Теория вероятностей

Ле Куок Зунг

27 марта 2021 г.

Занятия 2

Упражнение (1). Десять команд случайным образом (по жребию) разбиваются на две разные подгруппы.

$|\Omega| = C_{10}^5 C_5^5$

(а) Выбрать место для 2 сильнейших команд: 2
Выбрать 4 команда для подгруппы 1: C_8^4
Выбрать 4 команда для подгруппы 2: C_4^4
Ответ: $\frac{2C_8^4C_4^4}{C_{10}^5C_5^5} = \frac{5}{9}$

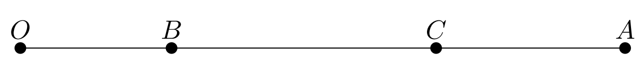
(б) Выбрать подгруппу для 2 команда: C_2^1
Выбрать больше 3 команда этой группы: C_8^3
Ответ: $\frac{C_2^1C_8^3}{C_{10}^5C_5^5} = \frac{4}{9}$

(в) Выбрать больше 3 команда первой группы: C_8^3
Выбрать 5 команд второй группы: C_5^5
Ответ: $\frac{C_8^3C_5^5}{C_{10}^5C_5^5} = \frac{2}{9}$

Упражнение (2). (а) $|\Omega| = C_{52}^3$
Выбрать тройку C_4^1, семарку C_4^1, туз C_4^1
Ответ: $\frac{C_4^1C_4^1C_4^1}{C_{52}^3} = \frac{16}{5525}$

(б) $|\Omega| = A_{52}^3$ (так как мы выберем последовательные карты)
Для три любых карт существует только один заказ, поэтому нужно выбрать атрибут первой карты C_4^1, второй C_4^1, третьей C_4^1
Ответ: $\frac{C_4^1C_4^1C_4^1}{A_{52}^3} = \frac{8}{16575}$

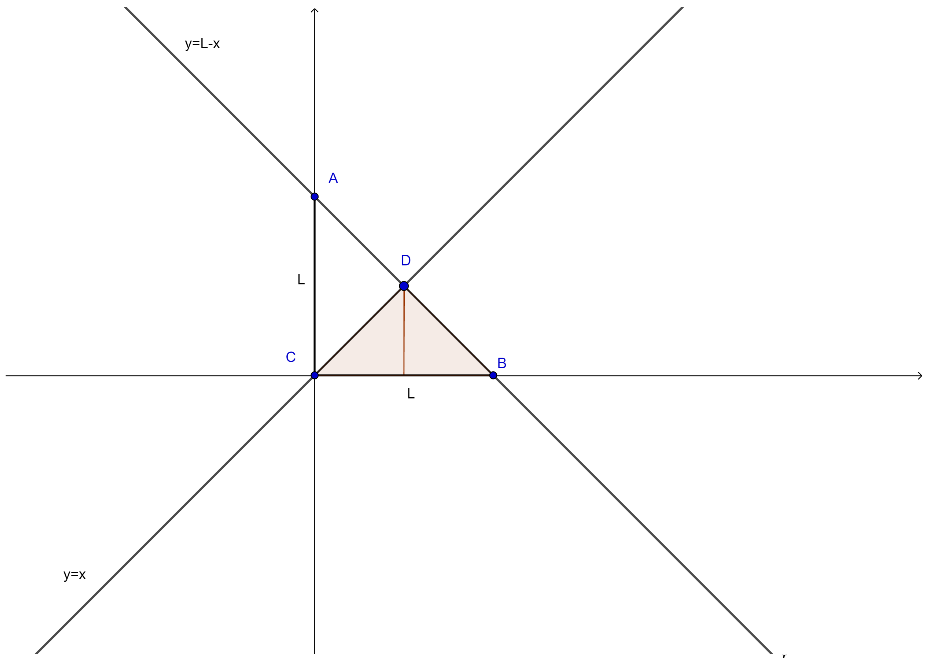
Упражнение (3).



Пусть L - длина отрезка OA
x - длина отрезка OB

y - длина отрезка BC

У нас есть: $\begin{cases} y < x \\ x + y < L \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$



Здесь, $|\Omega| = \frac{L^2}{2}$, а вероятность, которая удовлетворяет условии: $\frac{L \cdot \frac{L}{2}}{2} = \frac{L^2}{4}$

Ответ: $\frac{L^2}{4} : \frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}$

Упражнение (4). $|\Omega| = 10!$

Ответ: $\frac{1}{10!}$

Упражнение (5). $|\Omega| = 8^4$

(а) Выбрать 4 этажа из 8: A_8^4
Ответ: $\frac{A_8^4}{8^4} = \frac{105}{256}$

(б) Этаж 6, 7, 8, 9, поэтому 4 этажа: 4^4
Ответ: $\frac{4^4}{8^4} = \frac{1}{16}$

(в) 7 этажов: 7^4
Ответ: $\frac{7^4}{8^4} = \frac{2401}{4096}$

Упражнение (6). $|\Omega| = 10^4 = 10000$

(а) Первое число имеет 9 вариантов (кроме 0). Другие числа имеют 10 вариантов
Ответ: $\frac{9 \cdot 10^3}{10^4} = 0,9$

(б) Чтобы делится на 5, последнее число равно 0 или 5

Ответ: $\frac{9 \cdot 10^2 \cdot 2}{10^4} = 0,18$

Упражнение (7). $|\Omega| = C_{20}^{10}$
Если билеты 1 и 2 не будет, тогда имеется 18 билетов, значит C_{18}^{10}
Ответ: $\frac{C_{18}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{9}{38}$

Упражнение (8). $|\Omega| = C_{6+4+2}^{4} = C_{12}^{4}$
Ответ: $\frac{C_{4+2}^{4}}{C_{12}^{4}} = \frac{1}{33}$

Упражнение (9). $|\Omega| = 10!$
Рассмотрим 3 красного книги как 1, тогда у нас нес 8 книг. Найти места для 8 книг: 8!
3 краного книга имеет 3!
Ответ: $\frac{8!3!}{10!} = \frac{1}{15}$

Упражнение (10). Каждая кость имеет 6 вариантов, поэтому $|\Omega| = 6^3$
События A: кости выпадут разными гранями, то есть $6 \cdot 5 \cdot 4$
Тогда, $P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$
События B: на всех костях выпадет одинаковое число очков, то есть 6 чисел
Тогда $P(B) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

Упражнение (11). У нас есть 5 пар ботинок, значит 10 ботинок. Поэтому $|\Omega| = C_{10}^2$
Существуют 5 пар, то $P(A) = \frac{5}{C_{10}^2} = \frac{1}{9}$

Упражнение (12). Тат как каждый участник может получит любый приз, поэтому $|\Omega| = 10^6$
Данные 6 учасников получат по одному призу каждый, то 6!
Ответ: $\frac{6!}{10^6} = 0,00072$

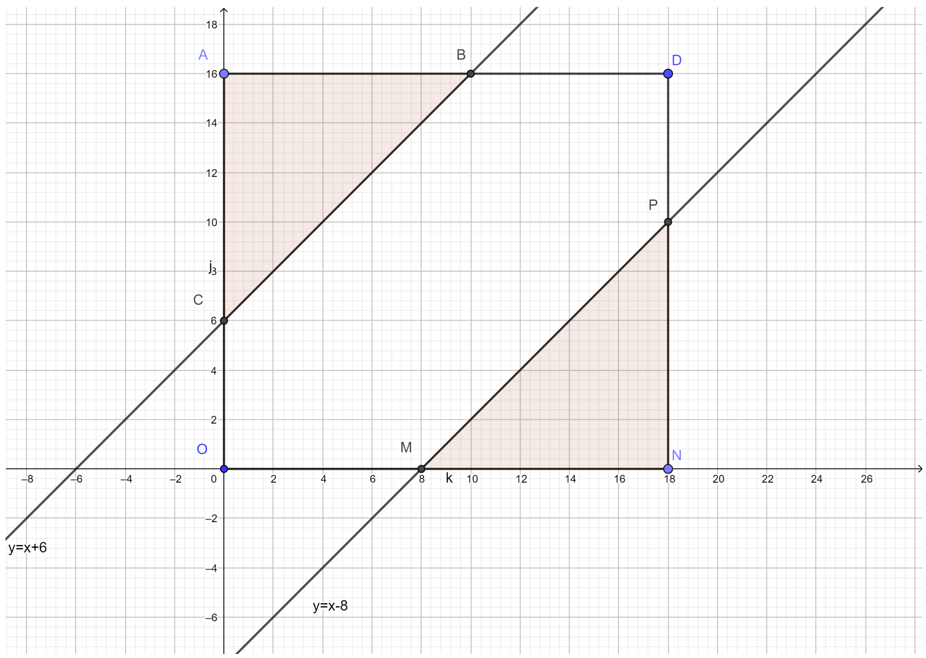
Упражнение (13). $|\Omega| = C_8^4 C_4^4$
Выбрать 2 юношей и 2 девушек для группы 1: $C_4^2 C_4^2$
Ответ: $\frac{C_4^2 C_4^2}{C_8^4 C_4^4} = \frac{18}{35}$

Упражнение (14).

(а) $P(A) = \frac{S_{\square}}{S_{\circ}} = \left(\frac{2R}{\sqrt{2}}\right)^2 : (\pi R^2) = \frac{2}{\pi}$

(б) $P(B) = \frac{S_{\triangle}}{S_{\circ}} = \left[(R\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right] : (\pi R^2) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

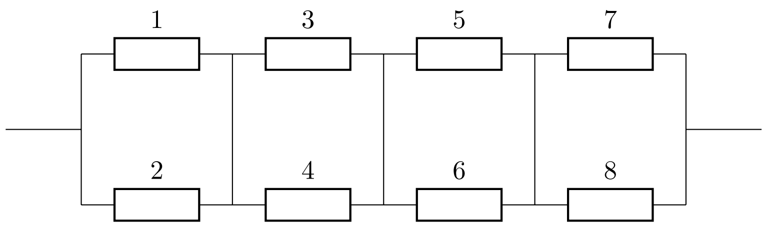
Упражнение (15). В течение суток к причалу независимо друг от друга



Пусть x - время первый сухогруз начинает разгрузиться и y - время второй сухогруз начинает разгрузиться
Тогда, $x+6 \leq 24$ и $y+8 \leq 24 \Leftrightarrow x \leq 18$ и $y \leq 16$
Случай 1: первый сухогруз начинает раньше чем второй, тогда $x+6 \leq y$
Случай 2: второй сухогруз начинает раньше чем первый, тогда $y+8 \leq x$
Получим $P(A) = \frac{S_{\triangle ABC}+S_{\triangle MNP}}{S_{ADNO}} = \left(\frac{10 \cdot 10}{2} + \frac{10 \cdot 10}{2}\right) : (16 \cdot 18) = \frac{25}{72}$

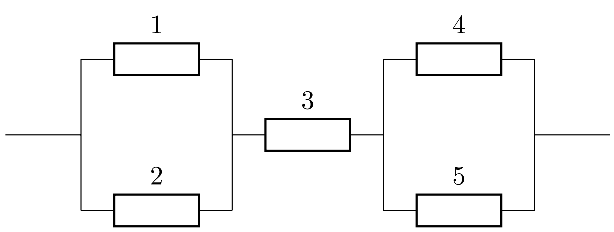
Занятие 3

Упражнение (1). (а) Пусть A - вероятность безотказной работы



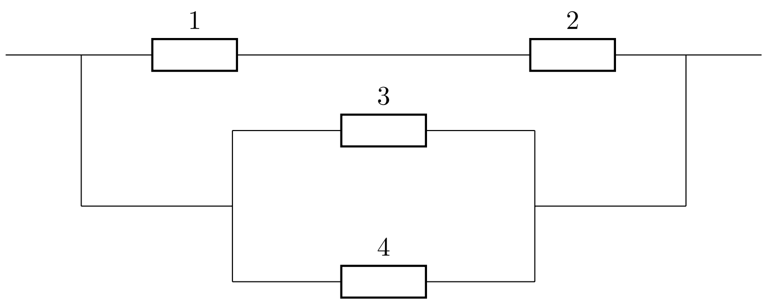
$$\begin{aligned}
\Rightarrow P(A) &= P(A_1 + A_2)P(A_3 + A_4)P(A_5 + A_6) + P(A_7 + A_8) \\
&= [1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))] \cdot [1 - (1 - P(A_3))(1 - P(A_4))] \\
&\times [1 - (1 - P(A_5))(1 - P(A_6))] \cdot [1 - (1 - P(A_7))(1 - P(A_8))] \\
&= (1 - (1 - 0,8)(1 - 0,8))^4 \\
&\approx 0,85
\end{aligned}$$

(б) Пусть A - вероятность безотказной работы



$$\begin{aligned}
P(A) =& P(A_1 + A_2)P(A_3)P(A_4 + A_5) \\
=& [1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))] \cdot P(A_3) \\
& \times [1 - (1 - P(A_4))(1 - P(A_5))] \\
=& (1 - (1 - 0,8)^2) \cdot 0,8 \cdot (1 - (1 - 0,8)^2) \\
=& 0,73728 \approx 0,74
\end{aligned}$$

(в) Пусть A - вероятность безотказной работы



$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2 + A_3 + A_4) \\
&= 1 - (1 - P(A_1A_2)(1 - P(A_3))(1 - P(A_4))) \\
&= 1 - (1 - P(A_1)P(A_2)(1 - P(A_3))(1 - P(A_4))) \\
&= 1 - (1 - (0,8)^2 \cdot (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,8)) \\
&= 0,9856 \approx 0,98
\end{aligned}$$

Упражнение (2)**.** Пусть A - событие после 4 шара появится черный шар
A_1, A_2, A_3 - события выбрать белый шар в *i-ый* раз
A_4 - событие выбрать черный шар в последний раз
$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$

(а) $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{7}{10}$
$P(A_4) = \frac{3}{10}$
$\Rightarrow P(A) = \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot \frac{3}{10} = \frac{1029}{10000} = 0,1029$

(б) $P(A_1) = \frac{7}{10}$, $P(A_2) = \frac{6}{9}$, $P(A_3) = \frac{5}{8}$
$P(A_4) = \frac{3}{7}$
$\Rightarrow P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{8}$

Упражнение (3)**.** Пусть A - событие среди них окажется по меньше мере одна кость с шестью очками
Тогда, $\bar{A}$ - событие нет кости с шестью очками. То $\bar{A}$ имеет 28-7=21 вариантов
$|\Omega| = C_{28}^7$
$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{21}^7}{C_{28}^7} = \frac{2966}{3289} \approx 0,9$

Упражнение (4)**.** Пусть A - событие на них выпадут разные грани
$|\Omega| = 6^4$
Первая кость имеет 6 вариантов, вторая имеет 5, третья имеет 4 и четвертая имеет 3
$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}$

Упражнение (5)**.** Пусть A - событие выбрать 2 шара одного цвета
$|\Omega| = C_{5+7+8}^2 = C_{20}^2$

Случай 1: выбрать 2 белого шара: C_5^2
Случай 2: выбрать 2 красного шара: C_7^2
Случай 3: выбрать 2 синего шара: C_8^2
$\Rightarrow P(A) = \frac{C_5^2+C_7^2+C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{59}{190} \approx \frac{1}{3}$

Упражение (6)**.** Пусть A - событие дуэль закончится гибелью одного из дуэлянтов. Значит один дуэль стреляет точно, а другой нет

Выбрать человек, который стреляет точно: 2
$\Rightarrow P(A) = 2 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,2) = 0,32$

Упражение (7)**.** Пространство элементарных событий:
выбрать 5 команд в первую группу: C_{20}^5
Аналогично, выбрать 5 команд в группы 2, 3, 4: C_{15}^5, C_{10}^5, C_5^5
$\Rightarrow |\Omega| = C_{20}^5 C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$

Пусть A - вероятность того, что в каждую подгруппу попадет по одному призеру
$\Rightarrow$ выбрать подгруппы для 4 призера: 4! вариантов
Выбрать 4 команд в первую подгруппу: C_{16}^4
Аналогично, выбрать 4 команд в подгруппы 2, 3, 4: C_{12}^4, C_8^4, C_4^4
$\Rightarrow P(A) = \frac{4! C_{16}^4 C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{C_{20}^5 C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5} = \frac{125}{969}$

Пусть B - событие

Упражение (8)**.** Пусть D_i - событие выбрать один белый шар из i-ой урны
$\Rightarrow \bar{D}_i$ - событие не выбрать один белый шар из i-ой урны
Поэтому, $P(D_1) = \frac{2}{5}$, $P(D_2) = \frac{1}{3}$, $P(D_3) = \frac{3}{4}$

1. $A = \{$вынуть только один белый шар$\}$
   $\Rightarrow$ выбрать белый шар из 1-ой урны, или 2-ой, или 3-ей

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(A) =& P(D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{D_3} + \overline{D_1} \cdot D_2 \cdot \overline{D_3} + \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot D_3)\\ =& P(D_1)[1 - P(D_2)][1 - P(D_3)] + [1 - P(D_1)]P(D_2)[1 - P(D_3)]\\ &+ [1 - P(D_1)][1 - P(D_2)]P(D_3)\\ =& \frac{2}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)\\ &+ \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}\end{aligned}$$

2. B - $\{$вынуть хотя бы один белый шар$\}$
   $\Rightarrow \overline{B}$ - не вынуть ни одного белого шара.
   $\Rightarrow \overline{B} = \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{D_3}$
   $\Rightarrow P(\overline{B}) = P(\overline{D_1}) P(\overline{D_2}) \cdot P(\overline{D_3}) = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{10}$
   $\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,1 = 0,9$

3. C - $\{$Вынуть шары различных цветов$\}$
   Здесь у нас есть 4 случая:

- белый, синий, красный
- черный, белый, красный
- черный, синий, белый
- черный, синий, красный

Значит $C = A + \overline{B}$
$\Rightarrow P(C) = P(A) + P(\overline{B}) = \frac{5}{12} + \frac{1}{10} = \frac{31}{60}$

Упражнение (9)**.** $|\Omega| = C_{36}^2$
Пусть A - событие выбрать 2 красной масти
У нас есть итого 18 (36/2) красных мастей, поэтому $P(A) = \frac{C_{18}^2}{C_{36}^2} = \frac{17}{70}$

Занятие 4

Упражение (1)**.** 36 карт

(а) Пусть A - событие выбрать 4 карты все разных мастей
A_i - событие выбрать карту в i-ый раз

$$\begin{aligned}P(A) =& P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) \\ =& P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \\ & \times P(A_4|A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)\end{aligned}$$

В первый раз, мы можем выбрать любую карту. Начало мы выбираем масть, потом число, значит $P(A_1) = \frac{4\cdot 9}{36}$

В второй раз, мы имеем 35 карт, выбрать масть и потом число, получим $P(A_2|A_1) = \frac{3\cdot 9}{35}$

Далее, мы получим ответ $P(A) = \frac{4\cdot 9}{36} \cdot \frac{3\cdot 9}{34} \cdot \frac{2\cdot 9}{34} \cdot \frac{1\cdot 9}{33} = \frac{729}{6545}$

(б) Пусть B - событие выбрать 4 карты все разного достоинства
B_i - событие выбрать карту в i-ый раз

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4) \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot P(B_3|B_1 \cdot B_2) \cdot P(B_4|B_1 \cdot B_2 \cdot B_3)\end{aligned}$$

В первый раз, мы можем выбрать любую карту. Поэтому $P(B_1) = \frac{36}{36}$
В второй раз, ещё 35 карт. Мы не можем выбрать карту с старого числом, значит мы имеем $36 - 4 = 32$ карта. $P(B_2|B_1) = \frac{32}{35}$
В третьи раз, ещё 34 карта. Мы не можем выбрать карту с старыми числами, значит $32 - 4 = 28$ карт. $P(B_3|B_1 \cdot B_2) = \frac{28}{34}$
Далее, мы получим ответ: $P(B) = \frac{36}{36} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{28}{34} \cdot \frac{24}{33} = \frac{512}{935}$

Упражение (2)**.** Пусть A - событие в первом игре выбрать 2 мяча
B - событие в втором игре выбрать 2 нового мяча
С событием A у нас есть 3 варианта

- A_1 - два нового мяча. $P(A_1) = \frac{7\cdot 6}{10\cdot 9}$
  Тогда в втором игре есть 5 новых мячей, $P(B|A_1) = \frac{5\cdot 4}{10\cdot 9}$
- A_2 - один новый и одни побывавший. Мы можем выбрать новый мяч и потом побывавший, или обратно. $P(A_2) = \frac{2\cdot 7\cdot 3}{10\cdot 9}$
  Тогда в втором игре есть 6 новых мячей, $P(B|A_2) = \frac{6\cdot 5}{10\cdot 9}$
- A_3 - 2 побывавшего мяча. $P(A_3) = \frac{3\cdot 2}{10\cdot 9}$
  Тогда в втором игре есть 7 новых мячей, $P(B|A_2) = \frac{7\cdot 6}{10\cdot 9}$

Ответ:

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6}{(10 \cdot 9)^2} = \frac{196}{675} \approx 0,29\end{aligned}$$

Упражнение (3)**.** Пусть A - событие благополучного полета
B_i - событие на i-ом крыле сохраняет работоспособность
$\Rightarrow \overline{B_i}$ - событие на i-ом крыле 2 мотора не работают
$P(\overline{B_i}) = p^2$
$\Rightarrow P(B_i) = 1 - p^2$
А у нас есть: $A = B_1 \cdot B_2$
$\Rightarrow P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) = (1 - p^2)^2$

Упражнение (4)**.** Пусть A - {студент сдаст экзамен}
Пусть A_1 - {правильно ответить 2 предложенных вопроса}
Пусть A_2 - {правильно ответить один из 2 предложенных вопроса и 1 дополнительный вопрос}
У нас есть $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$
Для A_1: выбрать 2 предложенных вопроса, $P(A_1) = \frac{20 \cdot 19}{30 \cdot 29}$
Для A_2: выбрать 2 предложенных вопроса: 20*19 вариантов, потом выбрать правильный вопрос: 2 варианта, и выбрать дополнительный вопрос: 10 вариантов
$\Rightarrow P(A_2) = \frac{20 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 10}{30 \cdot 29 \cdot 28}$
$\Rightarrow P(A) = \frac{20 \cdot 19}{30 \cdot 29} + \frac{20 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 10}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{152}{203}$

Упражнение (6)**.** Пусть X - количество бросков чтобы закончить

(а) (опят закончится до шестого броска)
Первый бросок, какая сторона не важно $\Rightarrow P(A) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$
Второй бросок может выпадет *одной и той же* стороной, или *другой*.
Оба вероятности равны $\frac{1}{2}$
То $P(X = 2) = \frac{1}{2}$
Если $P(X = 3)$, третьи бросок будет другой стороной, чем 2 другие. Поэтому вероятность того, что второй бросок выпадает одной стороной: $\frac{1}{2}$, а третьи бросок: $\frac{1}{2}$
То $P(X = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $P(X = 4) = \frac{1}{8}$ и $\frac{1}{16}$
Аналогично, $P(X = 4) = \frac{1}{8}$
$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

(б) B - {понадобится более четырех бросков}
$\overline{B}$ - {понадобится ≤ 4}
Делаем как (а), мы получим $P(\overline{B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

Упражнение (7)**.** Из колоды карт (36 штук)

(а) Пусть $A = \{$Первый тух появится при третьем извлечении карты$\}$
$|\Omega| = A_3^3 6$
Пусть a_1, a_2, a_3 - карты выбраны
Тогда a_3 будет одном из 4 карт, у нас есть 4 вариантов
Ещё нужно выбрать карты a_1 и a_2, мы не можем выбрать туз, поэтому имеем $A_{36-4}^2 = A_{32}^2$
Ответ: $P(A) = \frac{4 \cdot A_{32}^2}{A_{36}^3} = \frac{496}{5355} \approx 0,09$

(б) Пусть $B = \{$Первый туз появится не ранее третьего извлечения карты$\}$
$\Rightarrow \overline{B} = \{$Первый туз появится при первом или втором извлечении карты$\}$

- Если первый туз появится при первом извлечении, то вероятность равно $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- Если первый туз появится при втором извлечении, то делаем аналогично (а), мы получим $\frac{4 \cdot A_{32}^1}{A_{36}^2}$

Поэтому, $P(\overline{B}) = \frac{4}{36} + \frac{4 \cdot A_{32}^1}{A_{26}^2} = \frac{67}{315}$
$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{248}{315}$

Упражнение (8)**.** Из колоды карт (36 карт) не более трех карт Пусть $A = \{$выбрать более трех карт$\}$
$\overline{A} = \{$выбрать не более трех карт, значит 1, 2 или 3 карт$\}$

- Если выбрать 1 карту, $|\Omega_1| = 36$
  Выбрать одну красную карту из 18 красных карт, есть 18 вариантов. То $P(X = 1) = \frac{18}{36}$
- Если выбрать 2 карты, $|\Omega_2| = A_{36}^2$
  Выбрать одну красную карту в последнем месте, то есть 18 вариантов. А первое место мы не можем выбрать красную карту, то есть 36-18=18 вариантов. Поэтому $P(X = 2) = \frac{18 \cdot 18}{A_{36}^2}$
- Если выбрать 3 карты, $|\Omega_3| = A_{36}^3$
  Выбрать одну красную карту в последнем месте, есть 18 вариантов. Другие места мы не можем выбрать красные карты, а 2 черные карты из 18 карт. Поэтому $P(X = 3) = \frac{18 \cdot A_{18}^2}{A_{36}^3}$

$\Rightarrow P(\overline{A}) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{18}{36} + \frac{18 \cdot 18}{A_{26}^2} + \frac{18 \cdot A_{18}^2}{A_{36}^3} = \frac{31}{35}$
$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{4}{35}$

Упражнение (9)**.** 8 белых, 6 черных и 2 синих

(а) повторный выбор шаров, $|\Omega| = 16^3$
Выбрать первый шар, есть 8 вариантов (белых). Выбрать второй шар, есть 6 вариантов (черных). Выбрать третьи шар, есть 2 варианта (синих). Поэтому, вероятность равно $\frac{8 \cdot 6 \cdot 2}{16^3} = \frac{3}{128}$

(б) бесповторный выбор шаров, $|\Omega| = A_{16}^3$
Делаем аналогично (а), получим вероятность $\frac{8 \cdot 6 \cdot 2}{A_{16}^3} = \frac{1}{35}$

Упражнение (10)**.** Пусть $A = \{$шар окажется белым$\}$
$B_1 = \{$Результат монеты - гебр$\}$
$B_2 = \{$Результат монеты - цифра$\}$
То B_1 и B_2 - полная группа событий, и $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$

- Если первая урна выбрана, то вероятность того, что шар окажется белым будет $P(A|B_1) = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6}$
- Если вторая урна выбрана, то вероятность того, что шар окажется белым будет $P(A|B_2) = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$

Ответ: $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{25}{48}$

Занятия 5

Упражнение (1)**.** Используем пример 5.1 и формулу Байеса:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(B_j) \cdot P(A|B_j)}$$

- $P(B_1) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{17}{48}} = \frac{3}{17}$
- $P(B_2) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{17}{48}} = \frac{6}{17}$
- $P(B_3) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{17}{48}} = \frac{8}{17}$

Упражнение (3)**.** Пусть $A_1 = \{$дефективные$\}$ и $A_2 = \{$не дефективные$\}$
$B = \{$Признан дефективным$\}$
Мы получим: $P(A_1) = 0,1$, $P(A_2) = 1 - 0,1 = 0,9$
$P(B|A_1) = 0,95$, $P(B|A_2) = 0,03$
$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = 0,1 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,03 = 0,122$

Упражнение (4)**.** Пусть $A = \{$событие болты производятся из А$\}$
$B = \{$событие болты производятся из В$\}$
$C = \{$событие болты производятся из С$\}$
$K = \{$Болт оказался дефективным$\}$
У нас есть: $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,35$, $P(C) = 0,4$
$P(K|A) = 0,05$, $P(K|B) = 0,04$, $P(K|C) = 0,02$
Ответ:

$$\begin{aligned} P(A|K) &= \frac{P(A)P(K|A)}{P(A)P(K|A) + P(B)P(K|B) + P(C)P(K|C)} \\ &= \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02} = \frac{25}{69} \approx 0,36 \end{aligned}$$

Упражнение (5)**.** Пусть $A = \{$вынуть белый шар из второй урны$\}$
$B = \{$Вынуть два шара из первой урны$\}$
У нас есть $B = B_1 + B_2 + B_3$, с

- $B_1 = \{$вынуть 1 белый и 1 черный$\}$. $P(B_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$
  Теперь в второй урне есть 3 белых шара, поэтому $P(A|B_1) = \frac{3}{7}$
- $B_2 = \{$вынуть 2 белых$\}$. $P(B_2) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}$
  Теперь в второй урне есть 4 белых шара, поэтому $P(A|B_2) = \frac{4}{7}$
- $B_3 = \{$вынуть 2 черных$\}$. $P(B_3) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$
  Теперь в второй урне есть 2 белых шара, поэтому $P(A|B_3) = \frac{2}{7}$

Ответ:

$$\begin{aligned}P(A) =&P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)\\ =&\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{15}\cdot\frac{2}{7}=\frac{10}{21}\end{aligned}$$

Упражение (6)**.** Пусть $A_1=\{$выбрать 2 белых шара$\}$, $A_2=\{$выбрать 2 черных шара$\}$ и $A_3=\{$выбрать 2 шара разного цвета$\}$
$B=\{$третий шар отказался белым$\}$
У нас есть $P(A_3|B)=\frac{P(A_3)\cdot P(B|A_3)}{P(A_1)+P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)}$ (формула Байеса)

- С A_1, у нас есть $P(A_1)=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 7}=\frac{5}{14}$
  Значит третий шар имеет 3 варианта, чтобы получить белый шар, $P(B|A_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
- С A_2, у нас есть $P(A_2)=\frac{3\cdot 2}{8\cdot 7}=\frac{3}{28}$
  Значит третий шар имеет 5 варианта, чтобы получить белый шар, $P(B|A_2)=\frac{5}{6}$
- С A_3, у нас есть $P(A_3)=\frac{2\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 7}=\frac{15}{28}$ (2 значит белый-черный или черный белый)
  Значит третий шар имеет 4 варианта, чтобы получить белый шар, $P(B|A_3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Ответ: $P(A_3|B)=\frac{15}{28}\cdot\frac{2}{3}:\left(\frac{5}{14}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{28}\cdot\frac{5}{6}+\frac{15}{28}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{7}$

Упражение (7)**.** Пусть $A_1=\{$выбрать красный шар из первой урны$\}$ и $A_2=\{$выбрать черный шар из первой урны$\}$
$B_1=\{$выбрать красный шар из второй урны$\}$ и $B_2=\{$выбрать черный шар из второй урны$\}$
У нас есть $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$
$P(B_1|A_1)=\frac{3}{6}$, $P(B_1|A_2)=\frac{2}{6}$
$P(B_2|A_1)=\frac{3}{6}$, $P(B_2|A_2)=\frac{4}{6}$

(а) Пусть $C=\{$вынуты шары одного цвета$\}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(C) =&P(A_1\cdot B_1+A_2\cdot B_2)\\ =&P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)+P(A_2)\cdot P(B_2|A_2)\\ =&\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

(б) Пусть $D=\{$выбрать красный шар из первой урны и черный шар из второй урны$\}$

$$\begin{aligned}P(D)=P(A_2|B_1)=&\frac{P(A_2)\cdot P(B_1|A_2)}{P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)+P(A_2)\cdot P(B_1|A_2)}\\ =&\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\right):\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}\right)=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

Упражнение (8).

Упражнение (9). Пусть $A_1 = \{\text{первый шар является белым}\}$ и $A_2 = \{\text{второй шар является черным}\}$
$B = \{\text{два следующие шары - черные}\}$
У нас есть, $P(A_1) = \frac{4}{7}$, $P(A_2) = \frac{3}{7}$

- Если первый шар является белым, то в урне есть 3 белых и 3 черных, поэтому $P(B|A_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$
- Если первый шар является черным, то в урне есть 4 белых и 2 черных, поэтому $P(B|A_2) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$

Мы получим:

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)} \\ &= \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{15}\right) = \frac{4}{5} = 0,8 \end{aligned}$$

Упражнение (10). Пусть $A_1 = \{\text{комбинация 11111 передана}\}$ и $A_2 = \{\text{комбинация 00000 передана}\}$
$B = \{\text{комбинация 10110 получена}\}$
У нас есть: $P(A_1) = 0,7$, $P(A_2) = 0,3$

- Если комбинация 11111 передана, то первое, третье и пятое цифры правильно, а другие нет, поэтому $P(B|A_1) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,6^3 \cdot 0,4^2$
- Если комбинация 00000 передана, то второе и четвертое цифры правильно, а другие нет, поэтому $P(B|A_2) = 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,4^3 \cdot 0,6^2$

Ответ

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2)} \\ &= \frac{0,7 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2}{0,7 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 + 0,3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2} = \frac{7}{9} \approx 0,78 \end{aligned}$$

Занятия 6

Упражнение (1)**.** Пусть $A = \{$Два раза выпадет шесть очков$\}$
У нас есть $n = 5$, $p = \frac{1}{6} \Rightarrow q = 1 - p = \frac{5}{6}$
Ответ: $P(A) = P_5(k = 2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888} \approx 0,16$

Упражнение (2)**.** У нас есть количество детей $n = 4$, вероятность рождения мальчика $p = \frac{1}{2}$, поэтому вероятность рождения девочки $q = 1 - p = \frac{1}{2}$
Ответ $P_4(k = 2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

Упражнение (3)**.** Пусть $A = \{$первый стрелок попадает в цель дважды$\}$
$B = \{$второй стрелок попадает в цель дважды$\}$
У нас есть $n_A = 4$, $p_A = \frac{1}{3} \Rightarrow q_A = 1 - p_A = \frac{2}{3}$
$n_B = 3$, $p_B = \frac{1}{2} \Rightarrow q_B = 1 - p_B = \frac{1}{2}$

Поэтому, $P(A) = P_4(k = 2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$

$P(B) = P_3(k = 2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$ Так как $P(B) > P(A)$, второго стрелка вероятнее

Упражнение (4)**.** Здесь у нас есть $n = 5$, вероятность узла $p = 1-0,9 = 0,1$, и вероятность надежности $q = 0,9$

(а) $P_5(k = 1) = C_5^1 \cdot (0,1)^1 \cdot (0,9)^4 = 0,32805$

(б) $P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(k = 0) = 1 - C_5^0 \cdot (0,9)^5 \approx 0,4$

(в) $P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k = 0) - P_5(k = 1) = 1 - C_5^0 \cdot 0,9^5 - C_5^1 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4 = 0,08146 \approx 0,08$

Упражнение (5)**.** У нас есть $n = 100$ и $p = 0,02$ - мало, поэтому мы можем использовать формулу Пуассона с $\lambda = np = 100 \cdot 0,02 = 2$

(а) $P_{100}(k = 0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = e^{-2}$

(б) $P_{100}(k > 2) = 1 - P_{100}(k = 0) - P_{100}(k = 1) = 1 - \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} - \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} - \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} = 1 - 5e^{-2}$

(в) $P_{100}(k = k_0)$, мы используем $k = 0, 1, 2, \cdots$ и видим, что $k = 2$ наиболее. Поэтому ответ $k_0 = 2$

Упражнение (6)**.** Пусть n - количество изделий, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одно изделие низкого качества

$\lambda = np = 0,1n$, мы хотем, чтобы $P_n k \geq 1 \geq 0,95$

У нас есть

$$\begin{aligned}P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(k=0) = 1 - \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} &= e^{-\lambda} \geq 0,95 \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda} \leq 0,05 \\ &\Leftrightarrow -\lambda \leq \ln 0,05 = -2,9957 \\ &\Leftrightarrow \lambda \geq 2,9957 \\ &\Leftrightarrow n \cdot 0,1 \geq 2,9957 \\ &\Leftarrow n \geq 29,957 \\ &\Leftrightarrow n \geq 30\end{aligned}$$

Упражнение (7). В течение часа поступает в среднем 120 телефонных вызовов, значит в течение минуты $\lambda = \frac{1 \cdot 120}{60} = 2$ вызовов.

Поэтому ответ: $P(k=3) = \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{2e^{-2}}{3} \approx 0,09$

Упражнение (8). У нас есть $n = 400$ и $p = 0,005$ - мало, поэтому мы можем используем формулу Пуассона с $\lambda = np = 2$
Получим

$$\begin{aligned}P_{400}(k > 2) &= 1 - P_{400}(k=0) - P_{400}(k=1) - P_{400}(k=2) \\ &= 1 - \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} - \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} - \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} \\ &= 1 - 5e^{-2} \approx 0,31\end{aligned}$$

Упражнение (9). У нас есть $n = 800$ и $p = 0,0025$ - вероятность цифра может быть принята неправильно
Чтобы получить текст, все цифры будут приняты правильно, $k = 0$ и $\lambda = np = 800 \cdot 0,0025 = 2$
Ответ: $P_{800}(k=0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = e^{-2} \approx 0,136$

Упражнение (10). Мы знаем только один выстрел из 200 достигает цели, тогда при 100 выстрелах $\lambda = 1 \cdot 100 : 200 = \frac{1}{2}$
Ответ $P_{100}(k \geq 1) = 1 - P_{100}(k=0) = 1 - \frac{e^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0}{0!} = 1 - e^{\frac{-1}{2}\approx 0,4}$

Упражнение (11). У нас есть $n = 50$ и $p = 0,01$ - мало, поэтому мы используем формулу Пуассона с $\lambda = np = 0,5$
Ответ $P_{50}(k \geq 1) = 1 - P_{50}(k=0) = 1 - \frac{e^{-0,5} \cdot (0,5)^0}{0!} = 1 - e^{-0,5} \approx 0,4$

Упражнение (12). Пусть $A_i = \{$монету 1 бросают герб i раз$\}$, и $B_i = \{$монету 2 бросают герб i раз$\}$
$C = \{$у них выпадает одинаковое число гербов$\}$

У нас есть $C = \sum_{i=0}^{5} A_i B_i$

Мы образуем, что $P_{A,5}(k = k_0)$ - вероятность того, что первая монета выпадает k_0 герб

$P_{B,5}(k = k_0)$ - вероятность того, что вторая монета выпадает k_0 герб
Поэтому,

$$\begin{aligned}
P(C) &= \sum_{i=0}^{5} P_{A,5}(k=i) \cdot P_{B,5}(k=i) \\
&= \sum_{i=0}^{5} \left[C_5^i \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i} \right] \cdot \left[C_5^i \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i} \right] \\
&= \sum_{i=0}^{5} \left[C_5^i \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right]^2 = \frac{63}{256}
\end{aligned}$$

Упражнение (13)**.** Пусть x - количество раз частица двигается вправо и y - количество раз частица двигается влево
Тогда, место частицы равна $x - y$
Поэтому у нас есть

$$\begin{aligned}
x - y &\in [-2; 0] \\
x + y &= 5 \\
x, y &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Среди {-2, -1, 0}, мы получим цельные числа только когда -1. Значит
$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Получим $x = 2$, $y = 3$. Пусть $A =$ {через пять секунд частица двигается вправо 2 раза}
Ответ $P_5(k = 2) = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$

Упражнение (14)**.** В биатлоне на каждом из трех огневых рубежей спортсмен должен поразить пять мишеней в пяти выстрелах. За каждую непораженную мишень спортсмен обязан пробежать штрафной круг. Пусть вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,95. Какова вероятность того, что спортсмен все три огневых рубежа пройдет без штрафных кругов? какова вероятность того, что после каждого огневого рубежа спортсмен будет пробегать один штрафной круг?

(а) Пусть $A_i =$ {спортсмен пройдет без штрафной круг на i-ом рубеже}
У нас есть $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P(A_1A_2A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (P(A_1))^3 \\
&= (P_5(k=0))^3 = [C_5^0(0,95)^5]^3 \\
&\approx 0,46
\end{aligned}$$

(б) Пусть $B_i =$ {спортсмен после i-ого огневого рубежа будет пробегать один штрафной круг}

У нас есть $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3)$ и $p = 1 - 0,95 = 0,05$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(B_1B_2B_3) &= P(B_1)P(B_2)P(B_3) = (P(B_1))^3 \\ &= [P_5(k=1)]^3 = [C_5^1(0,05)^1(0,95)^4]^3 \\ &\approx 0,008\end{aligned}$$

Упражение (15)**.** Пусть $A = \{$к этому моменту у стрелка будет два промаха$\}$

Мы знаем, что последний выстрел будет попадание. Среди первые 4 выстрела, там есть два промаха с вероятностью $p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
Поэтому,

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot P_4(k=2) = \frac{1}{3} \cdot C_4^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{81}$$

Занятие 7

Упражнение (1)**.** Если $x_1 = 1$, то только выбрать нужный ключ с вероятностью $p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{5}$

Если $x_2 = 2$, то $p_2 = P(X = 2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$

Если $x_3 = 3$, то $p_3 = P(X = 3) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5}$

...

Если $x_n = n$, $p_n = P(X = n) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5}$

X	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
P	1/5	$(4/5)\cdot(1/5)$	$(4/5)^2\cdot(1/5)$	$\cdots$	$(4/5)^{n-1}\cdot(1/5)$	$\cdots$

Значит $M(X) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{5}$, когда $n \to \infty$

Смотрим полином $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. У нас есть

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)' = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)'$$

$$\Leftrightarrow 0 + 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \cdots + n \cdot x^{n-1} = \frac{(n+1) \cdot x^n \cdot (x - 1) - (x^{n+1} - 1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \cdots + n \cdot x^{n-1} = \frac{n \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Пусть $x = 4/5$ и $n \to \infty$, мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} i \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (4/5)^{n+1} - (n+1) \cdot (4/5)^n + 1}{(4/5 - 1)^2}$$

И у нас есть

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot (4/5)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \cdot (4/5)^n = 0$$

Поэтому,

$$\frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (4/5)^{n+1} - (n+1) \cdot (4/5)^n + 1}{(4/5 - 1)^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1/5)^2} = 5$$

Упражнение (2)**.** На электронное реле воздействует случайное напряжение, имеющее плотность вероятности $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$, $x \geq 0$. Реле срабатывает всякий раз, когда напряжение на его входе превышает 3 В. Какова вероятность срабатывания реле?

У нас есть $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$
Поэтому

$$P(X > 3) = \int_3^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2} \cdot exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}\,dx$$

Пусть $t = \frac{x^2}{2\sigma^2} \Rightarrow dt = \frac{x}{\sigma^2}\,dx$. Если $x = +\infty \Rightarrow t = +\infty$ и если $x = 3 \Rightarrow t = \frac{9}{2\sigma^2}$

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{x}{2\sigma^2} \cdot \exp\{-\frac{x^2}{\sigma^2}\}\,dt &= \int_{9/(\sigma^2)}^{+\infty} e^{-t}\,dt \\ &= -e^{-t}|_{9/(\sigma^2)}^{+\infty} \\ &= -e^{-\infty} + e^{-9/(\sigma^2)} \\ &= 0 + e^{-9/(\sigma^2)} \\ &= e^{-9/(\sigma^2)}\end{aligned}$$

Упражнение (3)**.** Пусть x - число монет по 10 копеек и y - число монет по 50 копеек $\Rightarrow x + y = 4$ и $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3$
X - сумма вынутых копеек $\Rightarrow X = 10x + 50y$

x	1	2	3	4
y	3	2	1	0
X	160	120	80	40

Отсюда, мы получим закон распределения случайной X

X	40	80	120	160
P	$\frac{C_5^4 \cdot C_3^0}{C_8^4} = \frac{1}{14}$	$\frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_8^4} = \frac{3}{7}$	$\frac{C_5^2}{\cdot} C_3^2 C_8^4 = \frac{3}{7}$	$\frac{C_5^1 \cdot C_3^3}{C_8^4} = \frac{1}{14}$

Упражнение (4)**.** $f(x) = 0,002e^{-0,002x}$ при $x \geq 0$, $f(x) = 0$ при $x < 0$

Найти функцию распределения:

- При $x < 0$

$$F(x) = P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$$

- При $x \geq 0$

$$\begin{aligned}F(x) = P(X \leq 0) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x 0,002e^{-0,002x}\,dx \\ &= 0 + \int_0^x e^{-0,002x}\,d(0,002x) \\ &= -e^{-0,002x}\Big|_0^x \\ &= -e^{-0,002x} + e^0 \\ &= 1 - e^{-0,002x}\end{aligned}$$

Вероятность того, что предохранитель безотказно проработает 1000 часов

$$F(x) = P(X \geq 1000) = F(+\infty) - F(1000) = 1 - (1 - e^{-0{,}002 \cdot 1000}) = e^{-2}$$

Упражнение (5). Пусть X - сумма выпавших очков. Поэтому

$$X \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

- $X = 2 = 1+1$, выбрать очку 1 (первый кубик) и очку 1 (второй кубик) $P(X = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $X = 3 = 1+2 = 2+1$, выбрать очку 1 (первый кубик) и очку 2 (второй кубик), или обратно $P(X = 3) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$
- $X = 4 = 2 + 2 = 1 + 3 = (3 + 1)$ $P(X = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
- $X = 5 = 2 + 3 = (3 + 2) = 1 + 4 = (4 + 1)$ $P(X = 5) = \frac{1}{9}$
- И далее $\cdots$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Математическое ожидание

$$M(\xi) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 14 \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{5}{16}\right) + 7 \cdot \frac{1}{6} = 7$$

Упражнение (6). Чтобы выбирать шары до тех пор, пока не будет вынут черный шар, у нас есть 4 способа

- 0 белых шара: $A_3^0 C_2^1$
- 1 белый шар: $A_3^1 C_2^1$
- 2 белых шара: $A_3^2 C_2^1$
- 3 белых шара: $A_3^3 C_2^1$

Мы получим $|\Omega| = A_3^0 C_2^1 + A_3^1 C_2^1 + A_3^2 C_2^1 + A_3^3 C_2^1 = 32$
и закон распределения с X - количество белых шара

X	0	1	2	3
P	$\frac{A_3^0 C_2^1}{32} = \frac{1}{16}$	$\frac{A_3^1 C_2^1}{32} = \frac{3}{16}$	$\frac{A_3^2 C_2^1}{32} = \frac{3}{8}$	$\frac{A_3^3 C_2^1}{32} = \frac{3}{8}$

Поэтому

$$M(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{16} \approx 2$$

Упражнение (7). (a) Функция распределения величины X

- При $x < 0$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dx = 0$$

- При $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{x} 0,5 \sin x\, dx \\
&= 0 - 0,5 \cos x \Big|_0^x = -0,5(\cos x - \cos 0) \\
&= 0,5(1 - \cos x)
\end{aligned}$$

- При $x > \pi$

$$\begin{aligned}
F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\pi} 0,5 \sin x\, dx + \int_{\pi}^{x} 0\, dx \\
&= 0 + \int_{0}^{\pi} 0,5 \sin x\, dx \\
&= -0,5 \cos x \Big|_0^\pi \\
&= -0,5(\cos \pi - \cos 0) = -0,5(-1 - 1) = 1
\end{aligned}$$

(б) математическое ожидание этой величины
Так как $f(x) = 0$ при $x \notin [0, \pi]$, мы получим математическое ожидание
$M(\xi) = \int_0^\pi x \cdot 0,5 \sin x\, dx = 0,5 \int_0^\pi x \sin x\, dx$
Пусть $u = x$ и $\sin x\, dx = dv \Rightarrow du = dx$ и $-\cos x = v$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x \sin x\, dx &= -x \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x\, dx \\
&= -(\pi \cos \pi - 0 \cos 0) + \int_0^\pi \cos x\, dx \\
&= \pi + \sin x \Big|_0^\pi = \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0,5 \int_0^\pi x \sin x\, dx = 0,5\pi = \pi/2$$

(в) Вероятность попадания в интервал $[0, \pi/3]$
$P(0 \leq \xi \leq \pi/3) = F(\pi/3) - F(0) = 0,5(1 - \cos \frac{\pi}{3}) - 0,5(1 - \cos 0) = \frac{1}{4}$

Упражнение (8). Пусть X - количество раз бросают монету. У нас есть:

- $X = 1$: выпадение герба. $P(X = 1) = \frac{1}{2}$
- $X = 2$: цифр - герб. $P(X = 2) = \frac{1}{2^2}$
- $X = 3$: цифр - цифр - герб. $P(X = 3) = \frac{1}{2^3}$
- $X = 4$: цифр - цифр - цифр - герб, либо цифр четыре раза.
  $P(X = 4) = 2 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^3}$

$M(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{15}{8}$

Упражнение (9)**.** $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. За один раз

$$\begin{aligned} P(-1 < x < 1) &= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \arctan x \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Отсюда, вероятность того, что при трех независимых наблюдения этой случайной величины $P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Упражнение (10)**.** Случайная величина X - погрешность измерительного прибора распределена по нормальному закону распределения с дисперсией $\sigma^2 = 25$ мB^2. Систематическая погрешность прибора отсутствует. Найдите вероятность того, что при пяти независимых измерениях ошибка измерения хотя бы один раз превзойдет по модулю 10 мВ

Пусть $A =$ {при пяти независимых измерениях ошибка измерения хотя бы один раз превзойдет по модулю 10 мВ}
$\Rightarrow \overline{A} =$ {при пяти раз нет ошибки}

Используем $P(|X - m| < \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$. Здесь $\alpha = 10$ и $\sigma^2 = 25$
$\Rightarrow P(|X - m| < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{5}\right) = 2 \cdot 0,4773 = 0,9546$

Отсюда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,9546^5 \approx 0,21$

Упражнение (11)**.** $\sigma = 20$, $\alpha = 50$

$P(|X - m| < 50) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{50}{20}\right) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876$

Упражнение (12)**.** $\varphi(z) = M[\cos(zX) + i\sin(zX)]$
У нас есть $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ и $P(X = -1) = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \varphi(z) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(z \cdot 1) + i\sin(z \cdot 1)] + \frac{1}{2} \cdot [\cos(z \cdot (-1)) + i\sin(z \cdot (-1))] = \frac{1}{2} \cdot (\cos z + \cos(-z) + i[\sin z + \sin(-z)])$
Но $\cos(z) = \cos(-z)$ и $\sin(-z) = -\sin(z)$
$\Rightarrow \varphi(z) = \frac{1}{2} \cdot (\cos z + \cos z) = \cos z$

Упражнение (13)**.** Так как случайная величина равномерно распределена отрезке $[a, b]$, у нас есть её функция плотности вероятности $f(x) = \frac{1}{b-a}$

Поэтому, характеристическая функция

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int_a^b e^{izx}\, dF(x) \\ &= \int_a^b e^{izx} \cdot f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{izx}\, dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{izx}}{iz}\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{e^{biz} - e^{aiz}}{iz}\end{aligned}$$

Упражнение (14)**.** $P(X=k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$
У нас есть $\psi(z) = M(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k \cdot z^k}{k!}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \psi'(z) &= e^{-\lambda}\Big[\frac{\lambda^k \cdot kz^{k-1}}{k!} + \frac{\lambda^{k-1} \cdot (k-1)z^{k-2}}{(k-1)!} + \cdots + \frac{\lambda^1 \cdot 1 \cdot z^0}{1!} + 0\Big] \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda\Big[\frac{(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(\lambda z)^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + \frac{(\lambda z)^0}{0!}\Big] \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda z}\end{aligned}$$

$\Rightarrow M(X) = \psi'(1) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda$

Аналогично, мы получим $\psi''(1) = \lambda^2$ и $D(X) = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Занятие 8

Упражнение (1). $Y = (X-1)^2$

- $X = -1 \Rightarrow Y = 4$
- $X = 0 \Rightarrow Y = 1$
- $X = 2 \Rightarrow Y = 1$
- $X = 3 \Rightarrow Y = 4$

$\Rightarrow P(Y=1) = P(X=0) + P(X=2) = 0,4 + 0,3 = 0,7$
$P(Y=4) = P(X=-1) + P(X=3) = 0,1 + 0,2 = 0,3$ Мы получим закон распределения

Y	1	4
P	0,7	0,3

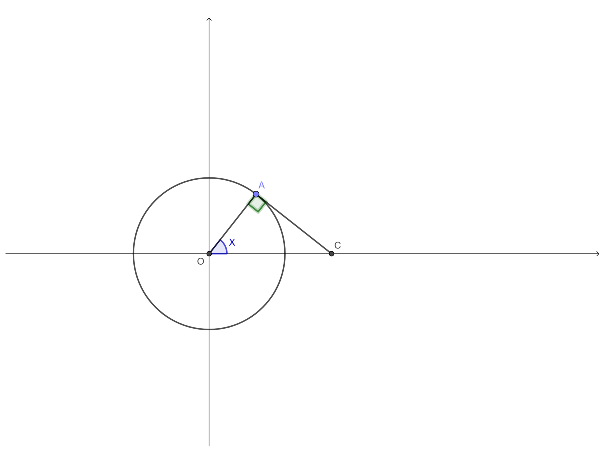
Упражнение (2). $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $0 < a \le x \le b$ и $Y = X^2$
$\Rightarrow x = \sqrt{y}$, $a^2 \le y \le b^2$
Плотность вероятности случайной величины Y:

$$g(y) = \frac{1}{b-a} \cdot \left|(\sqrt{y})'\right| = \frac{1}{2(b-a)\cdot\sqrt{y}},\ a^2 \le y \le b^2$$

Упражнение (3). $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp - \frac{x^2}{2\sigma^2}$, $x \ge 0$ и $Y = \sigma/X$
$\Rightarrow x = \sigma/y$ и $y > 0$. Поэтому плотность распределения случайной величины Y:

$$g(y) = \frac{\sigma}{y\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{y^2 \cdot 2\sigma^2}\right)\left|\left(\frac{\sigma}{y}\right)'\right| = \frac{1}{y\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2y^2}\right) \cdot \frac{\sigma}{y^2} = y^{-3} \exp\left(-\frac{1}{2y^2}\right)$$

Упражнение (4). Мы обозначим через X угол между осью абсцисс и направлением из начала координат на точку касания. Мы получим длину от точки касания до точки ее пересечения с осью Ox: $H = AC = \operatorname{tg} X$, $x \in [0, \pi/2]$



У нас есть $H = \operatorname{tg} X$, $x \in [0, \pi/2]$. Следовательно, X имеет равномерное на $[0, \pi/2]$ распределения с функцией плотности вероятности $f(x) = \frac{2}{\pi}$. Поэтому $x = \operatorname{arctg} h$, $h \geq 0$

Мы получим $g(h) = \frac{2}{\pi} \cdot \left|(\operatorname{arctg} h)'\right| = \frac{2}{\pi\sqrt{1+h^2}}$, $h > 0$

При $h \leq 0$,

$$F(h) = \int_{-\infty}^{h} 0\, dh = 0$$

При $h > 0$,

$$F(h) = \int_{-\infty}^{h} g(h)\, dh = \int_{0}^{h} \frac{2}{\pi\sqrt{1+h^2}}\, dh = \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} h$$

Упражнение (5)**.** Случайная величина X равномерно распределения на отрезке $[0, 1]$, поэтому функция плотности вероятности $f(x) = 1$

У нас есть $Y = \ln(1/X) \Rightarrow y = \varphi(x) = \ln(1/x) \Rightarrow e^y = 1/x \Rightarrow x = 1/e^y$, $y \geq 0$

Функция плотности вероятности случайной величины Y:

$$g(h) = 1 \cdot \left|(1/e^y)'\right| = 1/e^y$$

Тогда функция распределения:

При $y < 0$, $F(y) = 0$

При $y \geq 0$, $F(y) = \int_{-\infty}^{y} dy = \int_{0}^{y} 1/e^y\, dy = -e^{-y}\Big|_0^y = -e^{-y} + e^0 = 1 - e^{-y}$

Упражнение (6)**.** $Y = X^2 - X + 1$

- $X = 1$, $Y = 1^2 - 1 + 1 = 1$
- $X = 2$, $Y = 2^2 - 2 + 1 = 3$
- $X = 4$, $Y = 4^2 - 4 + 1 = 13$

Y	1	3	13
P	0,3	0,5	0,2

Математическое ожидание $M\xi = 1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,5 + 13 \cdot 0,2 = 4,4$

Упражнение (7)**.** Так как X - число выпавших гербов при трех подбрасываниях монеты, вероятность равна по формуле Бернулли с $n = 3$, $p = 1/2$

- $X = 0$, $P_3(X = 0) = C_3^0 (1/2)^0 \cdot (1/2)^3 = 1/8$ и $Y = X^2 = 0$
- $X = 1$, $P_3(X = 1) = C_3^1 (1/2)^1 \cdot (1/2)^2 = 3/8$ и $Y = X^2 = 1$
- $X = 2$, $P_3(X = 2) = C_3^2 (1/2)^2 \cdot (1/2)^1 = 3/8$ и $Y = X^2 = 4$
- $X = 3$, $P_3(X = 3) = C_3^1 (1/2)^3 \cdot (1/2)^0 = 1/8$ и $Y = X^2 = 9$

Математическое ожидание случайной величины Y

$$M\xi = 0 \cdot (1/8) + 1 \cdot (3/8) + 4 \cdot (3/8) + 9 \cdot (1/8) = 3$$

Упражнение (8)**.** Случайная величина X равномерно распределения на отрезке $[0,1] \Rightarrow$ функция распределения $f(x) = 1$

Мы найдем область значений $y = \varphi(x)$

$Y = \sin(\pi X) \Rightarrow y = \varphi(x) = \sin(\pi x) \Rightarrow y' = \pi\cos(\pi x)$

Если $y' = 0 \Leftrightarrow \pi\cos(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = \pi/2 \Leftrightarrow x = 1/2$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Поэтому $y \in [0,1]$ и

$$x = \begin{cases} \frac{\arcsin y}{\pi} & , \text{при } x \in [0,1/2] \\ \frac{\pi - \arcsin y}{\pi} & , \text{при } x \in [1/2,1] \end{cases}$$

Функция плотности вероятности случайной величины Y:

$$g(y) = 1 \cdot \left|\left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)'\right| + 1 \cdot \left|\left(\frac{\pi - \arcsin y}{\pi}\right)'\right| = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

Математическое ожидание

$$M\xi = \int_0^1 y \cdot \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_0^1 \frac{-1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,d(1-y^2) = \frac{-2\sqrt{1-y^2}}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

Упражнение (9)**.** $f(x) = 0,5\sin x$ при $x \in [0,\pi]$ и $f(x) = 0$ при остальных x

У нас есть $Y = 2X \Rightarrow y = \varphi(x) = 2x \Rightarrow x = y/2$ при $y \in [0,2\pi]$

Функция плотности вероятности равна

$g(y) = 0,5\sin(y/2) \cdot \Big|(y/2)'\Big| = 0,25\sin(y/2)$ при $y \in [0,2\pi]$ и $f(y) = 0$ при остальных y

Математическое ожидание

$$\begin{aligned}
M\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot g(y)\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} 0,25y \sin(y/2)\, dy \\
&= 0,25 \int_0^{2\pi} y(-2\cos(y/2))'\, dy \\
&= 0,25\Big[-2y\cos(y/2)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1\cdot(-2\cos(y/2)\, dy)\Big] \\
&= 0,25\Big[4\pi + 4\sin(y/2)\Big|_0^{2\pi}\Big] \\
&= 0,25\Big[4\pi + 0\Big] = \pi
\end{aligned}$$

Упражнение (10). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, при $x \in \mathbb{R}$
У нас есть $Y = \frac{1}{2}X^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{2y}$ и $y \geq 0$

- При $x < 0$, $x = x_1(y) = -\sqrt{2y}$
- при $x \geq 0$, $x = x_2(y) = \sqrt{2y}$

Функция плотности вероятности

$$\begin{aligned}
g(y) &= f(x_1(y)) \cdot \Big|(-\sqrt{2y})'\Big| + f(x_2(y)) \cdot \Big|(\sqrt{2y})'\Big| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \cdot \Big|\frac{-1}{\sqrt{2y}}\Big| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} \cdot \Big|\frac{1}{\sqrt{2y}}\Big| \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2y}} e^{-y} = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-y}
\end{aligned}$$

Упражнение (11). $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $x \geq 0$
У нас есть
$Y = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = 0,5x$ при $x \in [0,4]$ и $\varphi \equiv 2$ при $x \in (4, +\infty)$

- При $x \in [0,4]$, $x = x(y) = 2y$, $y \in [0,2]$
- При $x \in (4, +\infty)$, $y \equiv 2$

Поэтому $y = 0$ при $y \notin [0,2]$ и если $y = 2 \Rightarrow x = 4$

$$\Rightarrow P(Y=2) = \int_4^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x}\Big|_4^{+\infty} = 0 + e^{-4\lambda}$$

$$g(y) = f(x(y))\Big|(2y)'\Big| + P(Y=2)\cdot\delta(y-2) = 2\lambda e^{-2\lambda y} + e^{-4\lambda}\delta(y-2)$$

Упражнение (12). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)$
У нас есть $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(x) = 0$ при $x < 0$ и $\varphi(x) = 2x$ при $x \geq 0$

$P(Y = 0) = P(-\infty < X < 0) = \frac{1}{2}$ (свойства стандартного нормального распределения)

У нас также есть: при $x \geq 0$, $x = \frac{y}{2}$

Поэтому

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{y^2}{4 \cdot 2}\Big) \cdot \Big|\Big(\frac{y}{2}\Big)'\Big| + P(Y = 0) \cdot \delta(y - 0) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{y^2}{8}\Big) + \frac{1}{2}\delta(y) \end{aligned}$$

Ещё не решил:

- Занятие 3: 7б, 10
- Занятие 5: 2, 8
- Занятие 8: 13