TÍNH CHẤT STEINER-DEOGUN ĐỐI VỚI ĐỒ THỊ TÁCH CỰC $G = S(I \cup K, E)$ VỚI $\delta(G) \geq |I| - 3$

Lê Xuân Hùng, Nguyễn Anh

Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội

Tóm tắt. *Trong bài báo này chúng tôi chứng minh được rằng lớp đồ thị tách cực* $G = S(I \cup K, E)$ *với* $6 \leq |I| < |K|$ *và* $\delta(G) \geq |I| - 3$ *có tính chất Steiner-deogun.*

Từ khóa: Đồ thị tách cực, chu trình Hamilton, đường Hamilton, tính chất Steiner-deogun, bậc cực tiểu.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tất cả các đồ thị được nói tới trong bài báo này là những đơn đồ thị hữu hạn, vô hướng, không có khuyên và không có cạnh bội. Nếu *G* là một đồ thị, thì *V(G)* (hoặc *V*) được gọi là *tập đỉnh* và *E(G)* (hoặc *E*) được gọi là *tập cạnh*. Tập hợp tất cả các đỉnh là hàng xóm của tập con $S \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $N_G(S)$ (hoặc *N(S)*). Với mỗi đỉnh $v \in V(G)$, ta gọi $|N_G(v)|$ là bậc của đỉnh v, ký hiệu là *deg(v)*. Với đồ thị $G = (V, E)$, số $\min\{\deg(v) \mid v \in V\}$ được gọi là *bậc cực tiểu* của *G,* ký hiệu là $\delta(G)$. Đồ thị con của G cảm sinh trên tập $U \subseteq V(G)$ ký hiệu là $G[U]$. Ngoài ra, một số khái niệm và ký hiệu khác được định nghĩa trong [4].

Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đồ thị tách cực* nếu tồn tại một phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho đồ thị con G[I] là đồ thị rỗng và đồ thị con G[K] là đồ thị đầy đủ. Ký hiệu đồ thị tách cực là $S(I \cup K, E)$. Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa đầu tiên vào năm 1977 bởi Foldes và Hammer [8]. Các đồ thị này đã và đang được nghiên cứu nhiều bởi vì chúng có liên quan nhiều đến các vấn đề về tổ hợp và khoa học máy tính (xem [6], [7], [9], [10], [13], [14], [15]). Trong thời gian gần đây đã có một số kết quả nghiên cứu về bài toán Hamilton và bài toán tô màu cho lớp đồ thị tách cực (xem [1], [2], [3]).

Năm 1994, Steiner và Deogun đã chứng minh được rằng đồ thị *cocomparability G* là đồ thị Hamilton khi và chỉ khi đồ thị $G - v$ có đường Hamilton với mọi $v \in V(G)$ (Một đồ thị được gọi là đồ thị *comparability* nếu nó là đồ thị vô hướng mà ta có thể định hướng các cạnh của nó để thu được một đồ thị có hướng thỏa mãn hai tính chất: (1) Nếu *uv* là cạnh thì *vu* không là cạnh; (2) Nếu *uv* và *vw* đều là cạnh thì *uw* không là cạnh. Đồ thị *G* gọi là đồ thị *cocomparability* nếu đồ thị bù của nó là đồ thị comparability). Đây là một kết quả có nhiều ý nghĩa và có thể đúng với nhiều lớp đồ thị khác. Chính vì vậy, năm 1996 Kratsch, Lehel và Muller [11] đã chính thức đưa ra tính chất Steiner-deogun (Đồ thị $G = (V, E)$ gọi là có tính chất *Steiner-deogun* nếu thỏa mãn: *G* có chu trình Hamilton khi và chỉ khi đồ thị $G - v$ có đường Hamilton với mọi $v \in V$) và đặt ra vấn đề cần giải quyết: Những đồ thị nào thỏa mãn tính chất Steiner-deogun ? Nghiên cứu này giải quyết một phần của vấn đề trên và chứng minh được rằng đồ thị tách cực $G = S(I \cup K, E)$ với $6 \le |I| < |K|$ và $\delta(G) \ge |I| - 3$ có tính chất Steiner-deogun.

2. MỘT SỐ KẾT QUẢ LIÊN QUAN

Giả sử C là một chu trình trong đồ thị $G = (V, E)$. Ta sẽ ký hiệu chu trình C với một chiều xác định là $\overrightarrow{C}$ và chu trình C với chiều ngược lại là $\overleftarrow{C}$. Nếu $u, v \in V(C)$ thì ký hiệu các đỉnh liên tiếp của C từ u tới v theo chiều đã xác định trên $\overrightarrow{C}$ là $u\overrightarrow{C}v$ và ký hiệu các đỉnh liên tiếp của C từ u tới v theo chiều ngược lại xác định trên $\overleftarrow{C}$ là $u\overleftarrow{C}v$. Ta sẽ coi $u\overrightarrow{C}v$ và $u\overleftarrow{C}v$ như là các đường và cũng như là các tập đỉnh. Nếu $u \in V(C)$ thì ta ký hiệu u^+ và u^- lần lượt là các đỉnh đứng ngay sau và ngay trước đỉnh u trên $\overrightarrow{C}$. Các khái niệm tương tự như đã mô tả ở trên cho các chu trình cũng sẽ được sử dụng cho các đường. Nếu $U \subseteq V(G)$ thì ký hiệu tập $U \cap N_G(u)$ là $N_U(u)$.

Bổ đề 2.1 [1]. *Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $|I| = m, |K| = n$ và với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton. Khi đó với mọi $\phi \ne I' \subseteq I$ thỏa mãn $|I'| \le \min\{m, n-1\}$ ta luôn có $|N(I')| > |I'|$.*

Bổ đề 2.2 [14]. *Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực với $|I| < |K|$ và $|N_I(v)| \le 2$ với mỗi $v \in K$. Khi đó G có chu trình Hamilton khi và chỉ khi $|N(I')| > |I'|$ với mọi $\phi \ne I' \subseteq I$.*

Đồ thị tách cực $G = S(I \cup K, E)$ gọi là *đồ thị tách cực phi Hamilton tối đại* nếu G không có chu trình Hamilton nhưng đồ thị $G + uv$ có chu trình Hamilton với mọi $uv \notin E$, trong đó $u \in I$ và $v \in K$. Ta có kết quả dưới đây cho lớp đồ thị tách cực phi Hamilton tối đại.

Bổ đề 3 ([14]). *Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị tách cực phi Hamilton tối đại. Khi đó với mỗi $v \in K$, hoặc $|N_I(v)| \le |I| - \delta(G)$ hoặc $N_I(v) = I$.*

3. KẾT QUẢ CHÍNH

Trước hết chúng ta phát biểu khái niệm tính chất Steiner-deogun.

3.1 Định nghĩa 4 [11]. *Đồ thị $G = (V, E)$ gọi là có tính chất Steiner-deogun nếu thỏa mãn: G có chu trình Hamilton khi và chỉ khi đồ thị $G - v$ có đường Hamilton với mọi $v \in V$.*

Cho đồ thị tách cực $G = S(I \cup K, E)$. Đặt

$$K_i = \{v \in K \,\|\, |N_I(v) = i|\}, \text{ ta có:}$$

Bổ đề 3.2. *Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị phi Hamilton tối đại thỏa mãn $6 \le m = |I| < |K| = n$, $\delta(G) \ge m-3$ và với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton. Khi đó $K_4 = ... = K_m = \phi$ và $K_3 \ne \phi$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 3 dễ dàng thấy rằng $K_4 = K_5 = ... = K_{m-1} = \phi$.

Nếu tồn tại đỉnh $v \in K_m$ và giả sử P là đường Hamilton của $G - v$. Khi đó $v\vec{P}v$ là chu trình Hamilton của *G*, mâu thuẫn với việc *G* là đồ thị phi Hamilton. Do đó $K_m = \phi$.

Giả sử $K_3 = \phi$. Khi đó ta có $K_3 = K_4 = K_5 = ... = K_m = \phi$. Do đó $|N_I(v)| \le 2$ với mỗi $v \in K$. Từ Bổ đề 1 và Bổ đề 2 suy ra đồ thị *G* có chu trình Hamilton, điều này trái với việc *G* là đồ thị phi Hamilton. Do đó $K_3 \ne \phi$. ■

Giả sử $G = S(I \cup K, E)$ là đồ thị phi Hamilton tối đại thỏa mãn $6 \le m = |I| < |K| = n$, $\delta(G) \ge m-3$, với mọi $v \in K$, đồ thị $G - v$ có đường Hamilton và $K_3 \ne \phi$. Giả sử v_n là một đỉnh của K_3. Vì $|I| = m \ge 6$ và $|N_I(v_n)| = 3 < m$, tồn tại đỉnh $u_1 \in I$ sao cho u_1 không kề với v_n. Vì *G* là đồ thị tách cực phi Hamilton tối đại nên $G + u_1v_n$ có chu trình Hamilton *D*. Do đó $P = D - u_1v_n$ là đường Hamilton của G với các đỉnh đầu mút là u_1 và v_n. Chú ý rằng $u_1 \in I, v_n \in K$ và u_1 không kề với v_n. Giả sử $\vec{P} = u_1...v_n$. Nếu $v_n^- \in K$ và $u \in N_I(v_n)$, thì $\vec{P'} = u_1\vec{P}u^-v_n^-\overleftarrow{P}uv_n$ là đường Hamilton của *G* với các đỉnh đầu mút là u_1 và v_n. Nhưng trong $\vec{P'}$, $v_n^- = u \in I$. Bằng việc xét $\vec{P'}$ thay cho $\vec{P}$ nếu cần thiết, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng v_n^- trong $\vec{P}$ là đỉnh $u_m \in I$.

Giả sử $v_1, v_2, ..., v_k$ là các đỉnh của $N(u_1)$ xuất hiện lần lượt trên $\vec{P}$ theo thứ tự của các chỉ số của chúng. Nếu tồn tại đỉnh $u_j \in N(u_1)$ sao cho $v_j^- \in N(v_n)$, thì $C' = u_1\vec{P}v_j^-v_n\overleftarrow{P}v_ju_1$ là chu trình Hamilton của *G*, mâu thuẫn. Do vậy $v_j^- \notin N(v_n)$ với mọi $j = 1,2,..., k$. Suy ra $v_j^- \in I$ với mọi $j = 1,2,..., k$. Dễ dàng thấy rằng $u_1 = v_1^-$. Đặt $u_j = v_j^- \in I$ với mọi $j = 2,..., k$ và $\overline{N_I(v_n)} = I \setminus N_I(v_n)$. Khi đó

$$\left|\overline{N_I(v_n)}\right| = |I| - |N_I(v_n)| = m - 3.$$

Nhưng $\deg(u_1) \ge m-3$ và $u_j = v_j^- \in \overline{N_I(v_n)}$ với mọi $j = 1,2,..., k = \deg(u_1)$. Từ đó ta thu được bổ đề dưới đây.

Bổ đề 3.3 *$Deg(u_1) = m-3$ và $u_1, u_2, ..., u_{m-3}$ là tất cả các đỉnh của V(G) không kề với v_n.*

Đặt $P_1 = u_1\vec{P}u_2^-$, $P_2 = u_2\vec{P}u_3^-$, ..., $P_{m-3} = u_{m-3}\vec{P}v_n$. *Ta có:*

Bổ đề 3.4 $\left|N(u_j)\cap V(P_i)\right|\le 1$ *với mọi* $i,j\in\{1,2,...,m-3\}$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng tồn tại $i,j\in\{1,2,...,m-3\}$ sao cho $\left|N(u_j)\cap V(P_i)\right|\ge 2$. Ký hiệu v_l và v_{l+1} là hai đỉnh khác nhau của $N(u_j)\cap V(P_i)$, xuất hiện trên $\overrightarrow{P}$ theo thứ tự của các chỉ số của chúng. Trước hết giả sử rằng $j\le i$, khi đó $v_{l+1}^{-}\notin\{u_1,u_2,...,u_{m-3}\}$.

Theo Bổ đề 6 ta có $v_{l+1}^{-}\in N(v_n)$. Do đó $C'=u_j\overleftarrow{P}u_1v_j\overrightarrow{P}v_{l+1}^{-}v_n\overleftarrow{P}v_{l+1}u_j$ là chu trình Hamilton của *G*, mâu thuẫn.

Bây giờ ta giả sử rằng $j>i$. Khi đó $v_l^{+}\notin\{u_1,u_2,...,u_{m-3}\}$ và tiếp tục theo Bổ đề 6 ta có $v_l^{+}\in N(v_n)$. Do đó $C'=u_j\overleftarrow{P}v_l^{+}v_n\overleftarrow{P}v_ju_1\overrightarrow{P}v_lu_j$ là chu trình Hamilton của *G*, mâu thuẫn. ■

Bổ đề 3.5 *Nếu* $v\in N(u_j)\cap V(P_i)$ *và* $j\le i$ *với* $i,j\in\{1,2,...,m-3\}$, *thì* $v^{-}\notin N(v_n)$.

Chứng minh. Nếu $v=v_j$, chứng tỏ Bổ đề 6 rằng $v^{-}=v_j^{-}=u_j\notin N(v_n)$. Nếu $v\ne v_j$ và $v^{-}\in N(v_n)$, thì $C'=u_j\overleftarrow{P}u_1v_j\overrightarrow{P}v^{-}v_n\overleftarrow{P}vu_j$ là chu trình Hamilton của *G*, mâu thuẫn. ■

Bổ đề 3.6 *Nếu* $v\in N(u_j)\cap V(P_i)$ *và* $j>i$ *với* $i,j\in\{1,2,...,m-3\}$, *thì* $v^{+}\notin N(v_n)$.

Chứng minh. Giả sử $v^{+}\in N(v_n)$. Khi đó $C'=u_jv\overleftarrow{P}u_1v_j\overrightarrow{P}v_nv^{+}\overrightarrow{P}u_j$ là chu trình Hamilton của *G*, mâu thuẫn. ■

Định lý 3.7 *Giả sử* $G=S(I\cup K,E)$ *là đồ thị tách cực với* $6\le|I|<|K|$ *và* $\delta(G)\ge|I|-3$. *Khi đó G có tính chất Steiner-deogun.*

Chứng minh. Nếu *G* có chu trình Hamilton và giả sử *v* là một đỉnh thuộc $V(G)$, thì $v^{+}\overrightarrow{C}v^{-}$ là đường Hamilton của đồ thị $G-v$.

Bây giờ giả sử $G=S(I\cup K,E)$ là đồ tách cực thỏa mãn $6\le m=|I|<|K|=n$, $\delta(G)\ge m-3$ và với mọi $v\in V(G)$, đồ thị $G-v$ có đường Hamilton. Vì $K\subseteq V(G)$ nên với mọi $v\in K$, đồ thị $G-v$ cũng có đường Hamilton. Ta sẽ chứng minh *G* có chu trình Hamilton bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử *G* là đồ thị phi Hamilton tối đại. Theo Bổ đề 3.2 ta có $K_4=...=K_m=\phi$ *và* $K_3\ne\phi$**.** Từ Bổ đề 3.4 ta có $\deg(u_j)\le m-3$ với $j\in\{1,2,...,m-3\}$. Nhưng trong đồ thị *G*, theo giả thiết ta có $\deg(u_j)\ge m-3$. Do đó $\deg(u_j)=m-3$ với mọi $j\in\{1,2,...,m-3\}$. Hơn nữa, theo Bổ đề 3.3, Bổ đề 3.5 và Bổ đề 3.6 ta có

$$N(u_1)=\{v_1,v_2,...,v_{m-3}\},$$
$$N(u_j)=\{u_2^{-},u_3^{-},...,u_j^{-},v_j,v_{j+1},...,v_{m-3}\}$$

với $j = 2,3,...,m-3$.

Giả sử rằng $u_j^- = v_{j-1}$ với mọi $j \in \{2,3,...,m-3\}$. Khi đó với $I' = \{u_1, u_2, ..., u_{m-3}\}$ ta có $N(I') = \{v_1, v_2, ..., v_{m-3}\}$. Do đó $|N(I')| = m-3 = |I'|$, mâu thuẫn với Bổ đề 2.1. Như vậy, phải tồn tại $j \in \{2,3,...,m-3\}$ sao cho $u_j^- \neq v_{j-1}$.

Vì $m \geq 6$ nên $\deg(u_j) \geq 3$ với mọi $j \in \{1,2,...,m-3\}$. Nếu $u_{m-3}^- \neq v_{m-4}$ thì

$$C' = u_{m-3}u_{m-4}^- \overleftarrow{P} u_1 v_{m-4} u_{m-4} v_{m-3} \overrightarrow{P} v_n v_{m-4}^+ \overrightarrow{P} u_{m-3}$$

là chu trình Hamilton của *G*, mâu thuẫn. Tiếp theo, nếu $u_2^- \neq v_1$, thì

$$C' = u_1 v_2 \overrightarrow{P} u_{m-3} u_2^- u_2 v_{m-3} \overrightarrow{P} v_n u_2^{--} \overleftarrow{P} u_1$$

là chu trình Hamilton của *G*, mâu thuẫn. Cuối cùng, nếu $u_j^- \neq v_{j-1}$ với $j \notin \{2, m-3\}$, thì

$$C' = u_{j-1} v_j \overrightarrow{P} u_{m-3} u_j^- u_j v_{m-3} \overrightarrow{P} v_n u_j^{--} \overleftarrow{P} v_{j-1} u_1 \overrightarrow{P} u_{j-1}$$

là chu trình Hamilton của *G,* mâu thuẫn.

Như vậy, ta đã suy ra mâu thuẫn trong tất cả các trường hợp. Định lý được chứng minh. ■

4. KẾT LUẬN

Vấn đề tồn tại hay không tồn tại chu trình Hamilton trong đồ thị nói chung và lớp đồ thị tách cực nói riêng là một bài toán khó và thời sự. Việc tìm các điều kiện để một đồ thị tách cực có chu trình Hamilton đã được một số nhà toán học quan tâm nghiên cứu và đã đạt được một số kết quả nhất định (xem [5], [1], [11], [12], [14], [15]). Theo hướng đó, chúng tôi xét vấn đề tồn tại chu trình Hamilton cho một số lớp đồ thị tách cực bằng việc xem xét tính chất *Steiner-deogun* cho một lớp con của lớp đồ thị tách cực và đã đạt được một số kết quả mới, trong đó kết quả chính là Định lý 3.7 (việc chứng minh được một đồ thị có tính chất *Steiner-deogun* có thể coi như một là tìm ra được điều kiện cần và đủ cho lớp đồ thị đó có chu trình Hamilton).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt:

[1] Lê Xuân Hùng (2014), "*Về chu trình Hamilton trong đồ thị tách cực*", Tạp chí Khoa học và Công nghệ Đại học Đà Nẵng, số 7(80), 112 – 115.

[2] Lê Xuân Hùng (2015), *"Sắc số cạnh của đồ thị tách cực với* $\Delta(G) \geq \max\{\deg(u) \mid u \in I\} + |K| - 1$*"*, Tạp chí Khoa học và Công nghệ Đại học Đà Nẵng, số 9 (94), 95 – 98.

[3] Lê Xuân Hùng (2016) *"Tô màu danh sách của đồ thị tách cực",* Tạp chí Khoa học và Công nghệ Đại học Đà Nẵng, số 9(106), 78 – 80.

Tiếng Anh:

[4] M. Behazad and G. Chartrand (1971), *Introduction to the Theory of graphs*, Allyn and Bacon, Boston.

[5] R.E. Burkard and P.L. Hammer (1980), *A note on Hamiltonian split graphs,* J. Combin. Theory B28, pp. 245 – 248.

[6] B.-L. Chen, H.-L. Fu and M. T. Ko (1995), *Total chromatic number and chromatic index of split graphs,* J. Combin. Math. Combin. Comput. 17, 137 – 146.

[7] V. Chvatal and P.L. Hammer (1977), *Aggregation of inequalities in integer programming*, Ann. Discrete Math. 1, pp. 145 – 162.

[8] S. Foldes and P.L. Hammer (1977), Split graphs, In: *Proceeding of the Eighth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Louisiana State University, Baton Rouge, LA, 1977), Congressus Numerantium, vol. XIX, Utilitas Mathematics, Winnipeg, Man., pp. 311 – 315.

[9] S. Foldes and P.L. Hammer (1978), *On a class of matroid-producing graphs. In: Combinatorics* (Proceeding of the Filth Hungarian Colloquium, Kesrthely, 1976), vol. 1, Colloquium Mathematical Society, Jano's Bolyai, vol. 18, North-Holland, Amsterdam, New York, pp. 331 - 352.

[10] A. Hesham H. And El-R. Hesham (1993), *Task allocation in distributed systems: a split graph model*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 14, 15-32.

[11] D. Kratsch, J. Lehel, H. muller (1996), *Toughness, hamiltonicity and split graphs*, Discrete Math. 150, pp. 231 - 245.

[12] J. Peemoller (1985), *Necessary conditions for Hamiltonian split graphs*, Discrete Math. 54, pp. 39 – 47.

[13] U.N. Peled (1975), *Regular Boolean function and their polytope,* Ph.D. Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Chapter VI.

[14] Ngo Dac Tan, Le Xuan Hung (2004), *Hamilton cycles in split graphs with large minimum degree*, Discussiones Math. Graph Theory 24, pp. 23 – 40.

[15] Ngo Dac Tan, Le Xuan Hung (2005), *On the Burkard-Hammer codition for hamiltonian split graphs,* Discrete Math. 296, pp. 59 – 72.

ON THE STEINER-DEOGUN FOR SPLIT GRAPHS $G = S(I \cup K, E)$ WITH $\delta(G) \geq |I| - 3$

Abstract. *In this paper, we show that split graphs* $G = S(I \cup K, E)$ *with* $6 \leq |I| < |K|$ *and* $\delta(G) \geq |I| - 3$ *have the Steiner-deogun property.*

Key words: Split graph, hamilton cycle, hamilton path, steiner-deogun property, minimum degree.