Документ для изучения предмета

математическая логика и теория алгоритмов

1. Доказать тавтологию

Формула A называется **тавтологией** (или **тождественно истинной**), если формула истинна во всех интерпретациях. Значит формула

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1, \ \forall x_i \in \{0, 1\}$$

, здесь (0 - ложность, 1 - истинность)

Нужно помнить

- $A \to B$ **ложна** тогда и только тогда, когда $A = 1$ и $B = 0$ (так как $A \to B = \overline{A} \vee B$)
- $A \vee B$ **ложна** тогда и только тогда, когда $A = B = 0$
- $A \wedge B$ **истинна** тогда и только тогда, когда $A = B = 1$

1. Доказать тавтологию

Способ 1 (легко, но длинно): использовать таблицу истинности
Пример: $f(x, y) = [(x \Rightarrow y)\&(\neg(\neg y \Rightarrow \neg x))] \Rightarrow \neg x$
Для краткости мы пишем $g = g(x, y) = x \Rightarrow y$ и
$h = h(x, y) = \neg(\neg y \Rightarrow \neg x)$. Тогда $f(x, y) = (g\&h) \Rightarrow \neg x$

x	y	g	$\neg x$	$\neg y$	$\neg y \Rightarrow \neg x$	h	$g\&h$	$f(x, y)$
0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Отсюда $f(x, y) = 1$ для всех пар (x, y), поэтому эта формула тавтология

1. Доказать тавтологию

Способ 2 (меньше)

Пример: $f(x,y) = [(x \Rightarrow y)\&(\neg(\neg y \Rightarrow \neg x))] \Rightarrow \neg x$

Мы предположим, что существуют пара (x,y), которая делает функцию $f(x,y) = 0$. Согласно слайду 1, $f(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} [(x \Rightarrow y)\&(\neg(\neg y \Rightarrow \neg x))] = 1 \\ \neg x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x \Rightarrow y) = 1 \\ \neg(\neg y \Rightarrow \neg x) = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Из $x = 1$ и $(x \Rightarrow y) = 1$, мы получим $y = 1$. Поэтому

$\neg(\neg y \Rightarrow \neg x) = \neg(0 \Rightarrow 0) = \neg 1 = 0$ (неверно так как у нас уже есть $\neg(\neg y \Rightarrow \neg x) = 1$)

В заключение, не существует пара (x,y), удовлетворяющая $f(x,y) = 0$. Значит $f(x,y) = 1$ для всех (x,y), тогда функция является тавтологией