

TS. Nguyễn Văn Lợi (chủ biên)-Ths. Hoàng Văn Tự

# 108 BÀI TOÁN CHỌN LỌC LỚP 7





# Đôi lời với các bạn đọc

Tài liệu này được biên soạn bao gồm những bài toán được sưu tầm và lựa chọn từ những tài liệu, giáo trình có uy tín, được nhiều người ưa thích. Bao gồm các bài toán chủ yếu dành cho những học sinh khá, giỏi.

Với phương châm, học vừa đủ nhưng mỗi ngày mỗi tiến bộ. Đồng thời, nhằm giúp quý phụ huynh, quý thầy, cô và các em học sinh có tài liệu tốt để tham khảo. Trong tài liệu này, chúng tôi trích lời giải một số bài toán hay để mọi người cùng tham khảo.

Việc biên soạn rất có thể có những sai sót không đáng có, chúng tôi mong nhận được ý kiến góp ý của quý vị. Xin chân thành cảm ơn!

# Mục lục

<b>1</b>	<b>SỐ HỌC VÀ ĐẠI SỐ</b>	<b>4</b>
1.1	Tỉ lệ thức . . . . .	4
1.1.1	Bài toán có nội dung tính toán. . . . .	4
1.1.2	Bài toán có nội dung chứng minh. . . . .	5
1.2	Hàm số và đồ thị. . . . .	6
1.2.1	Tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch. . . . .	6
1.2.2	Hàm số và đồ thị của hàm số. . . . .	7
1.3	Biểu thức đại số. . . . .	8
<b>2</b>	<b>HÌNH HỌC</b>	<b>10</b>
2.1	Quan hệ vuông góc và quan hệ song song. . . . .	10
2.2	Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác. . . . .	11
2.3	Các bài toán dựng hình cơ bản. . . . .	14
2.4	Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác. . . . .	14
2.5	Quan hệ các đường thẳng đồng quy trong tam giác. . . . .	15
2.5.1	Ba đường trung tuyến của tam giác. . . . .	15
2.5.2	Ba đường phân giác của tam giác. . . . .	16
2.5.3	Ba đường trung trực của tam giác. . . . .	16
2.5.4	Ba đường cao của tam giác. . . . .	16
2.6	Các bài toán có nội dung tính góc. . . . .	17
<b>3</b>	<b>LỜI GIẢI MỘT VÀI BÀI CHỌN LỌC</b>	<b>18</b>

# Chương 1

## SỐ HỌC VÀ ĐẠI SỐ

### 1.1 Tỉ lệ thức

#### 1.1.1 Bài toán có nội dung tính toán.

**Bài 1.1.1** Tìm  $x$  trong các tỉ lệ thức sau:

a)  $\frac{x-3}{x+5} = \frac{5}{7}$ .

b)  $\frac{7}{x-1} = \frac{x+1}{9}$ .

c)  $\frac{x+4}{20} = \frac{5}{x+4}$ .

d)  $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-2}{x+3}$ .

**Bài 1.1.2** Tìm  $x, y, z$  biết :

a.  $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9}$  và  $x - 3y + 4z = 62$ .

b.  $\frac{x}{y} = \frac{9}{7}, \frac{y}{z} = \frac{7}{3}$  và  $x - y + z = -15$ .

c.  $\frac{x}{y} = \frac{7}{20}, \frac{y}{z} = \frac{5}{8}$  và  $2x + 5y - 2z = 100$ .

d.  $\frac{12x - 15y}{7} = \frac{20z - 12x}{9} = \frac{15y - 20z}{11}$  và  $x + y + z = 48$ .

**Bài 1.1.3** Tìm  $x, y, z$  biết :

a.  $5x = 8y = 20z$  và  $x - y - z = 3$ .

b.  $\frac{6}{11}x = \frac{9}{2}y = \frac{18}{5}z$  và  $-x + y + z = -120$ .

c.  $\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{5}$  và  $xyz = 20$ .

d.  $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$  và  $x^2 + y^2 - z^2 = 65$ .

**Bài 1.1.4** Cho biểu thức  $P = \frac{x + 2y - 3z}{x - 2y + 3z}$ . Tính giá trị của  $P$  biết các số  $x, y, z$  tỉ lệ với các số 5, 4, 3.

**Bài 1.1.5** Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích là  $300m^2$ , hai cạnh tỉ lệ với 4 và 3. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

**Bài 1.1.6** Tìm hai phân số tối giản biết hiệu của chúng là  $\frac{3}{196}$ , các tử tỉ lệ với 3 và 5; các mẫu tỉ lệ với 4 và 7.

**Bài 1.1.7** Ba kho có tất cả 710 tấn thóc. Sau khi chuyển đi  $\frac{1}{5}$  số thóc ở kho I,  $\frac{1}{6}$  số thóc ở kho II và  $\frac{1}{11}$  số thóc ở kho III thì số còn lại ở ba kho bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi kho có bao nhiêu tấn thóc?

**Bài 1.1.8** Cho dãy tỉ số bằng nhau (Giả thiết rằng  $M$  có nghĩa):

$$\frac{2a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2d}{d}.$$

Tìm giá trị của biểu thức  $M$ , biết  $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$ .

### 1.1.2 Bài toán có nội dung chứng minh.

**Bài 1.1.9** Cho  $\frac{a+5}{a-5} = \frac{b+6}{b-6}$  ( $a \neq 5, b \neq 6$ ). Chứng minh  $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ .

**Bài 1.1.10** Cho tỉ lệ thức  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1$  với  $a, b, c, d \neq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ .

**Bài 1.1.11** Cho  $\frac{a}{k} = \frac{x}{a}; \frac{b}{k} = \frac{y}{b}$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{x}{y}$ .

**Bài 1.1.12** Cho  $a = b + c$  và  $c = \frac{bd}{b-d}, b \neq 0, d \neq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

**Bài 1.1.13** Cho  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} (c \neq \pm \frac{3}{5}d)$ . Chứng minh rằng:  $\frac{5a+3b}{5c+3d} = \frac{5a-3b}{5c-3d}$ .

**Bài 1.1.14** Cho  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq \pm 1$  và  $c \neq 0$ . Chứng minh rằng:

a.  $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2 = \frac{ab}{cd}$ .

b.  $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^3 = \frac{a^3-b^3}{c^3-d^3}$ .

**Bài 1.1.15** Chứng minh rằng  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  thì  $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$ .

**Bài 1.1.16** Cho  $b^2 = ac$ . Chứng minh rằng  $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$ .

**Bài 1.1.17** Cho  $b^2 = ac, c^2 = bd$ , với  $b, c, d \neq 0, b + c \neq d, b^3 + c^3 \neq d^3$ .  
Chứng minh rằng:  $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left( \frac{a + b - c}{b + c - d} \right)^3$ .

**Bài 1.1.18** Cho các số  $A, B, C$  tỉ lệ với các số  $a, b, c$ . Chứng minh rằng giá trị của biểu thức  $Q = \frac{Ax + By + Cz}{ax + by + cz}$  không phụ thuộc vào giá trị của  $x$  và  $y$ .

**Bài 1.1.19** Cho biểu thức  $M = \frac{ax + by}{cx + dy}$  với  $c, d \neq 0$ . Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức  $M$  không phụ thuộc vào  $x$  và  $y$  thì bốn số  $a, b, c, d$  lập thành một tỉ lệ thức.

**Bài 1.1.20** Cho  $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$  với  $a, b, c, d \neq 0, c \neq \pm d$ . Chứng minh rằng hoặc  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  hoặc  $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ .

## 1.2 Hàm số và đồ thị.

### 1.2.1 Tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch.

**Bài 1.2.1** Viết công thức biểu thị sự phụ thuộc giữa:

- a Chu vi  $C$  của hình vuông cạnh  $x$ .
- b Chu vi  $C$  của đường tròn bán kính  $R$ .
- c Diện tích  $S$  của hình chữ nhật có một cạnh là  $5(cm)$  và cạnh còn lại là  $x(cm)$ .
- d Diện tích  $S$  của hình tam giác có cạnh đáy là  $4(cm)$  và chiều cao là  $h(cm)$ .
- e Chiều dài của một hình chữ nhật có diện tích là  $12(cm^2)$  và một cạnh có độ dài là  $x(cm)$ .
- f Đường cao của một hình tam giác có diện tích là  $10(cm^2)$  và cạnh đáy có độ dài là  $x(cm)$ .

**Bài 1.2.2** Một công nhân tiện 30 đỉnh ốc cần 45 phút. Hỏi trong 1h45 phút, người đó tiện được bao nhiêu đỉnh ốc.

**Bài 1.2.3** Một con ngựa ăn hết một xe cỏ trong 4 ngày. Một con dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày. Một con cừu ăn hết một xe cỏ trong 12 ngày. Hỏi cả ba con ăn hết một xe cỏ trong bao lâu.

**Bài 1.2.4** Vận tốc riêng của ca nô là 21 km/h, vận tốc dòng sông là 3 km/h. Hỏi với thời gian ca nô chạy ngược dòng được 30 km/h thì ca nô chạy xuôi dòng được bao nhiêu km?

**Bài 1.2.5** Hai bà buôn gạo hết cùng một số tiền. Bà thứ nhất mua loại 4000 đồng/kg, bà thứ hai mua loại 4800 đồng/kg. Biết bà thứ nhất mua nhiều hơn bà thứ hai là 2kg. Hỏi mỗi bà mua bao nhiêu kilogram gạo?

**Bài 1.2.6** Một ô tô dự định chạy từ A đến B trong thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 54 km/h thì đến nơi sớm hơn 1 giờ. Nếu chạy với vận tốc 63 km/h thì đến nơi sớm hơn 2 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi.

**Bài 1.2.7** Để làm xong một công việc thì 21 công nhân cần làm trong 15 ngày. Do cải tiến công cụ lao động nên năng suất lao động của mỗi người tăng thêm 25%. Hỏi 18 công nhân làm trong bao lâu thì xong công việc ấy.

## 1.2.2 Hàm số và đồ thị của hàm số.

**Bài 1.2.8** Một chiếc tàu ngầm chạy với vận tốc không đổi là 37 km/h ở độ sâu 100 m so với mực nước biển.

- Viết hàm số  $f$  mô tả sự phụ thuộc giữa quãng đường  $s$  (tính bằng km) và thời gian  $t$  (tính bằng giờ) mà tàu ngầm đã đi.
- Viết hàm số  $g$  mô tả sự phụ thuộc giữa độ sâu  $h$  (tính bằng m) của tàu ngầm so với mực nước biển và thời gian  $t$  (tính bằng giờ). Tính  $g(2), g(3, 5)$ .

**Bài 1.2.9** Cho hàm số  $f(x) = 4x^2 - 5$ .

- Tính  $f(3), f(\frac{-1}{2})$ .
- Tìm  $x$  để  $f(x) = -1$ .
- Chứng tỏ rằng với  $x \in \mathbb{R}$  thì  $f(x) = f(-x)$ .

**Bài 1.2.10** Viết công thức của hàm số  $y = f(x)$  biết rằng  $y$  tỉ lệ thuận với  $x$  theo hệ số tỉ lệ  $\frac{1}{2}$ .

- Tính  $x$  để  $f(x) = -5$ .
- Chứng tỏ rằng nếu  $x_1 > x_2$  thì  $f(x_1) > f(x_2)$ .

**Bài 1.2.11** Viết công thức của hàm số  $y = f(x)$  biết rằng  $y$  tỉ lệ nghịch với  $x$  theo hệ số tỉ lệ 12

- Tính  $x$  để  $f(x) = 4, f(x) = 0$ .
- Chứng tỏ rằng  $f(-x) = -f(x)$ .

**Bài 1.2.12** Cho hàm số  $y = \frac{-1}{3}x$ .



- a. Vẽ đồ thị hàm số.
- b. Trong các điểm  $M(-3, 1)$ ,  $N(6, 2)$ ,  $P(9, -3)$  điểm nào thuộc đồ thị hàm số (không vẽ lên đồ thị).

**Bài 1.2.13** Vẽ giá trị hàm số  $y = f(x) = 0.5x$  với  $-2 \leq x \leq 6$ . Vẽ đồ thị hàm số rồi dùng đồ thị để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số này.

**Bài 1.2.14** Cho các hàm số  $y = f(x) = 2x$  và  $y = g(x) = \frac{18}{x}$ . Không vẽ đồ thị của chúng, hãy tính tọa độ giao điểm của hai đồ thị.

### 1.3 Biểu thức đại số.

**Bài 1.3.1** Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a.  $A = (x + 1)(x^2 - 2)$  tại  $x = \sqrt{2}$ .
- b.  $B = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}$  tại  $|x| = 3$ .
- c.  $C = 9x^2 - 7x|y| - \frac{1}{4}y^3$  tại  $x = \frac{1}{3}$ ;  $y = -6$ .
- d.  $D = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2}$  với  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ .
- e.  $E = (1 + \frac{z}{x})(1 + \frac{x}{y})(1 + \frac{y}{z})$  với  $x, y, z \neq 0, x + y + z = 0$ .

**Bài 1.3.2** Thu gọn các đơn thức sau rồi xác định hệ số, phần biến, và bậc của đơn thức (a, b, c là hằng số).

- a.  $A = (2a^3b^2x^4y)^3 \cdot \left(\frac{-3}{10}b^5x^2y^2z^3\right)$ .
- b.  $\left(\frac{-1}{2}(a - 1)x^3y^4z^2\right)^5$ .
- c.  $(a^5b^2xy^2z^{n-1})(-b^3cx^4z^{7-n})$ .
- d.  $\left(\frac{-9}{10}a^3x^2y\right) \cdot \left(\frac{-5}{3}ax^5y^2z\right)^3$ .

**Bài 1.3.3** Cho ba đơn thức  $A = ab^2x^4y^3$ ,  $B = ax^4y^3$ ,  $C = b^2x^4y^3$ . Những đơn thức nào đồng dạng với nhau nếu:

- a.  $a, b$  là hằng số khác 0,  $x, y$  là biến.
- b.  $a$  là hằng số khác 0,  $b, x, y$  là biến.

c.  $b$  là hằng số khác 0,  $a, x, y$  là biến.

**Bài 1.3.4** Thu gọn các đơn thức sau rồi xác định bậc của đơn thức ( $a, b$  là các hằng số).

a.  $A = ax^4y^3 + 10xy^2 + 4y^3 - 2x^4y^3 - 3xy^2 + bx^3y^4$ .

b.  $B = 4x(x + y) - 5(y(x - y)) - 4x^2$ .

c.  $C = (a - 1)(x^2 + 1) - x(y + 1) + x + y^2 - a + 1$ .

d.  $D = \left(\frac{7}{9}x^3y^2\right) \cdot \left(\frac{6}{11}axy^3\right) + (-5bx^2y^4) \left(\frac{-1}{2}axz\right) + ax(x^2y)^3$ .

e.  $E = \frac{(3x^4y^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}x^2y\right) + (8x^{n-9}) \cdot (-2x^{9-n})}{15x^3y^2(0, 4ax^2y^2z^2)}$ .

**Bài 1.3.5** Tìm nghiệm của các đa thức:

a.  $(x - 3)(4 - 5x)$ .

b.  $x^2 - 2$ .

c.  $x^2 + 3$ .

d.  $x^2 + 2x$ .

e.  $x^2 - 4x + 4$ .

f.  $x^2 + 2x - 3$ .

**Bài 1.3.6** Thu gọn rồi tìm nghiệm của các đa thức sau:

a.  $f(x) = x(1 - 2x) + (2x^2 - x + 4)$ .

b.  $g(x) = x(x - 5) - x(x + 2) + 7x$ .

c. (\*)  $h(x) = x(x - 1) + 1$ .

**Bài 1.3.7** Xác định hệ số  $m$  để các đa thức sau nhận 1 là nghiệm.

a.  $mx^2 + 2x + 8$ .

b.  $7x^2 + mx - 1$ .

c.  $x^{10} - 3x^2 + m$ .

**Bài 1.3.8** Cho các đa thức  $f(x) = ax + b, g(x) = bx + a$ . Chứng minh rằng nếu  $x_0$  là nghiệm của  $f(x)$  thì  $\frac{1}{x_0}$  là nghiệm của  $g(x)$ .

**Bài 1.3.9** Cho biết  $(x - 1)f(x) = (x + 4)f(x + 8)$  thỏa mãn với mọi  $x$ . Chứng minh rằng  $f(x)$  có ít nhất hai nghiệm.

**Bài 1.3.10** Cho đa thức  $f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ . Hãy chỉ ra điều kiện của các hệ số của đa thức trên để:

a.  $f(x)$  nhận  $x = 1$  là nghiệm.

b.  $f(x)$  nhận  $x = -1$  là nghiệm.

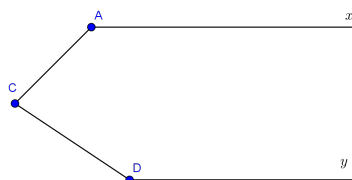
## Chương 2

# HÌNH HỌC

### 2.1 Quan hệ vuông góc và quan hệ song song.

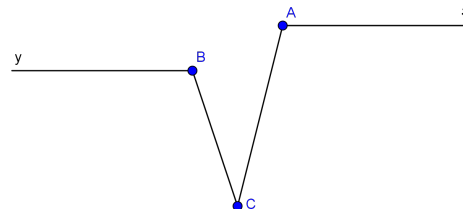
#### Bài 2.1.1

Trên hình vẽ trên cho biết  $\widehat{xAC} + \widehat{ACD} + \widehat{CDy} = 360^\circ$ .  
Chứng minh rằng  $Ax \parallel Dy$ .



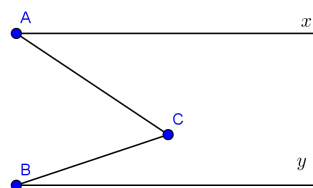
#### Bài 2.1.2

Trên hình vẽ bên cho biết  $\widehat{xAC} + \widehat{yBC} - \widehat{ACB} = 180^\circ$ .  
Chứng minh rằng  $Ax \parallel By$ .



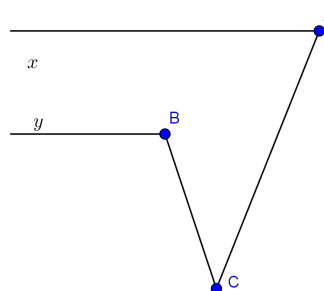
#### Bài 2.1.3

Trên hình vẽ bên cho biết  $\widehat{ACB} > \widehat{xAC}$ ,  $Ax \parallel By$ .  
Chứng minh rằng  $\widehat{ACB} = \widehat{xAC} + \widehat{CBY}$ .



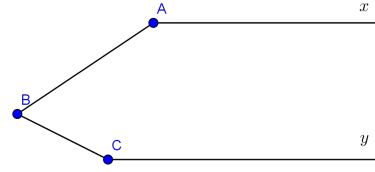
#### Bài 2.1.4

Biết  $Ax \parallel By$  và  $\widehat{yBC} > \widehat{ACB}$ .  
Chứng minh rằng  $\widehat{yBC} = \widehat{xAC} + \widehat{ACB}$ .

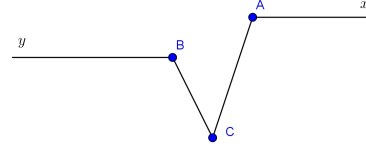


**Bài 2.1.5**

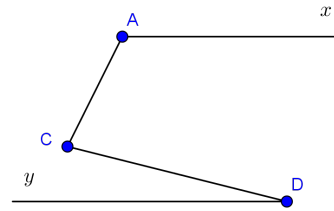
Biết  $Ax \parallel Cy$  và  $\widehat{xAB} + \widehat{ABC} > 180^\circ$ .  
 Chứng minh rằng  $\widehat{xAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCy} = 360^\circ$ .

**Bài 2.1.6**

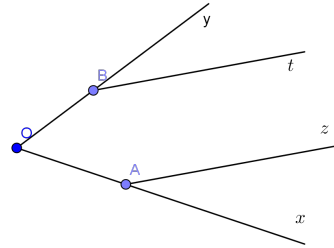
Biết  $Ax \parallel By$  và  $\widehat{ACB} < \widehat{yBC}$ .  
 Chứng minh rằng  $\widehat{xAC} + \widehat{yBC} - \widehat{ACB} = 180^\circ$ .

**Bài 2.1.7**

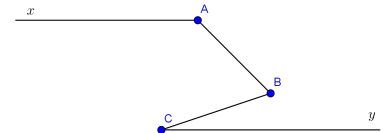
Biết  $\widehat{xAC} + \widehat{ACD} - \widehat{CDy} = 180^\circ$ .  
 Chứng minh rằng  $Ax \parallel Cy$ .

**Bài 2.1.8**

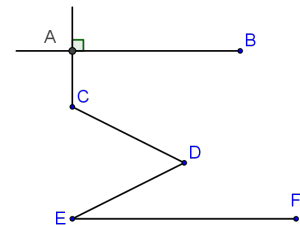
Biết  $Az \parallel Bt$ . Chứng minh rằng  $\widehat{xOy} = \widehat{xAz} + \widehat{yBt}$ .

**Bài 2.1.9**

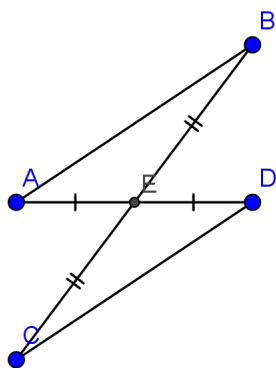
Biết  $Ax \parallel Cy$ . Chứng minh rằng  $\widehat{xAB} + \widehat{ABC} - \widehat{BCy} = 180^\circ$ .

**Bài 2.1.10**

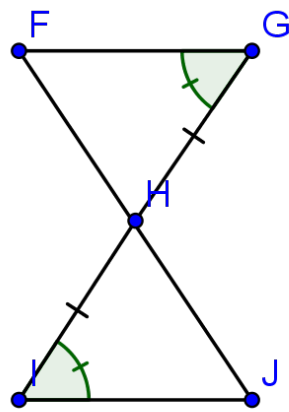
Biết  $AB \perp AC$  và  $\widehat{ACD} = 110^\circ$ ,  $\widehat{CDE} = 55^\circ$ ,  $\widehat{DEF} = 35^\circ$ .  
 Chứng minh rằng  $AB \parallel EF$ .

**2.2 Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác.**

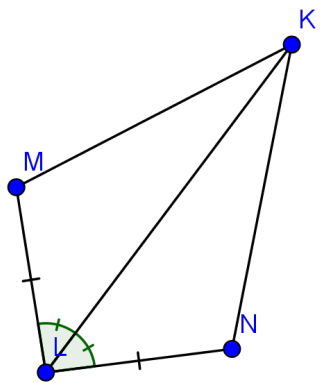
**Bài 2.2.1** Nhìn vào bảng hãy chỉ ra những cặp tam giác bằng nhau.



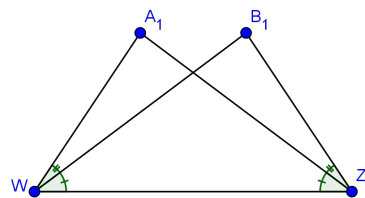
a)



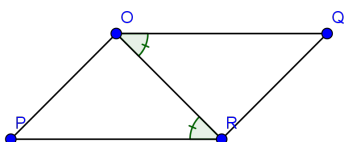
b)



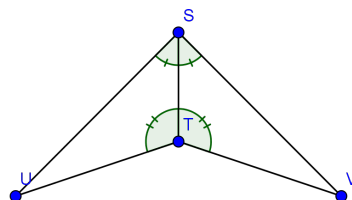
c)



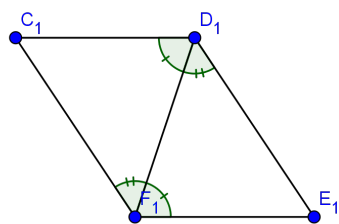
d)



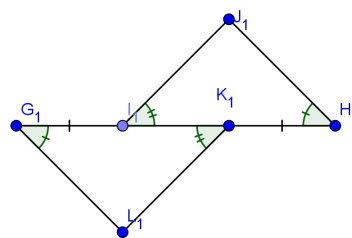
e)



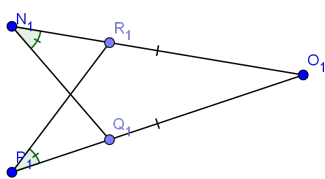
f)



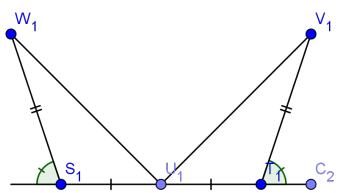
g)



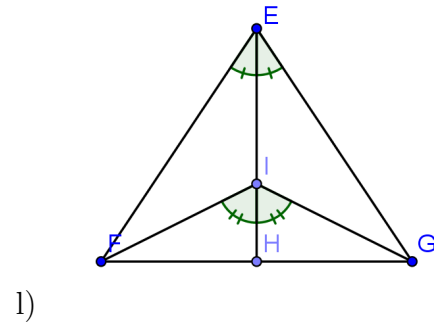
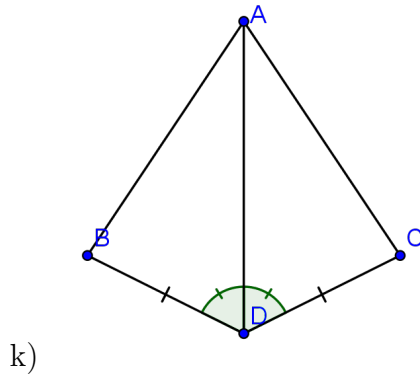
h)



i)

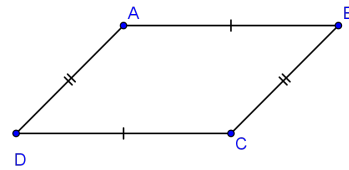


j)



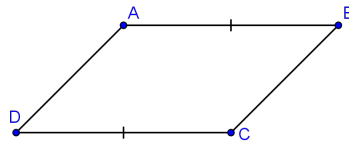
### Bài 2.2.2

Cho hình vẽ có  $AB = CD$ ,  $AD = BC$ .  
Chứng minh  $AB \parallel CD$ ,  $AD \parallel BC$ .



### Bài 2.2.3

Cho hình vẽ có  $AB \parallel CD$ ,  $AB = CD$ .  
Chứng minh  $AD = BC$  và  $AD \parallel BC$ .



**Bài 2.2.4** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$ . Chứng minh  $MN \parallel BC$  và  $MN = \frac{BC}{2}$ .

**Bài 2.2.5** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh  $AB \perp AC$ .

**Bài 2.2.6** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh  $AM = \frac{BC}{2}$ . Từ đó hãy chỉ ra rằng: Nếu  $\widehat{B} = 30^\circ$  thì  $AC = \frac{BC}{2}$ .

**Bài 2.2.7** Cho tam giác  $ABC$  có  $AD \perp AB$ ,  $AD = AB$ ,  $AC \perp AE$ ,  $AC = AE$ .  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh  $AM = \frac{DE}{2}$  và  $DE \perp DE$ .

**Bài 2.2.8** Cho góc  $\angle xAy = 60^\circ$ ,  $Az$  là tia phân giác của góc  $\angle xAy$ ,  $BC \parallel Ay$ . Chứng minh  $2BD = AC$ .

**Bài 2.2.9** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 2AB$ ,  $MB = MC$ ,  $DB = DM$ . Chứng minh  $AC = 2AD$ .

**Bài 2.2.10** Cho  $\widehat{xAy} = 90^\circ$ ,  $Oz$  là tia phân giác của góc  $\widehat{xOy}$ ,  $AB \perp Ox$ ,  $AC \perp Oy$ ,  $AE$  là tia phân giác của góc  $\widehat{CAD}$ . Chứng minh  $AD = CE + BD$ .

## 2.3 Các bài toán dựng hình cơ bản.

**Bài 2.3.1** Dựng tia phân giác của một góc cho trước.

**Bài 2.3.2** Dựng đường trung trực của một đoạn thẳng cho trước.

**Bài 2.3.3** Dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước.

**Bài 2.3.4** Dựng đường thẳng qua điểm  $A$  và vuông góc với đường thẳng  $d$  trong các trường hợp sau.

a.  $A \in d$ .

b.  $A \notin d$ .

**Bài 2.3.5** Dựng đường thẳng qua điểm  $M$  không thuộc  $d$  và song song với đường thẳng  $d$ .

**Bài 2.3.6** Dựng tam giác biết độ dài ba cạnh cho trước.

**Bài 2.3.7** Dựng một tam giác biết hai cạnh và một góc xen giữa hai cạnh đó.

**Bài 2.3.8** Dựng một tam giác biết hai cạnh và một góc xen giữa hai cạnh đó.

**Bài 2.3.9** Dựng một tam giác biết hai góc kề nhau và một cạnh chung của hai góc đó.

**Bài 2.3.10** Cho tam giác  $ABC$ . Dựng một điểm thỏa mãn các trường hợp sau:

a. Cách đều ba cạnh của một tam giác  $ABC$ .

b. Cách đều ba đỉnh của tam giác  $ABC$ .

## 2.4 Quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác.

**Bài 2.4.1** Cho tam giác  $ABC$  với  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $\widehat{BAM} < \widehat{MAC}$  khi và chỉ khi  $AB < AC$ .

**Bài 2.4.2** Cho tam giác  $ABC$  với  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh  $AB + AC > 2AM$ .

**Bài 2.4.3** Cho hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  và  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ . Chứng minh rằng  $BC > B'C'$  khi và chỉ khi  $\widehat{A} > \widehat{A'}$ .

**Bài 2.4.4** Cho tam giác  $ABC$  có  $BD \perp AC$ ,  $AB \perp CE$ , ( $D \in AC$ ,  $E \in AB$ ). Chứng minh  $AB - AC > BD - CE$

**Bài 2.4.5** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $D$ , trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BD = CE$ . Chứng minh rằng  $BC < DE$ .

**Bài 2.4.6** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $M$  nằm trong tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $MB + MC < AB + AC$ .

**Bài 2.4.7** Cho hai điểm  $B, C$  nằm trên đoạn thẳng  $AD$  sao cho  $AB = CD$ ,  $M$  là điểm nằm ngoài đoạn thẳng  $AD$ . Chứng minh  $MA + MD > MB + MC$ .

**Bài 2.4.8** Cho góc  $\widehat{xAy} = 60^\circ$ ,  $B$  nằm trên tia  $Ax$ ,  $C$  nằm trên tia  $Ay$ . Chứng minh rằng  $AB + AC \leq 2BC$ .

**Bài 2.4.9** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , vẽ  $AH \perp BC$  tại  $H$ . Chứng minh rằng  $BC + AH > AB + AC$ .

**Bài 2.4.10** Cho tam giác  $\triangle ABC$  có  $BC$  là cạnh lớn nhất và  $M$  là trung điểm của  $AC$ . Điểm  $D$  nằm trên đoạn  $BM$  ( $D \neq B$ ). Chứng minh  $\widehat{BDC} > 90^\circ$ .

## 2.5 Quan hệ các đường thẳng đồng quy trong tam giác.

### 2.5.1 Ba đường trung tuyến của tam giác.

**Bài 2.5.1** Cho tam giác  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Trên tia đối của tia  $HA$  lấy điểm  $D$  sao cho  $HA = HD$ . Trên tia đối của tia  $CB$  lấy điểm  $E$  sao cho  $CE = CB$ .

- Chứng minh rằng  $C$  là trọng tâm tam giác  $ADE$ .
- Tia  $AC$  cắt  $DE$  tại  $M$ . Chứng minh rằng  $AE \parallel HM$ .

**Bài 2.5.2** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AM$ . Chứng minh rằng

- Nếu  $AM < \frac{BC}{2}$  thì  $\widehat{A}$  tù.
- Nếu  $AM = \frac{BC}{2}$  thì  $\widehat{A}$  vuông.
- Nếu  $AM > \frac{BC}{2}$  thì  $\widehat{A}$  nhọn.

**Bài 2.5.3** Cho tam giác  $ABC$  có hai đường trung tuyến  $BM$  và  $CN$ . Biết  $AB < AC$ . Chứng minh rằng  $BM < CN$ .

**Bài 2.5.4** Chứng minh rằng trong một tam giác, tổng độ dài ba đường trung tuyến lớn hơn  $\frac{3}{4}$  chu vi và nhỏ hơn chu vi tam giác đó.

**Bài 2.5.5** Cho tam giác  $ABC$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $BC$  không chứa điểm  $A$ , vẽ tia  $Bx$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $BC$  có chứa điểm  $A$ , vẽ tia  $Cy$  sao cho  $Cy \parallel Bx$ . Trên  $Bx$ ,  $Cy$  lần lượt lấy hai điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $BD = CE$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $G$  cũng là trọng tâm tam giác  $ADE$ .



### 2.5.2 Ba đường phân giác của tam giác.

**Bài 2.5.6** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng hai đường phân giác ngoài của góc  $B$  và góc  $C$  cùng với đường phân giác trong góc  $A$  đồng quy.

**Bài 2.5.7** Cho góc  $xOy$ . Lấy điểm  $A$  trên  $Ox$ , lấy điểm  $B$  trên  $Oy$ . Vẽ các tia phân giác của các góc  $BAx$  và  $ABx$  cắt nhau tại  $M$ . Từ  $M$  vẽ một đường thẳng vuông góc với  $OM$  cắt  $Ox, Oy$  tại  $C$  và  $D$ . Chứng minh tam giác  $OCD$  cân.

**Bài 2.5.8** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 120^\circ$ , phân giác  $BD$  và  $CE$ . Đường thẳng chứa tia phân giác ngoài tại đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $F$ . Chứng minh rằng  $\widehat{ADF} = \widehat{BDF}$  và  $D, E, F$  thẳng hàng.

**Bài 2.5.9** Cho tam giác  $ABC$ , các tia phân giác góc  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $O$ . Từ  $A$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $OA$  cắt các tia  $BO$  và  $CO$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh  $BM \perp BN$  và  $CM \perp CN$ .

**Bài 2.5.10** Cho tam giác  $ABC$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ , đường cao  $AH$ , phân giác  $BD$ . Cho biết  $\widehat{BDA} = 45^\circ$ . Chứng minh rằng  $HD \parallel AB$ .

### 2.5.3 Ba đường trung trực của tam giác.

**Bài 2.5.11** Cho tam giác  $ABC$ . Trên cạnh  $CA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $CE = AB$ . Các đường trung trực của  $BE$  và  $AC$  cắt nhau tại  $O$ . Chứng minh rằng:

- $\triangle AOB = \triangle COE$ .
- $AO$  là tia phân giác của góc  $A$ .

**Bài 2.5.12** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $E$  thuộc đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh  $A$  sao cho tam giác  $EBC$  có chu vi nhỏ nhất.

**Bài 2.5.13** Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $BC$  sao cho nếu vẽ các điểm  $D, E$  trong đó  $AB$  là đường trung trực của  $MD$ ,  $AC$  là đường trung trực của  $ME$  thì  $DE$  có độ dài nhỏ nhất.

**Bài 2.5.14** Cho điểm  $A$  nằm trong góc nhọn  $\widehat{xOy}$ . Tìm điểm  $B$  thuộc tia  $Ox$ , điểm  $C$  thuộc tia  $Oy$  sao cho  $ABC$  có chu vi nhỏ nhất.

**Bài 2.5.15** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Điểm  $D, E$  theo thứ tự di chuyển trên cạnh  $AB$  và  $AC$  sao cho  $AD = CE$ . Chứng minh rằng các đường trung trực của  $DE$  luôn đi qua một điểm cố định.

### 2.5.4 Ba đường cao của tam giác.

**Bài 2.5.16** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , trung tuyến  $AM$ , đường cao  $BE$ . Trên tia  $BE$  lấy điểm  $F$  sao cho  $BF = CE$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $BE$ ,  $CF$  và  $AM$  cùng đi qua một điểm.

**Bài 2.5.17** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , hai đường cao  $BD, CE$  gặp nhau tại  $H$ . Vẽ điểm  $K$  sao cho  $AB$  là trung trực của  $HK$ . Chứng minh rằng  $\widehat{KAB} = \widehat{KCB}$ .

**Bài 2.5.18** Tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC$  là cạnh lớn nhất. Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $BD = BA$  và  $CE = CA$ . Tia phân giác của góc  $B$  cắt  $AE$  tại  $M$ . Tia phân giác của góc  $C$  cắt  $AD$  tại  $N$ . Chứng minh rằng tia phân giác của góc  $BAC$  vuông góc với  $MN$ .

**Bài 2.5.19** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , vẽ đường cao  $AH$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $HC$ . Chứng minh rằng  $BM \perp AN$ .

**Bài 2.5.20** Cho tam giác  $ABC$  đường cao  $AH$ . Trên nửa mặt phẳng chứa điểm  $A$  bờ là đường thẳng  $BC$  lấy điểm  $D, E$  sao cho  $BD \perp BA, BD = BA, CE \perp CA, CE = CA$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $AH, BE, CD$  đồng quy.

## 2.6 Các bài toán có nội dung tính góc.

**Bài 2.6.1** Tính các góc của tam giác  $ABC$  biết đường cao  $AH$  và đường trung tuyến  $AM$  chia góc  $A$  thành ba góc bằng nhau.

**Bài 2.6.2** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 120^\circ$ . Trên tia đối của tia  $CB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = 2CB$ . Tính số đo góc  $ADB$ .

**Bài 2.6.3** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và  $\widehat{B} = 75^\circ$ . Trên tia đối của tia  $AB$  lấy điểm  $H$  sao cho  $BH = 2AC$ . Tính số đo của góc  $AHC$ .

**Bài 2.6.4** Cho tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 50^\circ, \widehat{B} = 20^\circ$ . Trên đường phân giác  $BE$  của tam giác ta lấy điểm  $F$  sao cho  $\widehat{FAB} = 20^\circ$ . Gọi  $N$  là trung điểm  $AF$ ,  $EN$  cắt  $AB$  tại  $K$ . Tính số đo  $\widehat{KCB}$ .

**Bài 2.6.5** Tính các góc của tam giác cân  $ABC$  biết rằng trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AD = DC = CB$ .

**Bài 2.6.6** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $\widehat{A} = 20^\circ$ . Trên nửa mặt phẳng không chứa  $B$  có bờ  $AC$ , vẽ tia  $Cx$  sao cho  $\widehat{ACx} = 60^\circ$ , trên tia ấy lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = CB$ . Tính  $\widehat{ADC}$ .

## Chương 3

# LỜI GIẢI MỘT VÀI BÀI CHỌN LỘC

### Bài 1.1.3. d.

Lời giải.

Giả thiết bài toán ta có  $x, y, z$  cùng dấu.

$$\text{Ta có: } \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} \text{ suy ra } \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{49} = \frac{z^2}{9} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{25 + 49 - 9} = \frac{65}{65} = 1$$

$$\text{Vậy ta có: } \begin{cases} \frac{x^2}{25} = 1 \\ \frac{y^2}{49} = 1 \\ \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \pm 7 \\ z = \pm 3 \end{cases}$$

$$\text{Do } x, y, z \text{ cùng dấu nên } \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -5 \\ y = -7 \\ z = -3 \end{cases} \text{ là các giá trị phải tìm. } \quad \square$$

### Bài 1.1.8. Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 &= \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1 \\ &= \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \end{aligned}$$

**Trường hợp 1** Nếu  $a+b+c+d=0$  thì  $M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$ .

**Trường hợp 2** Nếu  $a+b+c+d \neq 0$  thì  $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ . Khi đó,  $a=b=c=d$ .

$$\text{Vậy } M = 4. \frac{2a}{2a} = 4. \quad \square$$

**Nhận xét:** Nhìn vào hệ số của  $a, b, c, d$  và sự bình đẳng về bậc của  $a, b, c, d$  trong giả thiết bài toán ta có thể mở rộng bài toán như sau:

**Bài toán 1** Cho số tùy ý  $\alpha \neq 0$  và cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{(\alpha + 1)a + b + c + d}{a} = \frac{a + (\alpha + 1)b + c + d}{b} = \frac{a + b + (\alpha + 1)c + d}{c} = \frac{a + b + c + (\alpha + 1)d}{d}.$$

Tìm giá trị của biểu thức  $M$ , biết  $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$ .

**Bài toán 2** Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{(\alpha + 1)a + b + c + d}{\alpha a} = \frac{a + (\alpha + 1)b + c + d}{\alpha b} = \frac{a + b + (\alpha + 1)c + d}{\alpha c} = \frac{a + b + c + (\alpha + 1)d}{\alpha d}.$$

Tìm giá trị của biểu thức  $M$ , biết  $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$ .

**Bài toán 3** Cho số tùy ý  $\alpha$  và  $m$  là số nguyên dương chẵn và cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{\alpha a^m + b^m + c^m + d^m}{a^m} = \frac{a^m + \alpha b^m + c^m + d^m}{b^m} = \frac{a^m + b^m + \alpha c^m + d^m}{c^m} = \frac{a^m + b^m + c^m + \alpha d^m}{d^m}.$$

Tìm giá trị của biểu thức  $M$ , biết  $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$ .

**Bài 1.1.11. Lời giải.**

$$\text{Từ giả thiết ta có: } x = \frac{a^2}{k}, y = \frac{b^2}{k}. \text{ Suy ra } \frac{x}{y} = \frac{\frac{a^2}{k}}{\frac{b^2}{k}} = \frac{a^2}{b^2} \quad \square$$

**Bài 1.1.18. Lời giải.**

Từ giả thiết tồn tại số  $k$  không phụ thuộc vào  $x$  và  $y$  để  $A = ka, B = kb, C = kc$ .

$$\text{Khi đó } Q = \frac{Ax + By + Cz}{ax + by + cz} = \frac{kax + kby + kcz}{ax + by + cz} = k \quad \square$$

**Bài 1.2.5. Lời giải.**

Bà thứ nhất mua  $x$  cân gạo thì bà thứ hai mua  $(x - 2)$  cân gạo ( $x > 2$ ).

Bà thứ nhất mua hết số tiền là:  $4000x$  (đồng).

Bà thứ hai mua hết số tiền là:  $4800(x - 2)$  (đồng).

$$\text{Theo bài ra thì } 4000x = 4800(x - 2) \Leftrightarrow x = \frac{4800 \cdot 2}{800} = 12.$$

Vậy bà thứ nhất mua 12 cân gạo.

và bà thứ hai mua 10 cân gạo.  $\square$

**Bài 1.2.8. Lời giải.**

a.  $f(t) = s = 37t$ .

b.  $g(t) = h = -100$ . Vậy :  $g(2) = g(3.5) = -100$ . □

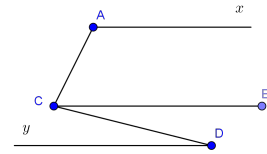
### Bài 1.3.10. Lời giải.

a.  $x = 1$  là nghiệm  $\Rightarrow a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} \dots + a_1 \cdot 1 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$ .

b.  $x = -1$  là nghiệm  $\Rightarrow a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \dots + a_1 \cdot (-1) + a_0 = 0$ .

### Bài 2.1.7. Lời giải.

Ta kẻ  $CE \parallel Ax$  suy ra  $\widehat{xAC} + \widehat{ACE} = 180^\circ$ . Theo giả thiết suy ra  $\widehat{xAC} + \widehat{ACD} - \widehat{CDy} = \widehat{xAC} + \widehat{ACE}$ .  
Mà  $\widehat{ACD} = \widehat{ACE} + \widehat{ECD}$   
Nên  $\widehat{xAC} + \widehat{ACE} + \widehat{ECD} - \widehat{CDy} = \widehat{xAC} + \widehat{ACE}$ .  
Suy ra  $\widehat{ECD} - \widehat{CDy} = 0$ . hay  $\widehat{ECD} = \widehat{CDy}$  (hai góc ở vị trí so le trong). Do đó  $CE \parallel Dy$ . Mà ta đã có  $Ax \parallel CE$ , vậy  $Ax \parallel Dy$ . □



### Bài 2.4.8. Lời giải.

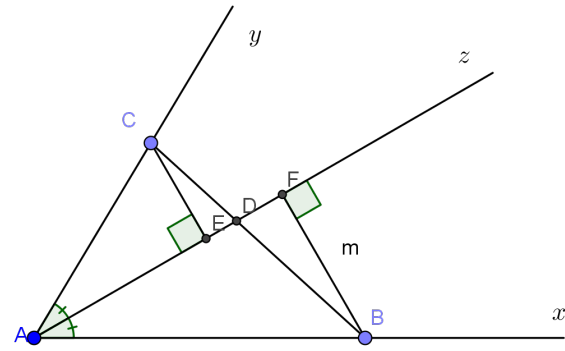
Kẻ tia phân giác Az của góc xAy.

Kẻ  $BF \perp Az$ ,  $CE \perp Az$ .

Xét tam giác vuông CAE có cạnh CE đối diện với góc  $30^\circ$  suy ra  $AC = 2CE$ .

Xét tam giác vuông BAF có cạnh BF đối diện với góc  $30^\circ$  suy ra  $AB = 2BF$ .

Do đó  $AB + AC = 2(CE + BF)$ . Mặt khác  $CE < CD$ ,  $BF < BD$  nên  $AB + AC < CD + BD = BC$ .  
Vậy  $AB + AC = 2BC$ . □



### Bài 2.6.5. Lời giải.

Gọi  $\widehat{BAC} = x$ . Tam giác ADC cân tại D nên  $\widehat{ACD} = x$ .  
Suy ra  $\widehat{DBC} = \widehat{ABC} = 2x$  (tam giác BDC cân tại C).  
Xét tam giác ABC có  $x + 2x + 2x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$ .  
Vậy tam giác ABC có  $\widehat{A} = 36^\circ$ ,  $\widehat{B} = \widehat{C} = 72^\circ$ .

