VỀ PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO VÀ MA TRẬN TRỰC GIAO

Nguyễn Tiến Quang
Hội Toán học Hà Nội
Lê Thị Hoài Thu
Trường Đại học Quảng Bình

Tóm tắt. *Phép biến đổi trực giao gắn liền với bài toán phân loại các đường, mặt bậc hai trong một không gian Euclide. Nó có nhiều cách đặc trưng thông qua không gian vectơ hoặc ma trận, và do đó có thể định nghĩa theo nhiều cách rất khác nhau về hình thức. Trong bài này, chúng tôi trình bày khái niệm này thông qua hệ vectơ trực giao. Sau đó thảo luận về một vài cách trình bày khác.*

Từ khóa: phép biến đổi trực giao, không gian Euclide, vectơ trực giao, ma trận trực giao.

1. MỞ ĐẦU

Đã có những cách xây dựng khác nhau cho một bài giảng về Đại số tuyến tính. Chúng ta có thể xuất phát từ khái niệm không gian vectơ và ánh xạ tuyến tính, sau đó đưa các khái niệm ma trận - định thức vào như một công cụ tính toán (xem [1, 2]). Theo cách khác, có thể xây dựng chương trình theo thứ tự ngược lại. Nội dung về ma trận mang tính kỹ thuật nhiều hơn với nhiều tính toán sơ cấp, bởi vậy về khía cạnh nào đó nó không quá xa lạ với sinh viên ở học kỳ đầu tiên. Trong khi đó, ánh xạ tuyến tính cùng với không gian vectơ là một đối tượng toán học hiện đại, được xây dựng theo phương pháp tiên đề, mô phỏng không gian hình học thông thường. Nó là mới đối với sinh viên về ý tưởng.

Khi nghiên cứu các ánh xạ tuyến tính người ta đã thay thế chúng bởi các ma trận thích hợp, điều đó cho phép chúng ta giải quyết nhiều bài toán của ánh xạ tuyến tính thông qua các ma trận. Điều này đôi khi tạo nên một hiểu lầm, xem đại số tuyến tính như một môn học về ma trận cùng với những kỹ thuật tính toán trên chúng.

Đối với một số trường đại học kỹ thuật việc giảng dạy sâu về lý thuyết các không gian vectơ có thể là điều không cần thiết, tuy nhiên chúng tôi cho rằng một số vấn đề về cơ sở lý thuyết của một số thuật toán cần được hiểu rõ.

Điều đầu tiên chúng tôi muốn nhắc tới đẳng cấu

$$Hom_{\kappa}(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_m) \cong \mathrm{M}_{n,p}(\kappa)$$

giữa không gian $\mathrm{M}_{n,p}(\kappa)$ các ma trận cấp (n,p) trên trường κ với không gian $Hom_{\kappa}(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_m)$ của các κ-ánh xạ tuyến tính và đẳng cấu

$$End_{\kappa}(\mathrm{V}_n) \cong \mathrm{M}_k(\kappa)$$

giữa đại số các phép biến đổi tuyến tính của không gian tuyến tính V_n với đại số các ma trận vuông cấp n. Chính đẳng cấu thứ hai này cho ta một giải thích về *định nghĩa phép nhân* hai ma trận.

Do các đẳng cấu này ta có thể đồng nhất một ánh xạ tuyến tính với một ma trận, và xem ma trận như một thể hiện, một phương tiện kỹ thuật để nghiên cứu không gian vectơ. Trong bài này chúng tôi sẽ nêu một cách trình bày (xem thêm [2]) cho ý tưởng này đối với hai vấn đề cụ thể:

1. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc và phép chéo hóa ma trận.
2. Đưa đường, mặt bậc hai về dạng chính tắc và phép chéo hóa trực giao.

2. MA TRẬN TRỰC GIAO

Việc tìm các không gian con bất biến qua một phép biến đổi dẫn tới các khái niệm vectơ riêng, giá trị riêng của phép biến đổi đó. Sau đó, việc tìm các giá trị riêng, vectơ riêng cuả phép biến đổi *f* được đưa về tìm nghiệm của phương trình đặc trưng $|A-kI|=0$ và tìm nghiệm của phương trình ma trận $|A-kI|X=0$ (mà dạng tường minh của nó là một hệ phương trình tuyến tính với ma trận các hệ số là $A-kI$). Do sự đồng nhất của *f* với ma trận $A=A_f$ nên ta cũng gọi giá trị riêng, vectơ riêng của *f* tương ứng là giá trị riêng, vectơ riêng của *A*. Cũng có những tài liệu đưa ra định nghĩa giá trị riêng, vectơ riêng của ma trận một cách độc lập, sau đó định nghĩa các khái niệm này cho *f*. Điều đó dường như không logic.

Đối với hai bài toán nêu trên, ta cần thực hiện phép đổi biến để đưa một dạng toàn phương $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ về dạng chính tắc $\varphi'(y_1, y_2, ..., y_n)$. Nếu ta xem các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ là toạ độ của vectơ *u* trong không gian Euclide theo một cơ sở trực chuẩn thì phép đổi biến này tương ứng với phép biến đổi tuyến tính *f* của V_n đưa cơ sở trực chuẩn (υ) về cơ sở trực chuẩn (ω). Phép biến đổi này sẽ được gọi là phép biến đổi trực giao, còn ma trận chuyển cơ sở *P* (và cũng là *cái chéo hóa trực giao* của *A*) sẽ được gọi là ma trận trực giao. Theo cách hiểu như vậy chúng ta có thể trình bày về phép biến đổi trực giao như sau. Cho ma trận *A* của một phép biến đổi tuyến tính *f*: $V_n \to V_n$ đối với cơ sở (υ): $u_1, u_2, ..., u_n$. Chúng ta đã biết rằng, *A* có thể đưa được về dạng đường chéo khi và chỉ khi tồn tại trong V_n một cơ sở (ω): $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, gồm những vectơ riêng của *f*. Khi đó

$$B = P^{-1}AP \qquad (1)$$

có dạng đường chéo, *P* là ma trận chuyển từ cơ sở (υ) thành cơ sở (ω). Hơn nữa, cách xác định P là khá đơn giản. Giả sử $P = (p_{ij})$, thế thì theo định nghĩa

$$\omega_j = p_{1j}u_1 + p_{2j}u_2 + ... + p_{nj}u_n$$

nghĩa là *cột thứ j của ma trận chéo hóa P chính là cột các tọa độ của vectơ riêng* ω_j, theo cơ sở ban đầu (υ).

Trong trường hợp V_n là không gian Euclide những vectơ riêng này có thể được chuẩn hóa. Ta muốn biết khi nào nó là một cơ sở trực chuẩn. Điều đó dẫn tới định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.1. *Cho phép biến đổi tuyến tính f:* $V_n \to V_n$ *và A là ma trận của f đối với cơ sở trực chuẩn (υ) nào đó. Việc tìm một cơ sở trực chuẩn (*ε*) để ma trận B của f đối với cơ sở này có dạng chéo được gọi là phép chéo hóa trực giao. Khi đó ta nói rằng ma* *trận A chéo hóa trực giao được, còn ma trận P chuyển từ cơ sở (υ) thành cơ sở (ε) được gọi là cái chéo hóa trực giao.*

Tiêu chuẩn chéo hóa một ma trận được làm mạnh lên thành tiêu chuẩn chéo hóa trực giao trong định lý sau.

Định lý 2.2. *Để ma trận A của phép biến đổi f: $V_n \to V_n$ chéo hóa trực giao được, cần và đủ là tồn tại một cơ sở trực chuẩn của không gian này gồm những vectơ riêng của f.*

Chứng minh. Giả sử ma trận *A* của phép biến đổi tuyến tính *f* chéo hóa trực giao được. Nghĩa là trong V_n có một cơ sở trực chuẩn

$$e_1,\ e_2, ..., \ e_n \quad (\varepsilon)$$

mà ma trận $B = (b_{ij})$ của *f* đối với cơ sở đó có dạng đường chéo. Khi đó $f(e_j) = b_{jj}e_j$, nghĩa là các ej là những vectơ riêng của *f*. Ngược lại, nếu không gian V_n có một cơ cở trực chuẩn (ε) gồm những vectơ riêng của *f* thì như trong trường hợp chéo hóa ma trận, ma trận *B* của *f* đối với cơ sở này có dạng đường chéo.

Do ma trận chéo hóa trực giao *P* là một ma trận chuyển cơ sở nên nó thỏa mãn hệ thức (1). Chúng ta sẽ mô tả ma trận chéo hóa trực giao *P* thông qua các khái niệm ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao, được trình bày dưới đây.

Cho không gian Euclide thực n-chiều V_n với một cơ sở trực chuẩn. Khi đó tích vô hướng được xác định bởi

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$$

trong đó ($x_1, x_2, ..., x_n$), ($y_1, y_2, ..., y_n$) tương ứng là tọa độ của các vectơ u,v.

Định nghĩa 2.3. [1] *Ma trận vuông thực*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{1n} \\ M & M & O & M \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

được gọi là trực giao nếu hệ các vectơ v_j ($a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$), (j = 1,2,...,n), là trực chuẩn.

Như vậy, nếu ma trận A là trực giao thì tích vô hướng của hai vectơ v_i, v_j là

$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

Bởi vậy, ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là trực giao khi và chỉ khi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 0, & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ 1, & \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases} \qquad (2)$$

Mệnh đề 2.4. *Ma trận chuyển từ một cơ sở trực chuẩn sang một cơ sở trực chuẩn khác là ma trận trực giao.*

Chứng minh. Giả sử

$$u_1, u_2, ..., u_n \quad (\upsilon)$$
$$v_1, v_2, ..., v_n \quad (\nu)$$

là hai cơ sở trực chuẩn của một không gian Euclide và ma trận chuyển từ cơ sở (υ) sang (ν) là

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$v_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1n}u_n$$
$$v_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \ldots + c_{2n}u_n$$

$$v_n = c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \ldots + c_{nn}u_n$$

Do hệ (ν) là trực chuẩn nên

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, \ \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ 1, \ \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$$

Mặt khác

$$\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{t=1}^{n} c_{ti}c_{tj}$$

nên ta được

$$\sum_{t=1}^{n} c_{ti}c_{tj} = \begin{cases} 0, \ \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ 1, \ \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$$

và do đó *C* là ma trận trực giao.

Nhận xét. Giả sử *A* là ma trận chéo hoá trực giao được, với cái chéo hóa trực giao *P*. Do ma trận *P* chuyển một cơ sở trực chuẩn đến một cơ sở trực chuẩn nên theo Mệnh đề 2.4 nó là ma trận trực giao.

Ma trận chéo hóa trực giao được có thể đặc trưng bởi ma trận trực giao theo định lý sau.

Định lý 2.5. *Các điều sau là tương đương:*

(a) Ma trận A chéo hóa trực giao được.

(b) Tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ có dạng chéo.

Chứng minh.

(a) ⇒ (b). Giả sử ma trận *A* chéo hóa trực giao được. Theo phép trực giao hóa Gram-Schmidt, trong không gian *V* có một cơ sở trực chuẩn (υ). Tồn tại một phép biến đổi tuyến tính *f* nhận *A* làm ma trận đối với cơ sở này. Theo định nghĩa tồn tại một cơ sở trực chuẩn (ε) gồm các vectơ riêng của *f*, mà ma trận *B* của *f* có dạng đường chéo. Gọi *P* là ma trận chuyển từ cơ sở (υ) đến cơ sở (ε), thế thì $P^{-1}AP = B$, theo Mệnh đề 2.4, *P* là ma trận trực giao.

(b) ⇒ (a). Giả sử có ma trận trực giao *P* sao cho $B = P^{-1}A\,P$ có dạng đường chéo. Khi đó P xác định họ các vectơ

$$e_1,\ e_2, ...,\ e_n \quad (\varepsilon)$$

trong đó tọa độ của e_j sắp xếp thành cột thứ j của P. Họ này lập thành một cơ sở trực chuẩn. Và bởi vậy ma trận A trực giao hóa được.

Ma trận trực giao có một số tính chất đáng lưu ý sau.

Mệnh đề 2.6. *Ma trận vuông P là trực giao khi và chỉ khi $P^\tau P = I$, trong đó P^τ là ma trận chuyển vị của P và I là ma trận đơn vị cùng cấp với P.*

Chứng minh. Giả $P = (p_{ij})$ và $P^\tau = (p'_{ij})$ là chuyển vị của nó. Ta đặt $C = P^\tau P = (c_{ij})$. Theo quy tắc nhân ma trận ta có

$$c_{\mathrm{ij}} = \sum_{t=1}^{n} p'_{it} p_{tj} = \sum_{t=1}^{n} p_{ti} p_{tj}$$

Do đó $P^\tau P = C = I$ khi và chỉ khi

$$c_{\mathrm{ij}} = \sum_{t=1}^{n} p_{ti} p_{tj} = \begin{cases} 0, & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ 1, & \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$$

nghĩa là khi P trực giao.

Từ Mệnh đề 4. lập tức suy ra điều sau.

Hệ quả 2.7. *Cần và đủ để ma trận P trực giao là $P^\tau = P^{-1}$.*

Mệnh đề 2.8. *Ma trận chéo hóa trực giao được là đối xứng.*

Chứng minh. Giả sử ma trận P là trực giao và $B = P^{-1}AP$ có dạng chéo. Khi đó theo Hệ quả 5 ta có

$$A = PBP^{-1} = PBP^\tau$$

Từ đó

$$A^\tau = (PBP^\tau)^\tau = PB^\tau P^\tau = PBP^\tau = A,$$

nghĩa là ma trận A đối xứng.

3. PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

Định nghĩa 3.1. *Phép biến đổi tuyến tính của một không gian Euclide được gọi là trực giao nếu trong một cơ sở trực chuẩn nào đó ma trận của nó là trực giao.*

Định lý 3.2. *Một phép biến đổi tuyến tính của không gian Euclide là trực giao khi và chỉ khi nó biến một cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử $f: V^n \rightarrow V^n$ là một phép biến đổi trực giao của không gian Euclide V^n và nó có ma trận $A = (a_{ij})$ đối với cơ sở trực chuẩn

$$u_1,\ u_2, ...,\ u_n \quad (\upsilon)$$

Khi đó các tọa độ của vectơ $e_j = f(u_j),\ j = 1,2,...,n$, sắp xếp thành cột thứ j của ma trận A. Bởi vì ma trận A là trực giao nên

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ 1, & \mathrm{i} = \mathrm{j} \end{cases}$$

Do đó hệ vectơ

$$e_1, e_2, ..., e_n \quad (\varepsilon)$$

lập thành một cơ sở trực chuẩn.

Điều kiện đủ. Giả sử phép biến đổi f biến cơ sở trực chuẩn (υ) thành cơ cở trực chuẩn (ε). Khi đó ma trận A của phép biến đổi f đối với cơ sở (υ) chính là ma trận chuyển cơ sở (υ) thành cơ sở (ε). Do đó ma trận A là trực giao (Mệnh đề 2.), suy ra f là phép biến đổi trực giao.

Mệnh đề 3.3. *Phép biến đổi trực giao không làm thay đổi tích vô hướng.*

Chứng minh. Giả sử không gian E có cơ sở trực chuẩn $e_1, e_2, \ldots, e_n$ và

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$
$$v = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$$

là hai vectơ tùy ý trong E. Khi đó

$$\langle u,v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

Nếu f là một phép biến đổi thì

$$f(u) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n)$$
$$f(v) = y_1f(e_1) + y_2f(e_2) + \ldots + y_nf(e_n)$$

Do f là phép biến đổi trực giao nên theo Định lý 7. thì hệ $f(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, là cơ sở trực chuẩn. Bởi vậy, lại theo (7.1) ta có

$$\langle f(u), f(v)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

Nghĩa là $\langle f(\mathrm{u}), \mathrm{f}(\mathrm{v})\rangle = \langle u,v\rangle$.

Hệ quả 3.4. *Phép biến đổi trực giao không làm thay đổi độ dài của vectơ và không làm thay đổi góc giữa hai vectơ.*

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng, một dạng toàn phương có thể đưa về dạng chính tắc dựa vào phép biến đổi trực giao. Phương pháp này sẽ còn được ứng dụng để nhận dạng các đường, mặt bậc hai. Trước hết ta có:

Mệnh đề 3.5. *Nếu dạng toàn phương $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ với ma trận A đưa được về dạng chính tắc $\varphi'(y_1, \mathrm{y}_2, \ldots \mathrm{y}_n) = \sum_{j=1}^{n} k_jy_j^2$ thì:*

- *i) Các số thực k_i là các giá trị riêng của ma trận A,*
- *ii) Các biến $x_1, x_2, \ldots x_n$ được đưa về các biến $y_1, y_2, \ldots y_n$ nhờ phép biến đổi trực giao P mà cột thứ i của nó là vectơ riêng - cột của ma trận A ứng với k_i.*

Chứng minh. Giả sử dạng toàn phương

$$\varphi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

đưa được về dạng chính tắc

$$\varphi'(y_1, y_2, \ldots, y_n) = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \ldots + k_ny_n^2$$

nhờ phép biến đổi trực giao f có ma trận P, nghĩa là P là ma trận chuyển cơ sở ban đầu $u_1, u_2, \ldots, u_n$ thành cơ sở mới $e_1, e_2, \ldots, e_n$, với $e_i = f(u_i)$. Gọi X, Y lần lượt là các ma trận cột

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Thế thì $X = PY$, do đó

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = X^\tau AX = (PY)^\tau A(PY) = Y^\tau (P^\tau AP)Y = \varphi(y_1, y_2, ..., y_n).$$

Điều này có nghĩa là dạng $\varphi'(y_1, y_2, ..., y_n)$ có ma trận

$$B = P^\tau AP = \begin{bmatrix} k1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kn \end{bmatrix}$$

Bởi vì P là ma trận trực giao nên $P^\tau = P^{-1}$ và vì vậy

$$B = P^{-1}AP.$$

Từ đó, theo kết quả về chéo hóa trực giao ma trận suy ra điều cần chứng minh.

Bây giờ chúng ta chỉ ra rằng, với mỗi dạng toàn phương sẽ tìm được một phép biến đổi trực giao đưa nó về dạng chính tắc.

Định lý 3.6. *Đối với mỗi dạng toàn phương đều tồn tại phép biến đổi trực giao đưa nó về dạng chính tắc.*

Chứng minh. Trường hợp $\varphi(x_1) = a_{11}x_1^2$ thì phép biến đổi phải tìm là phép đồng nhất. Giả sử mệnh đề đúng với mọi dạng $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n),\ s < n$.

Giả sử dạng toàn phương $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ có ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$, với k là một giá trị riêng và

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \dots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$$

là vectơ riêng - cột của A ứng với k. Dựng ma trận trực giao $C = (c_{ij})$ mà cột thứ nhất là cột C_1. Bây giờ xét dạng toàn phương $\varphi'(y_1, y_2, ..., y_n)$ nhận được từ phép biến đổi

$$X = CY.$$

Ma trận B của $\varphi'(y_1, y_2, ..., y_n)$ có dạng

$$B = C^\tau AC.$$

Các phần tử của dòng thứ nhất của ma trận C^TA là

$$d_{1j} = c_{11}a_{1j} + c_{21}a_{2j} + ... + c_{n1}a_{nj}.$$

Bởi vì C_1 là vectơ riêng - cột của A ứng với giá trị riêng k và A là ma trận đối xứng nên

$$c_{11}a_{1j} + c_{21}a_{2j} + ... + c_{n1}a_{nj} = kc_{j1},$$

do đó $d_{1j} = kc_{j1}$ $(j = 1,2,...,n)$. Tiếp theo ta tính dòng thứ nhất của ma trận $B = (C^\tau A)C$:

$$b_{1j} = kc_{11}c_{1j} + kc_{21}c_{2j} + ... + kc_{n1}c_{nj}.$$

Bởi vì *C* là trực giao nên

$$b_{1j} = \begin{cases} k, & \text{j} = 1 \\ 0, & \text{j} \neq 1 \end{cases}$$

Ma trận B đối xứng nên nó có dạng

$$B = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b22 & \cdots & b2n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & bn2 & \cdots & bnn \end{bmatrix}$$

Khi đó $\varphi'(y_1, y_2, ..., y_n)$ có thể viết dưới dạng

$$\varphi'(y_1, y_2, ..., y_n) = ky_1^2 + \varphi''(y_2, ..., y_n).$$

Theo giả thiết quy nạp dạng $\varphi''(y_2, ..., y_n)$ đưa về được dạng chính tắc

$$k_2 z_2^2 + ... + k_n z_n^2$$

nhờ phép biến đổi trực giao

$$\begin{aligned} z_2 &= p_{22}y_2 + p_{23}y_3 + \cdots + p_{2n}y_n \\ &\cdots \\ z_n &= p_{n2}y_2 + p_{n3}y_3 + \cdots + p_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Ghép thêm vào phép biến đổi trên $z_1 = y_1$ ta được phép biến đổi trực giao đưa $\varphi'(y_1, y_2, ..., y_n)$ về dạng chính tắc.

Hệ quả 3.7. *Mọi ma trận thực đối xứng đều đưa được về dạng đường chéo.*

Chứng minh. Giả sử *A* là ma trận thực đối xứng bậc n. Xét dạng toàn phương $\varphi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_n)$ với ma trận *A*. Theo Định lý 2.5, tồn tại phép biến đổi trực giao *P* để ma trận $B = P^\tau AP$ có dạng đường chéo. Bởi vì $P^\tau = P^{-1}$, theo Hệ quả 4, nên $B = P^{-1}AP$. Do đó, ma trận *A* đưa được về dạng đường chéo.

Toàn bộ sự xây dựng nêu trên là cơ sở lý thuyết cho thuật toán *chéo hóa trực giao một ma trận và tìm phép biến đổi trực giao* mà ta nêu dưới đây.

Cho phép biến đổi tuyến tính *f* của không gian Euclide V_n, và *A* là ma trận của *f* đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó. Thực hiện chéo hóa trực giao *A* và tìm phép biến đổi trực giao theo các bước sau:

1. Tìm các giá trị riêng của *f* (hay của ma trận *A*),

2. Với mỗi giá trị riêng k_i $(i = 1,2,...,s)$, tìm một cơ sở trực chuẩn U_i của không gian con các vectơ riêng ứng với nó. Nếu hợp *U* của các U_i $(i = 1,2,...,s)$ là một hệ trực giao của V thì nó là một cơ sở trực chuẩn phải tìm.

3. Ma trận chéo hóa trực giao P được xác định như sau. Nếu cơ sở trực chuẩn xác định trong bước 2. là $U = \{e_j \mid j = 1, 2,..., n\}$ thì tọa độ của vectơ e_j (đối với cơ sở ban đầu) được sắp xếp thành cột thứ j của ma trận *P*.

4. LIÊN HỆ VỚI MỘT VÀI CÁCH TRÌNH BÀY KHÁC

Chúng tôi xin đề cập tới hai tài liệu đã được Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam ấn hành.

1. Trong [3] tác giả đã định nghĩa phép biến đổi trực giao trước, sau đó mới định nghĩa ma trận trực giao.

Định nghĩa 4.1. *Phép biến đổi (tự đồng cấu) trực giao của không gian Euclide E là phép biến đổi bảo toàn tích vô hướng, nghĩa là* $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u,v\rangle$.

Sau đó tác giả đã nêu một đặc trưng cho khái niệm này là

Mệnh đề 4.2. *Phép biến đổi f của không gian Euclide là trực giao khi và chỉ khi nó biến cơ sở trực giao thành cơ sở trực giao.*

Định nghĩa 4.3. *Ma trận* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *được gọi là trực giao nếu tự đồng cấu của Rn được biểu diễn bởi A trong cơ sở chính tắc là một tự đồng cấu trực giao của* R_n *với tích vô hướng thông thường.*

Mệnh đề 4.4. Các điều sau là tương đương:

1. A là ma trận trực giao,

2. $A^{\tau}A = I$,

3. Với mọi cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide E, tự đồng cấu của E được biểu diễn bởi A theo cơ sở trên là trực giao,

4. Các cột của A tạo thành một cơ sở trực chuẩn của không gian với $M_{n,1}(\mathbb{R})$ *tích vô hướng thông thường.*

Chúng ta thấy trong [3] những định nghĩa và tính chất nêu trên dường như không liên quan trực tiếp tới phép chéo hóa trực giao và cách xác định cái chéo hóa trực giao không chú ý tới việc tìm các phép biến đổi trực giao để đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc. Theo cách làm của [3] chúng ta không thấy được mối liên hệ với các cơ sở trực chuẩn cũng như tính "trực giao" của ma trận trực giao, cũng như liên quan tới phép chéo hóa trực giao.

2. Trong [4] (trang 333), các tác giả định nghĩa ma trận trực giao là ma trận vuông *A* thỏa mãn $A^{\tau}A = I$, sau đó nói tới phương pháp biến đổi trực giao.

Định nghĩa 4.5. [4] *Cho ma trận vuông A. Nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho* $P^{-1}AP$ *là ma trận chéo thì nói A là chéo hóa trực giao được và P là ma trận làm chéo hóa trực giao ma trận A.*

Định lý 4.6. [4] *Giả sử A là ma trận vuông cấp n. Điều kiện cần và đủ để A chéo hóa trực giao được là A có n vectơ riêng trực chuẩn.*

Theo cách làm của [4] ta thấy các tác giả đã chọn một đặc trưng của ma trận trực giao làm định nghĩa. Định nghĩa này đã làm "ẩn" đi những đặc tính trực quan của ma trận trực giao. Phép định nghĩa ma trận chéo hóa trực giao được cũng không được định nghĩa trực tiếp mà phải thông qua ma trận trực giao và hệ thức $P^{-1}AP$. Trong Định lý 5.8.2 [4] các tác giả đã phát biểu rằng điều kiện $P^{\tau}P = I$ là cần để P chuyển một cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn, nhưng sau đó trong phép chứng minh Định lý 7.4.1 [4] thì đã sử dụng nó như một điều kiện đủ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R. F. Aptenok (1971), Cơ sở đại số tuyến tính (nguyên bản tiếng Nga), Minsk.

[2] I. M. Ghenfand (1989), Lectures on Linear Algebra, *Dover Publications*, (nguyên bản tiếng Nga, Maxcơva, 1971).

[3] Jean - Marie Monier (1999), Cours de mathématiques 5, *Algèbra* 1, Dunod, Paris, 1996, Bản dịch tiếng Việt, Nxb Giáo dục.

[4] N. Đ. Trí, T. V. Đĩnh, N. H. Quỳnh (2012), Toán học cao cấp I, Đại số và Hình học giải tích , Nxb Giáo dục Việt Nam.

DISCUSSION ABOUT ORTHOGONAL TRANSFORMATION AND ORTHOGONAL MATRIX TEACHING

Abstract. *Orthogonal transformation associates with the straight lines classification and quadratic surfaces in an Euclidean space problem. There are many typical ways through matrix or vector space; therefore it can be defined in many different ways and forms. In this article, the concept of orthogonal transformation through orthogonal vectors is presented and then discussed from different approaches.*

Keywords*: orthogonal transformation, Euclidean space, orthogonal vector, orthogonal matrix*