

# ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC LORENTZ LÊN DÒNG CHẤT LƯU HARTMANN 2D

Đào Xuân Quy\*, Trần Tiến Đạt\*\*

\*Trường Đại học Quảng Bình, \*\*Trường Đại học Bách khoa-Đại học Đà Nẵng

**Tóm tắt.** Bài báo trình bày nghiên cứu ảnh hưởng của lực Lorentz lên dòng chất lưu Hartmann 2D. Đây là trường hợp mở rộng của dòng chất lưu Poiseuille 2D khi áp dụng lực Lorentz. Để xác định ảnh hưởng của lực Lorentz, phương trình trạng thái của dòng chất lưu được mô hình hoá bằng cách áp dụng phương pháp phổ vào dòng chất lưu Hartmann. Dựa trên phương trình trạng thái, ảnh hưởng của lực Lorentz lên động năng được nghiên cứu. Kết quả mô phỏng chứng minh khi lực Lorentz đủ lớn, dòng chất lưu luôn ở trạng thái chảy tầng.

**Từ khóa:** Lực Lorentz, điều khiển chất lưu, phương trình Navier Stokes, phương trình Maxwell.

## 1. GIỚI THIỆU

Chúng tôi nghiên cứu ảnh hưởng của lực Lorentz lên dòng chất lưu bằng cách xem xét ảnh hưởng của lực Lorentz lên động năng của dòng chất lưu. Từ đó, lực Lorentz có thể xem như tín hiệu điều khiển lên dòng chất lưu. Tuy nhiên, dòng chất lưu trong trường điện từ (gọi là dòng chất lưu Hartmann) được giới hạn nghiên cứu khi trường điện từ là hằng số và số Reynold điện từ có giá trị nhỏ [1, 2].

Điều khiển dòng chất lưu cho phép thay đổi trạng thái từ trạng thái hiện tại đến trạng thái mong muốn như quá trình chuyển đổi từ trạng thái chảy rối sang chảy tầng. Kỹ thuật điều khiển dòng chất lưu có nhiều ứng dụng tiềm năng, đặc biệt trong lĩnh vực giao thông khi vấn đề tiết kiệm năng lượng được chú ý, ví dụ trong hàng không: giảm lực ma sát và tăng lực nâng [3]. Một trong những mục đích chính của điều khiển chất lưu là thiết kế một luật điều khiển để đảm bảo dòng chất lưu luôn ở trạng thái chảy tầng với bất kỳ nhiễu bên ngoài [1, 2, 4, 5, 6].

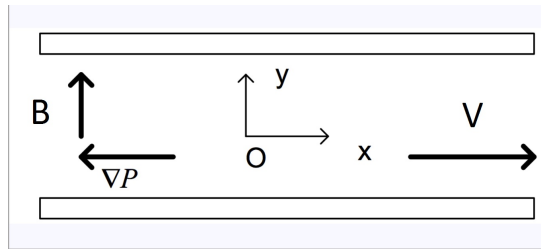
Phương trình mô tả chuyển động của dòng chất lưu trong trường điện từ là phương trình vi phân đạo hàm riêng Navier Stokes và phương trình Maxwell, đây là phương trình vi phân phi tuyến. Tuy nhiên, mô hình tuyến tính hóa thường được sử dụng để thiết kế luật điều khiển [1, 2, 4, 6, 7]. Để nghiên cứu sự ổn định của dòng chất lưu, động năng là đại lượng vật lý được chọn [8, 9]. Do đó, ảnh hưởng của lực Lorentz lên động năng được nghiên cứu để đánh giá ảnh hưởng của lực Lorentz lên dòng chất lưu. Bằng cách sử dụng phương pháp phổ để giải phương trình vi phân đạo hàm riêng, chúng ta có được phương trình trạng thái của dòng chất lưu. Mô hình của dòng chất lưu được phát triển trên phần mềm Matlab bằng cách mở rộng code cung cấp bởi McKernan [10]; Schmid và Henningson [9]. Kết quả cho thấy khi lực Lorentz đủ lớn, dòng chất lưu từ trạng thái

chảy rồi sang chảy tầng. Hơn thế nữa, bài báo xác định giá trị của lực Lorentz cần thiết để chất lưu ở trạng thái chảy tầng.

Bài báo được trình bày như sau: mục 2. giới thiệu cơ bản về dòng chất lưu Hartmann 2D; mục 3. đề cập đến phương trình trạng thái của dòng chất lưu Hartmann 2D; mục 4. mô tả kết quả mô phỏng và mục 5. trình bày kết luận.

## 2. DÒNG CHẤT LƯU HARTMANN

Dòng chất lưu giữa hai tấm phẳng do chênh lệch áp suất được nghiên cứu là dòng chất lưu dẫn điện (minh họa trong Hình 1). Trục  $Ox$  song song với hai tấm phẳng, trục  $Oy$  vuông góc với hai tấm phẳng.



Hình 1. Dòng chất lưu Hartmann 2D: chất lưu giữa hai tấm phẳng trong trường điện từ.  $\mathbf{B}$  là trường điện từ áp dụng,  $P$  là áp suất,  $\mathbf{V}$  là vận tốc của chất lưu.

Phương trình mô tả chuyển động của dòng chất lưu trong trường điện từ là tổng hợp của phương trình Navier Stokes và phương trình Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + N_s (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\ \partial_t \mathbf{B} = \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{j} = \frac{1}{R_m} \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

với  $P$  là áp suất;  $\mathbf{V}$  là vận tốc chất lưu;  $\mathbf{B}$  là trường điện từ;  $\mathbf{j}$  mật độ dòng điện;  $R$ ,  $R_m$ ,  $N_s$  là số Reynolds, số Reynolds điện từ, số Stuart;  $\partial_t$  là đạo hàm riêng theo  $t$ ;  $\nabla$  là toán tử gradient và  $\Delta$  là toán tử Laplace [1], [2].

Dòng chất lưu Hartmann 2D được xem xét như trong nghiên cứu của Xu et al. [2] khi số Reynolds điện từ có giá trị nhỏ  $R_m \ll 1$ , từ trường cảm ứng có giá trị nhỏ so với từ trường áp dụng. Hơn nữa, khi trường điện từ áp dụng  $\mathbf{B}$  được giả định là tĩnh, chúng ta có  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$  và  $\mathbf{B} \approx \mathbf{B}_0 = \mathbf{1}$ . Dòng chất lưu Hartmann 2D trong phương trình (1) có thể

được viết

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{V}_x &= -\partial_x P + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{V}_x - \mathbf{V}_x \partial_x \mathbf{V}_x - \mathbf{V}_y \partial_y \mathbf{V}_x - N_s \mathbf{V}_x \\ \partial_t \mathbf{V}_y &= -\partial_y P + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{V}_y - \mathbf{V}_x \partial_x \mathbf{V}_y - \mathbf{V}_y \partial_y \mathbf{V}_y \\ \partial_x \mathbf{V}_x + \partial_y \mathbf{V}_y &= 0, \end{cases} \quad (2)$$

với  $\mathbf{V}_x$  và  $\mathbf{V}_y$  là thành phần vận tốc  $\mathbf{V}$  theo phương  $Ox$  và  $Oy$  (tính toán chi tiết xem [1, 2]).

Từ phương trình (2), chúng ta tìm được phương trình Poisson cho áp suất  $P$

$$\nabla^2 P = -2(\partial_y \mathbf{V}_y)^2 - 2\partial_y \mathbf{V}_x \partial_x \mathbf{V}_y - N_s \partial_x \mathbf{V}_x. \quad (3)$$

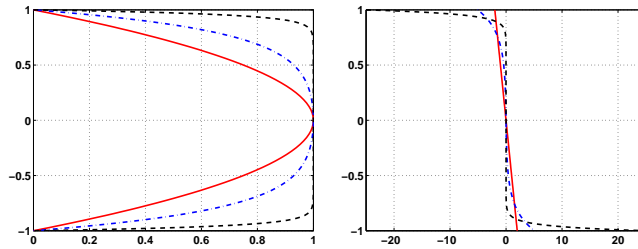
Trạng thái ổn định của dòng chất lưu (2) có thể được tính toán theo các bước tương tự như dòng chất lưu Poiseuille 2D [7]. Ở đây, trạng thái ổn định của vận tốc được giả định là  $\mathbf{V}_e = (U(y), 0)$ , do đó trạng thái ổn định của áp suất  $P_e = P(x)$  được tính

$$\partial_x P_e = \frac{1}{R} \partial_y^2 U - N_s U. \quad (4)$$

Giá trị  $P_e$  được cài đặt sao cho giá trị lớn nhất của vận tốc  $U(y)$  là 1 như dòng chất lưu Poiseuille 2D. Do đó, vận tốc và áp suất ở trạng thái ổn định được xác định

$$U = \frac{\sinh(\frac{H}{2}(1-y)) - \sinh(H) + \sinh(\frac{H}{2}(1+y))}{2\sinh(\frac{H}{2}) - \sinh(H)}; \quad P_e = \frac{H^2 \sinh(H)}{2R\sinh(\frac{H}{2}) - R\sinh(H)}x, \quad (5)$$

với  $H = \sqrt{RN_s}$  là số Hartmann [1]. Profile vận tốc được minh họa trong Hình 2 với các giá trị khác nhau của  $H$ . Chú ý, khi  $H = 0$ , dòng chất lưu Hartmann 2D là dòng chất lưu Poiseuille 2D.



Hình 2. Profile vận tốc tại điểm cân bằng  $U(y)$  (bên trái) và  $\frac{dU(y)}{dy}$  (bên phải) với những giá trị khác nhau của  $H$ : đường liền  $H = 0$ ; đường chấm-dứt đoạn  $H = 10$  và đường đứt đoạn  $H = 50$ .

### 3. MÔ HÌNH TUYẾN TÍNH HÓA

Theo phương pháp số, phương trình vi phân đạo hàm riêng có thể chuyển thành phương trình trạng thái bằng phương pháp phần tử hữu hạn, thể tích hữu hạn và phương pháp phổ. Ở đây, dòng chất lưu Hartmann 2D được giải bằng phương pháp phổ.

Xem xét sai khác giữa trạng thái hiện tại và trạng thái cân bằng

$$u = \mathbf{V}_x - U(y); \quad v = \mathbf{V}_y; \quad p = P - P_e. \quad (6)$$

Phương trình (2) được tuyến tính hoá xung quanh điểm cân bằng, (2) trở thành [2]

$$\begin{cases} \partial_t u = -\partial_x p + \frac{1}{R} \Delta u - U \partial_x u - v d_y U - \frac{H^2}{R} u \\ \partial_t v = -\partial_y p + \frac{1}{R} \Delta v - U \partial_x v \\ \partial_x u + \partial_y v = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Từ phương trình (7), bằng các phép biến đổi ta có

$$\begin{cases} \Delta p = -2d_y U \partial_x v + \frac{H^2}{R} \partial_y v \\ \partial_x u = -\partial_y v, \end{cases} \quad (8)$$

và

$$\partial_t(\Delta v) + U \partial_x(\Delta v) + \frac{H^2}{R} \partial_{y^2}^2 v - d_{y^2}^2 U \partial_x v - \frac{1}{R} \Delta^2 v = 0. \quad (9)$$

Dựa trên những nghiên cứu về điều khiển chất lưu Poiseuille 2D bằng mô hình tuyến tính được trình bày trong các nghiên cứu trước [4, 6, 7, 11], chúng tôi mở rộng nghiên cứu chất lưu Hartmann 2D.

Phần tiếp theo trình bày phương trình trạng thái của chất lưu Hartmann 2D. Theo phương pháp phổ, bằng cách sử dụng chuỗi Fourier và đa thức Chebyshev, ta có phương trình trạng thái từ phương trình đạo hàm riêng (9).

### 3.1. Rời rạc hoá theo phương x

Rời rạc hoá phương trình (9) theo phương  $Ox$  bằng cách sử dụng chuỗi Fourier theo phương  $Ox$  bằng cách tìm vận tốc  $v_c$  trong không gian Fourier của phương trình (9). Chú ý rằng vận tốc  $v$  là phần thực của  $v_c$ :  $v = \mathcal{R}_e(v_c)$ . Vận tốc  $v_c$  được tính

$$v_c(x, y, t) = \tilde{v}(y, t) e^{j\alpha x}, \quad (10)$$

với  $\alpha$  là số sóng [7].

Thay (10) vào (9), phương trình (9) được rời rạc hoá theo phương  $Ox$ :

$$(-\alpha^2 U - \partial_{y^2}^2 U - \frac{\alpha^3}{jR}) \tilde{v} + (U + \frac{2\alpha}{jR} + \frac{H^2}{j\alpha R}) \partial_{y^2}^2 \tilde{v} - \frac{1}{j\alpha R} \partial_{y^4}^4 \tilde{v} = \frac{j}{\alpha} (\partial_{y^2 t}^3 \tilde{v} - \alpha^2 \partial_t \tilde{v}). \quad (11)$$

### 3.2. Rời rạc hóa theo phương y

Tiếp theo, rời rạc hoá phương trình (11) theo phương  $Oy$  bằng cách sử dụng đa thức Chebyshev

$$\tilde{v}(y, t) = \sum_{m=5}^M a_{v,m}(t) \Xi_m(y_k), 3 \leq k \leq M-2, \quad (12)$$

với đa thức  $\Xi_n(y)$  thoả mãn điều kiện đồng nhất Dirichlet và Neumann

$$\begin{cases} \Gamma_m(y) = \cos(m \arccos(y)); \Xi_1(y) = \Gamma_1(y); \\ \Xi_2(y) = \Gamma_2(y); \Xi_3(y) = \Gamma_3(y) - \Gamma_1(y); \Xi_4(y) = \Gamma_4(y) - \Gamma_1(y) \\ \Xi_{m \geq 5, \text{odd}}(y) = \Gamma_m(y) - \Gamma_1(y) - \frac{(m-1)^2}{(m-3)^2}(\Gamma_{m-2}(y) - \Gamma_1(y)) \\ \Xi_{m \geq 5, \text{even}}(y) = \Gamma_m(y) - \Gamma_2(y) - \frac{(m-1)^2 - 1}{(m-3)^2 - 1}(\Gamma_{m-2}(y) - \Gamma_1(y)), \end{cases} \quad (13)$$

với  $\Gamma(y)$  là đa thức Chebyshev [10].

### 3.3. Phương trình trạng thái

Thay (12) vào phương trình (11), sau đó xem xét chất lưu Hartmann 2D tại  $M-5$  điểm Gauss-Lobatto  $y_k = \cos(k\pi/M)$ ,  $3 \leq k \leq M-2$ , phương trình trạng thái của chất lưu Hartmann 2D được tính bởi

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (14)$$

với biến trạng thái  $\mathbf{x}(t)$  được định nghĩa  $\mathbf{x}(t) = (a_{v,5}(t), \dots, a_{v,M}(t))$ . Ma trận trạng thái và ma trận đầu vào được xác định như sau

$$\begin{cases} \mathbf{L} = j(-\alpha^2 \mathbf{D}0_{DN}(\Xi) + \mathbf{D}2_{DN}(\Xi)) \\ \mathbf{A} = (-\alpha^3 \bar{U} - \alpha \bar{U}'' - \frac{\alpha^4 \mathbf{I}}{jR}) \mathbf{D}0_{DN}(\Xi) + (\alpha \bar{U} + \frac{(2\alpha^2 + H^2) \mathbf{I}}{jR}) \mathbf{D}2_{DN}(\Xi) - \frac{1}{jR} \mathbf{D}4_{DN}(\Xi). \end{cases} \quad (15)$$

Chú ý rằng ký hiệu  $_{DN}$  thể hiện yêu cầu điều kiện đồng nhất Dirichlet và Neumann. Ma trận đề cập trong phương trình (14) được tính bằng phương trình (15) với ma trận thành phần

$$\mathbf{D}0_{DN,in}(\Xi) = \Xi_n(y_i) \quad \mathbf{D}2_{DN,in}(\Xi) = \Xi_n''(y_i) \quad \mathbf{D}4_{DN,in}(\Xi) = \Xi_n''''(y_i), \quad (16)$$

với  $n = 5 \dots M$  và  $i = 3 \dots M-2$ . Ma trận đường chéo  $\bar{U}$ ,  $\bar{U}'$ ,  $\bar{U}''$  được tính bởi

$$\begin{cases} \bar{U} = \text{diag}(\frac{\sinh(\frac{H}{2}(1-y_i)) - \sinh(H) + \sinh(\frac{H}{2}(1+y_i))}{2\sinh(\frac{H}{2}) - \sinh(H)}) \\ \bar{U}' = \text{diag}(\frac{H - \cosh(\frac{H}{2}(1-y_i)) + \cosh(\frac{H}{2}(1+y_i))}{2\sinh(\frac{H}{2}) - \sinh(H)}) \\ \bar{U}'' = \text{diag}(\frac{H^2 \sinh(\frac{H}{2}(1-y_i)) + \sinh(\frac{H}{2}(1+y_i))}{4\sinh(\frac{H}{2}) - \sinh(H)}). \end{cases} \quad (17)$$

### 3.4. Động năng

Động năng do sai số giữa trạng thái hiện tại và trạng thái cân bằng được tính

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \frac{\|\mathbf{v}(x, y, t)\|^2}{2} dV_0, \quad (18)$$

với  $V_0$  là thể tích miền xem xét. Tương tự như trong chất lưu Poiseuille 2D [12, 13], trường hợp tuyến tính hoá, động năng được mô hình hoá bằng

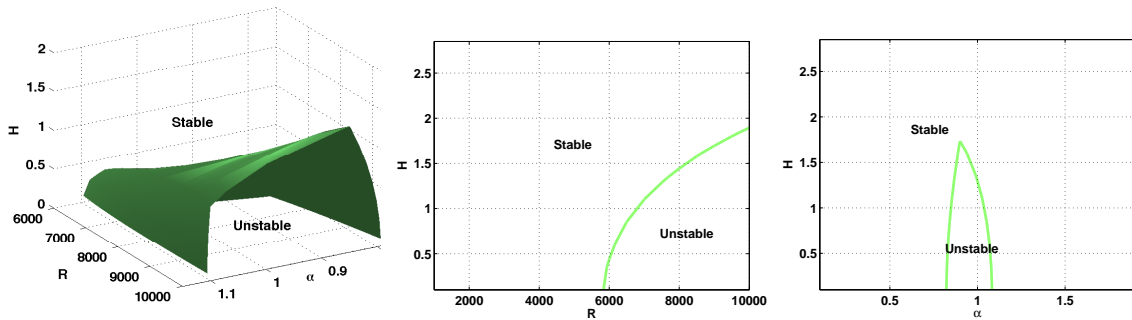
$$\varepsilon(t) = \mathbf{x}^\top(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t), \quad (19)$$

với  $\mathbf{Q}$  là ma trận hằng số.

## 4. KẾT QUẢ MÔ PHỎNG

Để xác định tính ổn định của chất lưu Hartmann 2D, đầu tiên ta xem xét tính ổn định của phương trình trạng thái (14), sau đó xét sự phát triển của động năng  $\varepsilon(t)$ . Tính ổn định của phương trình trạng thái (14) được nghiên cứu dựa trên giá trị riêng, toàn bộ giá trị riêng âm, phương trình trạng thái (14) ổn định. Động năng  $\varepsilon(t)$  giảm theo thời gian  $t$ , chất lưu ổn định [9].

Xác định miền ổn định và không ổn định của phương trình trạng thái (14) theo số Reynolds  $R$ , số Hartmann  $H$  và số sóng  $\alpha$ , được minh hoạ trong Hình 3(a). Trong hình này, chúng ta có hai miền: ổn định (stable-phía trên) và không ổn định (unstable-phía dưới). Kết quả xác định ứng với giá trị của số Reynolds  $R$  và số sóng  $\alpha$ , ta có số Hartmann  $H$  tương ứng để phương trình trạng thái (14) ổn định.

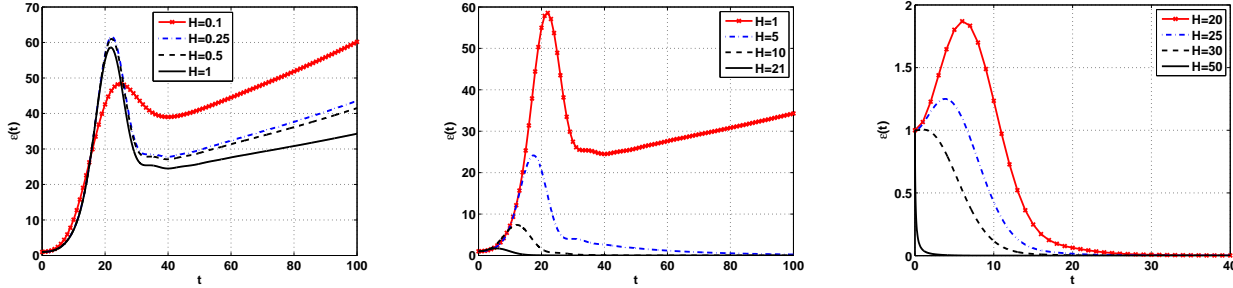


(a) Miền ổn định theo số  $H$ , số  $R$  và số  $\alpha$ . (b) Đường ổn định theo số  $H$  và số  $R$  với số  $\alpha = 1$ . (c) Đường ổn định theo số  $H$  và số  $\alpha$  với số  $R = 10\,000$ .

Hình 3. Miền ổn định của phương trình (14) theo số Hartmann, số Reynolds và số sóng.

Kết quả tiếp theo làm rõ hơn ảnh hưởng của số Hartmann  $H$  đến tính ổn định của phương trình trạng thái (14). Hình 3(b) minh hoạ tính ổn định của phương trình trạng thái (14) theo số Hartmann  $H$  và số Reynolds number  $R$  với số sóng  $\alpha = 1$ . Chú ý rằng, khi số Reynolds  $R < 5772$ , phương trình trạng thái (14) ổn định với toàn bộ giá trị của số Hartmann  $H$ ; số Reynolds  $R > 5772$ , ta có giá trị tương ứng của số Hartmann  $H$  để

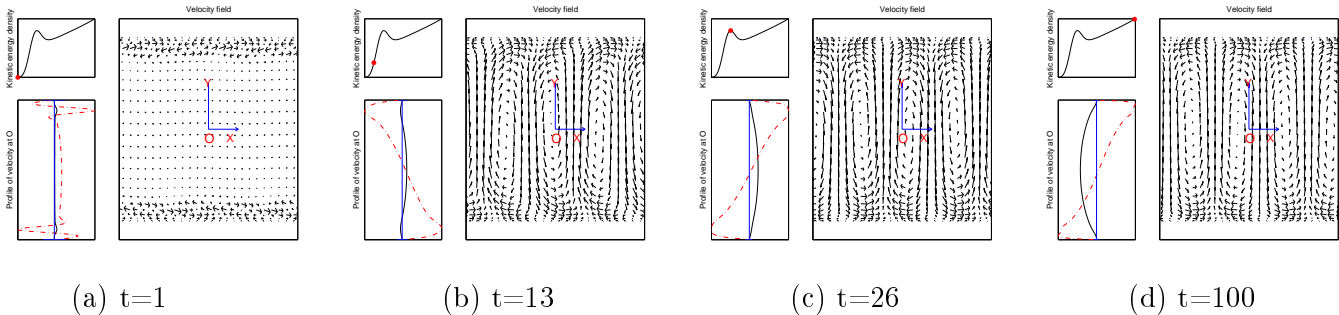
phương trình trạng thái (14) ổn định. Bằng cách tương tự, Hình 3(c) minh họa tính ổn định của phương trình trạng thái (14) theo số Hartmann  $H$  và số sóng  $\alpha$  với số Reynolds  $R = 10\,000$ . Nói cách khác, khi số Hartmann  $H$  đủ lớn, phương trình trạng thái (14) ổn định.



Hình 4. Động năng  $\varepsilon(t)$  theo thời gian  $t$  với giá trị khác nhau của số Hartmann  $H$ .

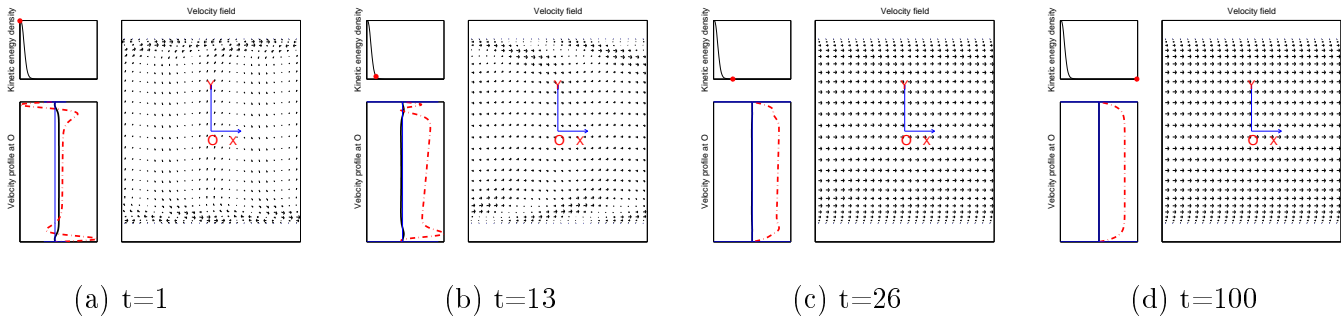
Để xác định tính ổn định của dòng chất lưu, cần xem xét sự phát triển của động năng. Trong trường hợp này, ta quan tâm trường hợp số sóng  $\alpha = 1$  và số Reynolds  $R = 10\,000$ . Hình 4 minh họa ảnh hưởng của số Hartmann lên động năng của chất lưu. Khi số Hartmann  $H > 30$ , động năng luôn luôn giảm theo thời gian. Chú ý rằng, động năng giảm theo thời gian, chất lưu ở trạng thái ổn định. Kết quả này là cơ sở để lực Lorentz là tín hiệu điều khiển đối với dòng chất lưu.

Hình 5 và Hình 6 so sánh ảnh hưởng của lực Lorentz lên dòng chất lưu. Hình 5 minh họa sự phát triển của trường vận tốc, profile vận tốc tại O và động năng theo thời gian. Trong Hình 5(a), hình bên phải phía trên là động năng; hình bên phải phía dưới là profile vận tốc; hình bên trái là trường vận tốc. Khi không có tác động của lực Lorentz, động năng tiến đến  $\infty$ , trường vận tốc luôn trong trạng thái chảy rối.



Hình 5. Trường vận tốc, profile vận tốc và động năng theo thời gian với số sóng  $\alpha = 1$ , số Reynolds  $R = 10\,000$  và số Hartmann  $H = 0$ .

Do ảnh hưởng của lực Lorentz lên dòng chất lưu, minh họa trong Hình 6, động năng tiến đến 0, trường vận tốc tiến đến trạng thái chảy tầng. Kết quả này làm rõ ảnh hưởng của lực Lorentz lên dòng chất lưu.



Hình 6. Trường vận tốc, profile vận tốc tại O và động năng theo thời gian  $t$  với số sóng  $\alpha = 1$ , số Reynolds  $R = 10\,000$  và số Hartmann  $H = 30$ .

## 5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu đã xác định ảnh hưởng của lực Lorentz lên dòng chất lưu Hartmann 2D dựa trên ảnh hưởng của lực Lorentz lên động năng. Khi lực Lorentz đủ lớn, động năng luôn giảm theo thời gian, chất lưu trở thành trạng thái chảy tầng từ trạng thái chảy rối. Kết quả này là cơ sở để lực Lorentz được xem như tín hiệu điều khiển áp dụng vào chất lưu. Trong nghiên cứu tiếp theo, ảnh hưởng của lực Lorentz lên dòng chất lưu Hartmann 3D được nghiên cứu. Từ đó, chúng ta có thể thiết kế bộ chấp hành dựa trên lực Lorentz vào mô hình thực tế.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] R. Vazquez, E. Schuster, and M. Krstic, "A closed form full state feedback controller for stabilization of 3d magnetohydrodynamic channel flow," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 131, pp. 41001–41010, 2009.
- [2] C. Xu, E. Schuster, R. Vazquez, and M. Krstic, "Stabilization of linearized 2d magnetohydrodynamic channel flow by backstepping boundary control," *System & Control Letters*, vol. 57, no. 10, pp. 805–812, 2008.
- [3] A. Flaig, "Eco-efficient by design," in *Challenges for aerodynamics engineers for future aircraft design, 8th World Congress on Computational Mechanics*, (Venice, Italy), 2008.
- [4] T. Bewley and S. Liu, "Optimal and robust control and estimation of linear paths to transition," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 365, pp. 305–349, 1998.
- [5] L. Cortelezzi, K. H. Lee, J. Kim, and J. L. Speyer, "Skin-friction drag reduction via robust reduced-order linear feedback control," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 11, pp. 79–92, 1998.
- [6] X.-Q. Dao and C. Collewet, "Drag reduction of the plane poiseuille flow by partitioned visual servo control," in *American Control Conference*, pp. 4084–4089, June 2012.
- [7] S. Joshi, J. L. Speyer, and J. Kim, "A system theory approach to the feedback stabilization of infinitesimal and finite amplitude disturbances in plane Poiseuille flow," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 332, pp. 157–184, 1997.
- [8] D. D. Joseph, *Stability of fluid motion*, vol. 1. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [9] P. J. Schmid and D. S. Henningson, *Stability and transition in shear flows*. Applied Mathematical Sciences, 142, New York: Springer-Verlag, 2001.



- [10] J. McKernan, G. Papadakis, and J. F. Whidborne, “A linear state-space representation of plane poiseuille flow for control design- a tutorial,” *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 1, no. 4, pp. 272–280, 2006.
- [11] J. McKernan, J. F. Whidborne, and G. Papadakis, “Linear quadratic control of plane poiseuille flow - the transient behaviour,” *International Journal of Control*, vol. 80, pp. 1912–1930, December 2007.
- [12] X.-Q. Dao, *Fluid Flows Control by Visual Servoing*. PhD thesis, University of Rennes 1, 2014.
- [13] J. McKernan, *Control of plane Poiseuille flow: a theoretical and computational investigation*. PhD thesis, Cranfield University, 2006.

## LORENTZ FORCE EFFECT ON 2D PLANE HARTMANN FLOW

**Abstract.** *This paper addresses to the effect of Lorentz force in the plane Hartmann flow, this is an extended case of plane Poiseuille flow when we apply the Lorentz force. In order to determine this effect, a linear state-space representation model is given by using the spectral method to model the reduced linearized plane Hartmann flow. Based on this model, we consider the effect of Lorentz force on the kinetic energy density. The simulation results show that the Lorentz force is large enough, the flow is always laminar.*

**Keywords:** *Lorentz force, flow control, Navier Stokes equations, Maxwell equation.*