

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG
TIN**

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH BÁO CÁO



**ĐỒ ÁN
PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN
KNAPSACK**

Lớp: CS112.L11

GVHD: Phạm Nguyễn Trường An

Sinh viên thực hiện:

16521692 - Nguyễn Vĩnh Huy



Mục lục

1	0-1 Knapsack	3
1.1	Giới thiệu bài toán	3
1.2	Liên hệ thực tế	3
1.3	Phát biểu bài toán	3
1.4	Độ phức tạp Pseudo Polynomial	4
2	Phương pháp thiết kế bài toán	5
2.1	Đệ quy	5
2.1.1	Giới thiệu phương pháp	5
2.1.2	Mã giả	5
2.1.3	Phân tích độ phức tạp bằng các phương pháp toán học	6
2.1.4	Mã nguồn	6
2.1.5	Phát sinh input/output để kiểm tra tính đúng đắn	7
2.1.6	Phân tích độ phức tạp bằng thực nghiệm	9
2.2	Quy hoạch động	10
2.2.1	Giới thiệu phương pháp	10
2.2.2	Mã giả	11
2.2.3	Phân tích độ phức tạp bằng các phương pháp toán học	11
2.2.4	Mã nguồn	11
2.2.5	Phát sinh input/output để kiểm tra tính đúng đắn	13
2.2.6	Phân tích độ phức tạp bằng thực nghiệm	15
2.3	Kiểm tra độ phức tạp của thư viện OR-Tools và so sánh với các phương pháp trên	16
3	Tài liệu tham khảo, link repo đề án	19

Chương 1

0-1 Knapsack

1.1 Giới thiệu bài toán

Bài toán Knapsack, hay còn gọi là xếp ba lô, hay bài toán cái túi, là một bài toán *Tối ưu hóa tổ hợp*. Bài toán được đặt tên từ vấn đề chọn những gì quan trọng để có thể chứa vừa vào một cái túi (với giới hạn khối lượng) để mang theo trong một chuyến đi. Ở đây, ta cho rằng các đồ vật không thể bị chia nhỏ/xé nhỏ/tách nhỏ ra.

Các bài toán tương tự thường xuất hiện trong kinh doanh, toán tổ hợp, lý thuyết độ phức tạp tính toán và mật mã học.

1.2 Liên hệ thực tế

Với việc một sinh viên mới lên thành phố, thường hay về nhà vào mỗi cuối tuần, thì có thể áp dụng Knapsack vào để giải quyết các đồ vật vào ba lô để tổng giá trị của đồ vật mang về nhà là nhiều nhất.

1.3 Phát biểu bài toán

Cho một cái túi có thể chứa một khối lượng W , hai mảng số nguyên là $val[0..n-1]$ và $wt[0..n-1]$ lần lượt là giá trị và trọng lượng của đồ vật n . Tìm một tập hợp các đồ vật sao cho nhét vừa vào ba lô và tổng giá trị của các đồ vật mang đi là lớn nhất.

Input:

- W : Sức chứa của túi
- mảng val : giá trị của n đồ vật
- mảng wt : trọng lượng của n đồ vật

Output:

- max : Tổng giá trị tối đa mà túi mang đi được

Bài toán Knapsack là một trong những bài toán có độ phức tạp là Pseudo polynomial (tạm dịch: Giả đa thức).

1.4 Độ phức tạp Pseudo Polynomial

Độ phức tạp Pseudo polynomial là độ phức tạp mà thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất (worst case time complexity) bị phụ thuộc vào giá trị số học(numeric value) của Input thay vì số lượng input (number of inputs).

Ví dụ: Xét bài toán đếm số lần xuất hiện của tất cả các phần tử trong một mảng số nguyên dương. Ta có thể cài đặt một phương pháp giả đa thức cho bài toán này. Trước tiên tìm giá trị lớn nhất trong mảng, sau đó lặp từ giá trị 1 đến giá trị lớn nhất này và đối với mỗi giá trị, tìm số lần xuất hiện của nó trong mảng.

Chương 2

Phương pháp thiết kế bài toán

2.1 Đệ quy

2.1.1 Giới thiệu phương pháp

Đệ quy xảy ra khi bên trong một khái niệm X có sử dụng chính khái niệm X. Trong lập trình, *Đệ quy* xảy ra khi một phương thức được viết tự gọi lại chính nó. Ví dụ: Mã giả của hàm tính Fibonacci

```
Fibo(n)
if n <= 1 then
    return 1
else
    return Fibo(n-1) + Fibo(n-2)
```

Hai yếu tố cần để tạo thành một phương thức đệ quy:

- Điều kiện dừng: Xác định cụ thể quy luật của phương thức và tìm giá trị cụ thể cho đến khi thỏa mãn một điều kiện nhất định.
- Phương thức đệ quy: Phương thức đệ quy sẽ tự gọi lại chính nó cho đến khi nó trả về điều kiện dừng.

2.1.2 Mã giả

```
knapSack(W, wt, val, n):
    if n = 0 or W = 0
        return 0
    if wt[n-1] > W
        return knapSack(W, wt, val, n-1)
    else:
        return max(
            val[n-1] + knapSack(
                W-wt[n-1], wt, val, n-1),
            knapSack(W, wt, val, n-1))
```

2.1.3 Phân tích độ phức tạp bằng các phương pháp toán học

Ta có phương trình đệ quy:

$$\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(n) = O(1) + 2T(n-1), n > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Giải hệ phương trình này, ta được:

$$T(n) = 3O(1) + 4T(n-2)$$

$$T(n) = 7O(1) + 8T(n-3)$$

...

$$T(n) = (2^{n-1} - 1)O(1) + 2^{n-1}T(1)$$

$$T(n) = (2^n - 1)O(1)$$

$$T(n) = O(2^n)$$

Với phương pháp giải quyết bài toán bằng đệ quy, ta không tốn chi phí phụ thêm cho việc lưu trữ các biến tạm, nên độ phức tạp về mặt không gian lưu trữ (Space Complexity) là $O(1)$

2.1.4 Mã nguồn

knapsackR.py

```
class knapsackRecursion:
    complexity = 0
    wt = []
    val = []
    W = 0
    n = 0
    ketqua = 0
    def __init__(self, W, n, wt, val):
        self.W = W
        self.wt = wt
        self.n = n
        self.val = val
    def knapSack(self, W, n, wt, val):
        self.complexity += 2
        if n == 0 or W == 0:
            return 0
        self.complexity += 1
        if (wt[n-1] > W):
            return self.knapSack(W, n - 1, wt, val)
        else:
```

```

        return max(
            val[n-1] + self.knapSack(
                W-wt[n-1], n - 1, wt, val),
            self.knapSack(W, n - 1, wt, val))

def Solve(self):
    self.ketqua = self.knapSack(self.W, self.n,
        self.wt, self.val)

```

2.1.5 Phát sinh input/output để kiểm tra tính đúng đắn

Input của bài toán được phát sinh ngẫu nhiên bằng cách sử dụng hàm randrange có sẵn trong python. Input được phát sinh ngẫu nhiên, sau đó tính Output bằng thư viện OR-tools. Mã nguồn phát sinh Input/Output: generator.py

```

import random
from ortools.algorithms import pywrapknapsack_solver
def generator(W, n, filename = None, output = None):
    wt = []
    val = []
    for i in range (n):
        wt.append(random.randrange(100))
        val.append(random.randrange(100))

    solver = pywrapknapsack_solver.KnapsackSolver(
        pywrapknapsack_solver.KnapsackSolver.
        KNAPSACK_MULTIDIMENSION_BRANCH_AND_BOUND_SOLVER,
        'KnapsackExample')

    solver.Init(val, [wt], [W])
    bestvalue = solver.Solve()
    if filename:
        file = open(filename, "w")
        file.write(str(n) + " " + str(W) + " " +
            str(bestvalue) + "\n")
        for i in range (n):
            file.write(str(wt[i]) + " " + str(val[i]))+
                "\n")
    if output != None:
        print("W = ", W)
        print("n = ", n)

```

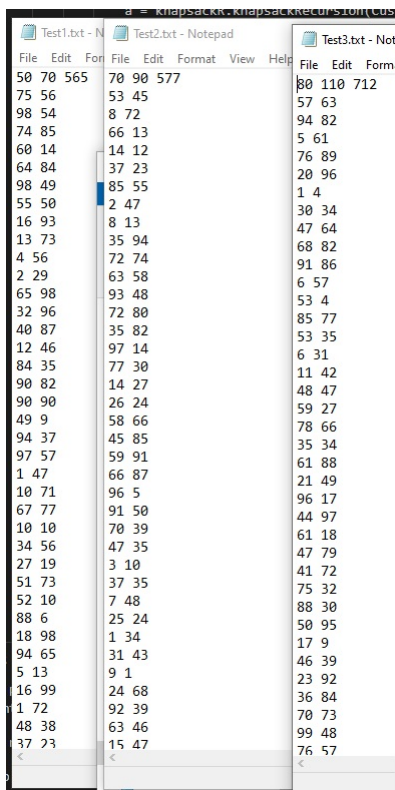
```

        print("wt = ", wt)
        print("val = ", val)
    return wt, val, bestvalue

```

Dùng hàm generator đã cài đặt trên để sinh ra ba file Test1.txt, Test2.txt, Test3.txt. Bên trong mỗi file có chứa dữ liệu với cấu trúc:

- Hàng 1: chứa n, W và kết quả tối ưu nhất
- n hàng tiếp theo: lần lượt chứa wt[0], val[0], wt[1], val[1]...
- wt[n], val[n]: là cân nặng và giá trị của đồ vật



(Nội dung chi tiết các file có đính kèm trong source code) Từ các file test đã tạo ở trên, ta có hàm test tính đúng đắn của mã nguồn đã cài đặt cho phương pháp trên. Ứng với mỗi file test, nếu phát hiện Output sai so với kết quả tính toán từ thư viện OR-tools, xuất ra "DP SAI VOI TEST i" (Với i là tên file test cho Output sai).

Mã nguồn kiểm tra tính đúng đắn: validate.py

```

import inputReader
import knapsackDP
import knapsackR

validDP = 1
validR = 1
for i in range(1,4):
    W, n, wt, val, result =
        inputReader.input_processing("Test"+str(i)+".txt")
    DP = knapsackDP.knapsackDP(W, n, wt, val)

```



```

R = knapsackR.knapsackRecursion(W, n, wt, val)
DP.Solve()
R.Solve()
if (DP.ketqua != result):
    validDP = 0
    print("DP SAI VOI TEST ", i)
if (R.ketqua != result):
    validR = 0
    print("DE QUY SAI VOI TEST ",i)
if (validDP):
    print("DP dung cho moi test")
if (validR):
    print ("De quy dung cho moi test")

```

2.1.6 Phân tích độ phức tạp bằng thực nghiệm

Với các file test đã sinh ra ở trên, ta tiếp tục sử dụng chúng trong việc phân tích độ phức tạp bằng thực nghiệm.

Từ tính đúng đắn đã được kiểm chứng ở mục trên, mã nguồn cài đặt cho phương pháp đệ quy đã được chứng minh là đúng. Từ các file test ở trên, bỏ qua việc sử dụng tải trọng W có bên trong file, ta sử dụng một "CustomW". CustomW này có giá trị trong khoảng $(W, W+50)$, và mỗi CustomW sẽ cách nhau một khoảng bằng 10.

Ứng với mỗi file test, ta sử dụng lại toàn bộ các giá trị của mảng val, mảng wt, n, tuy nhiên, W sẽ được thay thế bằng CustomW như đã nói trên, và result sẽ được tính lại ứng với mỗi $W = \text{CustomW}$.

Độ phức tạp của thuật toán được tính bằng tổng số phép toán trong quá trình chạy. Tổng số phép toán trong quá trình chạy là tổng của số phép gán và số phép so sánh. Với mỗi phép so sánh, tổng số phép toán tăng lên 1. Tương tự, với mỗi phép so sánh tổng số phép toán cũng tăng lên 1. Và với mỗi lần duyệt mảng, ta tính nó tương tự như thực hiện một lần phép so sánh.

Ứng với mỗi CustomW, ngoài việc thực hiện đo số phép toán, ta còn đo cả thời gian giải bài toán (Tính theo giây) và sau đó xuất ra màn hình.

Mã nguồn thực hiện việc kiểm tra độ phức tạp:

analysisR.py

```

import knapsackR
import inputReader
import time

for i in range (1,4):
    W, n, wt, val, result =
        inputReader.input_processing("Test"+str(i)+".txt")
    for CustomW in range (W, W + 50, 10):
        a = knapsackR.knapsackRecursion(CustomW, n, wt,

```

```

        val)
start_time = time.time()
a.Solve()
print("Test case: ",i, "Custom W:", CustomW)
print("Giai bai toan trong:",time.time() -
      start_time)
print("Voi so phep toan: ", a.complexity)

```

Kết quả chạy thử:

```

Test case: 1 Custom W: 70
Giai bai toan trong: 0.30908632278442383
Voi so phep toan: 2915944
Test case: 1 Custom W: 80
Giai bai toan trong: 0.5924842357635498
Voi so phep toan: 6045492
Test case: 1 Custom W: 90
Giai bai toan trong: 1.1615476608276367
Voi so phep toan: 11915850
Test case: 1 Custom W: 100
Giai bai toan trong: 2.246190309524536
Voi so phep toan: 22479599
Test case: 1 Custom W: 110
Giai bai toan trong: 3.962869644165039
Voi so phep toan: 40848670
Test case: 2 Custom W: 90
Giai bai toan trong: 5.481814861297607
Voi so phep toan: 53711039
Test case: 2 Custom W: 100
Giai bai toan trong: 11.285663604736328
Voi so phep toan: 109499464
Test case: 2 Custom W: 110
Giai bai toan trong: 21.943309545516968
Voi so phep toan: 215482276
Test case: 2 Custom W: 120
Giai bai toan trong: 41.180745363235474
Voi so phep toan: 411273543
Test case: 2 Custom W: 130
Giai bai toan trong: 76.47726106643677
Voi so phep toan: 764290028
Test case: 3 Custom W: 110
Giai bai toan trong: 4.101980686187744
Voi so phep toan: 40349062
Test case: 3 Custom W: 120
Giai bai toan trong: 8.111087322235107
Voi so phep toan: 80771397
Test case: 3 Custom W: 130
Giai bai toan trong: 15.974542617797852
Voi so phep toan: 157801674
Test case: 3 Custom W: 140
Giai bai toan trong: 30.235924243927002
Voi so phep toan: 301634200
Test case: 3 Custom W: 150
Giai bai toan trong: 57.486645460128784
Voi so phep toan: 565086006

```

2.2 Quy hoạch động

2.2.1 Giới thiệu phương pháp

Quy hoạch động (Dynamic Programming) được phát triển bởi nhà toán học Richard Bellman từ thập niên 1950s. Thời đó Programming không có ý nghĩa là lập trình máy tính như hiện tại. Programming có nghĩa là "tính toán bằng cách lập bảng", hay còn gọi là quy hoạch. Quy hoạch động được dùng để giải các bài toán có dạng đệ quy. Các bước sử dụng Dynamic Programming:

- Tìm cách mô phỏng dạng thức "một lời giải" của bài toán.

- Tìm phương trình đệ quy để tính lời giải tối ưu.
- Sử dụng phương pháp đệ quy có nhớ (Top down with memoization) hoặc phương pháp tìm lời giải từ dưới lên bottom-up để code tính kết quả tối ưu.

2.2.2 Mã giả

```

knapSack(W, wt, val, n)
    K = [] []
    for i = 0 to W + 1
        for j in range n + 1
            K[i][j] = 0
    for i = 0 to n + 1
        for w = 0 to W + 1
            if i == 0 or w == 0
                K[i][w] = 0
            elif wt[i-1] <= w
                K[i][w] = max(val[i-1]
                               + K[i-1][w-wt[i-1]],
                               K[i-1][w])
            else
                K[i][w] = K[i-1][w]
    return K[n][W]

```

2.2.3 Phân tích độ phức tạp bằng các phương pháp toán học

Thuật toán gồm 2 vòng for chạy lồng vào nhau $\Rightarrow T(n) = O(n \times W)$ Với phương pháp này, ta tốn thêm 1 bảng có độ lớn là $n \times W$ để lưu trữ các biến tạm. Vậy nên, độ phức tạp về mặt không gian lưu trữ (Space Complexity) là $O(n \times W)$

2.2.4 Mã nguồn

knapsackDP.py

```

class knapsackDP:
    W = 0
    n = 0
    wt = []
    val = []
    sosanh = 0
    gan = 0

```

```

duyetmang = 0
ketqua = 0
complexity = 0
def __init__(self, W, n, wt, val):
    self.W = W
    self.n = n
    self.wt = wt
    self.val = val

def knapSack(self, W, n, wt, val):
    DEFAULTSPACEUSAGE = (W + 1) * (n + 1)
    self.sosanh += DEFAULTSPACEUSAGE
    self.gan += DEFAULTSPACEUSAGE
    K = [[0 for x in range(W + 1)] for x in range(n + 1)]
    self.sosanh += DEFAULTSPACEUSAGE
    for i in range(n + 1):
        for w in range(W + 1):
            self.sosanh += 2
            if i == 0 or w == 0:
                K[i][w] = 0
                self.gan += 1
            elif wt[i-1] <= w:
                self.sosanh += 1
                K[i][w] = max(val[i-1]
                               + K[i-1][w-wt[i-1]],
                               K[i-1][w])
                self.gan += 1
            else:
                self.sosanh += 1
                K[i][w] = K[i-1][w]
                self.gan += 1
    return K[n][W]

def Solve(self):
    self.ketqua = self.knapSack(self.W, self.n,
                                self.wt, self.val)
    self.complexity = self.gan + self.sosanh

```

2.2.5 Phát sinh input/output để kiểm tra tính đúng đắn

Input của bài toán được phát sinh ngẫu nhiên bằng cách sử dụng hàm randrange có sẵn trong python. Input được phát sinh ngẫu nhiên, sau đó tính Output bằng thư viện ortools.algorithms. Mã nguồn phát sinh Input/Output:

generator.py

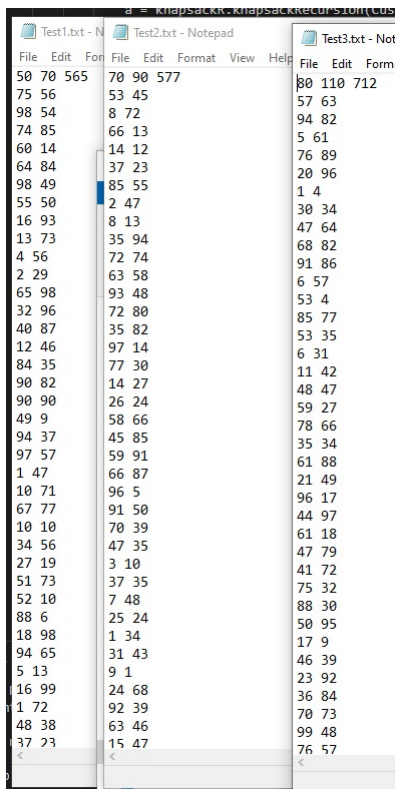
```
import random
from ortools.algorithms import pywrapknapsack_solver
def generator(W, n, filename = None, output = None):
    wt = []
    val = []
    for i in range (n):
        wt.append(random.randrange(100))
        val.append(random.randrange(100))

    solver = pywrapknapsack_solver.KnapsackSolver(
        pywrapknapsack_solver.KnapsackSolver.
        KNAPSACK_MULTIDIMENSION_BRANCH_AND_BOUND_SOLVER,
        'KnapsackExample')

    solver.Init(val, [wt], [W])
    bestvalue = solver.Solve()
    if filename:
        file = open(filename,"w")
        file.write(str(n) + " " + str(W) + " " +
            str(bestvalue) + "\n")
        for i in range (n):
            file.write(str(wt[i]) + " " + str(val[i]))+
                "\n")
    if output != None:
        print("W = ",W)
        print("n = ", n)
        print("wt = ", wt)
        print("val = ",val)
    return wt,val,bestvalue
```

Dùng hàm generator đã cài đặt trên để sinh ra ba file Test1.txt, Test2.txt, Test3.txt. Bên trong mỗi file có chứa dữ liệu với cấu trúc:

- Hàng 1: chứa n, W và kết quả tối ưu nhất
- n hàng tiếp theo: lần lượt chứa wt[0], val[0], wt[1], val[1]...
- wt[n], val[n]: là cân nặng và giá trị của đồ vật



(Nội dung chi tiết các file có đính kèm trong source code) Từ các file test đã tạo ở trên, ta có hàm test tính đúng đắn của mã nguồn đã cài đặt cho phương pháp trên. Ứng với mỗi file test, nếu phát hiện Output sai so với kết quả tính toán từ thư viện OR-tools, xuất ra "DP SAI VOI TEST i" (Với i là tên file test cho Output sai).

Mã nguồn kiểm tra tính đúng đắn: validate.py

```
import inputReader
import knapsackDP
import knapsackR

validDP = 1
validR = 1
for i in range(1,4):
    W, n, wt, val, result =
        inputReader.input_processing("Test"+str(i)+".txt")
    DP = knapsackDP.knapsackDP(W, n, wt, val)
    R = knapsackR.knapsackRecursion(W, n, wt, val)
    DP.Solve()
    R.Solve()
    if (DP.ketqua != result):
        validDP = 0
        print("DP SAI VOI TEST ", i)
    if (R.ketqua != result):
        validR = 0
        print("DE QUY SAI VOI TEST ",i)
```

```

if (validDP):
    print("DP dung cho moi test")
if (validR):
    print ("De quy dung cho moi test")

```

2.2.6 Phân tích độ phức tạp bằng thực nghiệm

Với các file test đã sinh ra ở trên, ta tiếp tục sử dụng chúng trong việc phân tích độ phức tạp bằng thực nghiệm.

Từ tính đúng đắn đã được kiểm chứng ở mục trên, mã nguồn cài đặt cho phương pháp đệ quy đã được chứng minh là đúng. Từ các file test ở trên, bỏ qua việc sử dụng tải trọng W có bên trong file, ta sử dụng một "CustomW". CustomW này có giá trị trong khoảng $(W, W+50)$, và mỗi CustomW sẽ cách nhau một khoảng bằng 10.

Ứng với mỗi file test, ta sử dụng lại toàn bộ các giá trị của mảng val, mảng wt, n, tuy nhiên, W sẽ được thay thế bằng CustomW như đã nói trên, và result sẽ được tính lại ứng với mỗi $W = \text{CustomW}$.

Độ phức tạp của thuật toán được tính bằng tổng số phép toán trong quá trình chạy. Tổng số phép toán trong quá trình chạy là tổng của số phép gán và số phép so sánh. Với mỗi phép so sánh, tổng số phép toán tăng lên 1. Tương tự, với mỗi phép so sánh tổng số phép toán cũng tăng lên 1. Và với mỗi lần duyệt mảng, ta tính nó tương tự như thực hiện một lần phép so sánh.

Ứng với mỗi CustomW, ngoài việc thực hiện đo số phép toán, ta còn đo cả thời gian giải bài toán (Tính theo giây) và sau đó xuất ra màn hình.

Mã nguồn thực hiện việc kiểm tra độ phức tạp cho cài đặt theo phương pháp Quy hoạch động:

analysisDP.py

```

import knapsackDP
import inputReader
import time

for i in range (1,4):
    W, n, wt, val, result =
        inputReader.input_processing("Test"+str(i)+".txt")
    for CustomW in range (W, W + 50, 10):
        a = knapsackDP.knapsackDP(CustomW, n, wt, val)
        start_time = time.time()
        a.Solve()
        print("Test case: ",i, "Custom W:", CustomW)
        print("Giai bai toan trong:",time.time() -
            start_time)
        print("Voi so phep toan: ", a.complexity)

```

Kết quả chạy thử:


```
Test case: 1 Custom W: 70
Giải bài toán trong: 0.0016465187072753906
Voi so phép toán: 25226
Test case: 1 Custom W: 80
Giải bài toán trong: 0.002178668975830078
Voi so phép toán: 28786
Test case: 1 Custom W: 90
Giải bài toán trong: 0.008056879043579102
Voi so phép toán: 32346
Test case: 1 Custom W: 100
Giải bài toán trong: 0.0028150081634521484
Voi so phép toán: 35906
Test case: 1 Custom W: 110
Giải bài toán trong: 0.0028607845306396484
Voi so phép toán: 39466
```

```
Test case: 2 Custom W: 90
Giải bài toán trong: 0.008071422576904297
Voi so phép toán: 45066
Test case: 2 Custom W: 100
Giải bài toán trong: 0.0034596920013427734
Voi so phép toán: 50026
Test case: 2 Custom W: 110
Giải bài toán trong: 0.010204792022705078
Voi so phép toán: 54986
Test case: 2 Custom W: 120
Giải bài toán trong: 0.0049970149993896484
Voi so phép toán: 59946
Test case: 2 Custom W: 130
Giải bài toán trong: 0.008886098861694336
Voi so phép toán: 64906
```

```
Test case: 3 Custom W: 110
Giải bài toán trong: 0.0049457550048828125
Voi so phép toán: 62746
Test case: 3 Custom W: 120
Giải bài toán trong: 0.007608175277709961
Voi so phép toán: 68406
Test case: 3 Custom W: 130
Giải bài toán trong: 0.008058547973632812
Voi so phép toán: 74066
Test case: 3 Custom W: 140
Giải bài toán trong: 0.010978460311889648
Voi so phép toán: 79726
Test case: 3 Custom W: 150
Giải bài toán trong: 0.012380123138427734
Voi so phép toán: 85386
```

2.3 Kiểm tra độ phức tạp của thư viện OR-Tools và so sánh với các phương pháp trên

Thư viện OR-Tools là một thư viện có cài đặt sẵn các hàm để giải một số bài toán thông dụng, ví dụ Knapsack. Thư viện OR-Tools có tốc độ cao, và tiện dụng, chính xác. Trong mục này, ta sẽ phân tích nhanh thư viện OR-Tools bằng thực nghiệm, với các file Test như đã dùng với hai cách trên.

Mã nguồn cài đặt:
testortools.py:

```
from ortools.algorithms import pywrapknapsack_solver
import inputReader
import time

for i in range (1,4):
    W, n, wt, val, result =
        inputReader.input_processing("Test" +str(i) +
            ".txt")
    solver = pywrapknapsack_solver.KnapsackSolver(
        pywrapknapsack_solver.KnapsackSolver.
            KNAPSACK_MULTIDIMENSION_BRANCH_AND_BOUND_SOLVER,
            'KnapsackExample')
    for CustomW in range (W, W + 50, 10):
        solver.Init(val, [wt], [CustomW])
        start_time = time.time()
        print("Ket qua Test", i,"voi CustomW: ", CustomW,
            "la: ",solver.Solve())
        print("Thoi gian hoan thanh Test", i,
            time.time()-start_time)
```

Kết quả chạy thử:

```
Ket qua Test 1 voi CustomW: 70 la: 565
Thoi gian hoan thanh Test 1 0.0005221366882324219
Ket qua Test 1 voi CustomW: 80 la: 621
Thoi gian hoan thanh Test 1 0.0005218982696533203
Ket qua Test 1 voi CustomW: 90 la: 665
Thoi gian hoan thanh Test 1 0.0005216598510742188
Ket qua Test 1 voi CustomW: 100 la: 727
Thoi gian hoan thanh Test 1 0.0005218982696533203
Ket qua Test 1 voi CustomW: 110 la: 771
Thoi gian hoan thanh Test 1 0.0

Ket qua Test 2 voi CustomW: 90 la: 577
Thoi gian hoan thanh Test 2 0.0
Ket qua Test 2 voi CustomW: 100 la: 608
Thoi gian hoan thanh Test 2 0.0
Ket qua Test 2 voi CustomW: 110 la: 634
Thoi gian hoan thanh Test 2 0.0005216598510742188
Ket qua Test 2 voi CustomW: 120 la: 663
Thoi gian hoan thanh Test 2 0.0
Ket qua Test 2 voi CustomW: 130 la: 692
Thoi gian hoan thanh Test 2 0.00474095344543457
```

```
Ket qua Test 3 voi CustomW: 110 la: 712
Thoi gian hoan thanh Test 3 0.0005216598510742188
Ket qua Test 3 voi CustomW: 120 la: 750
Thoi gian hoan thanh Test 3 0.01102304458618164
Ket qua Test 3 voi CustomW: 130 la: 771
Thoi gian hoan thanh Test 3 0.0005335807800292969
Ket qua Test 3 voi CustomW: 140 la: 809
Thoi gian hoan thanh Test 3 0.0005230903625488281
Ket qua Test 3 voi CustomW: 150 la: 825
Thoi gian hoan thanh Test 3 0.000518798828125
```

Với kết quả chạy thử nghiệm như trên, ta có thể rút ra kết luận rằng thư viện OR-Tools giải bài toán Knapsack hiệu quả hơn hẳn so với hai cách giải quyết bài toán trên. Đi kèm với tính đúng đắn đã được chứng minh sẵn, việc dùng hàm giải bài toán Knapsack được cài đặt trong thư viện OR-Tools để làm mốc kiểm tra tính đúng đắn và kiểm tra độ phức tạp là hoàn toàn hợp lý.

Chương 3

Tài liệu tham khảo, link repo đồ án

<https://afteracademy.com/blog/what-is-the-difference-between-iteration-and-recursion>
<https://stackabuse.com/big-o-notation-and-algorithm-analysis-with-python-examples/>
<https://www.dataquest.io/blog/understanding-regression-error-metrics/>
<https://developers.google.com/optimization/bin/knapsack>
http://google.github.io/or-tools/python/ortools/algorithms/pywrapknapsack_solver.html
<https://www.geeksforgeeks.org/difference-between-recursion-and-iteration/>
<https://www.geeksforgeeks.org/0-1-knapsack-problem-dp-10/>
<https://github.com/google/or-tools>
Link repo đồ án:
<https://github.com/dunghoilyd01/knapsackAnalysis>