SỰ HỘI TỤ ĐẦY ĐỦ CHO DÃY CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN *M*-PHỤ THUỘC ĐÔI MỘT

Hoàng Thị Duyên
Trường Đại học Quảng Bình

Tóm tắt. *Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập sự hội tụ đầy đủ cho maximum của dãy tổng riêng và luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên m-phụ thuộc đôi một với điều kiện khả tích đều theo nghĩa Cesàro. Các kết quả này mở rộng một kết quả đã biết trong [1] về sự hội tụ đầy đủ và luật mạnh số lớn cho các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một.*

Từ khóa: Kỳ vọng, sự hội tụ đầy đủ, maximum của tổng riêng, luật mạnh số lớn, khả tích đều, Cesàro.

1. GIỚI THIỆU

Các định lý giới hạn nói chung và luật số lớn nói riêng đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết xác suất và thống kê. Luật số lớn có nhiều ứng dụng trong thống kê, kinh tế, y học và các ngành khoa học thực nghiệm khác. Chính vì thế việc nghiên cứu về luật số lớn có ý nghĩa to lớn về mặt lý thuyết lẫn thực tiễn.

Khái niệm về sự hội tụ đầy đủ cho một dãy các biến ngẫu nhiên đã được giới thiệu bởi Hsu và Robbins [6]. Sự hội tụ đầy đủ cho maximum của dãy tổng riêng suy ra sự hội tụ đầy đủ cho tổng riêng, từ đó đảm bảo cho luật mạnh số lớn Kolmogorov xảy ra. Bài toán sự hội tụ đầy đủ cho maximum của dãy tổng riêng đã thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả như Baum and Katz [2], Gut [5], Chen, Hu, Liu and Volodin [3], Bai, Chen và Sung [1]. Đặc biệt, Bai, Chen và Sung [1] đã nghiên cứu bài toán về sự hội tụ đầy đủ cho maximum của dãy tổng riêng và luật mạnh số lớn cho các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một. Tuy nhiên bài toán tương tự cho *m*-phụ thuộc đôi một cho đến nay vẫn chưa được nghiên cứu.

Mục đích chúng tôi là thiết lập sự hội tụ đầy đủ cho maximum của dãy tổng riêng và luật mạnh số lớn cho các biến ngẫu nhiên *m*-phụ thuộc đôi một. Từ đó rút ra một số hệ quả quan trọng, tổng quát các kết quả đã biết trước đây về luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên.

Để dễ theo dõi, xin giới thiệu một số kí hiệu, định nghĩa được sử dụng trong bài báo này. Cho $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là không gian xác suất đầy đủ, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ là σ-đại số Borel trên $\mathbb{R}$.

Ánh xạ $X:\Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là biến ngẫu nhiên nếu X là ánh xạ $\mathcal{F} \mid \mathcal{B}(\mathbb{R})$ đo được, nghĩa là với mọi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, trong đó

$$X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in B\}.$$

Dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n : n\ge 1\}$ được gọi là độc lập (tương ứng, độc lập đôi một) nếu họ $\{\sigma(X_n) : n\ge 1\}$ là độc lập (tương ứng, độc lập đôi một), trong đó $\sigma(X_n)$ là σ-đại số sinh bởi X_n.

Cho *m* là số nguyên không âm cố định. Một họ các biến ngẫu nhiên $\{X_1,...,X_n\}$ được gọi là *m*-phụ thuộc đôi một nếu $n\le m+1$ hoặc $n>m+1$ và X_i, X_j độc lập khi $j-i>m$. Một dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n : n\ge 1\}$ được gọi là *m*-phụ thuộc đôi một nếu X_i, X_j độc lập khi $j-i>m$.

Một dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n : n\ge 1\}$ được gọi là khả tích đều theo nghĩa Cesàro nếu với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại hằng số $x=x(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n\ge 1$ ta có:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\left(|X_k| I_{(|X_k|>x)}\right)\le\varepsilon.$$

Chú ý rằng, nếu các biến ngẫu nhiên $\{X_n : n\ge 1\}$ cùng phân phối với $E|X_1|<\infty$ thì $\{X_n : n\ge 1\}$ là khả tích đều theo nghĩa Cesàro.

Ngoài ra, log kí hiệu cho logarit cơ số 2, C $(0<C<\infty)$ là một hằng số và không nhất thiết giống nhau trong mỗi lần xuất hiện.

2. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Trước tiên chúng tôi nhắc lại một số bổ đề quan trọng, liên quan đến dãy các biến ngẫu nhiên *m*-phụ thuộc đôi một đã được đưa ra bởi Thanh [7].

Bổ đề 2.1 Cho $\{X_1,...,X_n\}$ là các biến ngẫu nhiên *m*-phụ thuộc đôi một, kỳ vọng bằng 0. Khi đó

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\le(m+1)\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i^2).$$

Tiếp theo là bất đẳng thức cực đại cho dãy các biến ngẫu nhiên *m*-phụ thuộc đôi một.

Bổ đề 2.2 Cho $\{X_1,...,X_n\}$ là các biến ngẫu nhiên *m*-phụ thuộc đôi một, kỳ vọng bằng 0. Khi đó

$$E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}X_i\right|\right)^2\le(m+1)^2(\log 2n)^2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i^2).$$

Từ các bổ đề trên, chúng tôi chứng minh bài toán về sự hội tụ đầy đủ cho maximum của dãy tổng riêng và luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên m-phụ thuộc đôi một thỏa mãn điều kiện khả tích đều theo nghĩa Cesàro như sau.

Định lý 2.1 Cho $\{X_n : n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên m-phụ thuộc đôi một thỏa mãn điều kiện khả tích đều theo nghĩa Cesàro và

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|X_n|^p)}{n^p} < \infty \text{ với } 1 \leq p \leq 2 \text{ nào đó.}$$

Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i - \mathrm{E}X_i) \right| > \varepsilon n \right) < \infty.$$

Chứng minh.

Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại hằng số $x = x(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n \geq 1$ ta có

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left(|X_k| I_{(|X_k| > x)} \right) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.1}$$

Ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i - \mathrm{E}X_i) \right| > \varepsilon n \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i I_{(|X_i| \leq x)} - \mathrm{E}(X_i I_{(|X_i| \leq x)})) \right| > \frac{\varepsilon n}{4} \right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i I_{(|X_i| > x)} - \mathrm{E}(X_i I_{(|X_i| > x)})) \right| > \frac{3\varepsilon n}{4} \right) := I + II.
\end{aligned}$$

Với I, áp dụng bất đẳng thức Markov và Bổ đề 2.2 ta có

$$\begin{aligned}
I &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} E\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i I_{(|X_i| \leq x)} - \mathrm{E}(X_i I_{(|X_i| \leq x)})) \right| \right)^2 \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (m+1)^2 (\log 2n)^2 \sum_{i=1}^{n} E(X_i I_{(|X_i| \leq x)} - \mathrm{E}(X_i I_{(|X_i| \leq x)}))^2 \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (m+1)^2 (\log 2n)^2 \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2 I_{(|X_i| \leq x)}) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\log 2n)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Với II, với mỗi $k = 1, ..., n$, áp dụng (2.1) ta có

$$\left|\sum_{i=1}^{k}(X_iI_{(|X_i|>x)}-\mathrm{E}(\mathrm{X}_iI_{(|X_i|>x)}))\right|\le\sum_{i=1}^{n}|X_i|I_{(|X_i|>x)}+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(|\mathrm{X}_i|I_{(|X_i|>x)})$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|X_i|I_{(|X_i|>x)}+\frac{\varepsilon n}{4}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Big(|X_i|I_{(|X_i|>x)}-E(|X_i|I_{(|X_i|>x)})\Big)+\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|I_{(|X_i|>x)})+\frac{\varepsilon n}{4}$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\Big(|X_i|I_{(|X_i|>x)}-E(|X_i|I_{(|X_i|>x)})\Big)+\frac{2\varepsilon n}{4}.$$

Suy ra

$$\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}(X_iI_{(|X_i|>x)}-\mathrm{E}(\mathrm{X}_iI_{(|X_i|>x)}))\right|\le\sum_{i=1}^{n}\Big(|X_i|I_{(|X_i|>x)}-E(|X_i|I_{(|X_i|>x)})\Big)+\frac{2\varepsilon n}{4}.$$

Do đó với $Y_i=|X_i|I_{(|X_i|>x)},\ i=1,\dots,n$ ta có

$$P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}(X_iI_{(|X_i|>x)}-\mathrm{E}(\mathrm{X}_iI_{(|X_i|>x)}))\right|>\frac{3\varepsilon n}{4}\right)$$

$$\le P\left(\sum_{i=1}^{n}\big(Y_i-EY_i\big)>\frac{\varepsilon n}{4}\right)$$

$$=P\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\big(Y_i-EY_i\big)>\frac{\varepsilon n}{4}\right)\left(\bigcap_{i=1}^{n}(Y_i\le n)\right)\right)$$

$$+P\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\big(Y_i-EY_i\big)>\frac{\varepsilon n}{4}\right)\left(\bigcup_{i=1}^{n}(Y_i>n)\right)\right)$$

$$\le P\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(Y_iI_{(Y_i\le n)}-EY_i\Big)>\frac{\varepsilon n}{4}\right)+\sum_{i=1}^{n}P(Y_i>n)$$

$$\le P\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(Y_iI_{(Y_i\le n)}-E(Y_iI_{(Y_i\le n)})\Big)>\frac{\varepsilon n}{4}\right)+\sum_{i=1}^{n}P(Y_i>n)$$

$$\le\frac{C}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(Y_iI_{(Y_i\le n)}-E(Y_iI_{(Y_i\le n)})\Big)\right)^2+\frac{1}{n^p}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^p)$$

$$\le\frac{C}{n^2}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^2I_{(Y_i\le n)})+\frac{1}{n^p}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^p).$$

Vì

$$\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^2I_{(Y_i\le n)})=\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^pY_i^{2-p}I_{(Y_i\le n)})\le n^{2-p}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^p)$$

nên ta có

$$II \le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}n^{2-p}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^p) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{n^p}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^p)$$
$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^p)$$
$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{X}_i|)^p}{n^p} < \infty.$$

Từ đây ta có kết luận của định lý trên.

Trong Định lý 2.1, khi $m=0$, dãy $\{X_n : n \ge 1\}$ trở thành dãy độc lập đôi một. Khi đó ta có hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.1 Cho $\{X_n : n \ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một thỏa mãn điều kiện khả tích đều theo nghĩa Cesàro và

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(|X_n|)^p}{n^p} < \infty \text{ với } 1 \le p \le 2 \text{ nào đó.}$$

Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}(X_i - \mathrm{EX}_i)\right| > \varepsilon n\right) < \infty.$$

Đặc biệt, luật mạnh Kolmogorov xảy ra, tức là,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mathrm{EX}_i\right) \to 0 \quad \text{h.c.c. khi } n \to \infty.$$

Hệ quả này chính là Định lý 1.1 trong Bai, Chen và Sung [1]. Nói cách khác Định lý 1.1 là trường hợp riêng của Định lý 2.1 nói trên.

Chú ý rằng, nếu dãy $\{X_n : n \ge 1\}$ cùng phân phối với $\mathrm{E}|\mathrm{X}_1| < \infty$ thì $\{X_n : n \ge 1\}$ là khả tích đều theo nghĩa Cesàro thì ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.2 Cho $\{X_n : n \ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập đôi một, cùng phân phối sao cho $\mathrm{E}|\mathrm{X}_1| < \infty$. Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}X_i - \mathrm{EX}_1\right| > \varepsilon n\right) < \infty.$$

Đặc biệt, luật mạnh Kolmogorov xảy ra, tức là,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \to \mathrm{EX}_1 \quad \text{h.c.c. khi } n \to \infty.$$

3. KẾT LUẬN

Trên đây chúng tôi đã đưa ra một kết quả mới về sự hội tụ đầy đủ cho maximum của dãy tổng riêng các biến ngẫu nhiên *m* - phụ thuộc đôi một và luật mạnh số lớn cho dãy các biến ngẫu nhiên *m* - phụ thuộc đôi một. Hơn nữa chúng tôi cũng phát biểu định lý trên cho hai trường hợp đặc biệt là độc lập đôi một, khả tích đều theo nghĩa Cesàro và độc lập đôi một, cùng phân phối.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. Bai, P. Y. Chen, S. H. Sung (2014), On complete convergence and the strong law of large numbers for pairwise independent random variables, Acta Math. Hungar., 142 (2), 502 - 518.

[2] L. E. Baum and M. Katz (1965), Convergence rates in the law of large numbers, Trans. Amer. Math. Soc., 120, 108-123.

[3] P. Chen, T. C. Hu, X. Liu, and A. Volodin (2008), On complete convergence for arrays of rowwise negatively associated random variables, Theory Probab. Appl., 52, 323-328.

[4] N. Etemadi (1981), An elementary proof of the strong law of large numbers. Z. Wahr. Verw. Geb., 55, 119-122.

[5] A. Gut (1985), On complete convergence in the law of large numbers for subsequences, Ann. Probab., 13, 1286-1291.

[6] P. Hsu and H. Robbins (1947), Complete convergence and the law of large numbers, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 33, 25-31.

[7] L.V. Thanh (2005), Strong laws of large numbers for sequences of blockwise and pairwise m-dependent random variables, Bulletin of the institute Academia, 33, 397-405.

COMPLETE CONVERGENCE FOR SEQUENCES OF PAIRWISE M-DEPENDENT RANDOM VARIABLES

Abstract. *In this paper, we establish the complete convergence for maximum partial sums and strong law of large numbers for sequences of pairwise m-dependent random variables with uniformly integrable in the sense of Cesàro. Our result extends a result in [1] of the complete convergence for maximum partial sums and strong law of large numbers for sequences of pairwise independent random variables.*

Key words: Expectation, complete convergence, maximum partial sums, strong law of large numbers, uniformly integrable, Cesàro.