ON THE EXISTENCE OF β-VISCOSITY SOLUTIONS FOR HAMILTON-JACOBI EQUATIONS

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM β-NHỚT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI

Phan Trọng Tiến
Trường Đại học Quảng Bình

ABSTRACT: *This paper is concerned with the existence of the solutions, which is an important issue of the theory of partial differential equations. We establish the existence of β-viscosity solutions for nonlinear first-order partial differential equations in Banach spaces. In particular, the existence of β-viscosity solutions is proved for equations of the form* $u+H(x,u,Du)=0$.

Keywords: *Viscosity solutions, Hamilton-Jacobi equations, Nonlinear partial differential equations.*

TÓM TẮT: *Bài báo đề cập đến một vấn đề quan trọng của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng đó là sự tồn tại nghiệm của phương trình, chúng tôi đã thiết lập được sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp 1 trong không gian Banach, cụ thể chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm của phương trình có dạng* $u+H(x,u,Du)=0$.

Từ khóa: *nghiệm nhớt, phương trình Hamilton-Jacobi, phương trình đạo hàm riêng phi tuyến.*

1. GIỚI THIỆU

Nghiệm nhớt của phương trình đạo hàm riêng được đề xuất lần đầu trong bài báo của Crandall M. G và Lions P. L.[3], đến nay nó là một lĩnh vực được các nhà toán học tập trung nghiên cứu và đã có hàng ngàn bài báo công bố về lĩnh vực này. Trong công trình nghiên cứu của mình, Borwein và Preiss đã đưa ra khái niệm β-dưới vi phân [2]. Trong đó, β là một borno trong các trường hợp đặc biệt của β ta nhận được các dưới vi phân quen thuộc như dưới vi phân Fréchet, Hadamard, Hadamard yếu, Gâteaux. Từ đó, đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi có dạng $u+H(Du)=f$. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ mở rộng kết quả trên và chứng minh sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi đầy đủ có dạng $u+H(x,u,Du)=0$.

2. NỘI DUNG

2.1 Dưới vi phân β-nhớt

Cho X là không gian Banach với chuẩn được kí hiệu $\|\cdot\|$, X^* là không gian đối ngẫu của X. Với $u\in X, p\in X^*$ thì $\langle p,u\rangle$ để chỉ giá trị của p tại u. Trong [1] các tác giả đã đưa ra khái niệm borno β, trong đó β là một họ các tập con của X thỏa mãn điều kiện là hợp các phần tử của β bằng toàn bộ không gian X; họ β đóng kín với phép nhân với một vô hướng; hợp hai phần tử bất kỳ của β đều chứa trong một phần tử của β. Trong một số trường hợp đặc biệt của β thì thu được các tô pô thường gặp. Khi β là họ tất cả các tập con đóng, bị chặn, đối xứng tâm của X là một borno và được gọi là *borno Fréchet;* khi β là họ tất cả các tập con compact, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Hadamard*; khi β là họ tất cả các tập con compact yếu, đóng, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Hadamard yếu*; khi β là họ tất cả các tập con hữu hạn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Gâteaux*.

Cho một borno β trên X ký hiệu τ_β là tôpô trên X^* với sự hội tụ đều trên β tập hợp và X_β^* là không gian véc tơ tôpô (X^*, τ_β).

Ta luôn giả thiết rằng với mỗi hàm số được xét đến đều nhận giá trị trong tập số thực mở rộng và quy ước là nửa liên tục dưới (trên) thì không đồng nhất bằng $+\infty$ $(-\infty)$ và không nhận giá trị bằng $-\infty$ $(+\infty)$.

Cho hàm f xác định trên X, ta nói rằng f là β-khả vi tại x và có β-đạo hàm $\nabla_\beta f(x) \in X_\beta^*$ nếu $f(x)$ hữu hạn và

$$\frac{f(x+tu) - f(x) - t\langle \nabla_\beta f(x), u\rangle}{t} \to 0$$

Khi $t \to 0$ đều trên $u \in V$ với bất kỳ $V \in \beta$. Ta nói rằng hàm f là β-trơn tại x nếu $\nabla_\beta f : X \to X_\beta^*$ là liên tục trong lân cận của x.

Nếu không gian X có hàm chuẩn là hàm β-trơn trên mặt cầu đơn vị thì khi đó ta nói X có chuẩn β-trơn.

Nếu không gian X không có chuẩn β-trơn nhưng có chuẩn tương đương với chuẩn β-trơn thì ta tính theo chuẩn tương đương này.

Định nghĩa 1. (Định nghĩa 2.1, [1])

Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục dưới và $f(x) < +\infty$. Ta nói rằng f là *khả dưới vi phân* β*-nhớt* và x^* là một *dưới đạo hàm* β*-nhớt* của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương g: $X \to \mathbb{R}$ sao cho g là β-trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực tiểu địa phương tại x.

Ta ký hiệu tập tất cả các dưới đạo hàm β-nhớt của f tại x là $D_\beta^- f(x)$ và gọi là *dưới vi phân* β*-nhớt* của f tại x.

Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục trên và $f(x) > -\infty$. Ta nói rằng f là *khả trên vi phân* β*-nhớt* và x^* là một *trên đạo hàm* β*-nhớt* của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương g: $X \to \mathbb{R}$ sao cho g là β-trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực đại địa phương tại x.

Ta ký hiệu tập tất cả các trên đạo hàm β-nhớt của f tại x là $D_\beta^+ f(x)$ và gọi là *trên vi phân* β*-nhớt* của f tại x.

2.2 Sự tồn tại nghiệm của phương trình Hamiton-Jacobi

Cho X là một không gian Banach thực với chuẩn β-trơn $\|\cdot\|$, $\Omega \subset X$ là một tập con mở. Chúng ta nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất, tính ổn định của nghiệm β-nhớt cho phương trình Hamilton-Jacobi sau

$$u + H(x, u, Du) = 0 \text{ trên } \Omega. \quad (1)$$

Ở đây u:Ω→ ℝ $H: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times X_\beta^* \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục, trong đó X_β^* là không gian đối ngẫu của không gian Banach X, với tôpô τ_β.

Định nghĩa 2. (Nghiệm β-nhớt của phương trình, [1])

Một hàm u:Ω→ ℝ được gọi là

• Một *nghiệm dưới β-nhớt của* (1) nếu u là nửa liên tục trên và với mọi $x \in \Omega$, $x^* \in D_\beta^+ u(x)$, $u(x) + H(x, u(x), x^*) \le 0$;

• Một *nghiệm trên β-nhớt của* (1) nếu u là nửa liên tục dưới và với mọi $x \in \Omega$, $x^* \in D_\beta^- u(x)$, $u(x) + H(x, u(x), x^*) \ge 0$;

• Một *nghiệm β-nhớt* của (1) nếu u vừa là một nghiệm dưới β-nhớt vừa là một nghiệm trên β-nhớt.

Chúng tôi nhắc lại một số kết khái niệm thường dùng. Một hàm $m:[0,\infty) \to [0,\infty)$ được gọi là một *mô đun* nếu nó liên tục, không âm, không giảm, dưới cộng tính trên $[0,\infty)$ và $m(0)=0$. Ta cũng nói rằng hàm $\sigma:[0,\infty)\times[0,\infty) \to [0,\infty)$ là *mô đun địa phương* nếu hàm $\sigma(r,R)$ là một môđun với mỗi $R \ge 0$ và $\sigma(r,R)$ liên tục và không giảm theo cả hai biến.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các giả thiết về hàm H.

(H0) tồn tại một hàm liên tục $w_R: X_\beta^* \to \mathbb{R}$ với mỗi $R > 0$, thỏa mãn

$$|H(x,r,p) - H(x,r,q)| \le w_R(p-q)$$

với mọi $x \in X$, $p, q \in X_\beta^*$ và $r \epsilon \mathbb{R}$ sao cho $\|x\|, \|q\|, \|p\| \le R.$ (H1) với mỗi $(x,p) \in X \times X_\beta^*$, r a $H(x,r,p)$ là không giảm.

(H2) tồn tại một môđun địa phương σ_H sao cho

$$H(x,r,p) - H(x,r,p+q) \le \sigma_H(\|q\|, \|p\| + \|q\|)$$

với mọi $r \epsilon \mathbb{R}$ $x \in \Omega$ và $p, q \in X_\beta^*$.

(H3) Tồn tại một mô đun m_H sao cho

$$H(,r,\lambda(\nabla_\beta \|.\|^2)(x-y)) - H(x,r,\lambda(\nabla_\beta \|.\|^2)(x-y)) \le m_H(\lambda(\nabla_\beta \|x-y\|^2) + \|qx-y\|)$$

với mọi $x, y \in \Omega$ với $x \ne y$, $r \epsilon \mathbb{R}$ và $\lambda \ge 0$.

Nếu Ω là một tập con mở của không gian Banach X và nếu u là hàm xác định trên Ω, hình bao nửa liên tục trên u^* của u được định nghĩa:

$u^* = \inf\{v : v$ là liên tục trên Ω và $v \ge u$ trên $\Omega\}$

và hình bao nửa liên tục dưới u_* của u được định nghĩa bởi:

$u_* = \sup\{v : v$ là liên tục trên Ω và $v \le u$ trên $\Omega\}$.

Bây giờ ta thiết lập sự tồn tại của nghiệm nhớt.

Định lý 3. Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và Ω là một tập con mở của X. Cho $H: \Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn (H0), (H1), (H2), (H3) và

$$\lim_{\|p\|\to\infty} \inf(r + H(x,r,p)) > 0 \text{ đều với } (x,r) \epsilon \Omega \times \mathbb{R} \quad (2)$$

Khi đó, tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình (1).

Chứng minh: Phép chứng minh được tiến hành qua hai bước:

Bước 1. Chứng minh tồn tại nghiệm dưới β-nhớt u_0 và nghiệm β-nhớt v_0.

Lấy $\lambda = 0$ và $r = 0$, từ giả thiết (H3) ta có $H(x,0,0) - H(0,0,0) \le m_H(\ x\ )$. do đó $H(x,0,0) \le H(0,0,0) + m_H\|x\| \le \|H(0,0,0)\| + m_H\|x\|$

Tương tự, ta có

$$-H(x,0,0) \le |H(0,0,0)| + m_H(\ x\ ).$$

Do đó

$$|H(x,0,0)| \le |H(0,0,0)| + m_H(\ x\ ).$$

Từ m_H là một mô đun, tồn tại các số thực A_H, B_H sao cho

$$|H(x,0,0)| \le A_H + B_H \quad x \quad , \quad \forall x \in \Omega.$$

Đặt

$$A_1 = A_H + \sigma_H(B_H, B_H), \quad A_2 = A_H + \sigma_H(B_H, 2B_H),$$

$$A_1' = A_H + \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{B_H}{1-L_H}\Big);$$

$$A_2' = A_H + \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{2B_H}{1-L_H}\Big) \text{ và}$$

$$v_0(x) = A_1 + B_H \|x\|, u_0(x) = -(A_2 + B_H \|x\|).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng v_0 là một nghiệm trên β-nhớt và u_0 là một nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (1) trên Ω.

Thật vậy, từ giả thiết (H1) và (H2), với mỗi $x \in \Omega$, $p \in D_\beta^-(\|\cdot\|)(x)$, ta có

$$H(x,0,0) \le H(x, A_1 + B_H \|x\|, 0) \le H(x, A_1 + B_H \|x\|, B_H p) + \sigma_H(B_H, B_H).$$

Do đó

$$\begin{aligned} v_0(x) + H(x, v_0(x), B_h p) &\ge A_1 + B_H\|x\| + H(x,0,0) - \sigma_H(B_H, B_H) \\ &\ge A_1 + B_H\|x\| - A_H - B_H\|x\| - \sigma_H(B_H, B_H) \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

Từ đó ta có v_0 là một nghiệm trên β-nhớt của (1).

Từ điều kiện (H1) và (H2), với mỗi $x \in \Omega$, $p \in D_\beta^-(\|\cdot\|)(x)$, ta có

$$H(x, u_0(x), -B_H p) \le H(x, 0, -B_H p) \le H(x,0,0) + \sigma_H(B_H, 2B_H).$$

Do đó

$$\begin{aligned} u_0(x) + H(x, u_0(x), -B_H p) &\le u_0(x) + H(x,0,0) + \sigma_H(B_H, 2B_H) \\ &\le u_0(x) + A_H + B_H\|x\| + \sigma_H(B_H, 2B_H) \le 0. \end{aligned}$$

Như vậy u_0 là một nghiệm dưới β-nhớt của (1).

Bước 2. Chứng minh tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình (1).

Trước hết, ta chứng minh rằng từ điều kiện (2) thì nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (1) là một hàm liên tục Lipschitz địa phương. Ngoài ra, nếu đoạn thẳng $L(x,y) \subset \Omega$ thì tồn tại hằng số C sao cho $|u(x) - u(y)| \le C\|x-y\|$. Từ điều kiện (2), tồn tại một số thực $R > 0$ sao cho

$$u(x) + H(x,u,p) > 0$$

nếu $(x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^*$ và $\|p\| \ge R.$

Giả sử u là một nghiệm dưới β-nhớt của (1). Cố định $x_0 \in \Omega$ và chọn $\delta > 0$ sao cho $B(x_0, 2\delta) \subset \Omega$ và u bị chặn trên $B(x_0, 2\delta)$. Lấy $h: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục sao cho $h(r) = (R+1)r$ với $0 \le r \le \delta/2$, $h'(r) \ge R+1$ với $r \ge 0$ và

$$h(\delta) \ge 2\sup\{|u(x)| : x \in B(x_0, 2\delta)\} + 1.$$

Cố định $y \in B(x_0, \delta)$ và đặt

$$v(x) = u(y) + h(\|x-y\|) \text{ với } x \in B(y,\delta).$$

Khi đó $u(y) = v(y)$ và $v(x) \ge \sup\{|u(z)|\, z \in B(y,\delta)\} + 1$ với $x \in \partial B(y,\delta)$. Ta sẽ chỉ ra rằng $u \le v$ trên $B(y,\delta)$ bằng phương pháp phản chứng, giả sử tồn tại $x_0 \in B(y,\delta)$ sao cho $u(x_0) > v(x_0)$. Theo Mệnh đề 1.4 trong [5] tồn tại một hàm $g \in D_\beta(X)$ sao cho $\|g\|_\infty < \dfrac{1}{2}$, $\|\nabla_\beta g\|_\infty < \dfrac{1}{2}$ và $u - v - g$ cực đại trên $\overline{B}(y,\delta)$ tại một điểm trong $\overline{x}$ của $\overline{B}(y,\delta) \setminus \{y\}$. Khi đó theo định nghĩa nghiệm dưới β-nhớt ta có

$$u(\overline{x}) + H(\overline{x}, u(\overline{x}), Dv(\overline{x}) + \nabla_\beta g(\overline{x})) \le 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (2) bởi vì

$$\|Dv(\overline{x}) + \nabla_\beta g(\overline{x})\| \ge h'(\|x-y\|) - \|\nabla_\beta g\|_\infty > R.$$

Khi đó ta có

$u(x)-u(y)\le v(x)-u(y)=h(\|x-y\|)=(R+1)(\|x-y\|)$

nếu $x\in B(y,\delta)$ và $\|x-y\|\le\dfrac{\delta}{2}$.

Biến đổi tương tự ta có được

$|u(x)-u(y)|\le(R+1)\|x-y\|$ với $x,y\in B(x_0,\delta/4)$.

Nếu đoạn thẳng $L(x,y)\subset\Omega$, do tính compact ta có thể suy ra rằng

$|u(x)-u(y)|\le(R+1)\|x-y\|$.

Gọi S là tập tất cả các hàm $w:\Omega\to\mathbb{R}$ là nghiệm dưới β-nhớt của (1) trên Ω thỏa mãn $u_0\le\omega\le v_0$.

Đặt $u=\sup\{\omega:\omega\in S\}$. Theo Mệnh đề III.7 và Kết luận III.9 trong [4] thì u^* là nghiệm dưới β-nhớt của (1). Theo chứng minh trên thì u^* là một hàm liên tục Lipschitz địa phương.

Bây giờ ta chứng minh u^* là nghiệm trên β-nhớt của (1) bằng phương pháp phản chứng. Giả sử u^* không phải là nghiệm trên β-nhớt của phương trình (1), khi đó tồn tại $\varphi\in D_\beta(X)$ và $x_0\in X$ sao cho $\nabla_\beta\varphi$ liên tục và

(i) $u^*(x_0)-\varphi(x_0)=0,\quad u^*(x)-\varphi(x_0)\ge0,$ với mọi $x\in X$.

(ii)

$u^*(x_0)+H(x_0,u^*(x_0),\nabla_\beta\varphi(x_0))<0.$

Ta kết luận rằng $\varphi(x_0)<v_0(x_0)$, vì nếu ngược lại thì $\varphi(x_0)\ge v_0(x_0)$ và $\varphi(x)\le u^*(x)\le v_0(x)$. Từ đây ta có $v_0-\varphi$ đạt cực tiểu tại x_0. Vì v_0 là nghiệm trên β-nhớt của phương trình (1) nên $u(x_0)+H(x_0,v_0(x_0),\nabla_\beta\varphi(x_0))\ge0$. Điều này mâu thuẫn với (ii).

Theo tính liên tục, tồn tại $\delta>0$ và $b\in D_\beta^*(X)$ có giá trong hình cầu $B(x_0,\delta)$ sao cho $b(x_0)>0$ và

$$u(x)+H\Big(x,\varphi(x)+b(x),\nabla_\beta\varphi(x)+\nabla_\beta b(x)\Big)<0\quad\forall x\in B(x_0,2\delta)$$

$$\varphi(x)+b(x)\le v_0(x)\ \forall x\in X.$$

Ta có thể thực hiện được nếu chọn $\delta,\ \|b\|_\infty,\|\nabla_\beta b\|_\infty$ đủ nhỏ và từ $\varphi(x_0)<v_0(x_0)$; $\varphi(x)\le v_0(x)$ với mọi $x\in X$. Đặt

$$w(x)=\begin{cases}\max\{\varphi(x)+b(x);u^*(x)\} & \text{nếu } x\in B(x_0,2\delta)\\ u^*(x) & \text{nếu } x\in X\setminus B(x_0,\delta).\end{cases}$$

Đặt $\Omega_1=X\setminus\bar{B}(x_0,\delta)$ và $\Omega_2=B(x_0,2\delta)$.

Nếu $x\in B(x_0,2\delta)\setminus\bar{B}(x_0,\delta)$ thì $u^*(x)\ge\varphi(x)=\varphi(x)+b(x)$ do đó $w=u^*$ là nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (1) trên Ω_1. Mặt khác từ $\varphi+b$ và u^* là hai nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (1) trên Ω_2 nên w là nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (1) trên $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$. Từ $u_0\le w\le v_0$, $w\in S$ nên $w\le u^*$ trên Ω. Nhưng $\varphi(x_0)+b(x_0)>\varphi(x_0)=u^*(x_0)$ từ đó $w(x_0)>u^*(x_0)$ vô lý.

Như vậy, ta đã chứng minh xong sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình (1).

3. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi, các vấn đề về tính ổn định và tính duy nhất nghiệm đã được đề cập trong các bài báo [5]. Vấn đề sự tồn tại nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi, trên khớp nối [7] là một vấn đề đáng được quan tâm, chúng tôi hy vọng rằng sẽ có những kết quả đáng ghi nhận trong thời gian tới. Ngoài ra, những ứng dụng của nghiệm nhớt trong bài toán điều khiển tối ưu như trong [6] cũng là một vấn đề mang tính thời sự và dành được sự quan tâm của nhiều tác giả.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J.M. Borwein, Q.J. Zhu (1996), Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces with applications to metric regularity, *SIAM J. Control Optim.* 34 (5), 1568-1591.

[2] J.M. Borwein, D. Preiss (1987), A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 303 (2), 517-527.

[3] M.G. Crandall, P.L. Lions (1983), Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1), 1-42.

[4] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler (1993), A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, *J. Funct. Anal.* 111 (1), 197-212.

[5] T.V. Bang, P.T Tien, (2018), On the existence, uniqueness, and stability of β-viscosity solutions to a class of Hamilton-Jacobi equations in Banach spaces, *Acta Math. Vietnam* DOI: 10.1007/s40306-018-0287-7

[6] P.T. Tien, T.V. Bang, (2019), Uniqueness of β-viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and applications to a class of optimal control problems, *Differ. Equ. Dyn. Syst.* DOI: 10.1007/s12591-019-00479-7

[7] P.T. Tien, T.V. Bang, (2019), Hamilton-Jacobi equations for optimal control on junctions with unbounded running cost functions, *Appl. Anal.* DOI: 10.1080/00036811.2019.1643012.

Liên hệ:

TS. Phan Trọng Tiến

Bộ môn Toán, Trường Đại học Quảng Bình

Địa chỉ: 312 Lý Thường Kiệt, Đồng Hới, Quảng Bình

Email: tienpt@quangbinhuni.edu.vn

Ngày nhận bài:

Ngày gửi phản biện:

Ngày duyệt đăng: