Chương 1

Không gian vectơ

1.1 Không gian vectơ

Bài 1.1. Cho $a < b$ là hai số thực. Xét xem tập hợp nào trong số các tập hợp sau đây với phép cộng và phép nhân (với một số) thông thường lập thành không gian vectơ trên $\mathbb{R}$:

(a) Tập $C^1[a, b]$ các hàm khả tích trên $[a, b]$.

(b) Tập $C^n(a, b)$ các hàm số thực có đạo hàm cấp n liên tục trên khoảng (a, b).

(c) Tập $C^\infty(a, b)$ các hàm thực khả vi vô hạn lần.

(d) Tập các hàm số thực bị chặn trên đoạn $[a, b]$.

(e) Tập các hàm số thực không bị chặn trên đoạn $[a, b]$.

(f) Tập các hàm thực f thỏa mãn $f(a) = 0$.

(g) Tập các hàm thực f thỏa mãn $f(a) = -1$.

(h) Tập các hàm thực đơn điệu tăng trên $[a, b]$.

Bài 1.2. Xét xem tập hợp nào trong số các tập hợp sau đây với phép cộng và phép nhân (với một số) thông thường lập thành không gian vectơ trên $\mathbb{R}$:

(a) Tập các dãy số thực hội tụ.

(b) Tập các dãy số thực phân kỳ.

(c) Tập các dãy số thực bị chặn.

(d) Tập các dãy số thực thỏa mãn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ hội tụ, trong đó p là một số thực khác 0.

Bài 1.3. Xét xem các tập hợp sau đây có lập thành $\mathbb{K}$-không gian vectơ hay không đối với các phép toán thông thường (được định nghĩa theo từng thành phần)

(a) $U_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$.

(b) $U_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$.

(c) $U_3 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|x_1 = x_n = -1\}$.

(d) $U_4 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \,|x_1 = x_3 = x_5 = \cdots, x_2 = x_4 = x_6 = \cdots\}$.

Bài 1.4. Tập hợp

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\}$$

có phải là một $\mathbb{R}$-không gian vectơ hay không?

Bài 1.5. Cho S là một tập khác rỗng tùy ý và V là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$. Gọi $M(S, V)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ từ S vào V. Với $f, g \in M(S, V)$ và $\alpha \in \mathbb{K}$, ta định nghĩa:
- Phép cộng $(f + g)(s) = f(s) + g(s),\ \forall s \in S$;
- Phép nhân với vô hướng $(\alpha f)(s) = \alpha f(s),\ \forall s \in S$.
Chứng minh rằng $M(S, V)$ cùng với hai phép toán đó là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ.

Bài 1.6. Gọi $\mathbb{R}_+$ là tập hợp các số thực dương. Trên $\mathbb{R}_+$ ta định nghĩa:
- Phép cộng $\oplus : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \longmapsto x \oplus y = xy$;
- Phép nhân với vô hướng $\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, (\lambda, x) \longmapsto \lambda \otimes x = x^\lambda$.
Chứng minh rằng $\mathbb{R}_+$ cùng với hai phép toán đó là một không gian vectơ thực.

Bài 1.7. Cho $V = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ với các phép toán xác định như sau:
- Phép cộng $(ab) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- Phép nhân với vô hướng $k(a, b) = (ka, 0)$.
Chứng minh rằng V không là không gian vectơ.

1.2 Không gian con và không gian thương

Bài 1.8. Cho U là một không gian vectơ con của V. Hỏi tập hợp $V \backslash U$ có phải là một không gian con của V?

Bài 1.9. Cho $V_i, i \in I$ là một họ các không gian con của V. Kí hiệu

$$\sum_{i \in I} V_i = \{x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_n} \mid x_{i_j} \in V_{i_j},\ j = 1, 2, \dots, n,\ i_1, i_2, \dots, i_n \in I, n \in \mathbb{N}\}.$$

Chứng minh rằng tập này là một không gian vectơ con của V, và nó được gọi là *tổng* của các không gian con.

Bài 1.10. Xét χ là một họ các không gian con của V thỏa mãn: nếu $V_1, V_2 \in \chi$ thì tồn tại $V_3 \in \chi$ chứa cả V_1, V_2. Chứng minh rằng tập hợp $\bigcup\limits_{V_i \in \chi} V_i$ là một không gian con của V.

Bài 1.11. Một số phức được gọi là *số đại số* nếu nó là nghiệm của một đa thức với hệ số hữu tỉ. Chứng minh rằng tập hợp các số đại số lập thành một không gian vectơ trên $\mathbb{Q}$.

Bài 1.12. Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và U, V_1, V_2 là các không gian vectơ con của V. Chứng minh rằng

(a) $(U \cap V_1) + (U \cap V_2) \subseteq U \cap (V_1 + V_2)$. Tìm ví dụ để có bao hàm thức thực sự.

(b) Nếu $V_1 \subset U$ hoặc $V_2 \subset U$ thì $(U \cap V_1) + (U \cap V_2) = U \cap (V_1 + V_2)$.

(c) $U + (V_1 \cap V_2) \subseteq (U + V_1) \cap (U + V_2)$. Tìm ví dụ để có bao hàm thức thực sự.

(d) Nếu $U \subset V_1$ hoặc $U \subset V_2$ thì $U + (V_1 \cap V_2) \subseteq (U + V_1) \cap (U + V_2)$.

Bài 1.13. Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và U, W là các không gian vectơ con của V sao cho $U \cup W = V$. Chứng minh rằng $U = V$ hoặc $W = V$.

Bài 1.14. Cho V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ hữu hạn chiều và U là một không gian vectơ con của V. Chứng minh rằng tồn tại không gian con W sao cho $V = U \oplus W$.

Chứng tỏ rằng khẳng trên vẫn còn đúng cho trường hợp V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ vô hạn chiều.

Bài 1.15. Cho $V = V_1 \oplus V_2$ và U là một không gian con khác của V chứa V_1. Chứng tỏ rằng $V_2 \cap U$ là không gian con bù của V_1 trong U.

Bài 1.16. Cho $V = V_1 \oplus V_2$ và U là một không gian con của V. Chứng tỏ rằng $(U \cap V_1) + (U \cap V_2)$ là tổng trực tiếp, nhưng có thể xảy ra trường hợp $U \neq (U \cap V_1) \oplus (U \cap V_2)$.

1.3 Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Bài 1.17. Xét xem hệ các vectơ sau đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^4$:

(a) $\overrightarrow{u_1} = (-1, -2, 1, 2)$, $\overrightarrow{u_2} = (0, -1, 2, 3)$, $\overrightarrow{u_3} = (1, 4, 1, 2)$, $\overrightarrow{u_4} = (-1, 0, 1, 3)$.

(b) $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 0, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_3} = (-3, 1, -2, -1)$.

Bài 1.18. Xét xem hệ các vectơ sau đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{Q}^3$:

(a) $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{u_2} = (1, -3, 2)$, $\overrightarrow{u_3} = (2, -1, 5)$.

(b) $\overrightarrow{v_1} = (4, 1, 2)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 3, 5)$, $\overrightarrow{v_3} = (-1, -7, 2)$, $\overrightarrow{v_4} = (3, 4, 0)$, $\overrightarrow{v_5} = (2, 3, -1)$.

(c) $\overrightarrow{w_1} = (12, 1, -2)$, $\overrightarrow{w_2} = (0, 0, 0)$, $\overrightarrow{w_3} = (3, 2, 5)$.

Bài 1.19. Xét xem hệ các vectơ sau đây có phải là hệ sinh của $\mathbb{C}^3$ không?

(a) $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{u_2} = (2, -5, 6)$, $\overrightarrow{u_3} = (0, 0, 0)$.

(b) $\overrightarrow{v_1} = (2, -5, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 3)$, $\overrightarrow{v_3} = (4, 3, 2)$, $\overrightarrow{v_4} = (-1, -1, -1)$.

Bài 1.20. Tìm điều kiện của a, b, c để vectơ $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ thuộc không gian con sinh bởi các vectơ: $\overrightarrow{u} = (2, 1, 0), \overrightarrow{v} = (1, -3, 2), \overrightarrow{w} = (0, 7, -4)$.

Bài 1.21. Xét xem hệ các vectơ sau đây độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong không gian các đa thức một biến $\mathbb{R}[x]$:

(a) $x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, $x^3 - x^2 + 8x + 2$, $2x^3 - 4x^2 + 9x + 5$.

(b) $x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, $x^3 + 6x^2 - x + 4$, $3x^3 + 8x^2 - 8x + 7$.

Bài 1.22. Trong không gian các hàm số thực từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, hãy chứng tỏ các vectơ sau độc lập tuyến tính:

(a) $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = |x|$.

(b) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \sin(2x)$, $l(x) = \cos(2x)$.

Bài 1.23. Chứng minh rằng các hàm số sau lập thành một hệ độc lập tuyến tính không gian các hàm liên tục $C(\mathbb{R})$ trên trường $\mathbb{R}$:

(a) $\{e^x,\ e^{2x}, \ldots,\ e^{nx}, \ldots\}$.

(b) $\{e^x,\ e^{x^2}, \ldots,\ e^{x^n}\}$.

(c) $\{\sin(x),\ \sin(2x),\ \sin(3x),\ \sin|x - \pi|,\ \sin|x - 2\pi|,\ \sin|x - 3\pi|\}$.

Bài 1.24. Giả sử $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính và $a_{ij} \in \mathbb{K}, 1 \le i \le j \le n$. Chứng minh rằng các vectơ

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{u_1} & = & a_{11}\overrightarrow{v_1}, \\ \overrightarrow{u_2} & = & a_{21}\overrightarrow{v_1} + a_{22}\overrightarrow{v_2}, \\ & \ldots & \ldots \\ \overrightarrow{u_n} & = & a_{n1}\overrightarrow{v_1} + a_{n2}\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{v_n}. \end{array}$$

độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn} \neq 0$.

Bài 1.25. Giả sử $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính và $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n}$. Chứng minh rằng các vectơ $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_n}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \neq 1$.

Bài 1.26. Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{C}$. Khi đó, V cũng là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, và để khỏi nhầm lẫn ta kí hiệu nó là V'. Chứng tỏ rằng:

(a) Nếu $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$ (tức trong V) thì cũng độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$ (tức trong V'), và nếu $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ là hệ sinh của V' thì cũng là hệ sinh của V. Các điều ngược lại không đúng.

(b) Nếu $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ là hệ sinh của V thì $(\overrightarrow{v_1}, i\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, i\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}, i\overrightarrow{v_n})$ là hệ sinh của V'.

Bài 1.27. Cho V_1, V_2 là các $\mathbb{K}$-không gian vectơ và $S_1 \subset V_1, S_2 \subset V_2$. Chứng minh rằng:

(a) $(S_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S_2)$ là hệ sinh của $V_1 \times V_2$ khi và chỉ khi S_1, S_2 tương ứng là hệ sinh của V_1, V_2.

(b) $(S_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S_2)$ độc lập tuyến tính trong $V_1 \times V_2$ khi và chỉ khi S_1, S_2 tương ứng độc lập tuyến tính trong V_1, V_2.

1.4 Hạng một hệ vectơ

Bài 1.28. Tìm hạng của hệ các vectơ sau đây trong $\mathbb{R}^4$:

(a) $\overrightarrow{u_1} = (1,2,0,1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,1,1,0)$, $\overrightarrow{u_3} = (1,0,1,0)$, $\overrightarrow{u_4} = (1,3,0,1)$.

(b) $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,3,1,3)$, $\overrightarrow{v_3} = (1,2,0,2)$, $\overrightarrow{v_4} = (1,2,1,2)$, $\overrightarrow{v_5} = (3,1,3,1)$.

Bài 1.29. Tìm một hệ con độc lập tuyến tính tối đại và hạng của hệ các vectơ sau đây trong $\mathbb{R}^3$:

(a) $\overrightarrow{u_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,2,1)$.

(b) $\overrightarrow{v_1} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{v_3} = (1,-1,0)$.

(c) $\overrightarrow{w_1} = (2,1,0)$, $\overrightarrow{w_2} = (0,-2,1)$, $\overrightarrow{w_3} = (2,-1,2)$.

(d) $\overrightarrow{x_1} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{x_2} = (2,-1,-1)$, $\overrightarrow{x_3} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{x_4} = (2,0,-2)$.

Bài 1.30. Chứng minh rằng vectơ $\overrightarrow{v}$ biểu thị tuyến tính được qua $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_r}$ khi và chỉ khi hạng của $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_r}$ bằng hạng của $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v}$.

1.5 Ma trận và các phép toán trên ma trận

Bài 1.31. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Hãy tính:

(a) $(A+B)+C, \quad A+(B+C)$.

(b) $3A-5B+2C$.

(c) A^t, B^t, C^t.

Bài 1.32. Thực hiện phép tính trên ma trận

a) $3\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2.$

b) $\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&4&0\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-3&4\end{pmatrix}.$

c) Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Hãy tính $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n; \quad \begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^n; \quad \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}^n; \quad \begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}^n.$

Bài 1.33. Cho $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Hãy tính A^n.

Bài 1.34. Cho $A, B \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ sao cho $AB=BA$. Chứng minh rằng

(a) $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$.

(b) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

(c) $(A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}B^k, \ n \in \mathbb{N}^*$.

Các kết quả trên còn đúng không nếu không có giải thuyết A, B giao hoán với nhau.

Bài 1.35. Cho $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Tính A^n ứng với mọi n nguyên dương cho trước.

Bài 1.36. Cho $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. Tính A^n ứng với mọi n nguyên dương cho trước.

Bài 1.37. Cho $\mathbb{K}$ là một trường.

(a) Hãy xác định tất cả các ma trận vuông $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$ sao cho $AB=BA$, với mọi ma trận $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$.

(b) Hãy xác định tất cả các ma trận vuông $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ sao cho $AB=BA$, với mọi ma trận $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

Bài 1.38. Hãy tìm tất cả các ma trận giao hoán với các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}, b \neq 0.$

Bài 1.39. Cho $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng

a) Nếu $A + B = AB$ thì $AB = BA$.

b) Nếu $AB + aA + bB = 0$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ và $ab \neq 0$, thì $AB = BA$.

c) Nếu $A^2 = A + B + AB$ thì $AB = BA$.

Bài 1.40. Hãy tìm tất cả các ma trận $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sao cho $A^2 = 0$.

Bài 1.41. Hãy tìm tất cả các ma trận $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sao cho $A^2 = I$.

Bài 1.42. Cho $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng:

a) Nếu A khả nghịch và $(A - B)C = BA^{-1}$ thì $C(A - B) = A^{-1}B$.

b) Nếu A khả nghịch và đồng thời giao hoán với cả B và C và $C(A+B) = B$ thì $BC = CB$.

c) Nếu C giao hoán với cả A và B, $C^2 = I_n$, $AB = 2(A + B)C$ thì $AB = BA$.

Bài 1.43. Chứng minh rằng ma trận tam giác là khả nghịch khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo chính khác 0. Trong trường hợp đó, ma trận nghịch đảo của nó cũng là ma trận tam giác. Hãy nếu cách tìm ma trận nghịch đảo đó.

Bài 1.44. Cho $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

a) Chứng minh rằng mỗi phép biến đổi sơ cấp dòng (t.ứ cột) trên A tương đương với việc nhân bên trái của A với một ma trận vuông cấp m (t.ứ nhân bên phải của A với một ma trận vuông cấp n).

b) Chứng minh rằng mỗi phép biến đổi sơ cấp dòng (t.ứ cột) có phép biến đổi ngược, và do đó các ma trận tương ứng với chúng trong câu a) là khả nghịch.

c) Cho $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Chứng tỏ rằng nếu ma trận khối (A, I) được đưa về dạng (I, B) bằng các phép biến đổi sơ cấp dòng $B = A^{-1}$.

Bài 1.45. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Bài 1.46. Chứng minh rằng các phép biến đổi sơ cấp dòng hay cột không làm thay đổi hạng của một ma trận.

Bài 1.47. Chứng minh rằng $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ thì $\mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Bài 1.48. Tìm hạng của các ma trận sau đây:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Bài 1.49. Biện luận theo tham số thực λ hạng của các ma trận sau đây:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 11 & 13 & 16 \\ 10 & 16 & 22 & 26 & \lambda \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 2\lambda & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 3\lambda & 4 \\ 5 & 12 & 7 & 2 & 5\lambda & \lambda \end{pmatrix}$.

Bài 1.50. Xác định λ để hạng của ma trận sau đây là nhỏ nhất

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ \lambda & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.51. Cho $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ và $\mathrm{rank}(A) = r$. Chứng minh rằng bất kì s dòng nào của A cũng lập thành một ma trận có hạng ít nhất là $r + s - m$.

Bài 1.52. Chứng minh rằng nếu thêm một dòng (hoặc cột) vào ma trận thì hạng không giảm nhưng tăng tối đa là 1, còn nếu bớt đi một dòng (hoặc cột) từ ma trận đã cho thì hạng không tăng nhưng giảm tối đa là 1.

Bài 1.53. Cho A, B là hai ma trận sao cho tích AB xác định. Chứng minh rằng

$$\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}.$$

Bài 1.54. Cho $A = (a_{ij})_n$ là ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{K}$. Định nghĩa *vết* của ma trận A, kí hiệu $\mathrm{tr}(A)$ là tổng của các phần tử trên đường chéo chính của A. Chứng minh rằng:

a) Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) Nếu $A \backsim B$ thì $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Bài 1.55. Cho $\mathbb{K}$ là trường có đặc số khác 0.

a) Có tồn tại hay không hai ma trận vuông A, B cùng cấp trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $AB - BA = I$?

b) Có tồn tại hay không hai ma trận vuông A, B cùng cấp trên $\mathbb{K}$ với A khả nghịch sao cho $AB - BA = A$?

Bài 1.56. Cho $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$. Đặt $C = AB - BA$. Chứng minh rằng

a) Nếu C giao hoán với cả A và B thì $\operatorname{tr}(C^m) = 0, \forall m \in \mathbb{N}^*$.

b) Nếu $A^2B + BA^2 = 2ABA$ thì $\operatorname{tr}(C^m) = 0, \forall m \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.57. Cho A là ma trận tùy ý trên trường $\mathbb{K}$. Chứng minh rằng các ma trận AA^T và A^TA là các ma trận đối xứng. Nếu A là ma trận vuông thì AA^T và A^TA có bằng nhau không?

Bài 1.58. Cho $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$.

a) Giả sử A, B là hai ma trận đối xứng. Chứng minh rằng AB là ma trận đối xứng khi và chỉ khi $AB = BA$.

b) Giả sử A, B là hai ma trận phản đối xứng. Chứng minh rằng AB là ma trận đối xứng khi và chỉ khi $AB = BA$.

Bài 1.59. Ma trân vuông A được gọi là *ma trận lũy linh* nếu tồn tại số tự nhiên $m \geq 1$ sao cho $A^m = 0$. Chứng minh rằng:

a) Nếu A, B là hai ma trận lũy linh và $AB = BA$ thì $A + B, AB$ là lũy linh.

b) Nếu A lũy linh thì $I + A$ khả nghịch. Tìm ma trận nghịch đảo của nó.

Bài 1.60. Chứng minh rằng ma trận tam giác là ma trận lũy linh khi và chỉ khi các phần tử trên đường chéo của nó bằng 0.

1.6 Cơ sở, số chiều của không gian vectơ

Bài 1.61. Tìm cơ sở và số chiều của không gian vectơ $\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ các ma trận cấp $m \times n$ trên trường $\mathbb{K}$.

Bài 1.62. Xét không gian các đa thức một biến hệ số thực $\mathbb{R}[x]$.

(a) Chứng minh rằng tập $\mathbb{R}_n[x]$ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n là một không gian vectơ con của không gian $\mathbb{R}[x]$. Tìm cơ sở và số chiều của không gian con đó.

(b) Cho U là một không gian vectơ con của không gian $\mathbb{R}[x]$ chứa ít nhất một đa thức bậc k với mọi $k = 0, 1, \ldots, n$ nhưng không chứa đa thực nào với bậc lớn hơn n. Chứng minh rằng $U = \mathbb{R}_n[x]$.

(c) Cho các số nguyên dương $m < n$. Chứng minh rằng $\mathbb{R}_m[x]$ là không gian con của không gian $\mathbb{R}_n[x]$. Tìm không gian thương $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}_m[x]$ và số chiều của nó.

Bài 1.63. Kí hiệu $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ là không gian vectơ các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{K}$.

(a) Chứng minh rằng tập $S(n)$ các ma trận đối xứng cấp n với các phần tử trong trường $\mathbb{K}$ lập thành một không gian vectơ con của $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Tìm cơ sở và số chiều của $S(n)$.

(b) Chứng minh rằng tập $A(n)$ các ma trận phản xứng cấp n với các phần tử trong trường $\mathbb{K}$ lập thành một không gian vectơ con của $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Tìm cơ sở và số chiều của $A(n)$.

(c) Cho $\mathbb{K}$ là một trường có đặc số khác 2. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) = S(n) \oplus A(n).$$

(d) Tìm hình chiếu của ma trận $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ lên $S(n)$ theo phương $A(n)$ và lên $A(n)$ theo phương $S(n)$.

Bài 1.64. Kí hiệu $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ là không gian vectơ các ma trận vuông cấp n trên trường $\mathbb{R}$.

(a) Chứng minh rằng mọi ma trận tam giác trên có các phần tử trên đường chéo chính toàn số 0 là ma trận lũy linh và các ma trận này lập thành một không gian con V_0 của $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Tính $\dim(V_0)$.

(b) Giả sử U là một không gian con nào đó của $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mà các phần tử của nó là các ma trận lũy linh. Chứng minh rằng $\dim(U) \leq \frac{n^2-n}{2}$.

Bài 1.65. Xét không gian $\mathbb{R}^n$.

(a) Chứng minh rằng tập hợp

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Tìm số chiều và cơ sở của U.

(b) Chứng minh rằng tập hợp

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$$

là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Tìm số chiều và cơ sở của W.

(c) Chứng minh rằng $\mathbb{R}^n = U \oplus W$.

(d) Tìm hình chiếu của các vectơ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ lên U theo phương W và lên W theo phương U.

Bài 1.66. Chứng minh rằng tập hợp

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\}$$

là một không gian vectơ con của $\mathbb{R}^n$. Tìm số chiều và cơ sở của W.

Bài 1.67. Cho X là một tập vô hạn tùy ý, $V = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ là tập tất cả các ánh xạ từ X tới $\mathbb{R}$, ta định nghĩa các phép toán trên V như sau: với mọi $x \in X, f, g \in V, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

(a) Chứng minh rằng V là một không gian vectơ thực.

(b) Giả sử $\{a_n \in X \mid n = 1, 2, \ldots\}$ là một tập đếm được. Với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ta xét các ánh xạ

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x = a_n, \\ 0 \text{ nếu } x \neq a_n \end{cases}.$$

Chứng minh rằng tập $\{f_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ là một tập độc lập tuyến tính. Do đó, V là một không gian vô hạn chiều.

Bài 1.68. Cho X là một tập tùy ý, $V = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{K})$ là tập tất cả các ánh xạ từ X tới trường $\mathbb{K}$.

(a) Với hai phép toán định nghĩa như bài 1.67. Chứng minh rằng V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ.

(b) Giả sử $x_0 \in X$ là một phần tử cố định. Chứng minh rằng tập $U = \{f \in V \mid f(x_0) = 0\}$ là một tập không gian vectơ con của V.

(c) Chứng minh rằng U không được chứa không gian con thức sự nào của V, tức là không tồn tại không gian con $W \subsetneq V$ sao cho $U \subset W \subsetneq V$.

Bài 1.69. Xét không gian vectơ phức $\mathbb{C}_n[x]$ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n.

(a) Chứng minh rằng các đa thức $f_k(x), k = 0, 1, \ldots, n$ thuộc $\mathbb{C}_n[x]$ mà có bậc của $f_k(x) = k$ lập thành một co sở của $\mathbb{C}_n[x]$. Suy ra $\dim(\mathbb{C}_n[x])$

(b) Nếu $f_k(x) \in \mathbb{C}_n[x]$ thì tập

$$B_f = \{g(x) \in \mathbb{C}_n[x] | g(x) = f(x)u(x)\}$$

là một không gian vectơ con của $\mathbb{C}_n[x]$ mà $\dim B_f = n - k + 1$, còn tập

$$C_f = \{h(x) \in \mathbb{C}_n[x] | deg(h(x)) \leq k - 1\}$$

là một không gian vectơ con của $\mathbb{C}_n[x]$ sao cho $B_f \oplus C_f = \mathbb{C}_n[x]$, ở đây $deg(f(x))$ là bậc của đa thức $f(x)$.

Bài 1.70. Xét không gian vectơ $\mathbb{K}_n[x]$ các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n trên trường $\mathbb{K}$ và $a \in \mathbb{K}$.

(a) Chứng minh rằng $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ và $T = \{1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{K}_n[x]$.

(b) Tìm tọa độ của vectơ $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}_n[x]$ đối với hai cơ sở S, T.

(c) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở S sang cơ sở T.

Bài 1.71. Trong không gian $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, cho hệ các vectơ

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Chứng minh rằng $\mathscr{B}$ là cơ sở của $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ và tìm tọa độ của vectơ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ trong cơ sở đó.

Bài 1.72. Tìm cơ sở của các không gian con $U, W, U + W, U \cap W$ sau đây:

(a) $U = \left\langle \overrightarrow{u_1} = (1, 2, 1), \overrightarrow{u_2} = (1, 1, -1), \overrightarrow{u_3} = (1, 3, 3) \right\rangle$ và $W = \left\langle \overrightarrow{v_1} = (2, 3, -1), \overrightarrow{v_2} = (1, 2, 2), \overrightarrow{v_3} = (1, 3, 3) \right\rangle$.

(b) $U = \left\langle \overrightarrow{u_1} = (1, 2, 1, -2), \overrightarrow{u_2} = (2, 3, 1, 0), \overrightarrow{u_3} = (1, 2, 2, -3) \right\rangle$ và $W = \left\langle \overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1, 1), \overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1, -1), \overrightarrow{v_3} = (1, 3, 0, -4) \right\rangle$.

(c) $U = \left\langle \overrightarrow{u_1} = (1, 1, 0, 0), \overrightarrow{u_2} = (0, 1, 1, 0), \overrightarrow{u_3} = (0, 0, 1, 1) \right\rangle$ và $W = \left\langle \overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1, 0), \overrightarrow{v_2} = (0, 2, 1, 1), \overrightarrow{v_3} = (1, 2, 1, 2) \right\rangle$.

Bài 1.73. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho

$$W_1 = \left\langle (1, 2, 1, 1), (3, 6, 5, 7), (4, 8, 6, 8), (8, 16, 12, 20) \right\rangle;$$

$$W_2 = \left\langle (2, 7, 2, 2), (1, 3, 1, 1), (3, 10, 4, 3), (6, 21, 7, 6) \right\rangle.$$

Tìm một cơ sở và số chiều của $W_1, W_2, W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$.

Bài 1.74. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, cho các không gian con sau đây

$$W_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\};$$

$$W_2 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d, b = 2c\}.$$

Tìm một cơ sở và số chiều của $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$.

Bài 1.75. Cho V là không gian con của $\mathbb{R}[x]$ sinh bởi các đa thức:

$$f_1 = x^3 - 2x^2 + 4x + 1, \qquad f_2 = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 1,$$

$$f_3 = x^3 + 6x - 5, \qquad f_4 = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5.$$

Tìm một cơ sở và số chiều của V. Có thể mở rộng f_1, f_2 thành cơ sở của không gian $\mathbb{R}_3[x]$ không? Cho ví dụ.

Bài 1.76. Chứng minh rằng hai hệ vectơ sau là các cơ sở của $\mathbb{R}^4$. Tìm ma trận chuyển cơ sở và tìm mối liên hệ giữa tọa độ của cùng một vectơ trong hai cơ sở đó:

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 1, 1, 1), \overrightarrow{e_2} = (1, 2, 1, 1), \overrightarrow{e_3} = (1, 1, 2, 1), \overrightarrow{e_4} = (1, 3, 2, 3);$$

$$\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 3, 3), \overrightarrow{u_2} = (2, 3, 5, 4), \overrightarrow{u_3} = (2, 2, 5, 4), \overrightarrow{u_4} = (2, 3, 4, 4).$$

Bài 1.77. Cho E, F là hai $\mathbb{K}$-không gian vectơ. Chứng minh rằng E, F hữu hạn chiều khi và chỉ khi $E \times F$ hữu hạn chiều. Hơn nữa,

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Bài 1.78. Cho U, W là hai không gian con của không gian vectơ hữu hạn chiều V thỏa mãn $\dim U + \dim W > \dim V$. Chứng minh rằng $U \cap W \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

Bài 1.79. Cho U, W là hai không gian con của không gian vectơ hữu hạn chiều V thỏa mãn $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1$. Chứng minh rằng $U + W$ trùng với một trong hai không gian con đã cho, còn $U \cap W$ trùng với không gian con còn lại.

Bài 1.80. Chứng minh rằng $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty$ và $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.

Chương 2

Ánh xạ tuyến tính

2.1 Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

Bài 2.1. Trong các ánh xạ sau, xét xem ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính:

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_3 - x_2, x_1)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 1)$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, , x_3^2)$.

d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2)$.

e) $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x],\ f(p(x)) = p'(x)$, ở đây $p'(x)$ là đạo hàm của đa thức $p(x)$.

f) $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{n+1}[x],\ f(p(x)) = x^{n+1} + p(x)$.

f) $f : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}),\ f(M) = AM - MA$, trong đó $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ là một ma trận cố định cho trước.

Bài 2.2. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(3, 1) = (2, -4),\ f(1, 1) = (0, 2)$. Xác định $f(x_1, x_2)$.

Bài 2.3. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở $S = \{\overrightarrow{e_1} = (1, -1, 2), \overrightarrow{e_2} = (0, 2, 3), \overrightarrow{e_3} = (1, 0, -2)\}$ và trong không gian $\mathbb{R}^2$ cho ba vectơ $\overrightarrow{v_1} = (1, -1), \overrightarrow{v_2} = (4, 5), \overrightarrow{v_3} = (1, -2)$. Hãy xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sao cho $f(\overrightarrow{e_j}) = \overrightarrow{v_j}, j = 1, 2, 3$. Hỏi f có phải là đơn ánh, toàn ánh không?

Bài 2.4. Tìm ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ xác định bởi

$$f(1) = 1 + x,\ f(x) = 3 - x^2,\ f(x^2) = 4 + 2x - 3x^2.$$

Kiểm tra xem f có phải là song ánh?

Bài 2.5. Giả sử $\mathbb{C}_n[x]$ là không gian các đa thức hệ số phức có bậc không vượt quá n. Xét các đa thức $u_k(x),\ 0 \leq k \leq n$, như sau:

$$u_0 = 1, u_k(x) = x(x-1)\dots(x-k+1), \forall k > 0.$$

a) Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một tự đồng cấu tuyến tính φ của $\mathbb{C}_n[x]$ thỏa mãn các điều kiện

$$\varphi(x^k) = u_k(x),\ k = 0, 1, \dots, n;$$

b) Chứng minh φ là một song ánh.

Bài 2.6. Cho E, F là các $\mathbb{K}$-không gian vectơ và U là một không gian con thực sự của E. Chứng minh rằng với mọi ánh xạ tuyến tính $\varphi : U \longrightarrow F$ đều có thể mở rộng thành ánh xạ tuyến tính $\psi : E \longrightarrow F$. Mở rộng đó có duy nhất không?

Bài 2.7. Cho E, F là các $\mathbb{K}$-không gian vectơ và F có số chiều hữu hạn. Cho $f : E \longrightarrow F$ là một toàn cấu tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ tuyến tính $g : F \longrightarrow E$ sao cho $fg = id_F$, với id_F là ánh xạ đồng nhất của F. Ánh xạ g có duy nhất không?

Bài 2.8. Giả sử $f,\ g : E \longrightarrow E$ là các ánh xạ tuyến tính. Phải chăng

a) $fg = gf = 0$ thì $f = 0$ hoặc $g = 0$?

b) $fg = 0$ thì $gf = 0$?

2.2 Ảnh và hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Bài 2.9. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + 2x_3, -x_2 + 2x_3 + x_4).$$

Tìm một cơ sở và số chiều của $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ker}(f)$. Hỏi f có phải là đơn cấu, toàn cấu không?

Bài 2.10. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ xác định bởi

$$f(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_0 - a_1)x^3 + (2a_3 - a_1)x^2 + (a_0 - 2a_3)x + a_1.$$

Tìm một cơ sở và số chiều của $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ker}(f)$.

Bài 2.11. Cho tự đồng cấu tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$, xác định bởi

$$\begin{aligned} f(1,0,1) &= (m,1,0) \\ f(0,1,0) &= (0,m,1) \\ f(0,2,1) &= (m,m+1,m+2). \end{aligned}$$

a) Định m để f là đẳng cấu.

b) Tính $f(x_1, x_2, x_3)$.

c) Tính $f^{-1}(x_1, x_2, x_3)$, khi f là đẳng cấu.

Bài 2.12. Cho tự đồng cấu tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((a+1)x_1 + x_2 + x_3, x_1 + (a+1)x_2 + x_3, x_1 + x_2 + (a+1)x_3),$$

trong đó $a \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.

b) Với giá trị nào của a thì f không suy biến và với giá trị nào của a thì f suy biến?

c) Khi f suy biến, tìm $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ker}(f)$.

Bài 2.13. Gọi $Tr(A)$ là vết của ma trận vuông A. Chứng minh rằng ánh xạ

$$Tr : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},$$

$$A \longmapsto Tr(A)$$

là một đồng cấu tuyến tính. Tìm một cơ sở của hạt nhân của Tr.

Bài 2.14. Cho $S = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ là một cơ sở của không gian V trên $\mathbb{K}$.

a) Chứng minh rằng ánh xạ $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ xác định bởi $\varphi(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x})/(S)$ là một đẳng cấu.

b) Áp dụng

i) Trong không gian $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, tìm một cơ sở của không gian con

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

ii) Trong không gian $\mathbb{R}_3[x]$, tìm một cơ sở của không gian con

$$W = \left\langle x^3 - 3x^2 + 2x - 1, -2x^3 + 2x^2, -x^3 - x^2 + 2x - 1, x + 3 \right\rangle.$$

Bài 2.15. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ xác định bởi

$$f(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1},$$

với mọi đa thức $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$. Chứng minh rằng f là đơn cấu nhưng không là toàn cấu, do đó nó không là đẳng cấu.

Bài 2.16. Giả sử $\mathbb{C}_n[x]$ là không gian các đa thức hệ số phức có bậc không vượt quá n. Xét các đa thức $u_k(x),\ 0 \le k \le n$, như sau:

$$u_0 = 1, u_k(x) = x(x-1)\dots(x-k+1), \forall k > 0.$$

a) Chứng tỏ rằng tồn tại duy nhất một tự đồng cấu tuyến tính φ của $\mathbb{C}_n[x]$ thỏa mãn các điều kiện

$$\varphi(x^k) = u_k(x),\ k = 0, 1, \dots, n;$$

và φ là tự đẳng cấu.

b) Xác định ánh xạ $\psi : \mathbb{C}_n[x] \longrightarrow \mathbb{C}_n[x]$ như sau: với mỗi đa thức $g \in \mathbb{C}_n[x]$, ta đặt

$$[\psi(g)](x) = g(x+1) - g(x).$$

Chứng tỏ rằng ψ là một tự đồng cấu tuyến tính. Tìm $\mathrm{Ker}(\psi)$ và $\mathrm{Im}(\psi)$.

c) Hãy xác định xem ánh xạ tuyến tính $d = \varphi^{-1}\psi\varphi$ là ánh xạ nào?

Bài 2.17. Giả sử $\mathbb{C}[x]$ là không gian các đa thức hệ số phức, $f(x)$ là một đa thức có bậc r và $\mathbb{C}_n[x]$ là không gian các đa thức hệ số phức có bậc không vượt quá n. Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}[x]$ xác định bởi: với mỗi đa thức $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, ta đặt

$$\varphi(g) = fg' - f'g,$$

trong đó f', g' là đạo hàm của f, g tương ứng.

a) Chứng tỏ rằng φ là một tự đồng cấu tuyến tính của $\mathbb{C}[x]$. Tìm $\mathrm{Ker}(\varphi)$ và chứng tỏ $\varphi(\mathbb{C}_r[x]) = \varphi(\mathbb{C}_{r-1}[x])$.

b) Giả sử $\overline{\varphi}$ là ánh xạ thu hẹp của φ trên $\mathbb{C}_n[x]$. Tìm $\mathrm{rank}(\overline{\varphi})$.

Bài 2.18. Giả sử $f : E \longrightarrow F$ và $g : F \longrightarrow G$ là các ánh xạ tuyến tính, trong đó f là toàn cấu. Chứng minh rằng $\mathrm{Ker}(gf) = \{\overrightarrow{0}\}$ khi và chỉ khi $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0}\}$ và $\mathrm{Ker}(g) = \{\overrightarrow{0}\}$.
Có thể phát biểu hai điều kiện sau gộp thành $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) = \{\overrightarrow{0}\}$ được không? Có thể bỏ điều kiện f là toàn cấu được không?

Bài 2.19. Cho E, F là các $\mathbb{K}$-không gian vectơ và A, B là các không gian con của E. Giả sử $f : E \longrightarrow F$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

$$f(A) \subset f(B) \Longleftrightarrow A + \mathrm{Ker}(f) \subset B + \mathrm{Ker}(f).$$

Bài 2.20. Cho E là một không gian vectơ và W là một không gian con của nó. Chứng minh rằng

a) Tồn tại một tự đồng cấu tuyến tính f trên E sao cho $\mathrm{Im}(f) = W$.

b) Tồn tại một tự đồng cấu tuyến tính f trên E sao cho $\mathrm{Ker}(f) = W$.

Bài 2.21. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ có cơ sở đếm được $\{\overrightarrow{e_n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Chứng minh rằng

a) Tự đồng cấu tuyến tính $f : E \longrightarrow E$ xác định bởi $f(\overrightarrow{e}_{2^{n-1}}) = 0,\ f(\overrightarrow{e}_{2^n}) = \overrightarrow{e_n}$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$ là một toàn cấu nhưng không phải là một đẳng cấu của E.

b) Tồn tại một đơn cấu $g : E \longrightarrow E$ sao cho $g(E) \neq E$ mà fg là ánh xạ đồng nhất trên E.

Bài 2.22. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ m-chiều và F là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ n-chiều và $f : E \longrightarrow F$. Gọi $H = \mathrm{Ker}(f)$. Chứng minh rằng

a) Nếu L là một không gian con của E và $\dim L = p$ và $\dim(L \cap H) = q$ thì $\dim f(L) = p - q$.

b) Nếu M là một không gian con của F mà $\dim(M \cap f(E)) = r$ thì $\dim f^{-1}(M) = r + m = \mathrm{rank}(f)$.

Bài 2.23. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ và f, g là các tự đồng cấu tuyến tính của E sao cho $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Chứng minh rằng tồn tại một tự đồng cấu tuyến tính h của E sao cho $f = hg$.

Bài 2.24. Cho U, W là hai không gian con của $\mathbb{K}$-không gian vectơ V hữu hạn chiều. Chứng minh rằng hai điều sau tương đương:

a) $\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$.

b) Tồn tại một tự đồng cấu f của V sao cho $U = \mathrm{Im}(f),\ W = \mathrm{Ker}(f)$.

Bài 2.25. Cho E, F là các $\mathbb{K}$-không gian vectơ hữu hạn chiều và $f, g : E \longrightarrow F$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{rank}(f + g) \leq \mathrm{rank}(f) + \mathrm{rank}(g).$$

Bài 2.26. Cho E, F, G là các $\mathbb{K}$-không gian vectơ hữu hạn chiều. Cho $f : E \longrightarrow F$ và $g : F \longrightarrow G$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) $\dim(\mathrm{Ker}(gf)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$.

b) $\mathrm{rank}(gf) \leq \min\{\mathrm{rank}(f), \mathrm{rank}(g)\}$.

Bài 2.27. Cho E, F, G là các $\mathbb{K}$-không gian vectơ hữu hạn chiều. Cho $f : E \longrightarrow F$ và $g : F \longrightarrow G$ là các ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

$$\dim(f(E) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rank}(f) - \mathrm{rank}(gf).$$

Từ đó suy ra rằng nếu $\dim F = n$ thì

$$\max\{0, \mathrm{rank}(f) + \mathrm{rank}(g) - n\} \leq \mathrm{rank}(gf) \leq \min\{\mathrm{rank}(f), \mathrm{rank}(g)\}.$$

Bài 2.28. Giả sử E là không gian vectơ hữu hạn chiều và f là tự đồng cấu của E. Chứng minh rằng $\dim \mathrm{Ker}(f^2) \leq 2 \dim \mathrm{Ker}(f)$.

Bài 2.29. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ. Giả sử $f : E \longrightarrow E$ là một tự đồng cấu tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) $f^2 = f \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

b) Hỏi điều ngược lại đúng không?

Bài 2.30. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ. Giả sử $f : E \longrightarrow E$ là một tự đồng cấu tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) $\mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Im}(f^2) \supset \mathrm{Im}(f^3) \supset \cdots$.

b) $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f^3) \subset \cdots$.

Bài 2.31. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ n-chiều. Giả sử $f : E \longrightarrow E$ là một tự đồng cấu tuyến tính. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E.$$

Bài 2.32. Giả sử $f,\ g : E \longrightarrow E$ là các ánh xạ tuyến tính của $\mathbb{K}$-không gian vectơ hữu hạn chiều E thỏa mãn các điều kiện sau:

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g).$$

Chứng minh rằng các tổng này là tổng trực tiếp.

Bài 2.33. Cho E, F, G là các $\mathbb{K}$-không gian vectơ hữu hạn chiều và giả sử $\varphi : E \longrightarrow F$ và $\psi : F \longrightarrow G$ là các ánh xạ tuyến tính sao cho $\psi\varphi$ là một đẳng cấu. Chứng minh rằng $F = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\psi)$.

Bài 2.34. Giả sử $f,\ g : E \longrightarrow E$ là các ánh xạ tuyến tính thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $f + g = id_E$,

b) $fg = gf = 0$,

b) $f^2 = f$ và $g^2 = g$.

Chứng minh rằng $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Bài 2.35. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ n-chiều. Giả sử $f : E \longrightarrow E$ là một tự đồng cấu tuyến tính. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E.$$

Bài 2.36.

a) Chứng minh rằng nếu $V = U \oplus W$, thì V đẳng cấu với không gian tích $U \times W$.

b) Ngược lại, nếu $V = U \times W$ và ta đặt $V_1 = \{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{0}) \mid \overrightarrow{u} \in U\}$ và $V_2 = \{(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{w}) \mid \overrightarrow{w} \in W\}$, thì $U \cong V_1,\ W \cong V_2$ và $V = V_1 \oplus V_2$.

2.3 Ma trận và biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính

Bài 2.37. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2, x_2 - 2x_3, x_3 - x_4).$$

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở S, T sau đây:

$$S = \{\overrightarrow{e_1} = (1, -1, 0, 0), \overrightarrow{e_2} = (0, 1, -1, 0), \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1, -1), \overrightarrow{e_4} = (0, 0, 0, 1)\};$$

$$T = \{\overrightarrow{e_1'} = (1, 1, 1), \overrightarrow{e_2'} = (1, 1, 0), \overrightarrow{e_3'} = (1, 0, 0)\}.$$

Bài 2.38. Cho tự đồng cấu tuyến tính f của $\mathbb{R}$-không gian vectơ 4-chiều V đối với một cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ của V có ma trận là

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 11 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Tìm $\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ker}(f), \mathrm{rank}(f)$ và $\mathrm{def}(f)$.

b) Tìm ma trận A của f đối với cơ sở

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}.$$

Bài 2.39. Cho $\alpha, beta$ là hai số thực phân biệt. Chứng minh rằng ánh xạ $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ cho bởi

$$f(P(x)) = P(x + \alpha) - P(x + \beta),$$

là một toàn cấu tuyến tính.

Bài 2.40. Tìm ma trận của phép lấy đạo hàm (hình thức) của không gian các đa thức bậc không vượt quá n trên $\mathbb{R}$ vào chính nó trong các trường hợp sau:

a) Cơ sở $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

b) Cơ sở $\{1, x - \alpha, \frac{(x-\alpha)^2}{2!}, \ldots, \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Bài 2.41. Giả sử $V = U \oplus W$, trong đó U có cơ sở $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k})$, W có cơ sở $(\overrightarrow{v}_{k+1}, \overrightarrow{v}_{k+2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$. Tìm ma trận của phép chiếu lên U theo phương W trong cơ sở $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$.

Bài 2.42. Tự đồng cấu $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ có ma trận $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ trong cơ sở $\overrightarrow{v_1} = (1, 2), \overrightarrow{v_2} = (2, 3)$, và tự đồng cấu $\psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ có ma trận $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ trong cơ sở $\overrightarrow{u_1} = (3, 1), \overrightarrow{u_2} = (4, 2)$. Tìm ma trận của $\varphi + \psi$ trong cơ sở $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

Bài 2.43. Tự đồng cấu $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ có ma trận $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ trong cơ sở $\overrightarrow{v_1} = (-3, 7), \overrightarrow{v_2} = (1, -2)$, và tự đồng cấu $\psi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ có ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ trong cơ sở $\overrightarrow{u_1} = (6, -7), \overrightarrow{u_2} = (-5, 6)$. Tìm ma trận của $\varphi\psi$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

2.4 Tự đồng cấu tuyến tính

Bài 2.44. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ . Giả sử $f : E \longrightarrow E$ và $g : E \longrightarrow E$ là các tự đồng cấu tuyến tính thỏa mãn $fg = gf$. Chứng minh rằng $\mathrm{Im}(f)$ và $\mathrm{Ker}(f)$ bất biến đối với g.

Bài 2.45. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ . Giả sử $f : E \longrightarrow E$ là đẳng cấu. Chứng minh rằng nếu λ là một giá trị riêng của f thì $\frac{1}{\lambda}$ là một giá trị riêng của f^{-1}. Hơn nữa nếu $\overrightarrow{v}$ là một vectơ riêng của f ứng với λ thì $\overrightarrow{v}$ cũng là một vectơ riêng của f^{-1} ứng với $\frac{1}{\lambda}$.

Bài 2.46. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ . Giả sử $\varphi : E \longrightarrow E$ và $\psi : E \longrightarrow E$ là các tự đồng cấu tuyến tính thỏa mãn $\varphi\psi = \psi\varphi$. Chứng minh rằng nếu U là không gian con bất biến của φ thì $\psi(U)$ cũng là không gian con bất biến của φ.

Bài 2.47. Cho f là một tự đồng cấu tuyến tính của $\mathbb{K}$-không gian vectơ hữu hạn chiều E. Chứng minh các mệnh đề là sau tương đương:

a) $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

b) Tồn tại hai không gian con U và W của E bất biến đối với f sao cho $E = U + W$ và thu hẹp $f_{|U}$ là một tự đẳng cấu của U, thu hẹp $f_{|W}$ là đồng cấu 0.

Bài 2.48. Cho φ là tự đồng cấu tuyến tính của $\mathbb{K}^n$ có n giá trị riêng phân biệt. Tìm tất cả các không gian con bất biến của φ.

Bài 2.49. Cho E là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ n-chiều.

a) Giả sử $S = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ là một cơ sở của E, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ đôi một khác nhau, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ xác định bởi $f(\overrightarrow{e_i}) = \alpha_i \overrightarrow{e_i}, (i = 1, 2, \ldots, n)$. Chứng minh rằng nếu $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ và $gf = fg$ thì tồn tại $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ sao cho $g(\overrightarrow{e_i}) = \beta_i \overrightarrow{e_i}, i = \overline{1, n}$.

b) Chứng minh rằng nếu tự đồng cấu tuyến tính f giao hoán với mọi tự đồng cấu tuyến tính của E thì tồn tại $\lambda \in \mathbb{K}$ để $f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$, $\forall \overrightarrow{x} \in E$.

Bài 2.50. Xác định các giá trị riêng và vectơ riêng của tự đồng cấu tuyến tính f của $\mathbb{R}[x]$ được xác định bởi

$$f(P(x)) = (x-1)(x+3)P'(x) - xP(x), \ \forall P(x) \in \mathbb{R}[x].$$

Bài 2.51. Cho φ, ψ là hai tự đồng cấu tuyến tính của E sao cho $\varphi\psi = \psi\varphi$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{v}$ là một vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng λ và $\psi(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$ thì $\psi(\overrightarrow{v})$ cũng là vectơ riêng của φ.

Bài 2.52. Cho φ, ψ là hai tự đồng cấu tuyến tính của E. Chứng minh rằng $\varphi\psi$ và $\psi\varphi$ có cùng giá trị riêng.

Bài 2.53. Cho A. Chứng minh rằng A và A^T có cùng giá trị riêng. Hỏi chúng có cùng vectơ riêng không?

Bài 2.54. Cho $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Chứng minh rằng AB và BA có cùng giá trị riêng. Hỏi chúng có cùng vectơ riêng không?

2.5 Không gian các ánh xạ tuyến tính

Bài 2.55. Cho A là ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{K}$ và $m \neq n$. Gọi $B = A^t$ là ma trận chuyển vị của ma trận A. Chứng minh rằng $\det(AB) \neq 0$ thì $\det(BA) = 0$.

Bài 2.56. Cho A là các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$. Ma trận A được gọi là lũy linh nếu tồn tại số nguyên dương p sao cho $A^p = 0$. Số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho $A^k = 0$ được gọi là chỉ số lũy linh.

a) Chứng minh rằng

$$\mathrm{rank}(A) \geq \mathrm{rank}(A^2) \geq \cdots \geq \mathrm{rank}(A^m) \geq \cdots .$$

b) Chứng minh rằng nếu A là ma trận lũy linh thì $A^n = 0$.

c) Giả sử A là ma trận lũy linh với chỉ số lũy linh $k = n$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{rank}(A^i) = n - i, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

d) Giả sử A là ma trận lũy linh với chỉ số lũy linh $k = n - 1$. Chứng minh rằng

$$\mathrm{rank}(A^i) \geq n - i - 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Bài 2.57. Chứng minh: $\forall A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}),\ \forall p \in \mathbb{N}, p \geq n \Rightarrow \mathrm{rank}(A^p) = \mathrm{rank}(A^n)$.

Bài 2.58. Cho n là số nguyên dương, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ lũy linh với chỉ số lũy linh k, $r = \mathrm{rank}(A)$. Chứng minh $k \leq r + 1$.

Bài 2.59. Giả sử E là không gian vectơ hữu hạn chiều n là số nguyên dương. Giả sử f là tự đồng cấu lũy linh chỉ số k. Chứng minh:

$$k = n \Leftrightarrow \mathrm{rank}(f) = n - 1.$$

Chương 3

Định thức và hệ phương trình tuyến tính

3.1 Định thức

Bài 3.1. Chứng minh rằng, với mọi $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) : |\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \Big)$.

Bài 3.2. a) Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử tồn tại hai ma trận khả nghịch A, B cấp n sao cho $AB+BA = 0$. Chứng minh rằng n là số chẵn.
b) Cho ví dụ về A, B là các ma trận khả nghịch cấp 2 sao cho $AB + BA = 0$.

Bài 3.3. Cho $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$. Tìm tất cả các ma trận $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ sao cho

$$\det(A + M) = \det(A) + \det(M), \forall M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}).$$

Bài 3.4. Cho n là số nguyên dương.

(a) Chứng minh: $\forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}), (AB = BA \Leftrightarrow \det(A^2 + B^2) \geq 0)$.

(b) Có hay không: $\forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}), \det(A^2 + B^2) \geq 0$?

Bài 3.5. Cho n là số nguyên dương, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho: $(\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \epsilon \Rightarrow A + xB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

Bài 3.6. Cho n là số nguyên dương, $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB - BA = B$.

(a) Chứng minh: $\forall k \in \mathbb{N}, AB^k = B^k(A + kI_n$.

(b) Từ đó suy ra: $\det(B) = 0$.

Bài 3.7. Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 có các phần tử bằng ± 1.

Bài 3.8. Cho A là ma trận vuông cấp 4 với các phần tử bằng ± 1. Chứng minh rằng $\det(A) \leq 16$.

Bài 3.9. Cho A là ma trận vuông cấp 5 với các phần tử bằng ± 1. Chứng minh rằng $\det(A) \leq 64$.

Bài 3.10. Tìm giá trị lớn nhất của định thức cấp 3 có các phần tử bằng 0 hoặc bằng 1.

Bài 3.11. Tìm các định thức sau:

$$a)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}; \quad b)\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad c)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Bài 3.12. Tìm các định thức sau đây bằng cách đưa về ma trận tam giác:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ . & . & . & \cdots & . \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}; \quad b)\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad c)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

Bài 3.13. Cho $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, trong đó $a_{ij} = |i - j|$. Tính $\det(A)$.

Bài 3.14. Tìm các định thức sau đây bằng phương pháp rút ra nhân tử tuyến tính:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}; \quad b)\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

Bài 3.15. Tìm các định thức sau đây:

$$a)\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ . & . & . & \cdots & . \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad b)\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad c)\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Bài 3.16. Giải các phương trình sau đây theo ẩn x trên trường số thực:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0;$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ đôi một khác nhau.

$$b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\cdots & 1 & \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0.$$

Bài 3.17. Cho a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 + px + q = 0$. Hãy tính:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Bài 3.18. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n nghiệm phức của phương trình $x^n - x + 1 = 0$. Xét ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, trong đó $a_{ij} = \begin{cases} 1 + x_i, & \text{nếu} \quad i = j \\ 1, & \text{nếu} \quad i \neq j \end{cases}$. Hãy tính $\det(A)$.

Bài 3.19. Giả sử ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, sao cho với mọi $i, j = \overline{1, n}$, $\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{Z} \\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} \text{ chẵn} \\ a_{ii} \text{ lẻ} \end{cases}$.

Chứng minh rằng $\det(A) \neq 0$.

Bài 3.20. Giả sử ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, sao cho với mọi $i, j = \overline{1, n}$, $\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{Z} \\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} \text{ lẻ} \\ a_{ii} \text{ chẵn} \end{cases}$.

Chứng minh rằng nếu n chẵn thì $\det(A) \neq 0$.

Bài 3.21. Chứng minh rằng các vectơ

$$\overrightarrow{\alpha_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n, (i = 1, 2, \dots, s; s \leq n),$$

thỏa mãn điều kiện $|a_{jj}| > \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|$, thì chúng độc lập tuyến tính.

Bài 3.22. Cho $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Chứng minh rằng:

(a) Nếu A là ma trận phản đối xứng và n lẻ thì $\det(A) = 0$.

(b) Nếu $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ và giả sử $A = (a_{ij})$ sao cho $a_{ij} = \overline{a_{ij}}, \forall i, j = \overline{1, n}$ thì $\det(A) \in \mathbb{R}$.

(c) Nếu $B \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ và $C = \begin{pmatrix} A & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & \vdots & B \end{pmatrix}$ thì $\det(C) = \det(A).\det(B)$.

Bài 3.23. Cho $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ và $\widetilde{A}$ là ma trận phụ hợp của A. Chứng minh rằng:

$$\det(\widetilde{A}) = (\det(A))^{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Bài 3.24. Cho $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$ và $\widetilde{A}$ là ma trận phụ hợp của A. Chứng minh rằng:

(a) Nếu $\mathrm{rank}(A) \leq n-2$ thì $\mathrm{rank}(\widetilde{A}) = 0$.

(b) Nếu $\mathrm{rank}(A) = n-1$ thì $\mathrm{rank}(\widetilde{A}) = 1$.

(c) Nếu $\mathrm{rank}(A) = n$ thì $\mathrm{rank}(\widetilde{A}) = n$.

Bài 3.25. Chứng minh rằng mỗi ma trận có hạng bằng r đề có thể viết được thành tổng của r ma trận có hạng bằng 1.

Bài 3.26. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau đây bằng phương pháp ma trận phụ hợp và phương pháp biến đổi sơ cấp:

$$a)\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}; \qquad b)\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 3 & 8 & 0 & -4\\ 2 & 2 & -4 & -3\\ 3 & 8 & -1 & -6\end{pmatrix}; \qquad c)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Bài 3.27. Cho A, B là các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$ với các phần tử là các số nguyên. Giả sử rằng các ma trận $A + kB, k = 0, 1, \ldots, 2n$, khả nghịch và các phần tử của các ma trận nghịch đảo cũng là các số nguyên. Chứng minh rằng $A + 2011B$ khả nghịch và $(A + 2011B)^{-1}$ có các phần tử là số nguyên.

3.2 Hệ phương trình tuyến tính

Bài 3.28. Xét xem các hệ sau có phải là hệ Cramer hay không rồi giải chúng

$$a)\begin{cases}2x_1 - x_2 - 5x_3 &= 4,\\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11,\\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11.\end{cases} \quad b)\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31,\\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10.\end{cases} \quad c)\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4,\\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6,\\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6,\\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6.\end{cases}$$

Bài 3.29. Giải và biện luận theo các tham số thực a, b, c, d các hệ phương trình sau trên trường số thực:

$$a)\begin{cases}x + ay + a^2z &= a^3,\\ x + by + b^2z &= b^3,\\ x + cy + c^2z &= c^3.\end{cases} \quad b)\begin{cases}x + y + z &= 1,\\ ax + by + cz &= d,\\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2.\end{cases} \quad c)\begin{cases}ax + (b-1)y + 2z &= 1,\\ ax + (2b-3)y + 3z &= 1,\\ ax + (b-1)y + (b+2)z &= 2b-3.\end{cases}$$

Bài 3.30. Giải và biện luận theo tham số λ các hệ phương trình sau trên trường số thực:

$$a)\begin{cases}\lambda x+y+z &=1,\\ x+\lambda y+z &=\lambda,\\ x+y+\lambda z &=\lambda^2.\end{cases}\quad b)\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z &=1,\\ x+(\lambda+1)y+z &=\lambda,\\ x+y+(\lambda+1)z &=\lambda^2.\end{cases}\quad c)\begin{cases}(\lambda+1)x+y+z &=\lambda^2+3\lambda,\\ x+(\lambda+1)y+z &=\lambda^3+3\lambda^2,\\ x+y+(\lambda+1)z &=\lambda^4+3\lambda^3.\end{cases}$$

Bài 3.31. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

$$a)\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4 &=4,\\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4 &=6,\\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4 &=12,\\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4 &=6.\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4 &=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4 &=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4 &=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4 &=-3.\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5 &=1,\\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5 &=2,\\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5 &=1,\\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5 &=2.\end{cases}\quad d)\begin{cases}x_1+3x_2+x_3+2x_4+x_5 &=2,\\ 3x_1+10x_2+5x_3+7x_4+5x_5 &=6,\\ x_1+5x_2+5x_3+6x_4+9x_5 &=4,\\ x_1+2x_2-x_3-2x_4-7x_5 &=-1.\end{cases}$$

Bài 3.32. Giải và biện luận theo tham số thực m các hệ phương trình sau trên trường số thực:

$$a)\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4 &=1,\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4 &=2,\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4 &=m.\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+2x_4 &=m,\\ x_1+2x_2+x_3+2x_4 &=4,\\ x_1+x_2+2x_3+2x_4 &=4,\\ 3x_1+5x_2+4x_3+6x_4 &=3m.\end{cases}$$

Bài 3.33. Giải (biện luận) các hệ phương trình sau trên trường số thực:

$$a)\begin{cases}x_1+x_2+x_3 &=0,\\ x_2+x_3+x_4 &=0,\\ &\vdots\\ x_{98}+x_{99}+x_{100} &=0,\\ x_{99}+x_{100}+x_1 &=0,\\ x_{100}+x_1+x_2 &=0.\end{cases}\quad b)\begin{cases}x_1+x_2 &=2a_1,\\ x_2+x_3 &=2a_2,\\ &\vdots\\ x_{n-1}+x_n &=2a_{n-1},\\ x_n+x_1 &=2a_n.\end{cases}\quad c)\begin{cases}ax_1+bx_2 &=\frac{1}{a^{n-1}},\\ ax_2+bx_3 &=\frac{1}{a^{n-2}b},\\ ax_3+bx_4 &=\frac{1}{a^{n-3}b^2},\\ &\vdots\\ ax_{n-1}+bx_n &=\frac{1}{ab^{n-2}},\\ ax_n+bx_1 &=\frac{1}{b^{n-1}}.\end{cases}$$

Bài 3.34. Tìm các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất nhận các vectơ sau làm hệ nghiệm cơ bản:

$$a)\{(12,1,2),(2,1,2,1)\}\quad b)\{1,1,1,0),(0,1,1,1)\}\quad c)\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,1,1,1)\}.$$

Bài 3.35. Chứng minh rằng với mỗi không gian vectơ con m chiều W của $\mathbb{K}^n$ $(0 < m < n)$, đều tìm được một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên $\mathbb{K}$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\, i = 1, 2, \ldots, n - m$$

hạng $n - m$ sao cho không gian nghiệm chính là W.

Bài 3.36. Cho hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, trong đó A là ma trận vuông cấp n hệ số nguyên và $b \in \mathbb{Z}^n$. Chứng minh rằng nếu $\det(A) = \pm 1$ thì hệ phương trình có nghiệm nguyên.

Ngược lại, nếu với mọi $b \in \mathbb{Z}^n$ hệ phương trình tương ứng đều có nghiệm nguyên thì $\det(A) = \pm 1$.

Chương 4

Dạng tuyến tính và dạng song tuyến tính

4.1 Không gian đối ngẫu

Bài 4.1. Cho $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{K}$-không gian vectơ V. Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, ta kí hiệu $e_i^* \in V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ xác định bởi

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i = j \\ 0, & \text{nếu } i \neq j \end{cases}, \ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Chứng minh rằng $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ lập thành một cơ sở của V^*. Nói riêng $V \cong V^*, \dim(V^*) = n$. Cơ sở này được gọi là cơ sở đối ngẫu của V^*.

Bài 4.2. Chứng minh rằng điều khẳng định tương tự trong bài 4.1 không đúng nếu V là không gian vectơ vô hạn chiều. Cụ thể, nếu $\{e_i |\ i \in I\}$ là cơ sở của V thì $\{e_i^* \mid i \in I\}$ không phải là hệ sinh của V^*.

Bài 4.3. Cho $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là cơ sở của U và $T = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ là cơ sở của V. Gọi e_{ij} là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$e_{ij}(x_k) = \begin{cases} y_i, & \text{nếu } k = j, \\ 0, & \text{nếu } k \neq j. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $(e_{ij} \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ lập thành cơ sở của $\mathrm{Hom}(U, V)$.

Bài 4.4. Cho V_1, V_2 là hai không gian con của V sao cho $V = V_1 \oplus V_2$. Mỗi phần tử f của không gian đối ngẫu V_1^* có thể xem là phần tử của V^* bằng cách mở rộng nó thành ánh xạ $f(v_1 + v_2) = f(v_1)$. Chứng minh rằng đây là ánh xạ tuyến tính và là đơn ánh. Tương tự có thể xem $V_2^* \subset V^*$. Hãy chứng tỏ rằng $V^* = V_1^* \oplus V_2^*$.

Bài 4.5. Cho $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, ánh xạ $\theta_A : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ xác định bởi

$$\theta_A(X) = \mathrm{tr}(AX),\ \forall X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}).$$

(a) Chứng minh rằng $\theta_A \in (\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}))^*$.

(b) Ánh xạ

$$\begin{aligned} \theta : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow (\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}))^* \\ A &\longmapsto \theta_A \end{aligned}$$

là một đẳng cấu giữa các không gian vectơ.

4.2 Dạng song tuyến tính

Bài 4.6. Cho $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Xét xem các ánh xạ f cho dưới đây có phải là dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$ không?

$a) f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$; $b) f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1 + y_2$.

$c) f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 3x_2y_2$; $d) f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 1$.

Bài 4.7. Cho f là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ thực n-chiều V và $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V. Gọi L là không gian con của V sinh bởi $e_1, e_2, \ldots, e_k$, (với $1 \leq k < n$) và đặt

$$L^\perp = \{y \in V \mid f(x, y) = 0, \forall x \in L\}.$$

(a) Cho B là ma trận biểu diễn f theo cơ sở S. Chứng tỏ rằng, nếu $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$ theo cơ sở S thì $y \in L^\perp$ khi và chỉ khi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là nghiệm hệ phương trình $Ay^T = 0$, với $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{R})$ là ma trận thu được từ B bằng cách bỏ đi $n-k$ hàng cuối cùng của B.

(b) f được gọi là không suy biến nếu ma trận biễu diễn f, theo một cơ sở nào đó, là không suy biến. Chứng tỏ rằng nếu f không suy biến thì $\dim L^\perp = n - k$.

Bài 4.8. Cho E là một không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$ có đặc số khác 2 và f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên E. Với mỗi không gian con U của E, đặt $U^\perp = \{x \in E \mid f(x, y) = 0, \forall y \in U\}$. Không gian con U được gọi là hoàn toàn đẳng hướng nếu $f(x, x) = 0, \forall x \in U$. Không gian con hoàn toàn đẳng hướng được gọi là cực đại nếu nó không chứa trong một không gian con hoàn toàn đẳng hướng khác.

(a) Chứng minh rằng U là một không gian con hoàn toàn đẳng hướng khi và chỉ khi $U \subset U^\perp$.

(b) Cho U, V là các không gian con hoàn toàn đẳng hướng. Chứng tỏ rằng với mọi $x \in U \cap V$, không gian con $V + \mathbb{K}\,x$ là hoàn toàn đẳng hướng.

(b) Chứng tỏ rằng mỗi không gian con hoàn toàn đẳng hướng được chứa trong một không gian con hoàn toàn đẳng hướng cực đại. Suy ra các không gian con hoàn toàn đẳng hướng cực đại có cùng một số chiều.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính,* NXBĐHQG Hà Nội,2001.

[2] Lê Tuấn Hoa, *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập,* NXBĐHQG Hà Nội, 2006.

[3] Ngô Việt Trung, *Giáo trình đại số tuyến tính,* NXBĐHQG Hà Nội, 2002.

[4] Nguyễn Viết Đông - lê Thị Thiên Hương - Nguyễn Anh Tuấn - Lê Anh Vũ, *Toán cao cấp, tập 2,* NXBGD, 1998.

[5] Văn Như Cương - Đoàn Quỳnh - Hoàng Xuân Sính, *Đại số tuyến tính và hình học,* NXBGD, 1998.

[6] Trung tâm đào tạo từ xa - Đại học Huế, *Bài tập đại số,*, 1999.

[7] Jean - Marie Monier -*Giáo trình toán, tập 5,6: Đại số 1, 2* (bản dịch của Mai Văn Được - Ngô Ánh Tuyết), NXBGD 2003.