Lý thuyết nhóm

Group

Lê Quốc Dũng

Moscow Power Engineering Institute

Ngày 1 tháng 6 năm 2023

Tổng quan

Nhóm (Group)

Một nhóm (Group) là một tập hợp G khác rỗng và một toán tử 2 ngôi trên G là $\star$ thỏa mãn các tính chất:

- Tính đóng (Closure): với mọi $a, b \in G$, $a \star b \in G$. (Toán tử 2 ngôi trên G)
- Tính kết hợp (Associative Law): với mọi a, b, $c \in G$, $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
- Tồn tại phần tử đơn vị (Identity Law):tồn tại $e \in G$ sao cho $a \star e = e \star a = a$ với mọi $a \in G$
- Tồn tại phần tử nghịch đảo (Inverse Law): với mọi $a \in G$, tồn tại $a' \in G$ sao cho $a \star a' = a' \star a = e$

Ví dụ về nhóm

Ví dụ 1. Xét tập số nguyên $\mathbb{Z}$ và phép toán cộng $(+)$ trên $\mathbb{Z}$.

- Ta nhận thấy rằng với mọi $a \in \mathbb{Z}$ thì $a + 0 = 0 + a = a$. Như vậy phần tử đơn vị của nhóm này là 0.
- Thêm nữa, với mọi $a \in \mathbb{Z}$ thì $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Do đó phần tử đối của phần tử a bất kì là $-a$. Ví dụ phần tử đối của 3 là -3, của -10 là 10.
- Đối với tính kết hợp, do phép cộng số nguyên có tính kết hợp nên dễ dàng suy ra.

Như vậy tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ và phép cộng các số nguyên là tạo thành một nhóm.

Ví dụ về nhóm

Ví dụ 2. Xét tập số hữu tỷ không chứa số 0 là $\mathbb{Q}^*$ và phép nhân $\times$ các số hữu tỉ.

- Phần tử đơn vị: với mọi $q \in \mathbb{Q}^*$ thì $q \times 1 = 1 \times q = q$. Như vậy phần tử đơn vị là 1.
- Phần tử nghịch đảo: với mọi $q \in \mathbb{Q}^*$, phần tử nghịch đảo là số q' sao cho $q \times q' = q' \times q = 1$. Suy ra $q' = \frac{1}{q}$. Ví dụ nghịch đảo của 4 là $\frac{1}{4}$, nghịch đảo của $\frac{5}{3}$ là $\frac{3}{5}$.
- Tính kết hợp: Do tính chất kết hợphợp của phép nhân các số hữu tỉ nên dễ nhận thấy.

Như vậy, tập hợp các số hữu tỷ khác 0 $\mathbb{Q}^*$ và phép nhân các số hữu tỷ tạo thành một nhóm.

Ví dụ về nhóm

Ví dụ 3. Xét tập hợp các ma trận 2×2 $GL_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ có định thức khác 0 $(ad - bc \neq 0)$ và phép nhân ma trận.

- Tính đóng: do $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ nên do cả $\det(A)$ và $\det(B)$ đều khác 0 nên $\det(AB)$ cũng khác 0. Do đó ma trận tích $AB \in GL_2(\mathbb{R})$.
- Phần tử đơn vị: ma trận đơn vị $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ thỏa mãn $IA = AI = A$ với mọi ma trận $A \in GL_2(\mathbb{R})$.
- Phần tử nghịch đảo: do các ma trận trong tập hợp có định thức khác 0 nên luôn tồn tại nghịch đảo cho mọi ma trận $A \in GL_2(\mathbb{R})$.
- Tính kết hợp: theo tính chất phép nhân ma trận thì $(AB)C = A(BC)$ với mọi ma trận $A, B, C \in GL_2(\mathbb{R})$

Như vậy tập hợp các ma trận 2×2 với định thức khác 0 $GL_2(\mathbb{R})$ cùng phép nhân các ma trận tạo thành một nhóm (**General Linear Group**).

Đặc trưng của nhóm

Định nghĩa. **Order** (Cấp) của nhóm là số lượng phần tử của G và được ký hiệu là $\#G$.
Trong các ví dụ trên thì $\#G = \infty$, nghĩa là nhóm có vô hạn phần tử. Các ví dụ sau sẽ xét về các nhóm hữu hạn phần tử, hay còn gọi là nhóm hữu hạn.

Permutation Group (Nhóm hoán vị)

Cho số tự nhiên n và gọi $P = \{1, 2, \cdots, n\}$. Tập hợp tất cả hoán vị của P và toán tử sau đây tạo thành một nhóm: với mọi hoán vị x, y thì $x \star y$ là vị trí của x theo y.
Ví dụ, với $n = 4$. Xét 2 hoán vị $x = (1, 4, 2, 3)$ và $y = (3, 2, 4, 1)$. Khi đó gọi $z = x \star y$ thì:
$z_1 = x_{y_1} = x_3 = 2,\ z_2 = x_{y_2} = x_2 = 4,\ z_3 = x_{y_3} = x_4 = 3,\ z_4 = x_{y_4} = x_1 = 1$
Như vậy $z = x \star y = (2, 4, 3, 1)$.

Ở đây ta cũng có thể viết dưới dạng ánh xạ thay vì dùng chỉ số của dãy số. Nghĩa là $x(1) = 1,\ x(2) = 4,\ x(3) = 2,\ x(4) = 3$ và $y(1) = 3,\ y(2) = 2,\ y(3) = 4,\ y(4) = 1$.
Khi đó $\star$ là hợp của 2 ánh xạ $z(i) = x(y(i))$.

Permutation Group (Nhóm hoán vị)

Dihedral Group (Nhóm Dihedral)

Bullet Points

- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit
- Aliquam blandit faucibus nisi, sit amet dapibus enim tempus eu
- Nulla commodo, erat quis gravida posuere, elit lacus lobortis est, quis porttitor odio mauris at libero
- Nam cursus est eget velit posuere pellentesque
- Vestibulum faucibus velit a augue condimentum quis convallis nulla gravida

Blocks of Highlighted Text

In this slide, some important text will be highlighted because it's important. Please, don't abuse it.

Block

Sample text

Alertblock

Sample text in red box

Examples

Sample text in green box. The title of the block is “Examples".

Multiple Columns

Heading

1. Statement
2. Explanation
3. Example

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Table

Treatments	**Response 1**	**Response 2**
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Bảng: Table caption

Theorem

Theorem (Mass–energy equivalence)

$E = mc^2$

Figure

Uncomment the code on this slide to include your own image from the same directory as the template .TeX file.

Citation

An example of the `\cite` command to cite within the presentation:

This statement requires citation [**?**].

References

John Smith (2012)
Title of the publication
Journal Name 12(3), 45 – 678.

The End