之间的不同到达时刻的概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

(2) 由题 3.1 知,汽车合并成单个输出过程 $Y(t)$,则 $Y(t)$仍为泊松过程,其到达率为 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$,故汽车之间的不同到达时刻的概率密度为

$$f_Y(t)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

3.8 设脉冲到达计数器的规律是到达率为 λ 的泊松过程，记录每个脉冲的概率为 p，记录不同脉冲的概率是相互独立的. 令 $X(t)$ 表示已被记录的脉冲数.

(1) 求 $P\{X(t)=k\}, k=0,1,2,\cdots$；

(2) $X(t)$ 是否为泊松过程.

3.8 设 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 表示在 $[0,t]$ 区间脉冲到达计数器的个数，令

$$\xi_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个脉冲被计数器记录,}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 个脉冲没有被计数器记录,}\end{cases}$$

↵

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i .$$

根据复合泊松过程的定义知 $X(t)$ 为泊松过程，且

$$EX(t)=EN(t)\cdot E\xi_1=\lambda t\cdot p=\lambda pt .$$

三

故 $X(t)$ 的强度为 λp，

$$P(X(t)=k)=\mathrm{e}^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}, k=0,1,2,\cdots$$

↵

3.9 某商店每日 8 时开始营业，从 8 时到 11 时平均顾客到达率线性增加，在 8 时顾客平均到达率为 5 人/时，11 时到达率达最高峰 20 人/时. 从 11 时到 13 时，平均顾客到达率维持不变，为 20 人/时，从 13 时到 17 时，顾客到达率线性下降，到 17 时顾客到达率为12 人/时. 假定在不相重叠的时间间隔内到达商店的顾客数是相互独立的，问在 8:30—9:30 间无顾客到达商店的概率是多少？在这段时间内到达商店的顾客数学期望是多少？

3.9 根据题意知顾客的到达率为

$$\lambda(t)=\begin{cases}5+5t, & 0\leqslant t<3,\\ 20, & 3\leqslant t<5,\\ 20-2(t-5), & 5\leqslant t<9,\end{cases}$$

$$m_X(1.5)-m_X(0.5)=\int_{0.5}^{1.5}(5+5t)\,\mathrm{d}t=10,$$

$$P(X(1.5)-X(0.5)=0)=\mathrm{e}^{-10} .$$

3.10 设移民到某地区定居的户数是一泊松过程，平均每周有 2 户定居，即 $\lambda=2$. 如果每户的人口数是随机变量，一户四人的概率为 1/6，一户三人的概率为 1/3，一户两人的概率为 1/3，一户一人的概率为 1/6，并且每户的人口数是相互独立的，求在五周内移民到该地区人口的数学期望与方差.

3.10 设 $N(t)$ 为在时间 $[0,t]$ 内的移民户数，Y_i 表示每户的人口数，则在 $[0,t]$ 内的移民人数

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

是一个复合泊松过程，Y_i 是相互独立且具有相同分布的随机变量，其分布列为

$$P(Y=1)=P(Y=4)=1/6,\ P(Y=2)=P(Y=3)=1/3.$$

$$EY=15/6,\ EY^2=43/6.$$

根据题意知 $N(t)$ 在 5 周内是强度为 10 的泊松过程，由定理 3.6

$$m_X(5)=10\times EY_1=10\times 15/6=25,$$

$$\sigma_X(5)=10\times EY_1^2=10\times 43/6=215/3.$$

马尔可夫链

只记录教材重点

定义 4.1 设有随机过程 $\{X_n, n\in T\}$，若对于任意的整数 $n\in T$ 和任意的 $i_0, i_1, \cdots, i_{n+1}\in I$，条件概率满足

$$\begin{aligned} &P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n\} \\ &=P\{X_{n+1}=i_{n+1}\mid X_n=i_n\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

则称 $\{X_n, n\in T\}$ 为**马尔可夫链**，简称**马氏链**.

定义 4.2 称条件概率

$$p_{ij}(n)=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}$$

为马尔可夫链 $\{X_n, n\in T\}$ 在时刻 n 的**一步转移概率**，其中 $i,j\in I$，简称为**转移概率**.

定义 4.3 若对任意的 $i,j\in I$，马尔可夫链 $\{X_n, n\in T\}$ 的转移概率 $p_{ij}(n)$ 与 n 无关，则称马尔可夫链是**齐次的**，并记 $p_{ij}(n)$ 为 p_{ij}.

下面我们只讨论齐次马尔可夫链，通常将“齐次”两字省略.

设 $\boldsymbol{P}$ 表示一步转移概率 p_{ij} 所组成的矩阵，且状态空间 $I=\{1,2\cdots\}$，则

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

称为系统状态的一步转移概率矩阵，它具有性质：

(1) $p_{ij}\geqslant 0, i,j\in I$;

(2) $\sum p_{ij}=1, i\in I$.

定义 4.4 称条件概率

$$p_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\} \quad (i,j\in I, m\geqslant 0, n\geqslant 1)$$

为马尔可夫链 $\{X_n, n\in T\}$ 的 **n 步转移概率**，并称

$$\boldsymbol{P}^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})$$

为马尔可夫链的 **n 步转移矩阵**，其中 $p_{ij}^{(n)}\geqslant 0$，$\sum_{j\in I}p_{ij}^{(n)}=1$，即 $\boldsymbol{P}^{(n)}$ 也是随机矩阵.

定理 4.1 设 $\{X_n, n\in T\}$ 为马尔可夫链，则对任意整数 $n\geqslant 0, 1\leqslant l<n$ 和 $i,j\in I$，n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$ 具有下列性质：

(1) $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}$; (4.2)

(2) $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k_1\in I}\cdots\sum_{k_{n-1}\in I}p_{ik_1}p_{k_1k_2}\cdots p_{k_{n-1}j}$; (4.3)

(3) $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{(n-1)}$; (4.4)

(4) $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^n$. (4.5)

定义 4.5 设$\{X_n, n\in T\}$为马尔可夫链，称

$$p_j = P\{X_0 = j\} \text{和 } p_j(n) = p\{X_n = j\} \quad (j\in I)$$

为$\{X_n, n\in T\}$的**初始概率**和**绝对概率**，并分别称$\{p_j, j\in I\}$和$\{p_j(n), j\in I\}$为$\{X_n, n\in T\}$的**初始分布**和**绝对分布**，简记为$\{p_j\}$和$\{p_j(n)\}$. 称概率向量

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(n) = (p_1(n), p_2(n), \cdots) \quad (n>0)$$

为 n 时刻的**绝对概率向量**，而称

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(0) = (p_1, p_2, \cdots)$$

为**初始概率向量**.

定理 4.2 设$\{X_n, n\in T\}$为马尔可夫链，则对任意 $j\in I$ 和$n\geqslant 1$，绝对概率$p_j(n)$具有下列性质：

(1) $p_j(n) = \sum\limits_{i\in I} p_i p_{ij}^{(n)}$; (4.6)

(2) $p_j(n) = \sum\limits_{i\in I} p_i(n-1) p_{ij}$; (4.7)

(3) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(n) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}^{(n)}$; (4.8)

(4) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(n) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(n-1)\boldsymbol{P}$. (4.9)

- **常返和非常返的区别**

书中的定义是 $f_{ii}=\sum_{i=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}$ ，表示由 i 出发，经有限步首次到达 i 的概率。 $f_{ii}=1$ 为常返， $f_{ii}<1$ 为非常返;

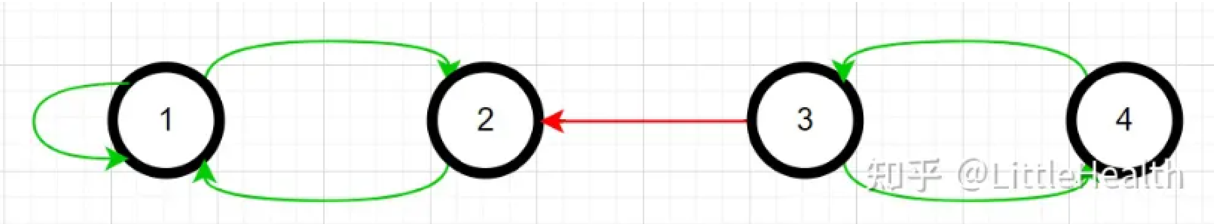


图1：常返和非常返示例

我的理解是最大的差别可以通过状态空间的分解；如上图，当运动无数次时，状态必然只会出现在1或2之间，而不可能在3或4，所以1、2就是常返，3、4就是非常返。无穷次运动后停留概率为0的状态即为非常返。

即所有常返状态才是一家人（构成一闭集）。 书上后面也就引出了马尔科夫链的状态空间的分解内容。

- **正常返和零常返的区别**

书中的定义是在为常返状态的前提下， $\mu_i=\sum_{i=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$ ，为从 i 出发回到 i 的平均回转时间;若 $\mu_i<\infty$ 为正常返；若 $\mu_i=\infty$ 为零常返。

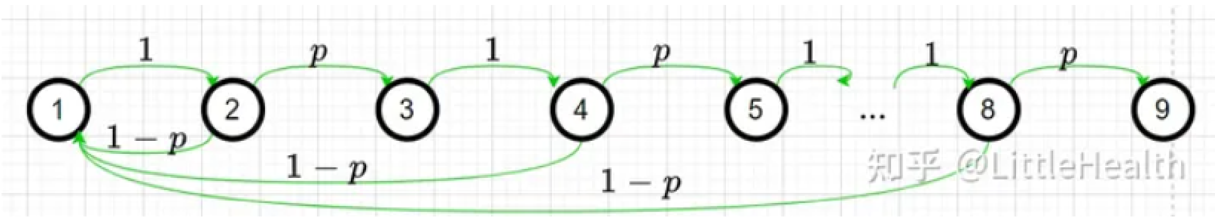


图2：正常返和零常返示例

我的理解切入点是级数的发散思维。如上图， 当 $p=1/2$ 时，
$f_{11}^{(2)}=\frac{1}{2},f_{11}^{(4)}=\frac{1}{2^2},f_{11}^{(8)}=\frac{1}{2^3}\dots$，其余为0，所以
$f_{11}=0+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2^2}+0+0+0+\frac{1}{2^3}+\dots=1$

$\mu_1=0+\frac{2}{2}+0+\frac{4}{2^2}+0+0+0+\frac{8}{2^3}+\dots=\infty$ ，故而是零常返。

然而如果设置 $p=1/4$ ，那么就有

$f_{11}^{(2)}=\frac{3}{4},f_{11}^{(4)}=\frac{3}{4^2},f_{11}^{(8)}=\frac{3}{4^3}\dots$，其余为0，所以

$$f_{11} = 0 + \frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4^2} + 0 + 0 + 0 + \frac{3}{4^3} + ... = 1$$

$\mu_1 = 3 \times (0 + \frac{2}{4} + 0 + \frac{4}{4^2} + 0 + 0 + 0 + \frac{8}{4^3} + ...) = 3$，为正常返。

总结：判断正常返和零常返的区别就在于**返回间隔(步长)和对应概率的乘积**，若为发散级数，则为零常返，反之为正常返。

需要特别说明的是，**零常返必然出现在无限的马氏链中，有限马氏链常返态只能是正常返。**

也就是说，如果马氏链是有限的（一般场景下），**只需要考虑正常返和非常返的**~

- **周期和非周期的区别**

书上周期定义是集合 $\{n : n \geq 0, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 的最大公约数。即所有返回可能的次数的最大公约数。如图2，集合为 $\{2, 4, 8, 16...\}$ 所以周期为2。当最大公约数为1，就是指非周期了。

练习

4.6 已知随机游动的转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\end{bmatrix},$$

求三步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}^{(3)}$ 及当初始分布为

$$P\{X_0=1\}=P\{X_0=2\}=0,P\{X_0=3\}=1$$

时，经三步转移后处于状态 3 的概率.

4.6 已知随机游动的转移概率矩阵为

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\end{pmatrix}$$

求三步转移概率矩阵 $\mathrm{P}^{(3)}$ 及当初始分布为

$$P\{X_0=1\}=P\{X_0=2\}=0,P\{X_0=3\}=1$$

时，经三步转移后处于状态 3 的概率。

解 $$\mathrm{P}^{(2)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.5 & 0.25\\ 0.25 & 0.25 & 0.5\\ 0.5 & 0.25 & 0.25\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}^{(3)}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.5 & 0.25\\ 0.25 & 0.25 & 0.5\\ 0.5 & 0.25 & 0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.375 & 0.375\\ 0.375 & 0.25 & 0.375\\ 0.375 & 0.375 & 0.25\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}(3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.25 & 0.375 & 0.375\\ 0.375 & 0.25 & 0.375\\ 0.375 & 0.375 & 0.25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.375 & 0.375 & 0.25\end{pmatrix}$$

所以，$p_3(3)=0.25$

4.7 已知本月销售状态的初始分布和转移概率矩阵如下：

(1) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(0)=(0.4,0.2,0.4)$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.7&0.2\\0.2&0.2&0.6\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(0)=(0.2,0.2,0.3,0.3)$，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.7&0.1&0.1&0.1\\0.1&0.6&0.2&0.1\\0.1&0.1&0.6&0.2\\0.1&0.1&0.2&0.6\end{bmatrix},$$

求下一、二个月的销售状态分布．

解 (1) $P^{T}(1)=P^{T}(0)P=\begin{pmatrix}0.4&0.2&0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.7&0.2\\0.2&0.2&0.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.42&0.26&0.32\end{pmatrix}$

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.7&0.2\\0.2&0.2&0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.7&0.2\\0.2&0.2&0.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.67&0.17&0.16\\0.19&0.54&0.27\\0.3&0.28&0.42\end{pmatrix}$$

$$P^{T}(2)=P^{T}(0)P^{(2)}=\begin{pmatrix}0.4&0.2&0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.67&0.17&0.16\\0.19&0.54&0.27\\0.3&0.28&0.42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.426&0.288&0.286\end{pmatrix}$$

(2) $P^{T}(1)=P^{T}(0)P=\begin{pmatrix}0.2&0.2&0.3&0.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.7&0.1&0.1&0.1\\0.1&0.6&0.2&0.1\\0.1&0.1&0.6&0.2\\0.1&0.1&0.2&0.6\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0.22&0.2&0.3&0.28\end{pmatrix}$$

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix}0.7&0.1&0.1&0.1\\0.1&0.6&0.2&0.1\\0.1&0.1&0.6&0.2\\0.1&0.1&0.2&0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.7&0.1&0.1&0.1\\0.1&0.6&0.2&0.1\\0.1&0.1&0.6&0.2\\0.1&0.1&0.2&0.6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.52&0.15&0.17&0.16\\0.16&0.4&0.27&0.17\\0.16&0.15&0.43&0.26\\0.16&0.15&0.27&0.42\end{pmatrix}$$

$$P^{T}(2)=P^{T}(0)P^{(2)}=(0.2,0.2,0.3,0.3)\begin{pmatrix}0.52&0.15&0.17&0.16\\0.16&0.4&0.27&0.17\\0.16&0.15&0.43&0.26\\0.16&0.15&0.27&0.42\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.232&0.2&0.298&0.27\end{pmatrix}$$

4.8 某商品六年共 24 个季度销售记录如下表(状态 1——畅销,状态 2——滞销):

季　节	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售状态	1	1	2	1	2	2	1	1	1	2	1	2
季　节	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
销售状态	1	1	2	2	1	1	2	1	2	1	1	1

以频率估计概率.求(1)销售状态的初始分布;(2)三步转移概率矩阵及三步转移后的销售状态分布.

(1)所以,销售状态的初始分布为

$$P^{T}(0)=\begin{pmatrix}\frac{15}{24} & \frac{9}{24}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.625 & 0.275\end{pmatrix}$$

(2)求一步转移概率

状态 $1\to 1$ 共有 7 个,状态 $1\to 2$ 共有 7 个,

状态 $2\to 1$ 共有 7 个,状态 $2\to 2$ 共有 2 个,

所以, $p_{11}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$, $p_{12}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$, $p_{21}=\frac{7}{9}$, $p_{22}=\frac{2}{9}$

一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix},$$

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{7}{9} & \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{9}\\ \frac{7}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\times\frac{7}{9} & \frac{7}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{23}{36} & \frac{13}{36}\\ \frac{91}{162} & \frac{71}{162}\end{pmatrix}$$

三步转移概率矩阵为

$$P^{(3)}=\begin{pmatrix}\frac{23}{36} & \frac{13}{36}\\ \frac{91}{162} & \frac{71}{162}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{23}{72}+\frac{13\times 7}{36\times 9} & \frac{23}{72}+\frac{26}{36\times 9}\\ \frac{91}{324}+\frac{71\times 7}{162\times 9} & \frac{91}{324}+\frac{71\times 2}{162\times 9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{389}{648} & \frac{259}{648}\\ \frac{1813}{2916} & \frac{1103}{2916}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.62 & 0.38\end{pmatrix}$$

三步转移后的销售状态分布为