

PHÉP QUAY

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Định nghĩa:

Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến O thành chính nó và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM') = \alpha$ được gọi là phép quay tâm O , α được gọi là góc quay.

Phép quay tâm O góc quay α được kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.

Nhận xét

- Khi $\alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đối xứng tâm O .
- Khi $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đồng nhất.

2. Tính chất của phép quay:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn đã cho
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

Lưu ý:

Giả sử phép quay tâm I góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d' , khi đó

Nếu $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng α

Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\pi - \alpha$.

3. Biểu thức tọa độ của phép quay:

Trong mặt phẳng Oxy , giả sử $M(x; y)$ và $M'(x'; y') = Q_{(O;\alpha)}(M)$ thì
$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Trong mặt phẳng Oxy , giả sử $M(x; y)$, $I(a; b)$ và $M'(x'; y') = Q_{(I;\alpha)}(M)$ thì

$$\begin{cases} x' = a + (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \\ y' = b + (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases}$$

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: ỨNG DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT PHÉP QUAY

Câu 1: Cho tam giác đều tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α , $0 < \alpha \leq 2\pi$ biến tam giác trên thành chính nó?

A. Một.

B. Hai.

C. Ba.

D. Bốn.

Câu 2: Cho hình vuông tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α , $0 < \alpha \leq 2\pi$ biến hình vuông trên thành chính nó?

A. Một.

B. Hai.

C. Ba.

D. Bốn.

Câu 3: Cho hình chữ nhật có O là tâm đối xứng. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α , $0 < \alpha \leq 2\pi$ biến hình chữ nhật trên thành chính nó?

- A. Không có. B. Hai. C. Ba. D. Bốn.

Câu 4: Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O góc quay $\alpha \neq k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)?

- A. Không có. B. Một. C. Hai. D. Vô số.

Câu 5: Phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ biến điểm M thành M' . Khi đó

- A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $(OM, OM') = \varphi$. B. $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \varphi$.
C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $\widehat{MOM'} = \varphi$. D. $OM = OM'$ và $\widehat{MOM'} = \varphi$.

Câu 6: Phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ biến điểm A thành M . Khi đó

- (I) O cách đều A và M .
(II) O thuộc đường tròn đường kính AM .
(III) O nằm trên cung chứa góc φ dựng trên đoạn AM .

Trong các câu trên câu đúng là

- A. Cả ba câu. B. (I) và (II). C. (I). D. (I) và (III).

Câu 7: Chọn câu *sai*.

- A. Qua phép quay $Q_{(O;\varphi)}$ điểm O biến thành chính nó.
B. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O , góc quay -180° .
C. Phép quay tâm O góc quay 90° và phép quay tâm O góc quay -90° là hai phép quay giống nhau.
D. Phép đối xứng tâm O là phép quay tâm O , góc quay 180° .

Câu 8: Khẳng định nào sau đây **đúng** về phép quay.

- A. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O và điểm M khác điểm O thành điểm M' sao cho $(OM, OM') = \varphi$ được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ .
B. Nếu $Q_{(O;90^\circ)} : M \mapsto M' (M \neq O)$ thì $OM' \perp OM$.
C. Phép quay không phải là một phép dời hình.
D. Nếu $Q_{(O;90^\circ)} : M \mapsto M'$ thì $OM' > OM$.

Câu 9: Cho tam giác đều ABC . Hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành điểm C .

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$.
C. $\varphi = -120^\circ$. D. $\varphi = -60^\circ$ hoặc $\varphi = 60^\circ$.

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(1;1)$. Hỏi các điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O , góc 45° ?

- A. $M'(-1;1)$. B. $M'(1;0)$. C. $M'(\sqrt{2};0)$. D. $M'(0;\sqrt{2})$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{(O;\frac{\pi}{2})}$.

- A. $A'(0;-3)$. B. $A'(0;3)$.
C. $A'(-3;0)$. D. $A'(2\sqrt{3};2\sqrt{3})$.

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q_{(O;-\frac{\pi}{2})}$.

- A. $A'(-3;0)$. B. $A'(3;0)$.
C. $A'(0;-3)$. D. $A'(-2\sqrt{3};2\sqrt{3})$.

Câu 4: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $M(2;0)$ và điểm $N(0;2)$. Phép quay tâm O biến điểm M thành điểm N , khi đó góc quay của nó là

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 45^\circ$.
C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\varphi = 270^\circ$.

Câu 5: Cho $M(3;4)$. Tìm ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc quay 30° .

- A. $M'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$ B. $M'(-2; 2\sqrt{3})$
C. $M'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{3}\right)$ D. $M'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2; \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right)$

Câu 6: Cho $I(2;1)$ và đường thẳng $d: 2x + 3y + 4 = 0$. Tìm ảnh của d qua $Q_{(I;45^\circ)}$.

- A. $d': -x + 5y - 3 + \sqrt{2} = 0$ B. $d': -x + 5y - 3 = 0$
C. $d': -x + 5y - 10\sqrt{2} = 0$ D. $d': -x + 5y - 3 + 10\sqrt{2} = 0$

Câu 7: Tìm ảnh của đường thẳng $d: 5x - 3y + 15 = 0$ qua phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$.

- A. $d': x + y + 15 = 0$ B. $d': 3x + 5y + 5 = 0$
C. $d': 3x + y + 5 = 0$ D. $d': 3x + 5y + 15 = 0$

Câu 8: Tìm ảnh của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ qua phép quay $Q_{(I;90^\circ)}$ với $I(3;4)$.

- A. $(C'): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$ B. $(C'): (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$
C. $(C'): (x+5)^2 + (y-7)^2 = 9$ D. $(C'): (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$

Câu 9: Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $A(1;2)$, $B(3;4)$ và

$$\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

- A. $AC: x - y - 1 = 0, BC: x - y + 5 = 0$ B. $AC: 3x - y - 2 = 0, BC: x - 2y + 3 = 0$

C. $AC : 3x - y - 1 = 0, BC : x - 2y + 5 = 0$

D. $AC : 3x - y - 4 = 0, BC : x - 2y + 2 = 0$