MỘT SỐ NHẬN XÉT VỀ $\beta-$ ĐẠO HÀM VÀ $\beta-$ DƯỚI VI PHÂN

Phan Trọng Tiến
Trường Đại học Quảng Bình

Tóm tắt. *Bài viết trình bày mối quan hệ giữa các $\beta-$ đạo hàm; các đạo hàm quen thuộc, chỉ ra các ví dụ về hàm khả vi theo $\beta-$ đạo hàm này nhưng không khả vi theo $\beta-$ đạo hàm khác, các tính chất của dưới vi phân $\beta-$ nhớt.*
Từ khóa: $\beta-$ khả vi, dưới vi phân $\beta-$ nhớt, trên vi phân $\beta-$ nhớt.

1. GIỚI THIỆU

Đạo hàm là một công cụ quan trọng của giải tích, có nhiều khái niệm đạo hàm như đạo hàm Fréchet, đạo hàm Hadamard, đạo hàm Hadamard yếu, đạo hàm Gâteaux. Tùy theo đặc điểm nghiên cứu mà ta quan tâm đến các đạo hàm tương ứng. Trong ứng dụng (lý thuyết nghiệm nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi và lý thuyết điều khiển tối ưu, ...) lớp hàm trơn thỏa mãn yêu cầu là rất ít, vì vậy người ta mở rộng các khái niệm đạo hàm bằng các khái niệm trên và dưới vi phân tương ứng. Cho đến nay, đã có rất nhiều kết quả, công trình về các tính chất định tính của các khái niệm này (xem [4], [6]). Vai trò quan trọng của dưới vi phân còn được khẳng định qua các ứng dụng ý nghĩa của chúng đối với lý thuyết tối ưu, lý thuyết nghiệm nhớt của phương trình đạo hàm riêng ... (xem [1], [2], [3], [4] và các tài liệu trích dẫn trong đó).

Trong [7] các tác giả Borwein và Zhu đã đưa ra khái niệm borno$-\beta$, nó là sự tổng quát hóa cho các tô pô thường gặp trong giải tích không trơn. Việc sử dụng khái niệm này hết sức linh hoạt, đối với từng lớp các tập con của không gian thì được hàm khả vi và các dưới vi phân khác nhau của hàm số nhằm đáp ứng những yêu cầu khác nhau của dưới vi phân và phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp 1 và lý thuyết điều khiển tối ưu.

Nội dung bài viết gồm hai phần: Phần 1 trình bày mối quan hệ giữa tính $\beta-$khả vi của hàm số; mối quan hệ của các đạo hàm Fréchet, Hadamard, Hadamard yếu, Gâteaux. Chỉ ra các ví dụ về hàm khả vi theo β này nhưng không khả vi theo β khác; Phần 2 trình bày dưới vi phân $\beta-$nhớt. Trong nghiên cứu này dưới vi phân được trình bày theo nghĩa nhớt (nó được ứng dụng nhiều trong lý thuyết phương trình Hamilton-Jacobi), dưới vi phân này khác với dưới vi phân được định nghĩa theo giới hạn. Nghiên cứu cũng đưa ra mối quan hệ của các dưới vi phân $\beta-$nhớt, các tính chất định tính của các dưới vi phân này. Trong các tài liệu tham khảo về bornoβ, $\beta-$khả vi, dưới vi phân $\beta-$nhớt, các tác giả chỉ trình bày khái niệm chứ không nêu các tính chất của dưới vi phân và đạo hàm. Những kết quả được trình bày trong bài báo này là kết quả được chứng minh trên cơ sở tìm hiểu những tính chất thường thấy của đạo hàm và dưới vi phân (Nhận xét 2.3; Định lí 2.12; Nhận xét 2.13; Định lí 2.15). Định lí 2.16 là sự mở rộng của Định lí 2.1 trong [10].

2. NỘI DUNG

Cho X là không gian Banach với hình cầu đóng đơn vị B và X^* là không gian đối ngẫu của nó. Ta ký hiệu $\langle x^*, x\rangle$ để chỉ giá trị của $x^* \in X^*$ tại x, tức là $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$. Trên không gian X nếu chuẩn không trơn nhưng có một chuẩn tương đương với chuẩn $\beta-$trơn thì ta sử dụng chuẩn tương đương này. Với mỗi hàm số nhận giá trị thực mở rộng và quy ước là nửa liên tục dưới (trên) thì không đồng nhất bằng $+\infty(-\infty)$ và không nhận giá trị bằng $-\infty(+\infty)$. Trong bài viết này, khi nói đến một hàm thì được hiểu là hàm đó xác định trên không gian Banach X và nhận giá trị trong tập số thực mở rộng $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1. Tính $\beta-$khả vi

Định nghĩa 2.1 ([7], tr. 1569). Một *borno* β trên X là một họ nào đó các tập con đóng, bị chặn và đối xứng tâm của X thỏa mãn ba điều kiện sau:

1) $X = \bigcup_{B\in\beta} B$,

2) Họ β đóng kín đối với phép nhân với một vô hướng,

3) Hợp của hai phần tử bất kỳ trong β đều chứa trong một phần tử của β.

Giả sử $f_m, f \in X^*$. Ta nói f_m hội tụ về f đối với borno β nếu $f_m \to f$ đều trên mọi phần tử của β, có nghĩa là với mọi tập $M \in \beta$ và mọi $\varepsilon > 0$ cho trước có một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m \geq n_0$, mọi $x \in M$ thì $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Cho một borno β trên X, ký hiệu τ_β là tôpô trên X^* với sự hội tụ đều trên β tập hợp. Ký hiệu X^*_β là không gian véc tơ tôpô (X^*, τ_β).

Ta dễ dàng kiểm tra được:

1) Họ F tất cả các tập con đóng, bị chặn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là borno Fréchet; được ký hiệu τ_F.

2) Họ H tất cả các tập con compact, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là borno Hadamard; được ký hiệu τ_H.

3) Họ WH tất cả các tập con compact yếu, đóng, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là borno Hadamard yếu; được ký hiệu τ_{WH}.

4) Họ G tất cả các tập con hữu hạn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là borno Gâteaux; được ký hiệu τ_G.

Định nghĩa 2.2 ([7], trang 1569). Cho hàm f xác định trên X, ta nói rằng f là $\beta-$khả vi tại $x \in X$ và có $\beta-$đạo hàm $\nabla_\beta f(x) \in X^*$ nếu $f(x)$ là hữu hạn và

$$\frac{f(x+tu) - f(x) - t\langle \nabla_\beta f(x), u\rangle}{t} \to 0$$

khi $t \to 0$ đều trên $u \in V$ với bất kỳ $V \in \beta$. Ta nói rằng hàm f là $\beta-$trơn tại x nếu $\nabla_\beta f : X \to X_\beta^*$ là liên tục trong lân cận của x. Khi borno β được thay bởi các họ: F, H, WH, G thì ta có các khái niệm đạo hàm tương ứng: Fréchet, Hadamard, Hadamard yếu, Gâteaux.

Theo định nghĩa ta có: nếu $\beta_1 \subset \beta_2$ thì tính β_2-khả vi kéo theo tính β_1-khả vi. Nói riêng nếu β là borno bất kỳ và f là $\beta-$khả vi tại x thì f Gâteaux-khả vi tại x, f Fréchet-khả vi tại x thì f là $\beta-$khả vi tại x.

Nhận xét 2.3. Ta dễ dàng có được các kết quả sau:

1) Nếu f, g là hai hàm $\beta-$khả vi tại x thì $f+g$ là $\beta-$khả vi tại x và $\nabla_\beta(f+g)(x) = \nabla_\beta f(x) + \nabla_\beta g(x)$.

2) Với $\alpha \in \mathbb{R}$, f là một hàm khả vi tại $x \in X$ thì hàm αf cũng khả vi tại x và $\nabla_\beta(\alpha f)(x) = \alpha \nabla_\beta f(x)$.

Nhận xét 2.4.

1) Ta có bao hàm thức $\tau_G \subset \tau_H \subset \tau_{WH} \subset \tau_F$.

Vì mọi tập hữu hạn đều là tập compact, mọi tập compact là tập compact yếu, mọi tập compact yếu đều bị chặn.

Từ đây ta có: tính Fréchet-khả vi $\Rightarrow$ tính Hadamard-khả vi yếu $\Rightarrow$ tính Hadamard-khả vi $\Rightarrow$ tính Gâteaux-khả vi.

2) Nếu X là không gian phản xạ thì tính Fréchet-khả vi $\Leftrightarrow$ tính Hadamard-khả vi yếu. Vì trong không gian phản xạ tập đóng và bị chặn khi và chỉ khi compact yếu.

3) Nếu $X = \mathbb{R}^n$ là không gian hữu hạn chiều thì tính Fréchet-khả vi $\Leftrightarrow$ tính Hadamard-khả vi yếu $\Leftrightarrow$ tính Hadamard-khả vi. Vì trong không gian hữu hạn chiều một tập đóng và bị chặn khi và chỉ khi nó là tập compact.

4) Nếu $X = \mathbb{R}$ thì tính Gâteaux-khả vi và tính Fréchet-khả vi trùng nhau. Vì khi đó hàm f khả vi bên trái và bên phải tại điểm x nên nó Fréchet-khả vi tại x.

Dưới đây là các ví dụ để chiều ngược lại của 1) trong Nhận xét 2.3 là không đúng.

Ví dụ 2.5. (Hàm Gâteaux-khả vi nhưng không Fréchet-khả vi)

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì $\dfrac{f((0,0)+t(x,y)) - f(0,0)}{t} = 0$

Nếu $x \neq 0$ và $y \neq 0$ thì $\left| \dfrac{f((0,0)+t(x,y)) - f(0,0)}{t} \right| = \dfrac{|tx^2 y|}{y^2 + t^4 x^6} \leq \dfrac{|tx^2 y|}{y^2} = |t| \dfrac{x^2}{|y|}$.

Do đó với (x,y) thuộc một tập hữu hạn nào đó, với mọi $\varepsilon > 0$ thì ta tìm được $\delta > 0$

sao cho với mọi $t \in (0,\delta)$ thì $|t|\dfrac{x^2}{|y|} < \varepsilon.$ Theo định nghĩa, hàm f là Gâteaux-khả vi tại $(0,0)$ và $\nabla_G f(0,0) = (0,0).$ Nhưng

$$\left|\frac{f((0,0)+(x,y)) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x^2 y|}{(y^2+x^6)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Chọn $(x_n, y_n) = (\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n})$ thì $\left|\dfrac{f((0,0)+(x_n,y_n)) - f(0,0)}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right| \to \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ khi $n \to \infty.$

Do đó f không Fréchet-khả vi tại $(0,0).$

Theo Nhận xét 2.4 thì f không Hadamard-khả vi yếu và cũng không Hadamard-khả vi vì hàm f xác định trên không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^2.$

Ví dụ 2.6. (Một hàm Hadamard-khả vi nhưng không Hadamard-khả vi yếu)

Xét trên không gian Hilbert $l^2 = \left\{ x = (x_n)_n : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}.$

Xét hệ các véc tơ $\{e_n, n \in \mathbb{N}\} \subset l^2$ với $e_n = (0,...,0,1_n,0,...).$ Ta xác định một hàm $f : l^2 \to \mathbb{R}$ được cho bởi $f(x) = \sup_{n \ge 1} \left\{ 2\langle e_n, x\rangle - \dfrac{1}{n} \right\}.$

Ta có $f(0) = 0$ và $|f(x) - f(y)| \le \sup_{n\ge 1} \{ |2\langle e_n, x\rangle - 2\langle e_n, y\rangle| \} \le 2\|x - y\|$ với mọi $x, y \in l^2.$ Nên f là hàm liên tục Lipschitz trên $l^2.$

Với $x = (x_n)_n \in l^2$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$ nên $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ mà $|\langle e_n, x\rangle| \le \|x_n\|$ nên $\lim_{n\to\infty} \langle e_n, x\rangle = 0,$ ta có $f(x) \ge 2\langle e_n, x\rangle - \dfrac{1}{n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in l^2.$

Ta sẽ chứng minh f là Hadamard-khả vi tại 0 và $f'(0) = 0,$ xét tập con compact V của $l^2.$ Với mọi $\varepsilon > 0,$ tồn tại hữu hạn các điểm $u_1, ..., u_m$ trong l^2 sao cho $V \subset \cup_{i=1}^m B(u_i, \varepsilon/2)$ trong đó $B(u,r)$ là hình cầu mở tâm u và bán kính $r > 0$ trong $l^2.$ Với mỗi $i = \overline{1..m},$ tồn tại $n(i,\varepsilon)$ sao cho $|\langle e_n, u_i\rangle| \le \varepsilon/2$ với mọi $n > n(i,\varepsilon).$ Lấy $n(\varepsilon) = \max_{1\le i\le m} n(i,\varepsilon).$ Với mọi $n > n(\varepsilon)$ và với mọi $v \in V.$ Ta có

$$|\langle e_n, v\rangle| \le |\langle e_n, v - u_i\rangle| + |\langle e_n, u_i\rangle| < \varepsilon.$$

Do đó $2\langle e_n, tv\rangle - \dfrac{1}{n} < 2\varepsilon |t|$ với mọi $t \in \mathbb{R}, v \in V$ và $n \ge n(\varepsilon).$

Đặt $K = 1 + \sup\{\|v\| : v \in V\},$ với $v \in V$ và $|t| \le \dfrac{1}{2Kn(\varepsilon)}$ ta có

$$2\langle e_n, tv\rangle - \frac{1}{n} < 2\|v\||t| - \frac{1}{n(\varepsilon)} \le 0.$$

Do đó, khi $|t| \le \dfrac{1}{2Kn(\varepsilon)}$ và $v \in V$ thì $f(tv) = \sup\limits_{n\ge 1}\left\{2\langle e_n, tv\rangle - \dfrac{1}{n}\right\} \le 2\varepsilon|t|$.

Suy ra $0 \le \left|\dfrac{f(0+tv)-f(0)}{t}\right| = \dfrac{f(tv)}{t} \le 2\varepsilon,$ nếu $|t| \le \dfrac{1}{2Kn(\varepsilon)}$ và $v \in V$.

Hay $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0+tv)-f(0)}{t} = 0$ đều trên $v \in V$.

Vậy hàm f Hadamard-khả vi tại $u = 0$ và $f'(0) = 0$.

Ta thấy rằng $(e_n)_n$ hội tụ yếu về 0 trong l^2, xét dãy $(t_n)_n$ với $t_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, rõ ràng $t_n \to 0.$ Nếu f là Hadamard-khả vi yếu tại $u = 0$ thì

$$\frac{f(0+t_n e_n)-f(0)}{t_n} = \frac{f(t_n e_n)}{t_n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Nhưng

$$\frac{f(t_n e_n)}{t_n} = nf\left(\frac{e_n}{n}\right) = n\sup_{m\ge 1}\left\{2\left\langle e_m, \frac{e_n}{n}\right\rangle - \frac{1}{m}\right\} \ge n\left\{2\left\langle e_n, \frac{e_n}{n}\right\rangle - \frac{1}{n}\right\}$$

với mọi $n \ge 1$.

Do đó f không Hadamard-khả vi yếu tại $u = 0$. Vì l^2, là không gian phản xạ nên f cũng không Fréchet-khả vi tại $u = 0$.

Ví dụ 2.7. (Hàm Hadamard-khả vi yếu nhưng không Fréchet-khả vi)

Xét $X = l^1(\mathbb{N})$ với hàm chuẩn được xác định $\|x\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}|x_n|$.

Theo Ví dụ 1.6, c) trong [5] thì hàm chuẩn $\|.\|$ được xác định như trên là Gâteaux-khả vi tại các điểm $x \in l^1(\mathbb{N})$ mà $x_n \ne 0, n \in \mathbb{N}$ và không Fréchet-khả vi tại bất kì điểm nào.

Theo tính chất của chuẩn thì $\|.\|$ là một hàm Lipschitz, vậy theo Nhận xét 2.4 thì tính Gâteaux-khả vi và Hadamard-khả vi của chuẩn $\|.\|$ trùng nhau. Vậy hàm chuẩn $\|.\|$ là Hadamard-khả vi nhưng không Fréchet-khả vi.

Theo [[8], trang 1124] thì trên không gian l^1 tính Gâteaux-khả vi và Hadamard-khả vi yếu của một hàm số trùng nhau. Như vậy hàm chuẩn $\|.\|$ là Hadamard-khả vi yếu nhưng không Fréchet-khả vi.

Dưới đây là kết quả về tính Gâteaux-khả vi và Hadamard-khả vi của hàm Lipschitz.

Định nghĩa 2.8. Hàm $f: X \to \mathbb{R}$ được gọi là Lipschitz địa phương tại $x \in X$ nếu tồn tại $\delta > 0$ và hằng số K sao cho

$$| f(x_1) - f(x_2) | \le K.\|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in B(x, \delta).$$

Trong đó $B(x,\delta)$ là hình cầu mở tâm x bán kính δ.

Ví dụ 2.9. Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz địa phương tại x thì hàm f Gâteaux-khả vi tại x khi và chỉ khi Hadamard-khả vi tại x.

Thật vậy, nếu f Hadamard-khả vi tại x thì hiển nhiên f Gâteaux-khả vi tại x.

Ngược lại, giả sử rằng f là hàm Gâteaux-khả vi tại x.

Vì f là hàm Lipschitz địa phương tại x nên tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho

$$| f(x_1) - f(x_2) | \le K.\|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in B(x, r_1).$$

Với V là tập compact trong X, $\varepsilon > 0$ đặt $r_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(K + \|\nabla_G f(x)\|)}$. Vì $V \subset \bigcup_{x \in V} B(x, r_2)$ nên tồn tại hữu hạn hình cầu $B(x_i, r_2), i = 1, 2, ..., n$ sao cho $V \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r_2)$.

Lấy tập hữu hạn, đối xứng tâm U chứa $x_1, x_2, ..., x_n$, theo giả thiết f là Gâteaux-khả vi tại x nên tồn tại $\delta_0 > 0$ sao cho, với mọi $t \in (-\delta_0, \delta_0)$, mọi $y \in U$ thì

$$\left| \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), y \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nói riêng

$$\left| \frac{f(x+tx_i) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), x_i \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2}, i = 1, ..., n.$$

Đặt $\delta = \min \left\{ r_1, r_2, \delta_0, \dfrac{r_1}{1 + r_2 + \max\{\|x_i\|, i = 1,..,n\}} \right\}$, với mọi $u \in V$ thì tồn tại i_0 sao cho $u \in B(x_{i_0}, r_2)$.

Với mọi $t \in (-\delta, \delta)$ ta có đánh giá

$$\|x + tu - x\| = \|t(u - x_{i_0}) + tx_{i_0}\| \le |t|.\left(r_2 + \max\{\|x_i\|, i = 1,..,n\}\right) < r_1$$

và $\|tx_{i_0}\| < r_1$. Ta phân tích

$$\frac{f(x+tu) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), u \rangle = \frac{f(x+tu) - f(x+tx_{i_0})}{t} + \langle \nabla_G f(x), x_{i_0} - u \rangle$$
$$+ \frac{f(x+tx_{i_0}) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), x_{i_0} \rangle$$

Do tính Lipschitz của hàm f nên

$$\left|\frac{f(x+tu)-f(x+tx_{i_0})}{t}\right| \le K\left\|u-x_{i_0}\right\| \le K.r_2;$$

lại có đánh giá

$$\left|\left\langle \nabla_G f(x), x_{i_0}-u\right\rangle\right| \le \left\|\nabla_G f(x)\right\|.r_2$$

Nên

$$\left|\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}-\left\langle \nabla_G f(x),u\right\rangle\right| \le r_2(K+\left\|\nabla_G f(x)\right\|)+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Vậy f là Hadamard-khả vi tại x.

2.2. Dưới vi phân $\beta-$nhớt

Định nghĩa 2.10 [Định nghĩa 2.1, [7]]

Cho $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục dưới và $f(x)<+\infty$. Ta nói rằng f là *khả dưới vi phân $\beta-$nhớt* và x^* là một *dưới đạo hàm $\beta-$nhớt* của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương $g: X \to \mathbb{R}$ sao cho g là $\beta-$trơn tại x, $\nabla_\beta g(x)=x^*$ và $f-g$ đạt cực tiểu địa phương tại x.

Ta ký hiệu tập tất cả các dưới đạo hàm $\beta-$nhớt của f tại x là $D_\beta^- f(x)$ và gọi là *dưới vi phân $\beta-$nhớt* của f tại x.

Cho $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục trên và $f(x)>-\infty$. Ta nói rằng f là *khả trên vi phân $\beta-$nhớt* và x^* là một *trên đạo hàm $\beta-$nhớt* của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương $g: X \to \mathbb{R}$ sao cho g là $\beta-$trơn tại x, $\nabla_\beta g(x)=x^*$ và $f-g$ đạt cực đại địa phương tại x.

Ta ký hiệu tập tất cả các trên đạo hàm $\beta-$nhớt của f tại x là $D_\beta^+ f(x)$ và gọi là *trên vi phân $\beta-$nhớt* của f tại x.

Nhận xét 2.11. Trong [[7], Chú ý 2.2] các tác giả đã đưa ra một định nghĩa theo giới hạn của trên vi phân $\beta-$nhớt của f tại x là tập $\partial_\beta f(x)$ như sau:

$x^* \in \partial_\beta f(x)$ nếu với mọi $\varepsilon>0$, với mọi $V\in\beta$, tồn tại $\eta>0$ sao cho

$$\frac{f(x+th)-f(x)}{t}-\left\langle x^*,h\right\rangle>-\varepsilon,\ \forall t\in(0,\eta),\ h\in V.$$

Ta có thể kiểm tra được rằng $D_\beta^- f(x)\subset\partial_\beta f(x)$. Trong [5] các tác giả chỉ ra rằng $D_F^- f(x)=\partial_F f(x)$ trong trường hợp không gian X tồn tại một hàm bump là Lipschitz và Fréchet-khả vi. Tuy nhiên hai khái niệm này là khác nhau.

Xét hàm f trong Ví dụ 2.5, đặt hàm $g(h)=-\left|f(h)-f(0)-\nabla_G f(0)h\right|=-\left|f(h)\right|$.

Khi đó

1) $\partial_G g(0) = \{0\}$;

2) $D_G^- g(0) = \varnothing$.

Thật vậy, ta kiểm tra được $\nabla_G g(0) = 0$ do đó $\partial_G g(0) = \{0\}$. Ta luôn có $D_G^- g(0) \subset \partial_G g(0)$ nên hoặc $D_G^- g(0) = \{0\}$ hoặc $D_G^- g(0) = \varnothing$. Nếu $D_G^- g(0) = \{0\}$ thì tồn tại hàm Lipschitz địa phương và Gâteaux-khả vi k sao cho $k(0) = g(0) = 0$, $\nabla_G k(0) = \nabla_G g(0) = 0$, và $k \le g$ trong một lân cận của 0. Vì k là một hàm Lipschitz địa phương và không gian $\mathbb{R}^2$ hữu hạn chiều nên k là Fréchet-khả vi tại 0. Như vậy

$$\frac{\left|f(0+h) - f(0) - \nabla_G f(0)h\right|}{\|h\|} \le -\frac{k(h) - k(0)}{\|h\|} = \frac{\left|k(h) - k(0)\right|}{\|h\|}.$$

Do đó f là Fréchet-khả vi tại 0, điều này mâu thuẫn với kết quả của Ví dụ 2.5.

Định lí 2.12.

1) Nếu $\beta_1 \subset \beta_2$ thì $D_{\beta_2}^- f(x) \subset D_{\beta_1}^- f(x)$ nói riêng $D_F^- f(x) \subset D_\beta^- f(x) \subset D_G^- f(x)$ với mọi borno β.

2) Nếu f là hàm nửa liên tục dưới, $f(x)$ hữu hạn và $D_\beta^- f(x)$, $D_\beta^+ f(x)$ là hai tập khác rỗng thì f là β - khả vi tại x.

Thật vậy, giả sử $x_1^* \in D_\beta^+ f(x)$ và $x_2^* \in D_\beta^- f(x)$. Khi đó tồn tại các hàm g_1, g_2 Lipschitz địa phương và $\beta-$trơn tại x, $x_1^* = \nabla_\beta g_1(x)$ và $x_2^* = \nabla_\beta g_2(x)$, $f - g_1$ đạt cực đại địa phương tại x, $f - g_2$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Khi đó, tồn tại $\delta_1, \delta_2 > 0$ sao cho

$$f(y) - g_1(y) \le f(x) - g_1(x), \forall y \in B(x, \delta_1)$$
$$f(y) - g_2(y) \ge f(x) - g_2(x), \forall y \in B(x, \delta_2)$$

lấy $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ta có $g_2(y) - g_1(y) \le g_2(x) - g_1(x)$, $\forall y \in B(x, \delta)$ hay $g_2 - g_1$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Theo định nghĩa dưới vi phân $\beta-$nhớt ta có $x_2^* \in \{x_1^*\}$ hay $x_2^* = x_1^*$ gọi phần tử này là x^*.

Vì g_1, g_2 là $\beta-$khả vi tại x nên với mọi $V \in \beta$, mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $t \in (-\delta, \delta)$, mọi $y \in V$ thì

$$\left|\frac{g_1(x+ty) - g_1(x)}{t} - \left\langle x^*, y\right\rangle\right| \le \varepsilon \quad \text{và} \quad \left|\frac{g_2(x+ty) - g_2(x)}{t} - \left\langle x^*, y\right\rangle\right| \le \varepsilon.$$

Suy ra

$$\frac{f(x+ty) - f(x)}{t} - \left\langle x^*, y\right\rangle \le \frac{g_1(x+ty) - g_1(x)}{t} - \left\langle x^*, y\right\rangle < \varepsilon$$

và

$$\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}-\left\langle x^*,y\right\rangle \geq \frac{g_2(x+ty)-g_2(x)}{t}-\left\langle x^*,y\right\rangle > -\varepsilon$$

nên

$$\left|\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}-\left\langle x^*,y\right\rangle\right| < \varepsilon.$$

3) Nếu $\beta_1 \subset \beta_2$ và f là β_1-khả vi tại x và f khả dưới vi phân β_2-nhớt tại x thì $D^-_{\beta_2} f(x) = \{\nabla_{\beta_1} f(x)\}$. Điều này là hiển nhiên vì nếu $x^* \in D^-_{\beta_2} f(x)$ thì $x^* \in D^-_{\beta_1} f(x)$. Theo định nghĩa dưới vi phân $\beta-$nhớt, tồn tại hàm g Lipschitz địa phương, β_1- trơn tại x, $\nabla_{\beta_1} g(x) = x^*$. Và g là β_1-khả vi tại x nên với mọi $\varepsilon > 0$, mọi $V \subset \beta_1$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$-\varepsilon < \frac{g(x+ty)-g(x)}{t}-\left\langle x^*,y\right\rangle < \varepsilon.$$

Mặt khác $f(x+ty)-f(x) \geq g(x+ty)-g(x)$ nên

$$\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}-\left\langle x^*,y\right\rangle \geq \frac{g(x+ty)-g(x)}{t}-\left\langle x^*,y\right\rangle > -\varepsilon.$$

Do đó $\left\langle x^*,y\right\rangle < \dfrac{f(x+ty)-f(x)}{t}+\varepsilon.$

Hàm f là β_1-khả vi tại x nên $\left\langle \nabla_{\beta_1} f(x),y\right\rangle > \dfrac{f(x+ty)-f(x)}{t}-\varepsilon.$

Suy ra $\left\langle x^*,y\right\rangle - \left\langle \nabla_{\beta_1} f(x),y\right\rangle < 2\varepsilon$ do đó $x^* = \nabla_{\beta_1} f(x).$

4) $D^-_\beta f(x) + D^-_\beta g(x) \subset D^-_\beta (f+g)(x).$

Thật vậy, lấy $p \in D^-_\beta f(x), q \in D^-_\beta g(x)$ khi đó tồn tại hai hàm Lipschitz địa phương h_1, h_2 sao cho h_1, h_2 là $\beta-$trơn tại x, $\nabla_\beta h_1(x) = p, \nabla_\beta h_2(x) = q$ và $f - h_1, g - h_2$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Suy ra $f + g - (h_1 + h_2)$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Do đó $\nabla_\beta (h_1 + h_2)(x) = p + q \in D^-_\beta (f+g)(x).$

5) $D^-_\beta f(x)$ là một tập lồi.

Thật vậy, với $p, q \in D^-_\beta f(x)$, $\alpha \in (0,1)$. Khi đó tồn tại hai hàm $g, h : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz địa phương tại x sao cho g, h là $\beta-$trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = p$, $\nabla_\beta h(x) = q$ và $f - g, f - h$ đạt cực tiểu địa phương tại x.

$$f(y) - g(y) \geq f(x) - g(x),\ \forall y \in B(x,r), \tag{1}$$

$$f(y) - h(y) \geq f(x) - h(x)\ \forall y \in B(x,r), \tag{2}$$

với $r > 0$ nào đó.

Nhân bất đẳng thức (1) với α và (2) với $1-\alpha$ rồi cộng theo vế ta có

$f(y)-[\alpha g+(1-\alpha)h](y)\geq f(x)-[\alpha g+(1-\alpha)h](x)$ với y ở trong một lân cận của x.

Suy ra $\nabla_\beta[\alpha g+(1-\alpha)h](x)\in D_\beta^- f(x)$, hay $\alpha p+(1-\alpha)q\in D_\beta^- f(x)$.

Theo Nhận xét 2.4 ta có các kết quả sau:

Nhận xét 2.13.

1) $D_F^- f(x)\subset D_{WH}^- f(x)\subset D_H^- f(x)\subset D_G^- f(x)$.

2) Nếu X là không gian phản xạ thì $D_F^- f(x)=D_{WH}^- f(x)$.

3) Nếu $X=\mathbb{R}^n$ thì $D_F^- f(x)=D_{WH}^- f(x)=D_H^- f(x)$.

4) Nếu $X=\mathbb{R}$ thì $D_F^- f(x)=D_G^- f(x)$.

Dưới đây là một số nhận xét về dưới vi phân của hàm lồi. Trước hết ta nhắc lại khái niệm quen thuộc về dưới vi phân của hàm lồi.

Định nghĩa 2.14 ([9], Định nghĩa 1.9). Nếu f là một hàm lồi xác định trên tập lồi C và $x\in C$, dưới vi phân của hàm f tại x là tập $\partial f(x)$ gồm tất cả các phần tử $x^*\in X^*$ thỏa mãn $\left\langle x^*, y-x\right\rangle\leq f(y)-f(x),\quad \forall y\in C$.

Định lí 2.15. Nếu f là một hàm lồi xác định trên tập lồi C và $x\in C$, với mọi borno β thì ta có $D_\beta^- f(x)=D_G^- f(x)=\partial f(x)$.

Chứng minh.

Theo 1) trong Nhận xét 2.12 thì $D_\beta^- f(x)\subset D_G^- f(x)$. Ngược lại, nếu $x^*\in D_G^- f(x)$ thì tồn tại một hàm Lipschitz địa phương g sao cho g là $\beta-$trơn tại x, $\nabla_G g(x)=x^*$ và $f-g$ đạt cực tiểu địa phương tại x (ta có thể xem $f(x)=g(x)$). Với mọi $y\in C$ ta có

$$\left\langle x^*, y-x\right\rangle=\lim_{t\to 0^+}\frac{g(x+t(y-x))-g(x)}{t}\leq\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}. \qquad (3)$$

Mặt khác, với $t\in(0,1)$ ta có biểu diễn $x+t(y-x)=(1-t)x+ty$ và do f là hàm lồi nên

$$f(x+t(y-x))\leq(1-t)f(x)+tf(y)$$
$$\Leftrightarrow f(x+t(y-x))-f(x)\leq t(f(y)-f(x))$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}\leq f(y)-f(x).$$

Suy ra

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}\leq f(y)-f(x). \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $\left\langle x^*, y-x\right\rangle\leq f(y)-f(x)\ \ \forall y\in C$. Do đó $x^*\in\partial f(x)$.

Nếu $x^*\in\partial f(x)$ thì chọn hàm $g(x)=\left\langle x^*, y-x\right\rangle+f(x)$, khi đó g là một hàm

Lipschitz địa phương g sao cho g là $\beta-$trơn tại x, $\nabla_\beta g(x)=x^*$ và $f-g$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Hay $x^*\in D_\beta^- f(x)$ nên $\partial f(x)\subset D_\beta^- f(x)$.

Một kết quả về dưới vi phân $\beta-$nhớt của hàm không trơn được thể hiện trong Định lí dưới dây. Kết quả này được phát biểu cho dưới vi phân $\beta-$nhớt, đây là sự mở rộng cho Định lí 2.1 trong [10] mà ở đó kết quả được phát biểu cho dưới vi phân Fréchet.

Định lí 2.16. Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với chuẩn $\beta-$trơn và $f_1,...,f_N : X\to\mathbb{R}$ là N hàm nửa liên tục dưới, bị chặn dưới thỏa mãn:

$$\lim_{\eta\to 0}\inf\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1,...,x_N)\le\eta\right\}<+\infty.$$

Khi đó, với mỗi $\varepsilon>0$, tồn tại $x_n\in X, n=1,...,N$ và $x_n^*\in D_\beta^- f_n(x_n)$ thỏa mãn

(i) $\operatorname{diam}(x_1,...,x_N).\max\left(1,\|x_1^*\|,...,\|x_N^*\|\right)<\varepsilon,$

(ii) $\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n)<\inf_{x\in X}\sum_{n=1}^{N} f_n(x)+\varepsilon,$

(iii) $\left\|\sum_{n=1}^{N} x_n^*\right\|<\varepsilon.$

Chứng minh.

Với mỗi số thực $t>0$, ta xác định hàm $w_t : X^N\to\mathbb{R}$ cho bởi

$$w_t(x_1,...,x_N)=\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n)+t\sum_{n,m=1}^{N}\|x_n-x_m\|^2.$$

Đặt $M_t=\inf w_t$, khi đó M_t đơn điệu tăng theo t và bị chặn trên bởi

$$\alpha:=\lim_{\eta\to 0}\inf\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1,...,x_N)\le\eta\right\}.$$

Thật vậy, với $\varepsilon>0$ bất kỳ, tồn tại $\eta_0>0$ sao cho với mọi $0<\eta<\eta_0$ thì

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) :\ \operatorname{diam}(x_1,...,x_N)\le\eta\right\}<\alpha+\varepsilon.$$

Chọn $\eta\in(0,\eta_0)$ thỏa mãn $t.N^2.\eta^2<\varepsilon$. Khi đó, tồn tại $y_1,...,y_N$ sao cho

$$\operatorname{diam}(y_1,...,y_N)<\eta \text{ và } \sum_{n=1}^{N} f_n(y_n)<\inf\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) :\ \operatorname{diam}(x_1,...,x_N)\le\eta\right\}+\varepsilon.$$

Theo cách chọn η ở trên ta có $t\sum_{n,m=1}^{N}\|y_n-y_m\|^2<\varepsilon$ nên

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(y_n) + t\sum_{n,m=1}^{N} \|y_n - y_m\|^2 < \inf\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1,...,x_N) \le \eta\right\} + 2\varepsilon < \alpha + 3\varepsilon.$$

Do đó $M_t < \alpha + 3\varepsilon,$ mà $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên $M_t \le \alpha.$

Đặt $M = \lim_{t\to+\infty} M_t$. Trên không gian tích X^N có một chuẩn tương đương với một chuẩn $\beta-$trơn. Với mỗi $t > 0$ áp dụng nguyên lí biến phân trơn [6] cho hàm w_t tồn tại một hàm ϕ_t lồi, C^1 và $x_n^t, n = 1,...,N$ sao cho $w_t + \phi_t$ đạt cực tiểu địa phương tại $(x_1^t,...,x_N^t),$ $\left\|\nabla_\beta \phi_t(x_1^t,...,x_N^t)\right\| < \dfrac{\varepsilon}{N}$ và

$$w_t(x_1^t,...,x_N^t) < \inf w_t + \frac{1}{t} \le M + \frac{1}{t}. \tag{5}$$

Với mỗi $n,$ hàm $y \mapsto w_t(x_1^t,...,x_{n-1}^t, y, x_{n+1}^t,...,x_N^t) + \phi_t(x_1^t,...,x_{n-1}^t, y, x_{n+1}^t,...,x_N^t)$ đạt cực tiểu địa phương tại $y = x_n^t$. Như vậy, với $n = 1,...,N$ thì

$$x_{n_t}^* := -\nabla_{\beta x_n}\phi_t(x_1^t,...,x_N^t) - 2t\sum_{m=1}^{N}\nabla_\beta \|.\|^2 (x_n^t - x_m^t) \in D_\beta^- f_n(x_n^t). \tag{6}$$

Do đó $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_{n_t}^* = -\sum_{n=1}^{N}\nabla_{\beta x_n}\phi_t(x_1^t,...,x_N^t) - 2t\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\nabla_\beta \|.\|^2 (x_n^t - x_m^t).$

Vì $\displaystyle\left\|-\sum_{n=1}^{N}\nabla_{\beta x_n}\phi_t(x_1^t,...,x_N^t)\right\| < \varepsilon$ và $\nabla_\beta \|.\|^2 (x_n^t - x_m^t) + \nabla_\beta \|.\|^2 (x_m^t - x_n^t) = 0$ nên $\displaystyle\left\|\sum_{n=1}^{N} x_{n_t}^*\right\| < \varepsilon.$

Theo Định nghĩa M_t, kết hợp với (5) ta có

$$M_{t/2} \le w_{t/2}(x_1^t,...,x_N^t) = w_t(x_1^t,...,x_N^t) - \frac{t}{2}\sum_{n,m=1}^{N}\left\|x_n^t - x_m^t\right\|^2 \le M_t + \frac{1}{t} - \frac{t}{2}\sum_{n,m=1}^{N}\left\|x_n^t - x_m^t\right\|^2.$$

Do đó $\displaystyle t\sum_{n,m=1}^{N}\left\|x_n^t - x_m^t\right\|^2 \le 2\left(M_t - M_{t/2} + \frac{1}{t}\right)$ nên ta có kết luận $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\sum_{n,m=1}^{N}\left\|x_n^t - x_m^t\right\|^2 = 0.$

Suy ra $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{diam}(x_1^t,...,x_N^t) = 0.$

Mặt khác ta có đánh giá $\left\|\nabla_\beta \|.\|^2 (x)\right\| \le 2.\|x\|$ nên từ công thức (6) ta có

$$\begin{aligned}\left\|x_{n_t}^*\right\| &\le \left\|-\nabla_{x_n}\phi_t(x_1^t,...,x_N^t)\right\| + 2t\left\|\sum_{m=1}^{N}\nabla\|.\|^2 (x_n^t - x_m^t)\right\| \\ &\le \frac{\varepsilon}{N} + 2t\sum_{m=1}^{N} 2\left\|x_n^t - x_m^t\right\| \le \frac{\varepsilon}{N} + 4tN\ \operatorname{diam}\left(x_1^t,...,x_N^t\right)\end{aligned}$$

suy ra $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|x_{n_t}^*\right\|=0$ do đó $\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{diam}\left(x_1^t,...,x_N^t\right).\max\left(\left\|x_{1_t}^*\right\|,...,\left\|x_{N_t}^*\right\|\right)=0.$

và $\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{diam}\left(x_1^t,...,x_N^t\right).\max\left(1,\left\|x_{1_t}^*\right\|,...,\left\|x_{N_t}^*\right\|\right)=0.$

Như vậy, vì α là một chặn trên của M_t nên ta có

$$M \le \liminf_{\eta\to 0}\left\{\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n):\ \operatorname{diam}(x_1,...,x_N)\le\eta\right\}$$

$$\le \liminf_{t\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n^t)=\liminf_{t\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} w_t(x_1^t,...,x_N^t)\le M$$

do đó $M=\liminf\limits_{\eta\to 0}\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x_n):\ \operatorname{diam}(x_1,...,x_N)\le\eta\right\}.$

Với $\eta>0$ bất kỳ ta có $\inf\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x_n):\ \operatorname{diam}(x_1,...,x_N)\le\eta\right\}\le\inf\limits_{x\in X}\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$

suy ra $M=\liminf\limits_{\eta\to 0}\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x_n):\ \operatorname{diam}(x_1,...,x_N)\le\eta\right\}\le\inf\limits_{x\in X}\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x).$

Theo cách xác định hàm w_t ta có $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x_n^t)\le w_t(x_1^t,...,x_N^t).$ Từ công thức (5) ta có

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n^t)<M+\frac{1}{t}\le\inf_{x\in X}\sum_{n=1}^{N} f_n(x)+\frac{1}{t}.$$

Lấy $x_n=x_n^t$ và $x_n^*=x_{n_t}^*, n=1,...,N$ với t đủ lớn ta có kết luận của Định lí.

3. KẾT LUẬN

Bài viết đã đưa ra một số nhận xét về $\beta-$khả vi, mối quan hệ giữa các $\beta-$khả vi khi các borno β có mối quan hệ bao hàm. Đặc biệt là đưa ra mối quan hệ giữa các đạo hàm thường gặp như: Fréchet, Hadamard yếu, Hadamard, Gâteaux. Bên cạnh đó cũng đưa ra các ví dụ chỉ ra sự khác nhau giữa các đạo hàm Fréchet, Hadamard yếu, Hadamard, Gâteaux.

Tương ứng với khái niệm $\beta-$khả vi, ta có khái niệm dưới vi phân $\beta-$nhớt, trên vi phân $\beta-$nhớt. Bài viết đưa ra một số nhận xét về tính chất dưới vi phân thường gặp và mối quan hệ của dưới vi phân thường gặp. Trong các trường hợp đặc biệt của không gian nền X, hoặc hàm số có tính chất hàm lồi thì một số dưới vi phân trùng nhau.

LỜI CẢM ƠN: *Nghiên cứu được tài trợ kinh phí bởi Trường Đại học Quảng Bình theo Quyết định số 3228/QĐ-ĐHQB ngày 18 tháng 11 năm 2016.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. (1997), *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhauser, Boston. Basel. Berlin.

[2] Crandall M. G. and Lions P. L. (1985), *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, I,* J. Funct. Anal., **(62),** 379-398.

[3] Crandall M. G., Lions P.-L. (1983), *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations,* Trans. Amer. Math. Soc. **(277)**, 1-42.

[4] Deville R., Godefroy G. & Zizler V. (1993), *A Smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions,* J. Funct. Anal., **(111),** 197-212.

[5] Deville R., Godefroy G. & Zizler V. (1993), *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **(64)**, J. Wiley & Sons, Inc., New York .

[6] Borwein J. M., Preiss D. (1987), *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions,* Trans. Amer. Math. Soc., **(303)**, 517-527.

[7] Borwein J. M., Zhu Q. J. (1996), *Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces with applications to metric regularity,* Siam J. Control and Optimization, **(34)**, 1568-1591.

[8] Borwein J. M., Fabian F. (1993), *On convex functions having points of Gâteaux differetiability which are not points of Fréchet differetiability,* Canad. J. Math., **(45),** 1121-1134.

[9] Phelps, R. R. (1989), *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability,* Berlin etc., Springer-Verlag.

[10] Borwein J. M. and Zhu Q. J. (1999), *A survey of subdifferential calculus with applications,* Journal nonlinear analysis, **(38),** 687-773.

REMARKS ON $\beta-$DERIVATIVES AND $\beta-$SUBDIFFERENTIAL

Abstract. *This paper presents the connections between different $\beta-$derivatives, usual derivatives; and properties of subdifferential $\beta-$viscosity. We also construct functions which are differentiable with respect to a $\beta-$derivative but not differentiable with respect to another $\beta-$derivative.*

Keywords: $\beta-$differentiable, $\beta-$viscosity, subdifferential, $\beta-$viscosity superdifferential.