Nơi huyền thoại lưu danh

Lê Quốc Dũng

2023

Đường đi ngàn dặm, bắt đầu bằng một bước chân.

Lão Tử

Mục lục

I Đại số **8**

1 Đại số cơ bản **9**
1.1 Ánh xạ 9
1.2 Hàm số 10

II Số học **13**

2 Hàm Euler **14**
2.1 Hàm Euler 14
2.2 Định lý Euler 15
2.3 Định lý Fermat nhỏ 16
2.4 Tính chất hàm Euler 16

III Toán trừu tượng **19**

3 Lý thuyết nhóm **20**
3.1 Nhóm 20
3.2 Nhóm con 21
3.3 Coset 22
3.4 Normal Subgroup 23

4 Lý thuyết vành **24**
4.1 Vành 24
4.2 Ideal 25

5 Lý thuyết trường **27**
5.1 Trường 27
5.2 Trường hữu hạn $GF(p)$ 28
5.3 Trường hữu hạn $GF(p^n)$ 29

6 Tác động nhóm **32**
6.1 Tác động nhóm 32
6.2 Bổ đề Burnside 34
6.3 Ví dụ bài toán đếm sử dụng bổ đề Burnside 35
6.4 Chỉ số chu trình 37
6.5 Định lý Polya 38

IV Hình học **42**

7 Phép biến hình **43**
7.1 Phép dời hình 43
7.2 Phép dời hình theo vector 44
7.3 Phép đối xứng qua tâm cố định 44
7.4 Phép quay quanh tâm cố định 44

8 Ba đường Conic **46**
8.1 Ellipse 46
8.2 Hyperbol 48
8.3 Parabol 49

V Đại số tuyến tính **51**

9 Nhắc lại các khái niệm cơ bản **52**
9.1 Hạng của ma trận 52

9.2 Tổ hợp tuyến tính 52
9.3 Không gian vector 53
9.4 Cơ sở và số chiều của không gian vector 54
9.5 Không gian vector con 56

10 Không gian vector **58**
10.1 Không gian vector 58
10.2 Cơ sở và số chiều của không gian vector 59
10.3 Ví dụ về không gian vector 60

VI Giải tích **62**

11 Giới hạn **63**
11.1 Giới hạn của dãy số 63
11.2 Giới hạn hàm số 64
11.3 Tính liên tục của hàm số 65
11.4 Đạo hàm 66
11.5 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm 66
11.6 Đồng biến và nghịch biến 67

VII Lời giải cho bài tập trong một số sách **69**

12 Abstract Algebra **70**
12.1 Groups (chương 3) 70
12.2 Permutation Groups (chương 5) 73
12.3 Cosets (chương 6) 74
12.4 Isomorphism (chương 9) 75

13 Intro to Math-Crypto **77**
13.1 Chapter 2 77
13.2 Chapter 3 93
13.3 Chapter 4 103
13.4 Chapter 7 104

VIII Lịch sử toán học **107**

14 Euclid **110**

15 Georg Cantor **112**
15.1 Dẫn nhập 112
15.2 Cantor tiến xa 114
15.3 Thiên tài và bi kịch 115

IX Mật mã học **118**

16 AES **119**
16.1 Substitute Bytes 120
16.1.1 Substitute Bytes 120
16.1.2 Inverse Sub Bytes 121
16.1.3 Ý nghĩa của Substitute Bytes 121
16.2 Shift Rows 121
16.2.1 Shift Rows 121
16.2.2 Inverse Shift Rows 121
16.2.3 Ý nghĩa 122
16.3 Mix Columns 122
16.3.1 Mix Columns 122
16.3.2 Inverse Mix Columns 123
16.3.3 Ý nghĩa 123
16.4 Add Round Key 123
16.4.1 Add Round Key 123
16.4.2 Ý nghĩa 124
16.5 Expand Key 124
16.5.1 Expand Key 124
16.5.2 Ý nghĩa của Expand Key 125
16.6 Kết luận 125

17 Magma **127**
17.1 Key schedule 127
17.2 Round function 128

18 Kuznyechik **131**
18.1 Mã hóa 131
18.2 Thuật toán sinh khóa con 133
18.3 So sánh Kuznyechik với AES 134

Bảng các ký hiệu dùng trong sách

$\|S\|$	số lượng phần tử của tập hợp S (lực lượng của S)
$\phi(n)$	phi hàm Euler của số dương n
$\mathbb{Z}$	tập hợp số nguyên
$\mathbb{Q}$	tập hợp số hữu tỉ
$\mathbb{Q}^*$	tập hợp số hữu tỉ khác 0
$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$H \triangleleft G$	H là normal subgroup của G
$\boldsymbol{a}$	chữ in đậm ký hiệu vector
$\overrightarrow{OA}$	vector từ điểm O tới điểm A

Phần I

Đại số

Chương 1

Đại số cơ bản

1.1 Ánh xạ

Cho 2 tập hợp X và Y. Ánh xạ f biến một phần tử $x \in X$ thành một và chỉ một phần tử $y \in Y$.

Ta ký hiệu

$$f : X \to Y,\ f(x) = y$$

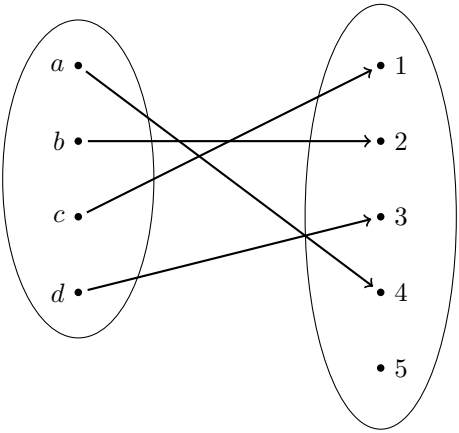
Khi đó, X được gọi là tập nguồn (domain) và Y là tập đích (image).

Ánh xạ có 3 loại:

- Đơn ánh (Injection): Hai phần tử khác nhau của tập nguồn cho hai ảnh khác nhau. Tức là với mọi $x_1, x_2 \in X$ mà $x_1 \neq x_2$, thì $f(x_1) \neq f(x_2)$
- Toàn ánh (Surjection): Mọi phần tử $y \in Y$ đều có ít nhất một phần tử $x \in X$ mà $f(x) = y$. Nói cách khác với mỗi phần tử trong Y ta đều tìm được phần tử thuộc X biến thành nó
- Song ánh (Injection): Nếu ánh xạ đó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh

Nhận xét. Dựa vào định nghĩa và hình vẽ, ta có thể rút ra kết luận như sau

- Đối với đơn ánh, do mọi phần tử của X đều có ảnh ở Y, tuy nhiên có thể có phần tử ở Y không do phần tử nào của X biến thành (trong hình là 5). Do đó $|X| \leq |Y|$
- Đối với toàn ánh, mọi phần tử của Y đều có nguồn gốc xuất xứ, tuy nhiên có thể có phần tử của X không biến thành y nào của Y (trong hình là e). Do đó $|X| \geq |Y|$
- Đối với song ánh, do là kết hợp giữa đơn ánh và toàn ánh, khi đó dấu đẳng thức xảy ra, $|X| = |Y|$

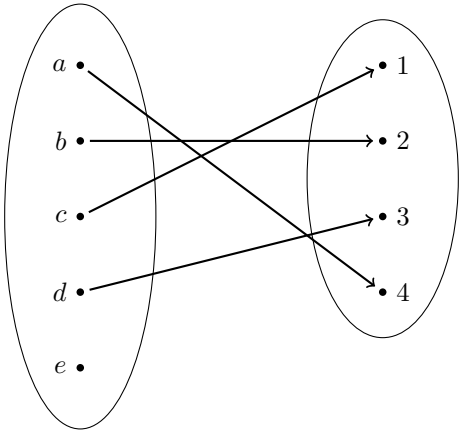


Hình 1.1: Đơn ánh

1.2 Hàm số

Khi 2 tập nguồn và đích của ánh xạ là 2 tập hợp số, ta có hàm số.

Ví dụ. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $y = f(x) = x^3 + x + 1$. Ở đây $X \equiv \mathbb{R}$ và $Y \equiv \mathbb{R}$.



Hình 1.2: Toàn ánh

Lưu ý rằng tập nguồn và đích không nhất thiết là tập hợp số cơ bản $(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ mà cũng có thể là tích Descartes của chúng.

Ví dụ. Hàm số $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $z = f(x, y) = x + y + xy$. Ở đây $X \equiv \mathbb{R}$, $Y \equiv \mathbb{R}$ và $Z \equiv \mathbb{R}$.

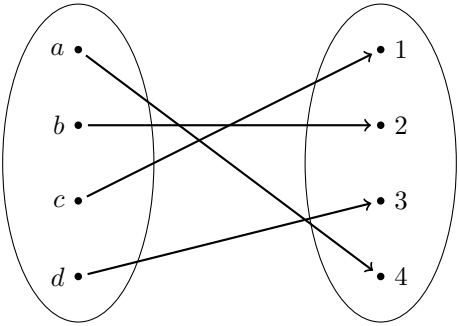
Chúng ta còn một cách gọi khác cho đơn ánh, toàn ánh, song ánh trong tiếng Anh.

đơn ánh	injection	one-to-one map
toàn ánh	surjection	onto map
song ánh	bijection	one-to-one and onto map

Bảng 1.1: Thuật ngữ tiếng Anh cho ánh xạ

Ví dụ. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $y = f(x) = x^3$ là song ánh.

Chứng minh. Ta thấy nếu $f(x_1) = f(x_2)$, tương đương $x_1^3 = x_2^3$ nên $x_1 = x_2$. Do đó f là đơn ánh.



Hình 1.3: Song ánh

Với mọi $y = x^3 \in \mathbb{R}$, do căn bậc 3 luôn tồn tại nên ta có $x = \sqrt[3]{y}$. Nghĩa là luôn tồn tại x để $f(x) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Do đó f là toàn ánh.

Kết luận f là song ánh. □

Phần II

Số học

Chương 2

Hàm Euler

2.1 Hàm Euler

Định nghĩa 2.1 (Phi hàm Euler)**.** Cho số nguyên dương n. Số lượng các số dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n được ký hiệu bởi $\phi(n)$ và gọi là ϕ hàm Euler. Nghĩa là

$$\phi(n) = |\{a : (a, n) = 1\}|$$

Hàm Euler có ý nghĩa quan trọng trong lý thuyết số, công cụ giúp chúng ta giải các vấn đề về số mũ trong modulo.

Sau đây chúng ta xem xét hệ thặng dư đầy đủ và hệ thặng dư thu gọn.

Với số nguyên dương n, ta định nghĩa:

Định nghĩa 2.2 (Hệ thặng dư đầy đủ)**.** Hệ thặng dư đầy đủ của n là tập $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Nói cách khác, hệ thặng dư đầy đủ của n là các số dư có thể có khi chia một số bất kì cho n.

Định nghĩa 2.3 (Hệ thặng dư thu gọn)**.** Hệ thặng dư thu gọn của n là tập các số a mà $1 \leq a < n$ và $(a, n) = 1$. Số lượng các số a như vậy là $\phi(n)$.

Nhận xét. Hệ thặng dư thu gọn của n gồm $\phi(n)$ phần tử là

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}\}$$

Nhận xét. Nếu n là số nguyên tố thì $\phi(n) = n - 1$

2.2 Định lý Euler

Định lý 2.1 (Định lý Euler)**.** Cho số nguyên dương n. Với mọi số nguyên a mà $(a, n) = 1$ thì

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Chứng minh. Giả sử $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}\}$ là hệ thặng dư thu gọn của n. Ta sẽ chứng minh rằng nếu a là số sao cho $(a, n) = 1$ thì tập hợp

$$\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\phi(n)}\}$$

là hoán vị của tập S.

Thật vậy, giả sử $aa_i \equiv aa_j \pmod{n}$ với $1 \leq i, j \leq \phi(n)$ và $i \neq j$.

Do $(a, n) = 1$ nên tồn tại nghịch đảo $a' \pmod{n}$, nhân a' cho 2 vế ta còn $a_i \equiv a_j \pmod{n}$.

Nói cách khác, nếu $a_i \not\equiv a_j \pmod{n}$ thì $aa_i \not\equiv aa_j \pmod{n}$. Suy ra tập

$$\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\phi(n)}\}$$

là hoán vị của S.

Ta nhân tất cả phần tử của S thì sẽ bằng tích phần tử của tập trên

$$aa_1 \cdot aa_2 \ldots aa_{\phi(n)} \equiv a_1 \cdot a_2 \ldots a_{\phi(n)} \pmod{n}$$

Đặt $I = a_1 \cdot a_2 \ldots a_{\phi(n)}$ thì phương trình trên tương đương với

$$a^{\phi(n)} I \equiv I \pmod{n}$$

Mà $(I, n) = 1$ do là tích các số nguyên tố cùng nhau với n nên rút gọn 2 vế ta được

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

2.3 Định lý Fermat nhỏ

Định lý 2.2 (Định lý Fermat nhỏ)**.** Cho số nguyên tố p. Với mọi số nguyên a thì

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Khi $(a, p) = 1$ thì

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Nhận xét. Khi $(a, p) = 1$ thì định lý Fermat là hệ quả trực tiếp từ định lý Euler.

2.4 Tính chất hàm Euler

Nhận xét. Với $(m, n) = 1$ thì

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$$

Chứng minh. Ta viết các số từ 1 tới mn thành bảng như sau

$$\begin{array}{cccc} 1 & m+1 & \cdots & (n-1)m+1 \\ 2 & m+2 & \cdots & (n-1)m+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & m+m & \cdots & (n-1)m+m \end{array}$$

Hàng r gồm các phần tử dạng $rm + k$ với $0 \leq r \leq n-1$ và $1 \leq k \leq m$. Ta thấy rằng nếu $(rm + k, m) = 1$ thì $(k, m) = 1$.

Do đó trên mỗi hàng có $\phi(m)$ phần tử nguyên tố cùng nhau với m.

Tiếp theo, trên các hàng vừa tìm được, do $(m,n)=1$ nên để $(rm+k,n)=1$ thì $(r,n)=1$. Nghĩa là có $\phi(n)$ hàng như vậy.

Tổng kết lại, ta có $\phi(m)\phi(n)$ phần tử trong bảng nguyên tố cùng nhau với mn. Do đó có điều phải chứng minh. □

Do tính chất này nên hàm Euler là hàm nhân tính.

Nhận xét. Cho số nguyên dương n. Khi đó

$$\sum_{d|n}\phi(d)=n$$

Chứng minh. Giả sử phân tích thừa số nguyên tố của n là

$$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\dots p_k^{e_k}$$

Khi đó mỗi ước d của n đều có dạng $p_1^{f_1}p_2^{f_2}\dots p_k^{f_k}$ với $0\le f_i\le e_i$ với $i=1,2,\dots,k$.

Như vậy

$$\sum_{d|n}\phi(d)=\sum_{0\le f_i\le e_i}\phi(p_1^{f_1}p_2^{f_2}\dots p_k^{f_k})=\phi(p_1^{f_1})\phi(p_2^{f_2}\dots\phi(p_k^{f_k}))$$

Một dạng biểu thức đơn giản là $(1+x)(1+y)=1+x+y+xy$ hay với 3 biến là $(1+x)(1+y)(1+y)=1+x+y+z+xy+yz+yz+xyz$. Tổng quát cho k biến ở trên thì biểu thức tương đương với

$$\begin{aligned}\sum_{0\le f_i\le e_i}\phi(p_1^{f_1})\phi(p_2^{f_2})\dots\phi(p_k^{f_k}) =&(1+\phi(p_1)+\phi(p_1^2)+\dots+\phi(p_1^{e_1}))\\ &\times(1+\phi(p_2)+\phi(p_2^2)+\dots+\phi(p_2^{e_2}))\\ &\times\dots\\ &\times(1+\phi(p_k)+\phi(p_k^2)+\dots+\phi(p_k^{e_k}))\end{aligned}$$

Ở đây ta rút gọn dễ dàng với $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} & 1 + \phi(p_i) + \phi(p_i^2) + \ldots + \phi(p_i^{e_i}) \\ =& 1 + p_i - 1 + p_i^2 - p_i + \ldots + p_i^{e_i} - p_i^{e_i - 1} \\ =& p_i^{e_i} \end{aligned}$$

Như vậy mỗi tổng $1 + \phi(p_i) + \ldots$ bằng chính $p_i^{e_i}$. Nhân chúng lại với nhau ta có lại n. □

Phần III

Toán trừu tượng

Chương 3

Lý thuyết nhóm

Câu chuyện bắt đầu vào một ngày khi mình vẫn còn sống ngày tháng tươi đẹp.

Cho tới khi học **lý thuyết nhóm** thì đời bớt đẹp hơn tí.

Để bắt đầu mình cần hiểu nhóm là gì.

3.1 Nhóm

Định nghĩa 3.1 (Nhóm (Group))**.** Một tập hợp G và toán tử 2 ngôi $\star$ trên G tạo thành một nhóm nếu:

1. Tồn tại phần tử $e \in G$ sao cho với mọi $g \in G$ thì $g \star e = e \star g = g$. Khi đó e được gọi là **phần tử đơn vị** của G.
2. Với mọi $g \in G$, tồn tại $g' \in G$ sao cho $g \star g' = g' \star g = e$. Khi đó g' được gọi là **phần tử nghịch đảo** của g.
3. Tính kết hợp: với mọi $a, b, c \in G$ thì $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.

Định nghĩa 3.2 (Nhóm Abel)**.** Nếu nhóm G có thêm tính giao hoán, tức là với mọi $a, b \in G$ thì $a \star b = b \star a$ thì G gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel

Lý thuyết nhóm thuộc toán trừu tượng, và nó trừu tượng thật. Tuy nhiên khi học về nó mình dần hiểu hơn về cách toán học vận hành và phát triển.

Ví dụ. Xét tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ và phép cộng 2 số nguyên.

1. Phần tử đơn vị là 0 vì với mọi $a \in \mathbb{Z}$ thì $a + 0 = 0 + a = a$
2. Với mọi $a \in \mathbb{Z}$, phần tử nghịch đảo là $-a$ vì $a + (-a) = (-a) + a = 0$
3. Phép cộng số nguyên có tính kết hợp do đó thỏa mãn điều kiện về tính kết hợp

Như vậy $(\mathbb{Z}, +)$ tạo thành nhóm. Lưu ý do phép cộng 2 số nguyên có tính giao hoán nên đây cũng là nhóm Abel.

Ví dụ. Xét tập hợp số hữu tỉ khác 0 $\mathbb{Q}^*$ và phép nhân 2 số hữu tỉ. Ta thấy do $a, b \in \mathbb{Q}^*$ nên tích $a \cdot b$ cũng khác 0, do đó cũng thuộc $\mathbb{Q}^*$.

1. Phần tử đơn vị là 1 vì với mọi $a \in \mathbb{Q}^*$ thì $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
2. Với mọi $a \in \mathbb{Q}^*$, phần tử nghịch đảo là $\frac{1}{a}$ vì $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
3. Phép nhân 2 số hữu tỉ có tính giao hoán do đó thỏa mãn điều kiện về tính kết hợp

Tương tự như nhóm $\mathbb{Z}, +$, nhóm $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ cũng là nhóm Abel.

3.2 Nhóm con

Định nghĩa 3.3 (Nhóm con (Subgroup))**.** Cho nhóm $(G, \star)$. Tập hợp $H \subset G$ được gọi là *nhóm con* của G nếu với mọi $a, b \in H$ thì $a \star b \in H$

Nghĩa là toán tử $\star$ đóng với các phần tử trong H.

Ví dụ. Xét nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ như trên. Ta xét tập con gồm các số chẵn của nó

$$2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

Ta thấy rằng tổng 2 số chẵn vẫn là số chẵn, nghĩa là phép cộng số nguyên đóng trên $2\mathbb{Z}$. Do đó $(2\mathbb{Z}, +)$ là nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$.

Như vậy mọi tập hợp có dạng $n\mathbb{Z}$ đều là nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$.

3.3 Coset

Định nghĩa 3.4 (Coset)**.** (tạm dịch - *lớp kề*) Cho nhóm G và nhóm con H của G.

Coset trái của H đối với phần tử $g \in G$ là tập hợp

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

Tương tự, coset phải là tập hợp

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

Từ đây nếu không nói gì thêm ta ngầm hiểu là coset trái.

Ví dụ với nhóm con $2\mathbb{Z}$ của $\mathbb{Z}$, ta thấy rằng

1. Nếu $g \in \mathbb{Z}$ là lẻ thì khi cộng với bất kì phần tử nào của $2\mathbb{Z}$ ta có số lẻ
2. Nếu $g \in \mathbb{Z}$ là chẵn thì khi cộng với bất kì phần tử nào của $2\mathbb{Z}$ ta có số chẵn

Nói cách khác, coset của $2\mathbb{Z}$ chia tập $\mathbb{Z}$ thành

$$0 + 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

$$1 + 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$$

Trực quan mà nói, 2 coset trên rời nhau.

Nhận xét. Hai coset bất kì hoặc rời nhau, hoặc trùng nhau.

Chứng minh. Nếu hai coset rời nhau thì không có gì phải nói. Ta chứng minh trường hợp còn lại.

Giả sử $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$. Như vậy tồn tại $h_1, h_2 \in H$ mà $g_1h_1 = g_2h_2$.

Do $h_1^{-1} \in H$, ta có $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$, nghĩa là $g_1 \in g_2H$.

Mà mọi phần tử trong g_1H có dạng g_1h nên $g_1h = g_2h_2h_1^{-1}h$. Do H là nhóm con của G nên $h_2h_1^{-1}h \in H$. Từ đó $g_1H \subseteq g_2H$. Tương tự ta cũng có $g_2H \subseteq g_1H$. Vậy $g_1H = g_2H$. □

3.4 Normal Subgroup

Định nghĩa 3.5 (Normal Subgroup)**.** (tạm dịch - *nhóm con chuẩn tắc*) Nhóm con H của G được gọi là *normal subgroup* nếu với mọi $g \in G$ ta có coset trái trùng với coset phải.

$$gH = Hg \; \forall g \in G$$

Nếu H là normal subgroup của G ta ký hiệu $H \triangleleft G$.

Định nghĩa 3.6 (Quotient Group)**.** (tạm dịch - *nhóm thương*, hay Factor Group - *nhóm nhân tử*). Với nhóm G và normal subgroup của nó là H. Quotient Group được ký hiệu là G/H và được định nghĩa là tập hợp các coset tương ứng với normal subgroup H.

$$G/H = \{gH : g \in H\}$$

Ta thấy rằng điều này chỉ xảy ra nếu H là normal subgroup.

Ví dụ. Với nhóm $\mathbb{Z}$ và normal subgroup của nó là $2\mathbb{Z}$. Ta thấy $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\}$

Chương 4

Lý thuyết vành

4.1 Vành

Định nghĩa 4.1 (Vành (Ring))**.** Cho tập hợp R, trên đó ta định nghĩa 2 toán tử *cộng* và *nhân*.

Khi đó, $(R, +, \times)$ tạo thành vành nếu

- $(R, +)$ là nhóm Abel
- $(R, \times)$ có tính kết hợp với phép nhân. Với mọi $a, b, c \in R$ thì $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- Tính phân phối của phép cộng và phép nhân. Với mọi $a, b, c \in R$ thì $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

Tóm lại, $(R, +, \times)$ là vành nếu nó là nhóm Abel đối với phép cộng và có tính kết hợp với phép nhân.

Lưu ý. Phép nhân ở đây không nhất thiết có phần tử đơn vị, hay phần tử nghịch đảo như trong định nghĩa nhóm. Trong trường hợp này $(R, \times)$ gọi là semigroup (nửa nhóm).

Định nghĩa 4.2 (Vành với đơn vị - Ring with identity)**.** Nếu có phần tử $1_R \neq 0_R \in R$ sao cho với mọi $r \in R$ ta đều có

$$1_R \times r = r \times 1_R = r$$

thì 1_R được gọi là phần tử đơn vị đối với phép nhân.

Ta thường ký hiệu 0_R là phần tử đơn vị của phép cộng $(R, +)$ và gọi là **phần tử trung hòa**. Khi đó phần tử nghịch đảo của phép cộng gọi là **phần tử đối** và được ký hiệu là $-a$ nếu là đối của phần tử a.

Và 1_R là **phần tử đơn vị** đối với phép nhân $(R, \times)$.

Định nghĩa 4.3 (Vành giao hoán - Commutative ring)**.** Nếu ta có tính giao hoán đối với phép nhân, nghĩa là với mọi $a, b \in$ đều thỏa

$$a \times b = b \times a$$

thì ta nói là vành giao hoán (không cần nói rõ là phép nhân vì phép cộng bắt buộc phải giao hoán theo định nghĩa vành rồi).

4.2 Ideal

Định nghĩa 4.4 (Ideal)**.** Xét vành $(R, +, \times)$. Một tập con I của R được gọi là *ideal trái* nếu

- $(I, +)$ là nhóm con của $(R, +)$
- với mọi $r \in R$, với mọi $x \in I$ thì $rx \in I$

Ta định nghĩa tương tự với ideal phải, khi đó $xr \in I$. Từ đây về sau nếu không nói gì thêm nghĩa là mình xét ideal trái.

Định nghĩa 4.5 (Ideal chính - Principal ideal)**.** Nếu $I = aR$ với a là phần tử nào đó trong R thì I được gọi là *principal ideal*.

Nói cách khác, nếu có một phần tử trong R "sinh" ra được I thì I là principal.

Định nghĩa 4.6 (Ideal cực đại - Maximal ideal)**.** Nếu I là một ideal của R và không tồn tại tập con I' mà $I \subset I' \subset R$ (tập con thực thụ) thì I được gọi là maximal ideal.

Hệ quả 4.1. Xét vành số nguyên $\mathbb{Z}$. Khi đó mọi ideal của $\mathbb{Z}$ đều là principal.

Chứng minh. Giả sử ideal I của $\mathbb{Z}$ có phần tử dương nhỏ nhất là n. Theo định nghĩa của ideal thì với mọi $q \in \mathbb{Z}$ ta có $qn \in I$.

Nếu phần tử $a \in I$, theo phép chia Euclid ta có $a = qn + r$ với $0 \leq r < n$, mà $a \in I$ và $qn \in I$ nên $r = a - qn \in I$. Tuy nhiên phần tử dương nhỏ nhất thuộc I là n, do đó $r = 0$.

Nói cách khác mọi phần tử $a \in I$ đều có dạng qn với $q \in \mathbb{Z}$.

Vậy mọi ideal đều là principal. □

Hệ quả 4.2. Ideal I của $\mathbb{Z}$ là maximal khi và chỉ khi $I = n\mathbb{Z}$ với n là số nguyên tố.

Chứng minh. Ta chứng minh chiều thuận, chiều ngược tương tự. Sử dụng phản chứng, ta giả sử n là hợp số. Khi đó $n = n_1 n_2$ ($n_1 \geq n_2 > 1$).

Khi đó $n\mathbb{Z} \subset n_1\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, suy ra ideal không phải maximal. Ta có điều phải chứng minh. □

Chương 5

Lý thuyết trường

5.1 Trường

Định nghĩa 5.1 (Trường - Field)**.** Cho tập hợp F và hai toán tử 2 ngôi trên F là phép cộng $+$ và phép nhân $\times$. Khi đó $(F, +, \times)$ là trường nếu

- $(F, +, \times)$ là vành giao hoán với đơn vị
- Với mọi phần tử $f \neq 0_F$, tồn tại nghịch đảo f^{-1} của f đối với phép nhân. Nghĩa là $f \times f^{-1} = f^{-1} \times f = 1_F$

Nói cách khác, $(F, \times)$ là nhóm Abel. Trên trường ta thực hiện được 4 phép tính cộng, trừ, nhân, chia.

Ví dụ. Tập hợp số thực $\mathbb{R}$ là một trường. Tập hợp các số phức $\mathbb{C}$ là một trường. Tập hợp các số hữu tỷ dạng $a + b\sqrt{2}$ cũng là một trường.

Những trường trên được gọi là **trường vô hạn** vì có vô số phần tử.

Ngược lại, chúng ta cũng có các **trường hữu hạn**.

Định lý 5.1. Gọi R là vành giao hoán với đơn vị. Khi đó, nếu I là ideal của R thì R/I là trường khi và chỉ khi I là maximal ideal.

Chứng minh. Ta chứng minh điều kiện cần và điều kiện đủ.

1. Điều kiện cần. Ta có I là maximal ideal. Ta thấy rằng $a + I \neq 0 \Leftrightarrow a \notin I$. Vì nếu $a \in I$ thì tồn tại $-a \in I$. Theo định nghĩa vành thì aR cũng là ideal nên $I + aR$ là ideal, mà $a \notin I$ và $a \in I + aR$ suy ra $I \subset I + aR$. Ta lại có I là maximal nên $I + aR = R$, do đó tồn tại $n \in I$ và $b \in R$ sao cho $n + ab = 1$. Tóm lại là tồn tại nghịch đảo của phép nhân, do đó R/I là trường.
2. Điều kiện đủ. Với R/I là trường. Ta giả sử I không là maximal ideal. Khi đó tồn tại I' sao cho $I \subset I' \subset R$. Khi đó tồn tại phần tử $a \in I'$ và $a \notin I$ mà $a + I \neq 0$. Do đó $(a + I)(b + I) = 1 + I$ suy ra tồn tại $n \in I \subset I'$ sao cho $ab = 1 + n$. Do $a, b \in I'$ nên $1 \in I'$, từ đó $1 \in R$ nên I' không phải maximal. Ta có điều phải chứng minh.

□

5.2 Trường hữu hạn $GF(p)$

Cho p là số nguyên tố. Khi đó tập hợp các số dư khi chia cho p cùng với phép cộng và nhân modulo p tạo thành trường.

Chứng minh. Xét tập hợp các số dư khi chia cho p là

$$S = \{0, 1, \ldots, p-2, p-1\}$$

Ta thấy rằng với mọi $a, b \in S$ thì $a + b \pmod p$ và $a \cdot b \pmod p$ đều thuộc S.

- Vì $0 + a = a + 0 = a \pmod p$ với mọi $a \in S$ nên 0 là phần tử đơn vị của phép cộng.
- Với mọi $a \in S$, ta có $(p - a) + a = a + (p - a) \equiv 0 \pmod p$ nên phần tử nghịch đảo của a đối với phép cộng là $p - a \in S$.
- Phép cộng modulo có tính kết hợp
- Phép cộng modulo có tính giao hoán

Như vậy $(S, +)$ là nhóm Abel.

Tiếp theo, ta thấy rằng phép cộng và nhân có tính phân phối trên modulo. Đồng thời phép nhân modulo cũng có tính kết hợp. Do đó $(S, +, \cdot)$ là vành.

- Phần tử đơn vị của phép nhân là 1
- Phép nhân modulo có tính giao hoán
- Do mọi phần tử thuộc S đều nguyên tố cùng nhau với p nên luôn tồn tại nghịch đảo của phần tử khác 0 trong S

Kết luận: $(S, +, \cdot)$ là trường. □

Ta thường ký hiệu trường này là $GF(p)$ (GF là viết tắt của Galois Field để tưởng nhớ người có đóng góp quan trọng trong lý thuyết nhóm).

Trong mật mã học $GF(p)$ thường được sử dụng vì những tính toán của 2 quá trình ngược nhau là mã hóa và giải mã phải cho ra đúng giá trị ban đầu. Nói cách khác việc tính toán không được vượt ra ngoài một tập hợp nào đó. Việc lựa chọn trường $GF(p)$ cũng từ đó mà hiệu quả.

Tuy nhiên để đảm bảo an toàn thông tin, số nguyên tố p được chọn khá lớn (khoảng 256 bit). Việc này làm chậm tốc độ tính toán, cài đặt phức tạp (đa số các ngôn ngữ lập trình chỉ hỗ trợ kiểu dữ liệu cơ bản 2, 4, 8 byte, nên cần định nghĩa kiểu dữ liệu mới để tính toán trên 32 byte).

Chúng ta có một ý tưởng ổn áp hơn ở phần sau.

5.3 Trường hữu hạn $GF(p^n)$

Xét các đa thức với hệ số nguyên

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Ta thấy rằng phép cộng và nhân 2 đa thức tạo thành một vành giao hoán với đơn vị. Thêm nữa vành này có vô số phần tử. Ta cần một phương án để số phần tử là hữu hạn, và đồng thời là trường.

Với p là số nguyên tố và n là số nguyên dương. Mình xét các đa thức có bậc tối đa là $n-1$ với hệ số nằm trong tập hợp các số dư khi chia cho p. Như vậy mình có p^n đa thức như vậy.

Ví dụ. Với $p = 3$ và $n = 2$. Khi đó các đa thức có thể có là $0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2$

Tương tự với việc modulo cho một số nguyên tố, ở đây mình xét phép cộng và nhân trên modulo một đa thức tối giản (irreducible polynomial) có bậc n (vì khi modulo một đa thức bậc bất kì cho đa thức bậc n ta có đa thức bậc nhỏ hơn n). Đồng thời hệ số của đa thức từ phép cộng và nhân cũng được modulo p (nằm trong $GF(p)$).

Với trường hợp $p = 3$ và $n = 2$ ở trên mình có thể chọn đa thức modulo là $m(x) = x^2 + 2x + 2$. Khi đó bảng phép nhân (phép cộng khá đơn giản nên mình không viết) 2 đa thức bậc nhỏ hơn 2 trong modulo $m(x)$ là

Ta thấy rằng bảng phép nhân đối xứng qua đường chéo chính. Điều này chứng minh phép nhân có tính giao hoán. Thêm nữa ở mỗi hàng hoặc cột khác 0 đều có 9 phần tử khác nhau.

	0	1	2	x	$x+1$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	x	$x+1$
2	0	2	1	$2x$	$2x+2$
x	0	$2x$	$x+1$	$2x$	$2x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$2x+2$	$2x+1$	2
$x+2$	0	$x+2$	$2x+1$	1	x
$2x$	0	$2x$	x	$2x+2$	$x+2$
$2x+1$	0	$2x+1$	$x+2$	2	$2x$
$2x+2$	0	$2x+2$	$x+1$	$x+2$	1

(a) Nửa đầu bảng nhân

	$x+2$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$
0	0	0	0	0
1	$x+2$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$
2	$2x+1$	x	$x+2$	$x+1$
x	1	$2x+2$	2	$x+2$
$x+1$	x	$x+2$	$2x$	1
$x+2$	$2x+2$	2	$x+1$	$2x$
$2x$	2	$x+1$	1	$2x+1$
$2x+1$	$x+1$	1	$2x+2$	x
$2x+2$	$2x$	$2x+1$	x	2

(b) Nửa sau bảng nhân

Bảng 5.1: Bảng nhân trên $GF(3^2)$

Chương 6

Tác động nhóm

Tác động nhóm (Group Action) cho phép chúng ta đếm những cấu hình tổ hợp mà việc vét cạn rồi loại bỏ sẽ tốn nhiều công sức cũng như sai sót.

6.1 Tác động nhóm

Cho tập hợp M và nhóm G. Ta nói G *tác động trái* lên M với ánh xạ:

$$\alpha : G \times M \to M$$

thỏa mãn 2 tiên đề sau:

- Identity: $\alpha(e, m) = m$ với mọi $m \in M$
- Compatibility: $\alpha(g, \alpha(h, m)) = \alpha(gh, x)$

Ta thường ký hiệu $\alpha(g, m)$ bởi $g(m)$ hay thậm chí đơn giản hơn là gm. Ký hiệu gm sẽ được sử dụng từ đây về sau.

Khi đó 2 tiên đề trên tương đương với:

- Identity: $em = m$ với mọi $m \in M$

- Compatibility: $g(hm) = (gh)m$ với mọi $m \in M$ và $g, h \in G$

Định nghĩa 6.1 (Stabilizer)**.** (tạm dịch - *nhóm con ổn đinh*). Với phần tử $m \in M$, tập hợp các phần tử $g \in G$ mà $gm = m$ được gọi là nhóm con ổn định của nhóm G. Ta ký hiệu

$$G_m = \{g \in G : gm = m\}$$

Định nghĩa 6.2 (Orbit)**.** (tạm dịch - *quỹ đạo*) của phần tử $m \in M$ là tập hợp

$$G(m) = \{gm : g \in G\}$$

Nhận xét. Hai orbit của hai phần tử bất kì hoặc rời nhau, hoặc trùng nhau.

Chứng minh. Giả sử ta có $m_1, m_2 \in M$ mà $G(m_1) \cap G(m_2) \neq \emptyset$.

Khi đó tồn tại $g_1, g_2 \in G$ để $g_1 m_1 = g_2 m_2$. Suy ra $m_1 = g_1^{-1} g_2 m_2$.

Mà mọi phần tử trong $G(m_1)$ có dạng gm_1 nên $gm_1 = g g_1^{-1} g_2 m_2$ nên $G(m_1) \subseteq G(m_2)$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $G(m_2) \subseteq G(m_1)$ nên $G(m_1) \equiv G(m_2)$. □

Hệ quả 6.1. Tập hợp M là giao của các orbit rời nhau. Giả sử ta có t orbit rời nhau $G(m_1), G(m_2), \ldots, G(m_t)$ thì

$$M = G(m_1) \cup G(m_2) \cup \ldots \cup G(m_t)$$

Ví dụ. Cho nhóm $\mathcal{S}_3$ có 6 phần tử $(1)(2)(3)$, $(1)(2,3)$, $(2)(1,3)$, $(3)(1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$.

Xét tập hợp $M = \{1, 2, 3\}$. Khi đó, xét từng hoán vị trên, ta có:

$$G_1 = \{(1)(2)(3), (1)(2,3)\}$$

và

$$G(1) = \{1, 2, 3\}$$

Ta nhận thấy $G(1) = G(2) = G(3)$, và $|G| = 6 = |G_1| \cdot |G(1)|$

Hay nói cách khác, $|G(m)| = [G : G_m]$ với G_m là stabilizer của phần tử m và $[G : G_m]$ là subgroup index của $G_m \subset G$, và bằng $\frac{|G|}{|G_m|}$ nếu là nhóm hữu hạn.

Định nghĩa 6.3. Hai phần tử $m, n \in M$ được gọi là *có quan hệ* với nhau dưới tác động của nhóm G nếu tồn tại phần tử $g \in G$ sao cho $m = gn$. Ta ký hiệu là $m\tilde{G}n$.

Nhận xét. Quan hệ được định nghĩa như trên là quan hệ tương đương.

Chứng minh. Ta cần chứng minh quan hệ trên có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

1. Tác động nhóm phải thỏa mãn $em = m$ với mọi $m \in M$. Do đó có tính phản xạ.

2. Với mọi m, n mà $m\tilde{G}n$ thì tồn tại $g \in G$ mà $m = gn$. Do tồn tại $g^{-1} \in G$, nhân cho 2 vế ta có $g^{-1}m = n$, nghĩa là $n\tilde{G}m$. Vậy quan hệ này có tính đối xứng.

3. Nếu $m\tilde{G}n$ và $n\tilde{G}p$ thì tồn tại 2 phần tử $g_1, g_2 \in G$ mà $m = g_1 n$ và $n = g_2 p$. Suy ra $m = g_1 g_2 p$, tương đương $m\tilde{G}p$, do đó có tính bắc cầu. □

6.2 Bổ đề Burnside

Các trạng thái khác nhau của tập hợp M có thể là *tương đương* nhau nếu chúng nằm trong cùng lớp tương đương dưới tác động của nhóm G.

Bổ đề Burnside cho phép chúng ta tính được số trạng thái khác nhau (hay cấu hình khác nhau) mà chúng ta dễ bị nhầm lẫn hoặc bỏ sót trong quá trình vét cạn.

Bài tập về bổ đề Burnside và định lý Polya được tham khảo tại [1].

Bổ đề 6.1 (Bổ đề Burnside)**.** Với nhóm G tác động lên tập hợp M, ta có:

$$t_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

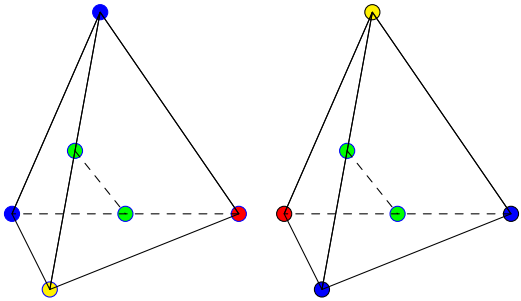
trong đó, t_G là số lớp tương đương của tập M dưới tác động của nhóm G

$|M^g|$ là số điểm bất động của tập M dưới tác động của phần tử g, nghĩa là $M^g = \{m \in M : gm = m\}$.

6.3 Ví dụ bài toán đếm sử dụng bổ đề Burnside

Ví dụ. Cho hình tứ diện đều. Ta tô 4 đỉnh của nó bằng 3 màu xanh, đỏ, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tô như vậy?

Ta cần lưu ý một điều, 2 cách tô là tương đương nhau (giống nhau) nếu tồn tại một phép quay các đỉnh biến cách tô này thành cách tô kia.



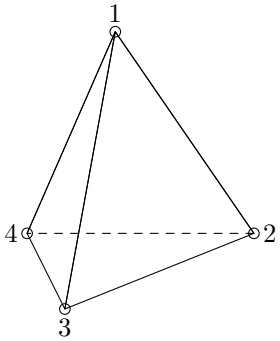
Hình 6.1: Phép quay trục tạo bởi trung điểm hai cạnh đối nhau

Như hình trên ta thấy nếu chọn trục quay là đường thẳng nối trung điểm 2 cạnh đối diện (2 điểm xanh lá) thì đỉnh trên và đỉnh

dưới đổi chỗ cho nhau (xanh và vàng), đỉnh trái và đỉnh phải đổi chỗ cho nhau (xanh và đỏ).

Ta giải bài này như sau:

Đầu tiên ta đánh số các đỉnh của tứ diện (như hình)



Hình 6.2: Đánh số hình

Ta có 3 trường hợp biến đổi sau:

Trường hợp 1. Giữ nguyên 1 đỉnh và trục quay là đường thẳng đi qua đỉnh đó và tâm của mặt đối diện.

Khi đó phép quay (ngược chiều đồng hồ) tương ứng hoán vị $(1)(2,3,4)$ (quay 60 độ) và $(1)(2,4,3)$ (quay 120 độ).

Do ta chọn 1 đỉnh cố định thì ta có 4 cách chọn, và với mỗi cách chọn đỉnh cố định ta có thể quay 2 cách nên ta có tổng là 8 hoán vị.

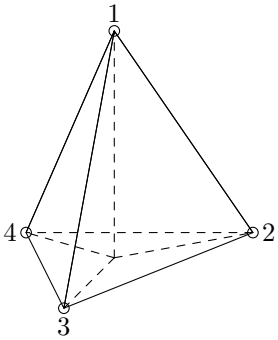
Trường hợp 2. Ta chọn trung điểm 2 cạnh đối nhau và nối lại thành trục quay như hình trong ví dụ. Khi đó tương ứng với hoán vị $(1,4)(2,3)$.

Ta có $\frac{C_4^2}{2!} = 3$ hoán vị.

Trường hợp 3. Hoán vị đồng nhất $(1)(2)(3)(4)$.

Tóm lại, tập hợp M ở đây là tập hợp 4 đỉnh của tứ diện, và nhóm tác động lên M là nhóm con 12 phần tử của $\mathcal{S}_4$.

Như vậy, ví dụ với hoán vị $(1)(2,3,4)$, nếu ta muốn sau phép



Hình 6.3: Trường hợp 1

quay giữ nguyên trạng thái (hay nói cách khác là tìm M^g) thì ta tô màu đỉnh 1 tùy ý, đỉnh 2-3-4 chung màu (cũng tùy ý).

Suy ra ta có $3 \cdot 3$ cách tô. Tương tự với các hoán vị dạng $(1,4)(2,3)$.

Như vậy $t_G = \frac{1}{12}(1 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^2) = 15$ cách tô màu khác nhau.

Tổng quát, nếu có k màu thì số lớp tương đương là

$$t_G = \frac{1}{12}(1 \cdot k^4 + 8 \cdot k^2 + 3 \cdot k^2) = \frac{1}{12}(k^4 + 11k^2)$$

6.4 Chỉ số chu trình

Với mỗi hoán vị trong tập G (theo định lý Cayley thì mọi nhóm hữu hạn đều isomorphism với nhóm con nào đó của nhóm hoán vị), ta viết dưới dạng các chu trình độc lập

$$\underbrace{(g_1)(g_2)\dots(g_{t_1})}_{t_1}\underbrace{(g_{j_1}g_{j_2})(g_{j_3}g_{j_4})\dots}_{t_2}$$

Nếu ta viết hoán vị dưới dạng các chu trình rời nhau, ta gọi

t_1 là số chu trình có độ dài 1
t_2 là số chu trình có độ dài 2
... tương tự
t_n là số chu trình có độ dài n

Khi đó, chỉ số chu trình của hoán vị ứng các biến $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là

$$I_g(z_1, z_2, , \ldots, z_n) = z_1^{t_1} z_2^{t_2} \ldots z_n^{t_n}$$

Ví dụ. Xét hoán vị $(1,2,3)(4)(5)(6,7) \in \mathcal{S}_7$

Ta có 2 chu trình độ dài 1, 1 chu trình độ dài 2 và 1 chu trình độ dài 3. Không có chu trình độ dài 4, 5, 6, 7.

Do đó chỉ số chu trình là

$$I_g(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 z_2^1 z_3^1$$

Nhận xét. Bất kì hoán vị nào thuộc $\mathcal{S}_n$ đều thỏa $1 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 + \ldots + n \cdot t_n = n$.

Định nghĩa 6.4 (Cyclic index)**.** (tạm dịch - *chỉ số chu trình*) của nhóm G là

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} I_g(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

Nhìn lại ví dụ về tứ diện bên trên, các đỉnh nằm trong cùng chu trình cần được tô cùng màu. Như vậy mỗi z_i tương ứng với một màu.

Từ đó, với ví dụ trên

$$P_G(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{12}\left(z_1^4 + 8 z_1 z_3 + 3 z_2^2\right)$$

Cho mỗi $z_i = 3$ ta có kết quả phép tính theo bổ đề Burnside.

6.5 Định lý Polya

Định lý Polya là một mở rộng cho bổ đề Burnside, cho phép chúng ta đếm số lớp tương đương thỏa mãn điều kiện nhất định (về số lượng phần tử nhất định nhận trạng thái nhất định).

Ví dụ với hình tứ diện như trên nhưng ta thêm điều kiện tô 2 đỉnh màu vàng, 1 đỉnh màu đỏ và 1 đỉnh màu xanh (không tô tổng quát nữa).

Ta ký hiệu tập R là tập hợp các trạng thái có thể nhận của mỗi phần tử $m \in M$.

$$R = \{r_1, r_2, \ldots, r_c\}$$

Ở ví dụ trên thì $R = \{\text{đỏ}, \text{xanh}, \text{vàng}\}$.

Ta thay mỗi z_i trong chỉ số chu trình bằng tổng $\sum_{r \in R} r^i$.

Ví dụ. Giả sử ta tô màu 4 đỉnh tứ diện với 2 màu $R = \{r_1, r_2\}$.

Với z_1 ta thay bằng $r_1 + r_2$
Với z_2 ta thay bằng $r_1^2 + r_2^2$
Với z_3 ta thay bằng $r_1^3 + r_2^3$
Khi đó P_G tương đương với

$$\frac{1}{12}\left[(r_1 + r_2)^4 + 8 \cdot (r_1 + r_2)(r_1^3 + r_2^3) + 3 \cdot (r_1^2 + r_2^2)^2\right]$$

Khai triển ra (lưu ý là ở đây không có tính giao hoán phép nhân)

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2)^4 =& r_1r_1r_1r_1 + r_1r_1r_1r_2 + r_1r_1r_2r_1 + r_1r_1r_2r_2 \\ &+ r_1r_2r_1r_1 + r_1r_2r_1r_2 + r_1r_2r_2r_1 + r_1r_2r_2r_2 \\ &+ r_2r_1r_1r_1 + r_2r_1r_1r_2 + r_2r_1r_2r_1 + r_2r_1r_2r_2 \\ &+ r_2r_2r_1r_1 + r_2r_2r_1r_2 + r_2r_2r_2r_1 + r_2r_2r_2r_2\end{aligned}$$

Mình thấy rằng có 16 cấu hình khác nhau tương ứng 16 cách tô 2 màu cho 4 đỉnh. Tương tự

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2)(r_1^3 + r_2^3) &= r_1^4 + r_1r_2^3 + r_2r_1^3 + r_2^4 \\ &= r_1r_1r_1r_1 + r_1r_2r_2r_2 + r_2r_1r_1r_1 + r_2r_2r_2r_2\end{aligned}$$

và cuối cùng

$$\begin{aligned}(r_1^2 + r_2^2)^2 &= r_1^4 + r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_1^2 + r_2^4 \\ &= r_1 r_1 r_1 r_1 + r_1 r_1 r_2 r_2 + r_2 r_2 r_1 r_1 + r_2 r_2 r_2 r_2\end{aligned}$$

Việc không có tính giao hoán với phép nhân làm biểu thức cồng kềnh và phức tạp. Do đó mình thêm một tập hợp W là vành giao hoán, và xét ánh xạ $w : R \mapsto W$ với $w(r_i) = w_i$.

Khi đó nếu thay r_i bởi w_i vào bên trên biểu thức sẽ rất đẹp

$$P_G(w_1, w_2) = \frac{1}{12}\left[(w_1 + w_2)^4 + 8(w_1 + w_2)(w_1^3 + w_2^3) + 3(w_1^2 + w_2^2)^2\right]$$

Khai triển và thu gọn ta có

$$\begin{aligned}P_G(w_1, w_2) &= \frac{1}{12}\left[12w_1^4 + 12w_1^3 w_2 + 12w_1^2 w_2^2 + 12w_1 w_2^3 + 12w_2^4\right] \\ &= w_1^4 + w_1^3 w_2 + w_1^2 w_2^2 + w_1 w_2^3 + w_2^4\end{aligned}$$

Ở đây, định lý Polya nói rằng, số mũ của w_i thể hiện số lượng phần tử của tập M nhận giá trị r_i, và hệ số trước mỗi toán hạng là số lớp tương đương tương ứng với số lượng phần tử của tập M nhận các giá trị r_i.

Nói cách khác:

- có 1 lớp tương đương mà 4 đỉnh nhận màu r_1
- có 1 lớp tương đương mà 3 đỉnh nhận màu r_1 và 1 đỉnh nhận màu r_2
- có 1 lớp tương đương mà 2 đỉnh nhận màu r_1 và 2 đỉnh nhận màu r_2
- có 1 lớp tương đương mà 1 đỉnh nhận màu r_1 và 3 đỉnh nhận màu r_2
- cuối cùng là 1 lớp tương đương mà 4 đỉnh nhận màu r_2.

Quay lại vấn đề tô 4 đỉnh tứ diện với 3 màu xanh, đỏ, vàng. Tìm số cách tô 2 đỉnh màu vàng, 1 đỉnh màu đỏ và 1 đỉnh màu xanh.

Đặt $w(\text{vàng}) = x$, $w(\text{đỏ}) = y$ và $w(\text{xanh}) = z$
Ta có

$$P_G = \frac{1}{12}\left[(x+y+z)^4 + 8\cdot(x+y+z)(x^3+y^3+z^3) + 3\cdot(x^2+y^2+z^2)^2\right]$$

Như vậy đề bài tương ứng việc tìm hệ số của hạng tử x^2yz trong biểu thức trên. Mình tính ra kết quả là 1.

Phần IV

Hình học

Chương 7

Phép biến hình

Trong thực tế chúng ta hay gặp các vấn đề về việc di dời một hình nào đó sang một vị trí khác trong mặt phẳng, không gian và phải đảm bảo giữ nguyên một số quan hệ nhất định. Trong đó cơ bản nhất và được ứng dụng rộng rãi là phép dời hình và phép đồng dạng.

7.1 Phép dời hình

Định nghĩa 7.1 (Phép dời hình)**.** Phép dời hình từ hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$ là một ánh xạ f biến mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ thành điểm thuộc hình $\mathcal{H}'$ sao cho khoảng cách giữa 2 điểm bất kì trong $\mathcal{H}$ bảo toàn khi qua $\mathcal{H}'$.

Nói cách khác, với mọi điểm $A, B \in \mathcal{H}$, ánh xạ f biến A thành A' và B thành B' $(A', B' \in \mathcal{H}')$ thì $A'B' = AB$.

Chúng ta thường thấy việc dời hình theo vector (dời theo 1 hướng nhất định), đối xứng qua trục, đối xứng qua tâm, quay quanh tâm hoặc trục nào đó.

7.2 Phép dời hình theo vector

Phép dời hình theo vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ biến điểm A thành điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$.

Dễ thấy đây là phép dời hình vì với mọi A, B biến thành A', B' ta có $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$ mà ta có $\overrightarrow{A'A} = -\vec{v} = -\overrightarrow{BB'}$ nên $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Vector bằng nhau thì độ dài cũng bằng nhau. Ta có điều phải chứng minh.

7.3 Phép đối xứng qua tâm cố định

Cho điểm cố định O. Phép đối xứng tâm O biến điểm A thành điểm A' sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$. Nói cách khác O là trung điểm đoạn thẳng AA'.

7.4 Phép quay quanh tâm cố định

Cho điểm cố định O. Phép quay (mặc định là ngược chiều đồng hồ) quanh tâm O theo một góc cố định φ biến điểm A thành điểm A' sao cho $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \varphi$.

Trên mặt phẳng chúng ta có thể biểu diễn phép quay dưới hệ tọa độ như sau.

Giả sử vector $\overrightarrow{OA}$ có độ dài là r và hợp với trục Ox một góc α.

Khi đó, giả sử tọa độ của $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ thì ta có

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

Nếu ta quay vector này quanh gốc tọa độ, ngược chiều kim đồng hồ một góc φ thì thực ra góc (mới) hợp bởi vector $\overrightarrow{OA'}$ và trục Ox

là $\alpha + \varphi$. Do đó

$$x' = r\cos(\alpha + \varphi)$$
$$y' = r\sin(\alpha + \varphi)$$

Khi khai triển ra,

$$x' = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi = y\cos\varphi + x\sin\varphi$$

Như vậy viết dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dễ thấy, phép quay bảo toàn khoảng cách từ tâm O tới điểm đó. Nghĩa là $OA = OA'$.

Chương 8

Ba đường Conic

Ba đường Conic bao gồm ellipse, hyperbol và parabol.

8.1 Ellipse

Định nghĩa 8.1 (Ellipse)**.** Đường ellipse là tập hợp các điểm sao cho tổng khoảng cách từ nó tới 2 điểm cố định là 1 hằng số.

Nghĩa là, với 2 điểm cố định F_1, F_2, tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ với a là hằng số tạo thành đường ellipse.

Ở trên hệ tọa độ, nếu ta chọn F_1 và F_2 nằm trên Ox và đối xứng qua Oy, tức là $F_1 = (-c, 0)$ và $F_2 = (c, 0)$, thì các điểm $M = (x, y)$ nằm trên ellipse thỏa

$$MF_1 + MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

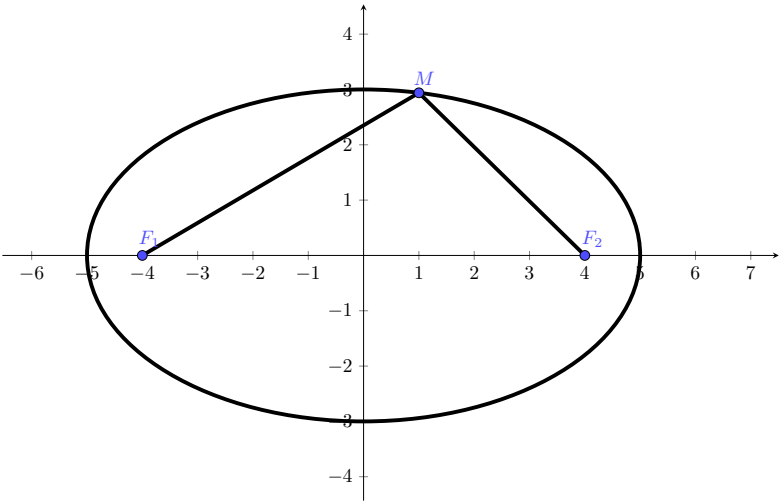
Tương ứng với biển đổi thành phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Đặt $b^2 = a^2 - c^2$ thì phương trình của ellipse trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Phương trình này gọi là **phương trình chính tắc**.



Hình 8.1: Ellipse với phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Trong phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

thì a là khoảng cách từ tâm tới 2 biên trái hoặc phải, nên a là **độ dài bán trục lớn**.

Tương tự, b là **độ dài bán trục nhỏ** (khoảng cách từ tâm tới 2 biên trên dưới).

Từ cách đặt $b^2 = a^2 - c^2$ tương đương $c^2 = a^2 - b^2$ thì c gọi là **tiêu cự** của ellipse.

Các điểm F_1, F_2 gọi là **tiêu điểm** của ellipse.

Với ví dụ trên $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ thì $a = 5, b = 3$. Suy ra $c = 4$ (lưu ý là $a, b > 0$ và $c \geq 0$).

Các đỉnh nằm ở các tọa độ $(-a, 0), (a, 0), (0, b), (0, -b)$. Các tiêu điểm nằm ở $(-c, 0), (c, 0)$.

Nhận xét. Khi $c = 0$, tức là 2 tiêu điểm trùng nhau, ta có đường tròn.

Tâm sai của ellipse là $e = \frac{c}{a} < 1$

8.2 Hyperbol

Định nghĩa 8.2 (Hyperbol)**.** Đường hyperbol là tập hợp các điểm sao cho giá trị tuyết đối hiệu số khoảng cách từ nó tới 2 điểm cố định là 1 hằng số.

Nghĩa là, với 2 điểm cố định F_1, F_2, tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ với a là hằng số tạo thành đường hyperbol.

Ở trên hệ tọa độ, nếu ta chọn F_1 và F_2 nằm trên Ox và đối xứng qua Oy, tức là $F_1 = (-c, 0)$ và $F_2 = (c, 0)$, thì các điểm $M = (x, y)$ nằm trên hyperbol thỏa

$$|MF_1 - MF_2| = |\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$$

Tương ứng với biển đổi thành phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Đặt $b^2 = a^2 - c^2$ thì phương trình của hyperbol trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Đường hyperbol cắt trục Ox tại 2 điểm $A_1 = (-a, 0)$ và $A_2 = (a, 0)$.

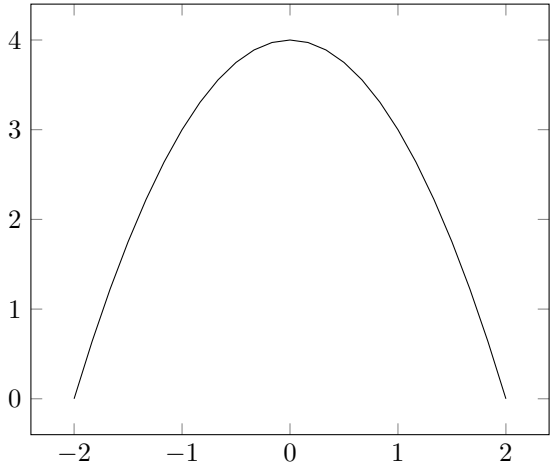
Tiêu điểm của hyperbol ở $F_1 = (-c, 0)$ và $F_2 = (c, 0)$.

Đường hyperbol có 2 tiệm cận là đường thẳng $y = \frac{b}{a}x$ và $y = -\frac{b}{a}x$.

Tâm sai của hyperbol là $e = \frac{c}{a} > 1$.

8.3 Parabol

Định nghĩa 8.3 (Parabol)**.** Đường parabol là tập hợp các điểm cách đều một điểm cố định và một đường thẳng cố định.



Hình 8.2: Parabol với phương trình $y = -x^2 + 4$

Nghĩa là, với 1 điểm cố định F và đường thẳng cố định (d), parabol là tập hợp các điểm M sao cho $MF = d(M, d)$ với $d(M, d)$ là khoảng cách từ M tới đường thẳng (d).

Phép dời tọa độ cho phép ta dời một hình parabol có đỉnh ở bất kì điểm nào về gốc tọa độ.

Tức là, không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét các parabol dạng $y = ax^2$ là đủ.

Điểm cố định ở trên được gọi là **tiêu điểm**. Đường thẳng cố định ở trên gọi là **đường chuẩn**.

Parabol có tính đối xứng nên tiêu điểm nằm trên Oy. Đặt tọa độ của nó là $F = (0, f)$.

Đường chuẩn nằm ngang nên ta có parabol là các điểm $M = (x, y)$ sao cho

$MF = \sqrt{x^2 + (y - f)^2}$ và $d(M, d) = y + f$ (trường hợp M trùng với đỉnh nên điều kiện của parabol xảy ra tương đương với M cách đều tiêu điểm và đường chuẩn, nghĩa là đường chuẩn có dạng $y = -f$).

Do đó $\sqrt{x^2 + (y - f)^2} = y + f$. Bình phương và biến đổi ta thu gọn được

$$f = \frac{1}{4a}$$

Thường thì ta đặt $p = f$, khi đó phương trình parabol trở thành

$$x^2 = 4py$$

Đây là dạng chính tắc của parabol với trục đối xứng dọc.

Tâm sai của parabol là $e = \frac{c}{a} = 1$.

Phần V

Đại số tuyến tính

Chương 9

Nhắc lại các khái niệm cơ bản

9.1 Hạng của ma trận

Định nghĩa 9.1 (Hạng của ma trận)**.** Cho ma trận $\boldsymbol{M}_{m\times n}$ có m hàng và n cột. **Hạng** của ma trận $\boldsymbol{M}$ là cấp của ma trận vuông con lớn nhất của $\boldsymbol{M}$ có định thức khác 0.

Ký hiệu. Hạng (hay rank) của ma trận $\boldsymbol{M}$ được ký hiệu là $r = \text{rank}(\boldsymbol{M})$

Nhận xét. Nếu r là hạng của ma trận $\boldsymbol{M}_{m\times n}$ thì $r \leq \min(m, n)$

9.2 Tổ hợp tuyến tính

Xét tập hợp các vector $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 9.2 (Tổ hợp tuyến tính)**.** Với vector $\boldsymbol{x}$ bất kì thuộc $\mathbb{R}$, nếu tồn tại các số thực $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_d\boldsymbol{v}_d$$

thì $\boldsymbol{x}$ được gọi là **tổ hợp tuyến tính** của các vector $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$.

Ta thấy rằng vector không $\mathbf{0}$ là tổ hợp tuyến tính của mọi tập các vector $\boldsymbol{v}_i$.

Bây giờ ta xét tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_d \boldsymbol{v}_d = \mathbf{0}$$

Định nghĩa 9.3 (Độc lập tuyến tính)**.** Tập hợp các vector $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_d$ được gọi **độc lập tuyến tính** nếu chỉ có duy nhất trường hợp $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_d = 0$ thỏa tổ hợp tuyến tính trên.

Định nghĩa 9.4 (Phụ thuộc tuyến tính)**.** Tập các vector là phụ thuộc tuyến tính nếu không độc lập tuyến tính. Nói cách khác tồn tại ít nhất 1 phần tử $\alpha_i \neq 0$.

9.3 Không gian vector

Xét tập hợp các vector $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$.

Ta định nghĩa hai phép tính cộng và nhân trên các vector này sao cho

- Phép cộng: Với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ thì $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$
- Phân nhân vô hướng: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$

Nói cách khác, phép cộng 2 vector và phép nhân vô hướng 1 số với vector cho kết quả vẫn nằm trong không gian vector đó.

Đồng thời, phép cộng và phép nhân vô hướng phải thỏa mãn các tính chất sau

1. Tính giao hoán với phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
2. Tính kết hợp với phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$
3. Phần tử đơn vị của phép cộng: tồn tại vector không $\mathbf{0}$ sao cho với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$

4. Phần tử đối của phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, tồn tại phần tử $\boldsymbol{x'} \in \mathcal{V}$ sao cho $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{0}$
5. Phần tử đơn vị của phép nhân vô hướng: tồn tại số thực 1 sao cho với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
6. Tính kết hợp của phép nhân vô hướng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
7. Tính phân phối giữa phép cộng và nhân: với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$
8. Tính phân phối giữa phép nhân vô hướng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$

9.4 Cơ sở và số chiều của không gian vector

Nếu trong không gian vector $\mathcal{V}$ tồn tại các vector độc lập tuyến tính $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, ..., $\boldsymbol{v_d}$ mà tất cả các vector trong $\mathcal{V}$ có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector $\boldsymbol{v_i}$ trên, thì tập hợp các vector

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$$

được gọi là **cơ sở** của không gian vector $\mathcal{V}$.

Khi đó,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$$

Số lượng phần tử của tập hợp các vector đó (ở đây là d) gọi là **số chiều (dimension)** của không gian vector $\mathcal{V}$. Ta ký hiệu $\dim\mathcal{V} = d$.

Ta còn ký hiệu

$$\mathcal{V} = \text{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$$

và nói là không gian vector $\mathcal{V}$ được span (hay được sinh) bởi các vector $\boldsymbol{v_i}$.

Ta thấy rằng có thể có nhiều cơ sở cho cùng một không gian vector.

Định lý 9.1. Mọi cơ sở của không gian vector $\mathcal{V}$ đều có số phần tử bằng dim$\mathcal{V}$

Từ đó ta có điều kiện cần và đủ để một tập hợp vector là cơ sở của không gian vector.

Giả sử ta có $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_d$ là một cơ sở của không gian vector $\mathbb{R}^n$. Khi đó nếu hệ vector $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ..., $\boldsymbol{w}_d$ cũng là một hệ cơ sở khi và chỉ khi tồn tại ma trận khả nghịch $\boldsymbol{A}$ sao cho $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{V}$.

Chứng minh. Ta viết các vector $\boldsymbol{v}_i$ dưới dạng $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) \\
\boldsymbol{v}_2 &= (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) \\
\ldots &= (\ldots, \ldots, \ldots, \ldots) \\
\boldsymbol{v}_d &= (v_{d1}, v_{d2}, \ldots, v_{dn})
\end{aligned}$$

Tương tự là các vector $\boldsymbol{w}_i$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= (w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n}) \\
\boldsymbol{w}_2 &= (w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n}) \\
\ldots &= (\ldots, \ldots, \ldots, \ldots) \\
\boldsymbol{w}_d &= (w_{d1}, w_{d2}, \ldots, w_{dn})
\end{aligned}$$

Do $\boldsymbol{v}_i$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, mọi vector trong $\mathbb{R}^n$ được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các $\boldsymbol{v}_i$.

Khi đó ta viết các $\boldsymbol{w}_i$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{v_i}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \alpha_{11}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{12}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{1d}\boldsymbol{v}_d \\
\boldsymbol{w}_2 &= \alpha_{21}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{2d}\boldsymbol{v}_d \\
\ldots &= \ldots \\
\boldsymbol{w}_d &= \alpha_{d1}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{d2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{dd}\boldsymbol{v}_d
\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{d1} & w_{d2} & \dots & w_{dn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1d} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{d1} & \alpha_{d2} & \dots & \alpha_{dd} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{d1} & v_{d2} & \dots & v_{dn} \end{pmatrix}$$

□

Nếu $\boldsymbol{w}_i$ cũng là cơ sở của $\mathcal{V}$, thì các vector $\boldsymbol{v}_i$ cũng phải biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{w}_i$. Nói cách khác, ma trận (α_{ij}) khả nghịch.

9.5 Không gian vector con

Cho không gian vector $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ với phép cộng hai vector và phép nhân vô hướng. Một tập con L của $\mathcal{V}$ được gọi là không gian vector con nếu:

- Với mọi $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ thuộc L, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in L$
- Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, với mọi $\boldsymbol{x} \in L$, $\alpha \boldsymbol{x} \in L$

Nói cách khác, phép cộng và phép nhân vô hướng *đóng* trong không gian vector con.

Nhận xét. Trên $\mathbb{R}^n$, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có thể sinh ra một không gian vector con của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ. Xét hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array} \tag{9.1}$$

Biến đổi ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chương 10

Không gian vector

Phần này định nghĩa tổng quát của không gian vector.

10.1 Không gian vector

Xét tập hợp các vector $\mathcal{V}$ trên trường $\mathbb{F}$.

Ta định nghĩa hai phép tính cộng và nhân trên các vector này sao cho

- Phép cộng là một ánh xạ $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sao cho với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ thì $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$
- Phân nhân vô hướng là ánh xạ $\mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sao cho với mọi $\alpha \in \mathbb{F}$ và $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$

Nói cách khác, phép cộng 2 vector và phép nhân vô hướng 1 số với vector cho kết quả vẫn nằm trong không gian vector đó.

Đồng thời, phép cộng và phép nhân vô hướng phải thỏa mãn các tính chất sau

1. Tính giao hoán với phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

2. Tính kết hợp với phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$
3. Phần tử đơn vị của phép cộng: tồn tại vector không $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ sao cho với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$
4. Phần tử đối của phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, tồn tại phần tử $\boldsymbol{x'} \in \mathcal{V}$ sao cho $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x'} = \mathbf{0}$
5. Phần tử đơn vị của phép nhân vô hướng: tồn tại phần tử $1_F \in \mathbb{F}$ sao cho với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $1_F \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
6. Tính kết hợp của phép nhân vô hướng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
7. Tính phân phối giữa phép cộng và nhân: với mọi $\alpha \in \mathbb{F}$, với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$
8. Tính phân phối giữa phép nhân vô hướng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$

Ta thấy rằng không gian vector xét ở chương trước xác định trên trường $\mathbb{R}$. Khi đó $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ và $\mathbb{F} \equiv \mathbb{R}$.

10.2 Cơ sở và số chiều của không gian vector

Tương tự, ta cũng có khái niệm cơ sở và số chiều của không gian vector.

Nếu trong không gian vector $\mathcal{V}$ tồn tại các vector độc lập tuyến tính $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, ..., $\boldsymbol{v_d}$ mà tất cả các vector trong $\mathcal{V}$ có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector $\boldsymbol{v_i}$ trên, thì tập hợp các vector

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$$

được gọi là **cơ sở** của không gian vector $\mathcal{V}$.

Khi đó,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$$

Số lượng phần tử của tập hợp các vector đó (ở đây là d) gọi là **số chiều (dimension)** của không gian vector $\mathcal{V}$. Ta ký hiệu $\dim\mathcal{V} = d$.

Ta còn ký hiệu

$$\mathcal{V} = \text{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$$

và nói là không gian vector $\mathcal{V}$ được span (hay được sinh) bởi các vector $\boldsymbol{v_i}$.

Ta thấy rằng có thể có nhiều cơ sở cho cùng một không gian vector.

Định lý 10.1. Mọi cơ sở của không gian vector $\mathcal{V}$ đều có số phần tử bằng $\dim\mathcal{V}$

10.3 Ví dụ về không gian vector

Xét không gian vector $\mathbb{R}^2$.

Ta biết rằng mọi điểm $M = (x, y)$ là tổ hợp tuyến tính của 2 vector $\vec{i} = (1, 0)$ và $\vec{j} = (0, 1)$. Nghĩa là $(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$. Như vậy $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và $\dim\mathbb{R}^2 = 2$.

Cơ sở $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ được gọi là **cơ sở chính tắc** của $\mathbb{R}^2$. Bây giờ xét 2 vector $(1, 2)$ và $(3, 4)$.

Ta thấy rằng $(1, 2) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1)$ và $(3, 4) = 3 \cdot (1, 0) + 4 \cdot (0, 1)$. Viết dưới dạng ma trận là

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mà ma trận $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ khả nghịch. Vậy $(1, 2)$ và $(3, 4)$ cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

Nhận xét. Ta thấy rằng trên $\mathbb{R}^n$ luôn có hệ cơ sở chính tắc. Như vậy, hệ vector trên $\mathbb{R}^n$ là cơ sở khi và chỉ khi chúng độc lập tuyến tính, hay nói cách khác là khi viết các hàng thành ma trận thì ma trận có định thức khác 0, hoặc rank ma trận bằng n.

Bây giờ ta xét không gian vector là tập con của $\mathbb{R}^n$ nhưng có số chiều nhỏ hơn n.

Phần VI

Giải tích

Chương 11

Giới hạn

11.1 Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 11.1 (Giới hạn hữu hạn của dãy số)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$. Ta nói dãy $\{a_n\}$ có giới hạn hữu hạn L nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Nói cách khác, trên trục số với điểm L, nếu ta chọn một đường tròn bán kính ε tùy ý, thì mọi số hạng của dãy số kể từ số hạng n_0 nào đó trở đi đều nằm trong đường tròn này. Thông thường ε rất nhỏ.

Ví dụ. Xét dãy số cho bởi công thức $a_n = \frac{1}{n}$.

Ta chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn là 0.

Với mọi $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta cần chứng minh tồn tại số $n_0 \geq 1$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Hay nói cách khác $a_{n_0} < \varepsilon$.

Tương đương với $\frac{1}{n_0} < \varepsilon \Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

Vậy ta chỉ cần chọn n_0 thỏa bất đẳng thức trên (luôn tìm được).

Kết luận: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Định nghĩa 11.2 (Dãy số có giới hạn vô cực)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$. Ta nói dãy số có giới hạn ở dương vô cực nếu với mọi $M > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $a_n > M$.

Nói cách khác, nếu ta chọn một số M rất lớn bất kì, thì mọi số hạng của dãy số kể từ một số hạng nào đó trở đi luôn lớn hơn M.

Định nghĩa về dãy số có giới hạn ở âm vô cực cũng tương tự.

11.2 Giới hạn hàm số

Định nghĩa của hàm số theo kiểu Cauchy (hay còn được gọi là ngôn ngữ $\delta - \varepsilon$) là kiểu định nghĩa phổ biến được giảng dạy trong nhà trường.

Định nghĩa 11.3 (Giới hạn hữu hạn của hàm số)**.** Xét hàm số $f(x)$. Ta nói hàm số có giới hạn hữu hạn L khi x tiến tới x_0, nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x mà $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

Một cách hình ảnh, tương tự như giới hạn dãy số, lần này ta nhìn trên 2 trục của mặt phẳng tọa độ Oxy. Với mọi quả cầu bán kính ε tâm L (dành cho $f(x)$) ta luôn chọn được quả cầu bán kính δ tâm x_0 (dành cho x). Lúc này khi x nằm trong quả cầu tâm x_0 bán kính δ thì $f(x)$ tương ứng sẽ nằm trong quả cầu tâm L bán kính ε.

Ta có thể thấy ở đây x tiến về x_0 (khá giống định nghĩa giới hạn hàm số) và $f(x)$ tương ứng tiến về L.

Tương tự ta cũng có giới hạn hàm số ở vô cực

Định nghĩa 11.4 (Giới hạn hàm số ở vô cực)**.** Với hàm số $f(x)$, ta nói hàm số có giới hạn tại dương vô cực khi x tiến về x_0 nếu với

mọi $M > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x mà $|x - x_0| < \delta$ thì $f(x) > M$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Định nghĩa 11.5 (Giới hạn một bên)**.** Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn phải L tại x_0 khi x tiến về bên phải x_0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $0 < x - x_0 < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Nghĩa là chúng ta chỉ xét giới hạn khi x tiến tới x_0 từ bên phải $x > x_0$. Tương tự cho giới hạn trái.

Lưu ý rằng trong nhiều trường hợp, mặc dù cùng tiến tới x_0 nhưng giới hạn trái và giới hạn phải có thể không bằng nhau.

Ví dụ. Xét hàm số $y = \frac{1}{x}$. Ta thấy hàm số không xác định tại $x = 0$, và giới hạn trái và phải khác nhau:

$$\lim_{x \to 0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} = -\infty$$

11.3 Tính liên tục của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D và x_0 là một điểm thuộc D.

Định nghĩa 11.6 (Hàm số liên tục tại một điểm)**.** Ta nói hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Định nghĩa tương tự cho liên tục trái và liên tục phải (ta lấy giới hạn một bên).

Như vậy, có 3 khả năng hàm số không liên tục tại một điểm.

1. Hàm số không xác định tại x_0
2. Hàm số xác định tại x_0 nhưng giới hạn tại đó không bằng $f(x_0)$.

3. Giới hạn trái và giới hạn phải không bằng nhau

Nếu hàm số không liên tục tại x_0 ta gọi hàm số bị **gián đoạn** tại x_0.

11.4 Đạo hàm

Định nghĩa 11.7 (Đạo hàm)**.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D và x_0 là điểm thuộc D. Ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 (hoặc khả vi tại x_0) nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ví dụ. Xét hàm số $f(x) = x^2 + 1$ trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm tại $x_0 \in \mathbb{R}$.
Ta có $f(x) - f(x_0) = x^2 + 1 - (x_0^2 + 1) = (x - x_0)(x + x_0)$.
Khi đó $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = x + x_0$ nên ta có

$$\lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Nếu hàm số khả vi trên mọi điểm thuộc khoảng (đoạn) nào đó thì ta nói hàm số khả vi trên khoảng (đoạn) đó và ký hiệu là $f'(x)$.

Với ví dụ trên, ta thấy giới hạn tồn tại với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$ nên ta có thể thay x_0 bởi x và có $f'(x) = 2x$ với $f(x) = x^2 + 1$.

Nhận xét. Từ định nghĩa ta thấy rằng nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì nó cũng liên tục tại x_0. Lưu ý là chiều ngược lại không đúng.

11.5 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Xét một chất điểm (vật lý) chuyển động. Quãng đường chuyển động của chất điểm được biểu diễn bởi hàm số theo thời gian. Ta đã biết vận tốc là đặc trưng chuyển động của chất điểm trong một đơn vị thời gian (phản ánh chất điểm chuyển động nhanh hay chậm). Nếu

đặt Δs là độ biến thiên tọa độ của chất điểm trong khoảng thời gian Δt, thì vận tốc là $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Vận tốc tức thời đặc trưng cho sự nhanh chậm của chuyển động. Ta không thể khảo sát vận tốc tại 1 điểm vì chất điểm chuyển động chứ không đứng yên. Do đó một ý tưởng đơn giản là chúng ta khảo sát trong một khoảng thời gian cực nhỏ, khi $\Delta t \to 0$, khi đó vận tốc gần như đúng tại một thời điểm nên gọi là vận tốc tức thời.

Do đó ta có hàm số $v = s'(t)$ biểu diễn vận tốc theo thời gian, với $s(t)$ là hàm số biểu diễn chuyển động của chất điểm theo thời gian.

11.6 Đồng biến và nghịch biến

Định nghĩa 11.8. Xét hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b). Ta nói $f(x)$ đồng biến trên (a, b) nếu với mọi $x_1 < x_2$ mà $x_1, x_2 \in (a, b)$ ta có $f(x_1) < f(x_2)$.

Tương tự $f(x)$ nghịch biến trên (a, b) nếu với $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) > f(x_2)$. Lưu ý ở các so sánh trên dấu bằng có thể xảy ra.

Nếu hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng xác định nào đó thì ta nói hàm số đơn điệu trên khoảng đó.

Đồ thị của hàm số khi đồng biến sẽ đi lên (theo chiều từ trái sang phải), và đi xuống nếu nghịch biến.

Ví dụ. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = x^2 + 3$.

Để khảo sát sự biến thiên, một cách làm đơn giản theo định nghĩa là ta xét $x_1 < x_2$ và so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + 3 - x_2^2 - 3 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$

Do $x_1 < x_2$, nên với $x_1, x_2 \geq 0$ thì $x_1 + x_2 > 0$ và $x_1 - x_2 < 0$. Suy ra $f(x_1) - f(x_2) < 0$ và từ đó $f(x_1) < f(x_2)$. Như vậy $f(x)$ đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Tương tự, khi $x_1, x_2 < 0$ thì $x_1 + x_2 < 0$. Khi đó $f(x_1) > f(x_2)$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty, 0)$

Định lý 11.1. Xét hàm số $f(x)$ khả vi trên khoảng (a, b). Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên (a, b).

Tương tự, $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên (a, b).

Phần VII

Lời giải cho bài tập trong một số sách

Chương 12

Abstract Algebra

Phần này giải các bài tập trong quyển **Abstract Algebra: Theory and Applications** ở [2]

12.1 Groups (chương 3)

7. Đặt $S = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ và định nghĩa toán tử 2 ngôi trên S là $a \star b = a + b + ab$. Chứng minh rằng $(S, \star)$ là nhóm Abel

Chứng minh.

- Giả sử tồn tại phần tử đơn vị e, khi đó $e \star s = s \star e = s$ với mọi $s \in S$. Nghĩa là $e + s + es = s + e + se = s$. Vậy $e + se = 0$ mà $s \neq -1$ nên $e = 0$
- Với $e = 0$, giả sử với mọi $s \in S$ có nghịch đảo s'. Do $s \star s' = s' \star s = e$ nên $s + s' + ss' = s' + s + s's = e = 0$, tức là $s'(1 + s) = -s$. Vậy $s' = \frac{-s}{1+s}$
- Với mọi $a, b, c \in S$, $a \star (b \star c) = a \star (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + b + c + ab + bc + ca + abc$ và $(a \star b) \star c = (a + b + ab) \star c = a + b + ab + c + c(a + b + bc) = a + b + c + ab + bc + ca + abc$. Như vậy $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$, tính kết hợp

□

39. Gọi G là tập các ma trận 2×2 với dạng

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

với $\theta \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng G là subgroup của $SL_2(\mathbb{R})$

Chứng minh. Với $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra định thức của tích 2 ma trận là

$$\det\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Như vậy phép nhân 2 ma trận có dạng trên đóng trên $SL_2(\mathbb{R})$.

Phần tử đơn vị là $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tương ứng với $\theta = 0$

Phần tử nghịch đảo là $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$ suy ra từ công thức định thức ban nãy

Cuối cùng, phép nhân ma trận có tính kết hợp. Như vậy G là subgroup của $SL_2(\mathbb{R})$

□

47. Đặt G là nhóm và $g \in G$. Chứng minh rằng

$$Z(G) = \{x \in G : gx = xg \ \forall \ g \in G\}$$

là subgroup của G. Subgroup này gọi là **center** của G

Chứng minh. Giả sử trong G có 2 phần tử là x_1 và x_2 thuộc $Z(G)$. Khi đó

$x_1 g = g x_1$ và $x_2 g = g x_2$ với mọi $g \in G$.

Xét phần tử $x_1 x_2$, ta có

$$(x_1 x_2)g = x_1(x_2 g) = x_1(g x_2) = (g x_1)x_2 = g(x_1 x_2)$$

với mọi $g \in G$. Do đó $x_1 x_2 \in Z(G)$ nên $Z(G)$ là subgroup.

□

49. Cho ví dụ về nhóm vô hạn mà mọi nhóm con không tầm thường của nó đều vô hạn

Ví dụ tập $\mathbb{Z}$ và phép cộng số nguyên. Khi đó mọi nhóm con của $\mathbb{Z}$ có dạng $n\mathbb{Z}$ với $n \in \mathbb{Z}$. Ví dụ

$2\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$ với phần tử sinh là 2

$n\mathbb{Z} = \{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, \cdots\}$ với phần tử sinh là n

54. Cho H là subgroup của G và

$$C(H) = \{g \in G : gh = hg \ \forall \ h \in H\}$$

Chứng minh rằng $C(H)$ là subgroup của G. Subgroup này được gọi là **centralizer** của H trong G

Chứng minh. Gọi g_1 và g_2 thuộc $C(H)$. Khi đó

$g_1 h = h g_1$ và $g_2 h = h g_2$ với mọi $h \in H$

Xét phần tử $g_1 g_2$, với mọi $h \in H$ ta có

$$(g_1 g_2)h = g_1(g_2 h) = g_1(h g_2) = (g_1 h)g_2 = (h g_1)g_2 = h(g_1 g_2)$$

Như vậy $g_1 g_2 \in C(H)$, từ đó $C(H)$ là subgroup của G

□

12.2 Permutation Groups (chương 5)

13. Đặt $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m \in S_n$ là tích của các cycle độc lập. Chứng minh rằng order của σ là LCM của độ dài các cycle $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$.

Chứng minh. Đặt l_i là độ dài cycle σ_i $(i = 1, \cdots m)$. Khi đó $\sigma_i^{k_i l_i}$ sẽ ở dạng các cycle độ dài 1 $(k_i \in \mathbb{Z})$.

Từ đó, $\sigma^l = \sigma_1^l \cdots \sigma_m^l = (1) \cdots (n)$ nếu $l = k_1 l_1 = \cdots k_m l_m$. Số l nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này là $\text{lcm}(l_1, \cdots, l_m)$ (đpcm)

□

23. Nếu σ là chu trình với độ dài lẻ, chứng minh rằng σ^2 cũng là chu trình

Chứng minh. Giả sử $\sigma = (g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}, g_n)$ với n lẻ. Khi đó $\sigma^2 = (g_1, g_3, \cdots, g_n, g_2, g_4, \cdots, g_{n-1})$ cũng là chu trình. □

30. Cho $\tau = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ là chu trình độ dài k.

(a) Chứng minh rằng với mọi hoán vị σ thì

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \cdots, \sigma(a_k))$$

là chu trình độ dài k.

(b) Gọi μ là chu trình độ dài k. Chứng minh rằng tồn tại hoán vị σ sao cho $\sigma\tau\sigma^{-1} = \mu$

Chứng minh. Để chứng minh 2 mệnh đề trên ta cần chú ý một số điều.

(a) Ta thấy rằng bất kì phần tử nào khác $a_1, a_2, \cdots, a_k$ thì khi qua τ không đổi, do đó khi đi qua $\sigma\tau\sigma^{-1}$ thì chỉ đi qua $\sigma\sigma^{-1}$ và cũng không đổi. Nói cách khác các phần tử $a_1, a_2, \cdots, a_k$ vẫn nằm trong chu trình nên ta có đpcm.

(b) Từ câu (a), với $\mu = (b_1, b_2, \cdots, b_k)$ thì ta chọn σ sao cho $b_i = \sigma(a_i)$.

□

12.3 Cosets (chương 6)

11. Gọi H là subgroup của nhóm G và giả sử $g_1, g_2 \in G$. Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương:

(a) $g_1H = g_2H$
(b) $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$
(c) $g_1H \subseteq g_2H$
(d) $g_2 \in g_1H$
(e) $g_1^{-1}g_2 \in H$

Chứng minh. Từ (a) ra (b): Ta đã biết các coset là rời nhau hoặc trùng nhau, do đó với mọi $g_1h \in g_1H$, tồn tại $g_2h' \in g_2H$ mà $g_1h = g_2h'$. Suy ra $(g_1h)^{-1} = (g_2h')^{-1}$ hay $h^{-1}g_1^{-1} = h'^{1}g_2^{-1}$ (đpcm)

Từ (a) ra (c): Hiển nhiên

Từ (a) ra (d): Với mọi $g_1h \in g_1H$, tồn tại $g_2h' \in g_2H$ sao cho $g_1h = g_2h'$, hay $g_2 = g_1hh'^{-1}$, đặt $h'' = hh'^{-1}$ thì $h'' \in H$ (H là nhóm con) nên $g_1h'' \in g_1H$. Suy ra $g_2 \in g_1H$

Từ (a) ra (e): Tương tự, ta có $g_1h = g_2h'$, suy ra $hh'^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$

□

16. Nếu $ghg^{-1} \in H$ với mọi $g \in G$ và $h \in H$, chứng minh rằng right coset trùng với left coset

Chứng minh. Do $ghg^{-1} \in H$ nên tồn tại $h' \in H$ sao cho $ghg^{-1} = h'$. Tương đương $gh = h'g$ với mọi $h \in H$ nên $gH = Hg$. Điều này đúng với mọi $g \in G$ nên các right coset trùng left coset. □

17. Giả sử $[G : H] = 2$. Chứng minh rằng nếu a, b không thuộc H thì $ab \in H$.

Chứng minh. Ta biết rằng 2 coset ứng với 2 phần tử g_1, g_2 bất kì là trùng nhau hoặc rời nhau.

Do đó với $eH = H$, ta suy ra 2 coset của G là H và $G\backslash H$.

Vì $a, b \notin H$ nên coset của chúng trùng nhau. Và nghịch đảo của a cũng nằm trong $G \backslash H$ vì nếu nghịch đảo của a nằm trong H thì a cũng phải nằm trong H.

Suy ra $a^{-1}H = bH$. Nghĩa là tồn tại 2 phần tử $h_1, h_2 \in H$ sao cho $a^{-1}h_1 = bh_2$, tương đương $h_1 h_2^{-1} = ab \in H$ (đpcm). □

21. Gọi G là cyclic group với order n. Chứng minh rằng có đúng $\phi(n)$ phần tử sinh của G

Chứng minh. Gọi g là một phần tử sinh của G. Khi đó g sinh ra tất cả phần tử trong G, hay nói cách khác các phần tử trong G có dạng g^i với $0 \leq i < n$.

Như vậy một phần tử $h = g^i$ cũng là phần tử sinh của G khi và chỉ khi $\gcd(i, n) = 1$ và có $\phi(n)$ số i như vậy (đpcm).

□

12.4 Isomorphism (chương 9)

18. Chứng minh rằng subgroup của $\mathbb{Q}^*$ gồm các phần tử có dạng $2^m 3^n$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ là internal direct product tới $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Chứng minh. Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\varphi(2^m 3^n) = (m, n)$

Hàm này là well-defined vì với m cố định thì mỗi phần tử $2^m 3^n$ chỉ cho ra một phần tử (m, n). Tương tự với cố định n.

Hàm này là đơn ánh (one-to-one) vì với $m_1 = m_2$ và $n_1 = n_2$ thì $2^{m_1} 3^{n_1} = 2^{m_2} 3^{n_2}$.

Hàm này cũng là toàn ánh vì với mỗi cặp (m, n) ta đều tính được $2^m 3^n$.

Vậy hàm φ là song ánh.

Thêm nữa,

$$\begin{aligned}\varphi(2^{m_1} 3^{n_1} \cdot 2^{m_2} 3^{n_2}) &= \varphi(2^{m_1+m_2} 3^{n_1+n_2}) \\ &= (m_1 + m_2, n_1 + n_2) = (m_1, n_1) + (m_2, n_2) \\ &= \varphi(2^{m_1} 3^{n_1}) \varphi(2^{m_2} 3^{n_2})\end{aligned}$$

Vậy φ là homomorphism, và là song ánh nên là isomorphism. □

20. Chứng minh hoặc bác bỏ: mọi nhóm Abel có order chia hết bởi 3 chứa một subgroup có order là 3

Chứng minh. Gọi order của nhóm Abel là $n = 3k$, và g là phần tử sinh của nhóm Abel đó. Như vậy $g^n = g^{3k} = e$.

Nếu ta chọn $h = g^k$ thì $h^3 = e$, khi đó subgroup được sinh bởi h có order 3 (đpcm). □

21. Chứng minh hoặc bác bỏ: mọi nhóm không phải Abel có order chia hết bởi 6 chứa một subgroup có order 6

Chứng minh. Với $\mathcal{S}_3$ có order là 6 nhưng không có nhóm con nào order 6 (nhóm con chỉ có order 1, 2 hoặc 3) (bác bỏ). □

22. Gọi G là group với order 20. Nếu G có các subgroup H và K với order 4 và 5 mà $hk = kh$ với mọi $h \in H$ và $k \in K$, chứng minh rằng G là internal direct product của H và K

Chứng minh. Ta chứng minh $H \cap K = \{e\}$. Giả sử tồn tại phần tử $m \in H \cap K$, khi đó do $m \in H$ nên $mk = km$ với mọi $k \in K$. Tuy nhiên $m \in K$ do đó điều này xảy ra khi và chỉ khi $m = e$.

Như vậy $H \cap K = \{e\}$. □

Chương 13

Intro to Math-Crypto

Quyển **An Introduction to Mathematical Cryptography** của Hoffstein [3] (lấy source từ 1 repo khá cũ đã đóng bụi của mình).

Lúc viết repo kia mình viết lời giải bằng tiếng Anh. Bây giờ chép lại qua đây lười dịch ra tiếng Việt :D

13.1 Chapter 2

2.3. Let g be a primitive root of $\mathbb{F}_p$

(a) Suppose that $x = a$ and $x = b$ are both integer solutions to the congruence $g^x \equiv h \pmod{p}$. Prove that $a \equiv b \pmod{p-1}$. Explain why this implies that the map (2.1) on page 64 is well-defined

(b) Prove that $\log_g(h_1 h_2) = \log_g(h_1) + \log_g(h_2)$ for all $h_1, h_2 \in \mathbb{F}_p^*$

(c) Prove that $\log_g(h^n) = n \log_g(h)$ for all $h \in \mathbb{F}_p^*$ and $n \in \mathbb{Z}$

Chứng minh. Bài này cần chứng minh mối quan hệ giữa các discrete logarithm.

(a) Because a and b are both solutions to the congruence $g^x \equiv h \pmod{p}$,

$$\begin{cases} g^a \equiv h \pmod{p} \\ g^b \equiv h \pmod{p} \end{cases}$$

$\Rightarrow g^{-b} \equiv h^{-1} \pmod{p}$
$\Rightarrow g^a g^{-b} \equiv hh^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$
$\Rightarrow g^{a-b} \equiv 1 \pmod{p}$, but g is primitive root of $\mathbb{F}_p$
$\Rightarrow \phi(p) | (a-b) \Leftrightarrow (p-1) | (a-b)$
$\Rightarrow a - b \equiv 0 \pmod{p-1}$
$\Rightarrow a \equiv b \pmod{p-1}$
(b) Suppose that

$$\begin{cases} h_1 \equiv g^{x_1} \pmod{p} \\ h_2 \equiv g^{x_2} \pmod{p} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = \log_g h_1$ and $x_2 = \log_g h_2$ (1)
And $h_1 h_2 \equiv g^{x_1 + x_2} \pmod{p}$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = \log_g(h_1 h_2)$ (2)
From (1) and (2), $\log_g h_1 + \log_g h_2 = \log_g(h_1 h_2)$
(c) Same as (b).

□

2.5. Let p be an odd prime and let g be a primitive root modulo p. Prove that a has a square root modulo p if and only if its discrete logarithm $\log_g(a)$ modulo $p-1$ is even.

We have $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
(1) If a has square root modulo p, then there is b: $b \equiv a^2 \pmod{p}$
$\Rightarrow \log_g a = \log_g(b^2) = 2 \log_g b \pmod{p-1}$
$\Rightarrow \log_g a$ is even.
(2) If $\log_g a$ modulo $p-1$ is even
$\Rightarrow \log_g a = 2 \log_g b \pmod{p-1}$ with some $b \in \mathbb{F}_p$
$\Rightarrow \log_g a = \log_g(b^2) \pmod{p-1}$
$\Rightarrow a \equiv b^2 \pmod{p-1}$
$\Rightarrow a$ has square root modulo $p-1$

2.10. The exercise describes a public key cryptosystem that requires Bob and Alice to exchange several messages. We illustrate the system with an example.

Bob and Alice fix a publicly known prime $p = 32611$, and all of other numbers used are private. Alice takes her message $m = 11111$, chooses a random exponent $a = 3589$, and sends the number $u = m^a \pmod p = 15950$ to Bob. Bob chooses a random exponent $b = 4037$ and sends $v = u^b \pmod p = 15422$ back to Alice. Alice then computes $w = v^{15619} \equiv 27257 \pmod{32611}$ and sends $w = 27257$ to Bob. Finally, Bob computes $w^{31883} \pmod{32611}$ and recovers the value 11111 of Alice's message.

(a) Explain why this algorithm works. In particular, Alice uses the numbers $a = 3589$ and 15619 as exponents. How are they related? Similarly, how are Bob's exponents $b = 4037$ and 31883 related?

(b) Formulate a general version of this cryptosystem, i.e., using variables, and show how it works in general.

(c) What is the disadvantage of this cryptosystem over Elgamal? (*Hint.* How many times must Alice and Bob exchange data?)

(d) Are there any advantages of this cryptosystem over Elgamal? In particular, can Eve break it if she can solve the discrete logarithm problem? Can Eve break it if she can solve the Diffie-Hellman problem?

Chứng minh. (a) We have $3589 \cdot 15619 \equiv 4073 \cdot 31883 \equiv 1 \pmod{p-1}$

(b) Alice chooses a and a' satisfy that $aa' \equiv 1 \pmod{p-1}$

Bob chooses b and b' satisfy that $bb' \equiv 1 \pmod{p-1}$

From this, we have $aa' = k(p-1)+1$ and $bb' = l(p-1)+1$

$\Rightarrow v \equiv u^b \equiv (m^a)^b \equiv m^{ab} \pmod p$

$\Rightarrow w \equiv v^{a'} \equiv (m^{ab})^{a'} \equiv m^{aa'b} \pmod p$

$\Rightarrow w^{b'} \equiv m^{aa'bb'} \equiv m^{[k(p-1)+1]x[l(p-1)+1]} \equiv m^{D(p-1)+1} \equiv m \pmod p$ □

2.11. The group S_3 consists of the following six distinct elements

$$e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$$

where e is the identity element and multiplication is performed using the rules

$$\sigma^3 = e, \quad \tau^2 = e, \quad \tau\sigma = \sigma^2\tau$$

Compute the following values in the group S_3:
(a) $\tau\sigma^2$ (b) $\tau(\sigma\tau)$ (c) $(\sigma\tau)(\sigma\tau)$ (d) $(\sigma\tau)(\sigma^2\tau)$
Is S_3 a commutative group?

Chứng minh. (a) $\tau\sigma^2 = \tau\sigma\sigma = \sigma^2\tau\sigma = \sigma\sigma^2\tau = \sigma^3\tau = e\tau = \tau$
(b) $\tau(\sigma\tau) = (\tau\sigma)\tau = \sigma^2\tau\tau = \sigma^2\tau^2 = \sigma^2 e = \sigma^2$
(c) $(\sigma\tau)(\sigma\tau) = \sigma(\tau\sigma)\tau = \sigma(\sigma^2\tau)\tau = \sigma^3\tau^2 = ee = e$
(d) $(\sigma\tau)(\sigma^2\tau) = (\sigma\tau)(\tau\sigma) = \sigma\tau^2\sigma = \sigma e\sigma = \sigma^2$
S_3 is not a commutative group because:
$\sigma\tau = \sigma\tau$ but $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ (2 distinct elements in S_3) □

2.12. Let G be a group, let $d \geq 1$ be an integer, and define a subset of G by

$$G[d] = \{g \in G : g^d = e\}$$

(a) Prove that if g is in $G[d]$, then g^{-1} is in $G[d]$
(b) Suppose that G is commutative. Prove that is g_1 and g_2 are in $G[d]$, then their product $g_1 \star g_2$ is in $G[d]$
(c) Deduce that if G is commutative, then $G[d]$ is a group.
(d) Show by an example that is G is not a commutative group, then $G[d]$ need not be a group. (*Hint.* Use Exercise 2.11.)

Chứng minh. (a) Because $g \star g^{-1} = e \Rightarrow g \star e \star g^{-1} = e$
$\Rightarrow g \star g \star g^{-1} \star g^{-1} = e \Rightarrow g^2 \star (g^{-1})^2 = e$
Do more $d-2$ times and we get $g^d \star (g^{-1})^d = e$
$\Rightarrow e \star (g^{-1})^2 = e \Rightarrow (g^{-1})^2 = e \Rightarrow g^{-1} \in G[d]$
(b) We have $g_1^d = e$ and $g_2^d = e$
Because G is commutative, $g_1^d \star g_2^d = (g_1 \star g_2)^d$
$\Rightarrow (g_1 \star g_2)^d = e \star e = e \Rightarrow g_1 \star g_2 \in G[d]$

(c) From (b), we have $\forall g_1, g_2 \in G[d]$, then $g_1 \star g_2 \in G[d]$

We easily see that $e \in G[d]$, so it is identity element of $G[d] \Rightarrow$ identity law.

From (a) we have inverse law.

With $a, b, c \in G[d]$, which means $a^d = b^d = c^d = e$, then

$a^d \star (b^d \star c^d) = a^d \star (bc)^d$ (because G is commutative) $= (a \star b \star c)^d = (a \star b)^d \star c^d = (a^d \star b^d) \star c^d \Rightarrow$ associative law.

So, $G[d]$ is a group.

(d) Using exercise 2.11, $S_3[2] = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2, \tau, e\}$. Because $(\sigma\tau)\tau = \sigma\tau^2 = \sigma \notin S_3[2]$, $S_3[2]$ is not a group. □

2.13. Let G and H be groups. A function $\phi : G \to H$ is called a (*group*) *homomorphism* if it satisfies

$$\phi(g_1 \star g_2) = \phi(g_1) \star \phi(g_2) \text{ for all } g_1, g_2 \in G$$

(Note that the product $g_1 \star g_2$ uses the group law in the group G, while the product $\phi(g_1) \star \phi(g_2)$ uses the group law in the group H.)

(a) Let e_G be the identity element of G, let e_H be identity element of H, and the $g \in G$. Prove that

$$\phi(e_G) = e_H \qquad \text{and} \qquad \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$$

(b) Let G be a commutative group. Prove that the map $\phi : G \to G$ defined by $\phi(g) = g^2$ is a homomorphism. Give an example of a noncommutative group for which this map is not a homomorphism.

(c) Same question as (b) for the map $\phi(g) = g^{-1}$

Chứng minh. (a) $\forall g \in G$: $g = g \star e = e \star g$

$\Rightarrow \phi(g) = \phi(g \star e_G) = \phi(e_G \star g)$

$\Rightarrow \phi(g) = \phi(g) \star \phi(e_G) = \phi(e_G) \star \phi(g)$

Because $\phi(g) \in H$, $\phi(e_G)$ is identity element of $H \Leftrightarrow \phi(e_G) = e_H$

In group G, $g \star g^{-1} = e_G$

$\Rightarrow \phi(g \star g^{-1} = \phi(e_G)$

$\Rightarrow \phi(g) \star \phi(g^{-1}) = \phi(e_G)$
$\Rightarrow \phi(g) \star \phi(g^{-1}) = e_H$
$\Rightarrow \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$

(b) $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^2$

$\forall g_1, g_2 \in G$, $\phi(g_1 \star g_2) = (g_1 \star g_2)^2 = g_1^2 \star g_2^2$ (because G is commutative).
And we have $g_1^2 \star g_2^2 = \phi(g_1) \star \phi(g_2)$, which means $\phi(g_1 \star g_2) = \phi(g_1) \star \phi(g_2)$
$\Rightarrow G$ is homomorphism.

Now we consider group in Exercise 2.11 and the map $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^2$
$\Rightarrow \phi(e) = e^2 = e$, $\phi(\sigma) = \sigma^2$, $\phi(\tau) = \tau^2 = e$, $\phi(\sigma\tau) = (\sigma\tau)^2 = e$

We have: $\phi(\sigma\tau) = e \neq \sigma^2 = \phi(\sigma)\phi(\tau)$
$\Rightarrow$ Therefore, G is not homomorphism.

(c) $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^{-1}$

$\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 g_1^{-1} = e$, $g_2 g_2^{-1} = e$
$\Rightarrow g_1 g_1^{-1} g_2 g_2^{-1} = e$, but G is commutative
$\Rightarrow (g_1 g_2)(g_1^{-1} g_2^{-1}) = e$
$\Rightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} = (g_1 g_2)^{-1}$
$\Rightarrow \phi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1} = \phi(g_1)\phi(g_2)$
$\Rightarrow G$ is homomorphism.

Now we consider group in Exercise 2.11 and the map $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^{-1}$. We have

$\sigma\sigma^2 = e = \sigma^2\sigma = e$, $\tau^2 = e$, $(\sigma\tau)^2 = e$, $(\sigma^2\tau)^2 = e$
$\Rightarrow \phi(\sigma\tau) = \sigma\tau$ and $\phi(\sigma) = \sigma^2$, $\phi(\tau) = \tau$
$\Rightarrow \phi(\sigma\tau) = \sigma\tau \neq \sigma^2\tau = \phi(\sigma)\phi(\tau)$
$\Rightarrow G$ is not homomorphism. □

2.14. Prove that each of the following maps is a group homomophism.

(a) The map $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ that sends $a \in Z$ to a mod N in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= (ab) \pmod N \\ &= (a \bmod N)(b \bmod N) \pmod N \\ &= \phi(a)\phi(b)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ homomorphism.

(b) The map $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ defined by $\phi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}^*$, $\phi(ab) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & (ab)^{-1} \end{pmatrix}$

And we have

$$\phi(a)\phi(b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & a^{-1}b^{-1} \end{pmatrix}$$

It is clear that $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, so $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \Rightarrow$ homomorphism.

(c) The discrete logarithm map $\log_g : \mathbb{F}_p^* \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, where g is a primitive root modulo p

$\phi(a) = x$ satisfying $g^x \equiv a \pmod p$

$\forall a, b \in \mathbb{F}_p^*$, $\phi(a) = x$: $g^x \equiv a \pmod p$ and $\phi(b) = y$: $g^y \equiv b \pmod p$

$\Rightarrow \phi(a)\phi(b) = x + y$ (Because $x, y \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, rule of group is addition modulo $p-1$)

And we have $g^{x+y} \equiv ab \pmod p \Rightarrow \phi(ab) = x + y$

$\Rightarrow \phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$

$\Rightarrow$ homomorphims.

2.15.

(a) Prove that $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ is a group. If A and B is 2 matrices in $\mathrm{GF}_2(\mathbb{F}_p)$, then AB also in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ (because result will be modulo 2)

Identity element is $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ because $AE = EA = A$ for all $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$

$\forall A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, because $detA \neq 0 \Rightarrow A$ has inverse in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$
$\forall A, B, C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) : (AB)C = A(BC)$
Therefore, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ is a group.

(b) Show that $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ is a noncommutative group for every prime p. Suppose we have $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ and $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$

Top left element of product AB is $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \pmod p$
Top left element of product BA is $(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) \pmod p$
If we choose $a_{12} \not\equiv b_{21}^{-1}a_{21}b_{21} \pmod p$, then $AB \neq BA$, which means noncommutative. (c) Describe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ completely. That is, list its elements and describe the multiplication table. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Multiplication table:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	A_3	A_5	A_1	A_6	A_2	A_4
A_2	A_4	A_6	A_2	A_5	A_1	A_3
A_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	A_2	A_1	A_4	A_3	A_6	A_5
A_5	A_6	A_4	A_5	A_2	A_3	A_1
A_6	A_5	A_3	A_6	A_1	A_4	A_2

(d) How many elements are there in the group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$?

First row u_1 is any vector but $(0, 0)$. We have $p^2 - 1$ ways.
Second row u_2 is any vector but multiple of first vector. We have $p^2 - p$ ways (remove $0u_1$ to $(p-1)u_1$).
$\Rightarrow$ There are $(p^2 - 1)(p^2 - p)$ elements. (e) How many elements are there in the group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$?

Similar to (d), we need first row u_1 is any vector but $(0,0)$. We have $p^n - 1$ ways.
Second vector u_2 is any vector but a multiple of first row. We have $p^n - p$ ways.
Third vector u_3 is any vector but a linear combination of u_1 and u_2. The number of $a_1u_1 + a_2u_2$ is the number of pair (a_1, a_2) and there is p^2 posibilities $(a_1, a_2 \in \mathbb{F}_p$. So third vector has $p^n - p^2$ ways.
In general, n-th vector is any vector but a linear combination of u_1, u_2, ..., u_{n-1}, so there is $p^n - p^{n-1}$ ways.
$\Rightarrow$ There are $(p^n - 1)(p^n - p)...(p^n - p^{n-1})$ elements.

2.17. **shank_bsgs.py**

2.18. Solve each of the following simultaneous systems of congruences (or explain why no solutions exists).

(a) $x \equiv 3 \pmod 7$ and $x \equiv 4 \pmod 9$

$N = 7 \times 9 = 63$

$T_1 = 63/7 = 9$, $T_1^{-1} \bmod 7 = 4$

$T_2 = 63/9 = 7$, $T_2^{-1} \bmod 9 = 4$

$\Rightarrow x \equiv 3 \times 9 \times 4 + 4 \times 7 \times 4 \equiv 220 \equiv 31 \pmod{63}$

(b) $x \equiv 137 \pmod{423}$ and $x \equiv 87 \pmod{191}$

$N = 423 \times 191 = 90793$

$T_1 = N/423 = 191$, $T_1^{-1} \bmod 423 = 392$

$T_2 = N/191 = 423$, $T_2^{-1} \bmod 191 = 14$

$\Rightarrow x \equiv 137 \times 191 \times 392 + 87 \times 423 \times 14 \equiv 27209 \pmod N$

(c) Cannot calculate because $gcd(451, 697) = 41 \neq 1$

(d) $x \equiv 5 \pmod 9$, $x \equiv 6 \pmod{10}$ and $x \equiv 7 \pmod{11}$

$N = 9 \times 10 \times 11 = 990$

$T_1 = N/9 = 110$, $T_1^{-1} \bmod 9 = 5$

$T_2 = N/10 = 99$, $T_2^{-1} \bmod 10 = 9$

$T_3 = N/11 = 90$, $T_3^{-1} \bmod 11 = 6$

$\Rightarrow x \equiv 5 \times 110 \times 5 + 6 \times 99 \times 9 + 7 \times 90 \times 6 \equiv 986 \pmod N$

(e) $x \equiv 37 \pmod{43}$, $x \equiv 22 \pmod{49}$ and $x \equiv 18 \pmod{71}$

$N = 43 \times 49 \times 71 = 149597$

$T_1 = N/43 = 3479$, $T_1^{-1} \bmod 43 = 32$

$T_2 = N/49 = 3053$, $T_2^{-1} \bmod 49 = 36$

$T_3 = N/71 = 2107$, $T_3^{-1} \bmod 71 = 37$

$\Rightarrow x \equiv 37 \times 3479 \times 32 + 22 \times 3053 \times 36 + 18 \times 2107 \times 37 \equiv 11733 \pmod{N}$

Code in: **modular.py**

2.19. Solve the 1700-year-old Chinese remainder problem from the *Sun Tzu Suan Ching* stated on page 84.

$x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 5$ and $x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 23 \pmod{105}$

2.20. Let a, b, m, n be integers with $gcd(m, n) = 1$. Let

$$c \equiv (b - a) \cdot m^{-1} \pmod n$$

Prove that $x = a + cm$ is a solution to

$$x \equiv a \pmod m \quad \text{and} \quad x \equiv b \pmod n$$

and that every solution to (1) has the form $x = a + cm + ymn$ for some $y \in \mathbb{Z}$

2.21.

(a) Let a, b, c be positive integers and suppose that

$$a \mid c, \quad b \mid c, \quad \text{and} \quad gcd(a, b) = 1$$

Prove that $ab \mid c$

Because $a \mid c \Leftrightarrow c = ka$, $(k \in \mathbb{Z})$ and $b \mid c \Leftrightarrow c = lb$ $(l \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow ka = lb$. But $gcd(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid l \Leftrightarrow l = ma$, $(m \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow c = lb = lma \Rightarrow ab \mid c$

(b) Let $x = c$ and $x = c'$ be two solutions to the system of simultaneous congruences in the Chinese remainder theorem. Prove that

$$c \equiv c' \pmod{m_1 m_2 ... m_k}$$

If $c \equiv c' (\equiv a_i) \pmod m_i$, then $c \equiv c' \pmod{m_1 m_2 ... m_k}$

2.23. Find square roots modulo the following composite moduli

(a) 215

(b) 2654

(c) 1712, 2477, 3187, 1002

(d) $(\pm 1 \cdot 317 \cdot 1 \pm 1 \cdot 124 \cdot 3 \pm 10 \cdot 28 \cdot 10) \pmod{868}$

2.24. Let p be an odd prime, let a be an integer that is not divisible by p, and let b is a square root of a modulo p. This exercise investigates the square root of a modulo powers of p

(a) Prove that for some choise of k, the number $b+kp$ is a square root of a modulo p^2, i.e., $(b+kp)^2 \equiv a \pmod{p^2}$

(b) The number $b = 537$ is a square root of $a = 476$ modulo the prime $p = 1291$. Use the idea in (a) to compute a square root of 476 modulo p^2

(c) Suppose that b is a square root of a modulo p^n. Prove that for some choice of j, the number $b+jp^n$ is a square root of a modulo p^{n+1}

(d) Explain why (c) implies the following statements: If p is an odd prime and if a has a square root modulo p, then a has a square root modulo p^n for every power of p. Is this true if $p = 2$?

(e) Use the method in (c) to compute the square root of 3 modulo 13^3, given that $9^2 \equiv 3 \pmod{13}$

Chứng minh. (a) Let $f(b_n) = b_n^2 - a \pmod{p^n}$, with $b_1 = b \Rightarrow f(b_1) = b^2 - a \equiv 0 \pmod{p}$
We need to find b_2, $f(b_2) = b_2^2 - a \equiv 0 \pmod{p^2}$
Which means, $f(b_1+kp) = (b_1+kp)^2 - a = b_1^2 + 2b_1kp + (kp)^2 - a \equiv 0 \pmod{p^2}$
$\Leftrightarrow 2b_1k \equiv -(b_1^2 - a)/p \pmod{p^2}$ (because $b_1^2 - a \equiv 0 \pmod{p}$)
And because $2b_1 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, then exist k satisfying the equation

(b) $k = -(b^2 - a)/p \times (2b)^{-}1 \pmod{p^2}$

(c) We prove by induction that for each $n \geq 1$, there is a $b_n \in \mathbb{Z}$ such that

$$\begin{aligned} f(b_n) = b_n^2 - a &\equiv 0 \pmod{p^n} \\ b_n &= b \pmod{p^n} \end{aligned}$$

The case $n = 1$ is trivial, using $b_1 = b$. If the inductive hypothesis holds for n, which means:

$$f(b_n) = b_n^2 - a \pmod{p^n}$$
$$b_n = b \pmod{p^n}$$

With b_{n+1}, $f(b_{n+1}) = b_{n+1}^2 - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$. We write $b_{n+1} = b_n + p^n t_n$

$$\Rightarrow f(b_{n+1}) = b_n^2 + 2b_n p^n t_n + p^{2n} t_n^2 - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

$$\Rightarrow b_n^2 + 2b_n p^n t_n - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

(because $2n \geq n+1$)

$$\Rightarrow 2b_n t_n \equiv -(b_n^2 - a)/p^n \pmod{p^{n+1}}$$

(from (2)). Therefore, exists solution for t_n because we assumed that $2b_n \equiv 0 \pmod{p^n}$

$$\Rightarrow f(b_{n+1}) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

, and $b_{n+1} \equiv b_n \pmod{p^n}$

This proof is used for $b + jp^n$ modulo p^n, not for p^{n+1} (d) Using induction we get that. If $p = 2$, then any integers is right

□

2.31. Let R and S be rings. A functions $\phi : R \to S$ is called a (*ring*) *homomorphism* if it satisfies

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$$

and

$$\phi(a \star b) = \phi(a) \star \phi(b)$$

for all $a, b \in R$

(a) Let 0_R, 0_S, 1_R and 1_S denote the additive and multiplicative identities of R and S, respectively. Prove that

$\phi(0_R) = 0_S$, $\phi(1_R) = 1_S$, $\phi(-a) = -\phi(a)$, $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$,

where the last equality holds for those $a \in R$ that have a multiplicative inverse.

(b) Let p be a prime, and let R be a ring with the property that $pa = 0$ for every $a \in R$. (Here pa means to add a to itself p times.) Prove that the map

$$\phi : R \to R, \quad \phi(a) = a^p$$

is a ring homomorphism. It is called the *Frobenius homomorphism.*

Chứng minh. With $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ and $\phi(a \star b) = \phi(a) \star \phi(b)$ for all $a, b \in R$

(a) In $R, \forall a \in R : a + 0_R = 0_R + a = a$
$\Rightarrow \phi(a) = \phi(a + 0_R) = \phi(0_R + a)$
$\Rightarrow \phi(a) = \phi(a) + \phi(0_R) = \phi(0_R) + \phi(a)$
Let $\phi(a) = b \in S$. Hence $b = b + \phi(0_R) = \phi(0_R) + b$
$\Rightarrow \phi(0_R) = 0_S$
In $R, \forall a \in R : a \star 1_R = 1_R \star a = a$
$\Rightarrow \phi(a \star 1_R) = \phi(1_R \star a) = \phi(a)$
$\Rightarrow \phi(a) \star \phi(1_R) = \phi(1_R) \star \phi(a) = \phi(a)$
$\Rightarrow \phi(1_R) = 1_S$
With $\phi(-a) = -\phi(a)$, we have in $R, a + (-a) = (-a) + a = 0_R$
$\Rightarrow \phi(a + (-a)) = \phi((-a) + a) = \phi(0_R)$
$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-a) = \phi(-a) + \phi(a) = \phi(0_R) = 0_S$
$\Rightarrow \phi(-a) = -\phi(a)$
With $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$, we have in $R, a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = 1_R$
$\phi(a \star a^{-1}) = \phi(a^{-1} \star a) = \phi(1_R)$
$\Rightarrow \phi(a) \star \phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1}) \star \phi(a) = \phi(1_R) = 1_S$
$\Rightarrow \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$
(b) $\phi : R \to R, \quad \phi(a) = a^p$
$\Rightarrow \phi(a + b) = (a + b)^p = \sum_{i=0} p\binom{p}{i} a^i b^{p-1}$
And we have $p \mid \binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!i!}$ (because p is prime)
$\Rightarrow 1 \leq i \leq p - 1 : \binom{p}{i} = 0$ (because $pa = 0$)
$\Rightarrow \phi(a + b) = a^p + b^p = \phi(a) + \phi(b)$ (1)
$\Rightarrow \phi(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \phi(a)\phi(b)$ (2)

From (1) and (2) $\Rightarrow$ ring homomorphism

□

2.32. Prove Proposition 2.41

We have $a_1 \equiv a_2 \pmod{m} \Rightarrow m \mid (a_1 - a_2)$

$\Rightarrow \exists k \in R : a_1 - a_2 = k \star m$

Similarly, $\exists l \in R : b_1 - b_2 = l \star m$

$\Rightarrow a_1 - a_2 + b_1 - b_2 = (k + l) \star m$

$\Leftrightarrow m \mid (a_1 + b_1 - (a_2 + b_2))$

$\Leftrightarrow a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \equiv m$

Similarly for $a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2 \pmod{m}$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 + k \star m \\ b_1 = b_2 + k \star m \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1 \star b_1 = (a_2 + k \star m)(b_2 + k \star m) = a_2 \star b_2 + a_2 \star l \star m + k \star b_2 \star m + k \star l \star m^2$

$\Rightarrow m \mid (a_1 \star b_1 - a_2 \star b_2)$

$\Rightarrow a_1 \star b_1 \equiv a_2 \star b_2 \pmod{m}$

2.33. Prove Proposition 2.43

According to Exercise 2.32, if we have

$$\begin{cases} a' \in \bar{a} \Leftrightarrow a' \equiv a \pmod{m} \\ b' \in \bar{b} \Leftrightarrow b' \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' + b' \equiv a + b \pmod{m} \\ a' \star b' \equiv a \star b \pmod{m} \end{cases}$$

$\Rightarrow a' + b' \in \overline{a + b}$ and $a' \star b' \in \overline{a \star b}$. Hence the set is **closed**

We have $m \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow \forall a \in R, \overline{a} + \overline{m} = \overline{a + m} = \overline{a} = \overline{m + a} = \overline{m} + \overline{a}$

$\Rightarrow$ **identity element** is $\overline{m}$

Also, because R is ring, $m + (-x) \in R, x \in R$

$\forall a \in R, \overline{a} + \overline{m - a} = \overline{a + m - a} = \overline{m} = \overline{m - a} + \overline{a}$

$\Rightarrow \overline{m - a}$ is additive inverse of a

Easily see that $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} + \overline{b+c} = \overline{a+b+c} = \overline{a+b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ **associative**

$\forall a, b \in R, \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b} + \overline{a} \Rightarrow$ **commutative**

We have $a \star 1 \equiv a \pmod{m} \forall a \in R$

$\Rightarrow \overline{a} \star \overline{1} = \overline{a \star 1} = \overline{a} = \overline{1 \star a} = \overline{1} \star \overline{a}$

$\Rightarrow$ **multiplicative identity** is $\overline{1}$

$\forall a, b, c \in R, a(bc) = (ab)c \pmod{m}$

$\Rightarrow \overline{a} \star (\overline{b} \star \overline{c}) = \overline{a} \star \overline{bc} = \overline{abc} = \overline{ab} \star \overline{c} = (\overline{a} \star \overline{b}) \star \overline{c} \Rightarrow$ **associative**

And $\overline{a} \star \overline{b} = \overline{a \star b} = \overline{b \star a} = \overline{b} \star \overline{a} \Rightarrow$ **commutative**

With $\overline{a} \star (\overline{b} + \overline{b}) = \overline{a} \star \overline{b+c} = \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \overline{a} \star \overline{b} + \overline{a} \star \overline{c} \Rightarrow$ **distribute**

Hence, $R/(m)$ is a ring

2.34. Let $\mathbb{F}$ be a field and let **a** and **b** be nonzero polynomials in $\mathbb{F}[x]$

(a) Prove that $deg(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = deg(\mathbf{a}) + deg(\mathbf{b})$

Let $a = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, with $a_i \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow deg(\mathbf{a}) = n$

Let $b = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, with $a_i \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow deg(b) = m$

$\Rightarrow deg(a \cdot b) = m + n = deg(a) + deg(b)$

(b) Prove that **a** has a multiplicative inverse in $\mathbb{F}[x]$ if and only if $\eth$ is in $\mathbb{F}$, i.e., if and only if $\eth$ is a constant polynomial

With $\mathbf{a} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Suppose that **a** has multiplicative inverse in $\mathbb{F}[x]$ $\mathbf{b} = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

$$\Rightarrow \mathbf{ab} = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} = 1$$

Which means $a_0 b_0 = 1$, other coefficients is 0, so **a** is constant polynomial

(c) Prove that every nonzero element of $\mathbb{F}[x]$ can be factored into a product of irreducible polynomials. (*Hint.* Use (a), (b) and induction on the degree of the polynomial.)

(d) Let R be ring ing $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Give an example to show tha (a) is false for some polynomials **a** and **b** in $R[x]$

$a = 2x^2 + 3x + 1$, $b = 3x + 2$

$\Rightarrow ab = x^2 + 3x + 2$

$deg(ab) = 2 < 3 = deg(a) + deg(b)$

2.35, 2.36. Programming on Sagemath

2.37. Prove that the polynomial $x^3 + x + 1$ is irreducible in $\mathbb{F}_2[x]$

If $f(x) = x^3+x+1$ has any factor rather than 1 and itself, it must have degree less than 3. So we have $0, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x$ but $f(x)$ is not divided by any of them. Hence irreducible

2.38. Programming on Sagemath

2.39. The field $\mathbb{F}_7[x]/(x^2+1)$ is a field with 49 elements, which for the moment we donote by $\mathbb{F}_{49}$

Using example **2.58**, every element in $\mathbb{F}_7[x]/(x^2+1)$ has form $f(x) = a + bx$, so in $\mathbb{F}_{49}$ it has form $a + bi$ (here $i^2 = -1$)

(a) Is $2+5x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? No because $(2+5x)^8 = 1$

(b) Is $2 + x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? Yes

(c) Is $1 + x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? No because $(1 + x)^{24} = 1$

2.41. Let $\mathbb{F}$ is a finite field.

(a) Prove that there is an integer $m \geq 1$ such that if we add 1 to itself m times,

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m \text{ ones}}$$

then we get 0. Note that here 1 and 0 are the multiplicative and additive identity elements of the field $\mathbb{F}$.

Because 1 is element of $\mathbb{F}$, then $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ times}}$ always is an element of $\mathbb{F}$. And $\mathbb{F}$ is finite field, so there is $m \geq 1$ such that $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m \text{ times}}$ equals to 0 (1, 1+1, 1+1+1, ... cannot all be different)

(b) Let m be the smallest positive integer with the property described in (a). Prove that m is prime. This prime is called the

characteristic of the field $\mathbb{F}$
Suppose that m can be factor, so $m = pq$ $(1 < p, q < m) \Rightarrow \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m \text{ times}} = 0$

$$\overbrace{\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{p \text{ times}} + \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{p \text{ times}} + \cdots + \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{p \text{ times}}}^{q \text{ times}}$$

Because $\mathbb{F}$ is a finite field, $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p \text{ times}} = a \in \mathbb{F}$
$\Rightarrow q \cdot a = 0$ ($q > 1$ and a cannot be 0 because m is the smallest number that satisfies $1 + 1 + \cdots + 1 = 0$
$\Rightarrow$ contraction $\Rightarrow \mathbb{F}$ cannot be a field.
So m is a prime

13.2 Chapter 3

3.4. *Euler's phi function* $\phi(N)$ is the function defined by

$$\phi(N) = |\{0 \leq k < N : \gcd(k, N) = 1\}|$$

$\phi(p) = p - 1$.

Consider the set $\{ai_1, ai_2, \ldots, ai_{\phi(N)}\}$ is the set of numbers which are coprime with N, which means $\gcd(ai_j, N) = 1$. We prove that those elements are distinct.

Suppose that there are aj and ak, satisfying $aj \equiv ak \pmod{N}$

Because $\gcd(a, N) = 1 \Rightarrow j \equiv k \pmod{N}$. So every element is distinct.

Moreover, if $ai_j \equiv j_k \pmod{N}$, which means $j_k \neq 0$, so the set $\{ai_1, \ldots, ai_{\phi(N)}\}$ is a permutation of the set $\{i_1, \ldots, i_{\phi(N)}\}$

$$ai_1 \times ai_2 \times \cdots \times ai_{\phi(N)} \equiv i_1 \times i_2 \times \cdots \times i_{\phi(N)} \pmod{N}$$

Therefore $a^{\phi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$

3.5. Properties of Euler's phi function If p and q are distinct primes, how is $\phi(pq)$ related to $\phi(p)$ and $\phi(q)$?
We consider numbers from 1 to pq, there are pq elements
Notice that $iq = jq$ if and only if $i = q$ and $j = p$ because p and q are distinct primes
Next, we subtract the number of divisors having factor p, there are q elements $(1 \times p, 2 \times p, \cdots, q \times p)$
Next, we subtract the number of divisors having factor q, there are p elements $(1 \times q,\ 2 \times q, \cdots, p \times q)$
Here we get $pq - p - q$ elements, but remember that we have subtracted element pq twice, so we need to add 1
$\Rightarrow \phi(pq) = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1) = \phi(p)\phi(q)$ If p is prime, what is the value of $\phi(p^2)$? How about $\phi(p^j)$?
From 1 to p^j there are p^j elements, we subtract the number of divisors having factor p, those are $\{1p, 2p, \cdots, p^{j-1}p\} \Rightarrow p^{j-1}$ numbers
$\Rightarrow \phi(p^j) = p^j - p^{j-1}$ We write numbers from 1 to mn as matrix m rows and n columns

$$\begin{array}{cccc} 0m+1 & 1m+1 & \cdots & (n-1)m+1 \\ 0m+2 & 1m+2 & \cdots & (n-1)m+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0m+m-1 & 1m+m-1 & \cdots & (n-1)m+m-1 \\ 0m+m & 1m+m & \cdots & (n-1)m+m \end{array}$$

With number r that satisfies $\gcd(r, m) = 1$, we get $gcd(km+r, r) = 1$ $(k = \overline{0, n-1})$. Here $km+r$ is all numbers on r-th row, which means there are $\phi(m)$ rows, whose elements coprime with m
On those $\phi(m)$ rows, each row has $\phi(n)$ elements that coprime with n. Hence $\phi(m)\phi(n) = \phi(mn)$ From (b) we get $\phi(p_i) = p_i - 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(N) &= \phi(p_1)\phi(p_2)\cdots\phi(p_r) \\ &= (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1) \\ &= N\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \end{aligned}$$

3.6. Let N, c, and e be positive integers satisfying the conditions $\gcd(N, c) = 1$ and $\gcd(e, \phi(N)) = 1$ Explain how to solve the congruence

$$x^e \equiv c \pmod{N}$$

assuming that you know the value of $\phi(N)$
Because of $\gcd(e, \phi(N)) = 1$, we can find an integers d satisfying that $ed \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ (using Extended Euclidean Algorithm)
$\Rightarrow ed = k\phi(N) + 1$ with $k \in \mathbb{Z}$
And because of $\gcd(N, c) = 1 \Rightarrow \gcd(N, x) = 1$, and

$$c^d = \left(x^e\right)^d = x^{ed} = x^{k\phi(N)+1} = (x^k)^{\phi(N)}x$$

and we have known that $(x^k)^{\phi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$ from Exercise 3.4. Therefore we get

$$c^d \equiv x \pmod{N}$$

, we finish finding solution

3.11. Alice chooses two large primes p and q and she publishes $N = pq$. It is assumed that N is hard to factor. Alice also chooses three random numbers g, r_1, and r_2 modulo N and computes

$$g_1 \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod{N} \qquad \text{and} \qquad g_2 \equiv g^{r_2(q-1)} \pmod{N}$$

Her public key is the triple (N, g_1, g_2) and her private key is the pair of primes (p, q).

Now Bob wants to send the message m to Alice, where m is a number modulo N. He chooses two random integers s_1 and s_2 modulo N and computes

$$c_1 \equiv mg_1^{s_1} \pmod{N} \qquad \text{and} \qquad c_2 \equiv mg_2^{s_2} \pmod{N}$$

Bob sends the ciphertext (c_1, c_2) to Alice.

Decryption is extreamly fast and essy. Alice uses the Chinese remainder theorem to solve the pair of congruences

$$x \equiv c_2 \pmod{p} \qquad \text{and} \qquad x \equiv c_2 \pmod{q}$$

Prove that Alice's solution x is equal to Bob's plaintext m
First we have $c_1 \equiv mg_1^{s_1} \pmod N \equiv mg_1^{s_1} \pmod p \equiv m \pmod p$
(because $g_1^{s_1} = (g_1^{s_1 r_1})^{(p-1)} \equiv 1 \pmod p$)
Similarly, we have $c_2 \equiv m \pmod q$
The solution of congurences is

$$x \equiv c_1 qq' + c_2 pp' \pmod N$$

with $pp' + qq' = 1$
$\Rightarrow x \equiv mpp' + mqq' \equiv m(pp' + qq') \equiv m \pmod N$
We have

$$g_1 \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod N \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod p \equiv 1 \pmod p$$

$\Rightarrow p = \gcd(g_1 - 1, N)$. Similarly, $q = \gcd(g_2 - 1, N)$
From here we have recovered private keys
3.13. Find x, y such that: $xe_1 + ye_2 = 1 = gcd(e_1, e_2)$
$\Rightarrow m = c_1^x c_2^y = m^{e_1 x + e_2 y} = m \pmod N$
3.14. Because 3, 11 and 17 are primes number, $a \equiv a^3 \pmod 3$, $a \equiv a^{11} \pmod{11}$, $a \equiv a^{17} \pmod{17}$. We have system congruence

$$\begin{aligned} a &\equiv a^3 \pmod 3 \\ a &\equiv a^{11} \pmod{11} \\ a &\equiv a^{17} \pmod{17} \end{aligned}$$

Consider that $a^3 \equiv a \pmod 3$, $a^{3^2} \equiv a^3 \equiv a \pmod 3$, $\cdots$, $a^{3^i} \equiv a \pmod 3$. And $561 = 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3^1$, $a^{561} \equiv a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a \equiv a^9 \equiv a \pmod 3$.
Similarly, $a^{561} \equiv a \pmod{11}$, $a^{561} \equiv a \pmod{17}$. From system congruence:

$$\begin{aligned} a^{561} &\equiv a \pmod 3 \\ a^{561} &\equiv a \pmod{11} \\ a^{561} &\equiv a \pmod{17} \end{aligned}$$

Using CRT, $a^{561} = (187 \cdot 1 \cdot a + 51 \cdot 8 \cdot a + 33 \cdot 16 \cdot a) \pmod{561} = a \pmod{561}$ Suppose that n is even ($n \geq 4$), we have

$$(n-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} = -1 \pmod{n}$$

, but $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ for all a, which is contrary. So n must be odd. Suppose that $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ (p_i is odd prime). Because $a^{p^{e-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^e}$ and $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, we have $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$.
$\Rightarrow p^{e-1}(p-1) \mid (n-1) \Rightarrow p^{e-1} \mid (n-1)$, but $p^{e-1} \mid n$, which is contrary if $e \geq 2$. Hence e must be 1.

So $n = p_1 p_2 \cdots p_r$

3.37.

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$

$\Rightarrow \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$

If a is quadratic residue, then $a \equiv b^2 \pmod{p}$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (b^2)^{\frac{p-1}{2}} = b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

If $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

Let g be generator modulo p, then $a \equiv g^m \pmod{p}$

If m is even $\Rightarrow a \equiv g^{2k} \pmod{p} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

If m is odd $\Rightarrow a = g^{2k+1} \pmod{p} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{(2k+1)\frac{p-1}{2}} \equiv g^{p-1} g^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod{p}$, because $p-1$ is smallest number that $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

From (a) and (b) $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$, if $p = 4k+1 \Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$
If $p = 4k+3 \Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{p}$

3.38. Prove that the three parts of the quadratic reciprocity theorem are equivalent to the following three concise formulas, where p and q are odd primes

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

With $p \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = 1 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$

Similarly with $p \equiv 3 \pmod 4$ $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

First we need a lemma (**Gauss lemma**): suppose p is an odd prime, and $a \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, p) = 1$. Consider the set

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}a$$

If s of those residues are greater than $\frac{p}{2}$, then $\binom{a}{p} = (-1)^s$

Proof of lemma: Among smallest residues of

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}a$$

, suppose that

$$u_1, u_2, \cdots, u_s$$

are residues greater than $\frac{p}{2}$, and

$$v_1, v_2, \cdots, v_t$$

are residues smaller than $\frac{p}{2}$

Because $\gcd(ja, p) = 1 \forall j, 1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}$, all $u_i, v_j \neq 0 \Leftrightarrow u_i, v_j \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$. We will prove that, the set

$$\{p - u_1, p - u_2, \cdots, p - u_s, v_1, v_2, \cdots, v_t\}$$

is a permutation of $\{1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}\}$

It is clear that there are no 2 numbers u_i or 2 numbers v_j simultaneously congruent modulo p. Because if $ma \equiv na \pmod p$ and $\gcd(a, p) = 1$, then $m \equiv n \pmod p \Rightarrow$ contrast with $m, n \leq \frac{p-1}{2}$

Similarly, we see that there are no numbers $p - u_i$ congruent with v_j, so

$$\Rightarrow (p - u_1)(p - u_2) \cdots (p - u_s)v_1 v_2 \cdots v_t \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

On the other hand,

$$u_1, u_2, \cdots, u_s, v_1, v_2, \cdots, v_t$$

are smallest residues of

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}$$

, so

$$\Rightarrow u_1 u_2 \cdots u_s v_1 v_2 \cdots v_t \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$$

So $(-1)^s a^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$

And because $\gcd(p, \left(\frac{p-1}{2}\right)!) = 1 \Rightarrow (-1)^s a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^s \pmod{p}$ and $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s \pmod{p}$

Return to problem: using theorem above, we need to find the number of residues, which are greater than $\frac{p}{2}$ among $1 \cdot 2, 2 \cdot 2, \cdots, \frac{p-1}{2} \cdot 2$. Therefore we only need to know which numbers are greater than $\frac{p}{2}$

$\Rightarrow$ there are $s = \frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right] \Rightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right]}$

With $p \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}$, we have

$$\frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right] \equiv \frac{p^2-1}{8} \pmod{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$

We need a lemma: Suppose p is an odd prime, a is odd and $\gcd(a, p) = 1$, then $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{T(a,p)}$, with

$$T(a, p) = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ja}{p}\right]$$

Proof of lemma: consider smallest residues of a, $2a$, $3a$, $\cdots$, $\frac{p-1}{2} \cdot a$. As Gauss's lemma, u_1, u_2, $\cdots$, u_s, v_1, v_2, $\cdots$, v_t are residues greater and less than $\frac{p}{2}$ respectively. According to Euclidean divisor:

$$ja = p\left[\frac{ja}{p}\right] + \text{remainder}$$

, remainder is u_i or v_j. We have such $\frac{p-1}{2}$ equations and add them together

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} ja = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} p\left[\frac{ja}{p}\right] + \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{j=1}^{t} v_j$$

As we pointed out in Gauss's lemma, the set $p-u_1$, $p-u_2$, $\cdots$, $p-u_s$, v_1, v_2, $\cdots$, v_t is a permutation of the set 1, 2, $\cdots$, $\frac{p-1}{2}$

$$\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = \sum_{i=1}^{s}(p-u_i) + \sum_{j=1}^{t} v_t = ps - \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{j=1}^{t} v_t$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} ja - \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} p\left[\frac{ja}{p}\right] - ps + 2\sum_{i=1}^{s} u_i$$

From formula of $T(a,p)$, $(a-1)\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = pT(a,p) - ps + 2\sum_{i=1}^{s} u_i$

Because a, p are odd, $T(a,p) \equiv s \pmod 2$. From Gauss's lemma we finish.

Return to problem: Consider pairs (x,y), where $1 \le x \le \frac{p-1}{2}$ and $1 \le y \le \frac{q-1}{2}$, there are $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ pairs. We divide those pairs into 2 groups, depending on the magnitude of px and qy.

Because p, q are two different primes, $px \neq qy$, $\forall (x,y)$

We consider pairs with $qx > py$. With every fixed element of x ($1 \le x \le \frac{p-1}{2}$), exist $\left[\frac{qx}{p}\right]$ elements y satisfying $1 \le y \le \frac{qx}{p}$. Therefore, there are $\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right]$ pairs. When $qx < py$, similarly, there

are $\sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right]$ pairs. Because there are $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ pairs, we have equation

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$$

From definition of $T(p,q)$, we have result

$$(-1)^{T(p,q)+T(q,p)} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

3.39 Let p be a prime satisfying $p \equiv 3 \pmod 4$.
Let a be a quadratic residue modulo p. Prove that the number

$$b \equiv a^{\frac{p+1}{4}} \pmod p$$

has the property that $b^2 \equiv a \pmod p$. (*Hint.* Write $\frac{p+1}{2}$ as $1 + \frac{p-1}{2}$ and use Exercise 3.37.) This gives an easy way to take square roots modulo p for primes that are congruent to 3 modulo 4.

Chứng minh. Using Exercise 3.37, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ because a is quadratic residue modulo p. Therefore

$$b^2 \equiv a^{\frac{p+1}{2}} \equiv a^{1+\frac{p-1}{2}} \equiv a \cdot a^{\frac{p-1}{2}} \equiv a \cdot 1 \equiv 1 \pmod p$$

□

3.40. Let p be and odd prime, let $g \in \mathbb{F}_p^*$ be a primitive root, and let $h \in \mathbb{F}_p^*$. Write $p - 1 = 2^s m$ with m odd and $s \geq 1$, and write the binary expansion of $\log_g(h)$ as

$$log_g(h) = \epsilon_0 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3 + \cdots \quad \text{with} \quad \epsilon_0, \epsilon_1, \cdots \in \{0, 1\}$$

Give an algorithm that generalizes Example 3.69 and allows you to rapidly compute $\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{s-1}$, thereby proving that the first s bits of the discrete logarithm are insecure.

3.41 Let p be a prime satisfying $p \equiv 1 \pmod 3$. We say that a is a *cubic residue modulo* p if $p \nmid a$ and there is an integer c satisfying $a \equiv c^3 \pmod p$.

Algorithm 1 Algorithm to find s least significant bits of x in $g^x \equiv h \pmod p$

Require: g, h, p $(p - 1 = 2^s m)$
Ensure: s least significant bits of $x : g^x \equiv h \pmod p$
Array $\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{s-1}$
for $i = 0, \ldots, s-1$ **do**
if h is quadratic residue **then** $\epsilon_i = 0$, $h = \sqrt{h} \pmod p$
else if $\epsilon_i = 1$ **then** $h = \sqrt{g^{-1}h} \pmod p$
end if
end for

Let a and b be cubic residues modulo p. Prove that ab is a cubic residue modulo p.

Chứng minh. $a \equiv x^3 \pmod p$, $y \equiv y^3 \pmod p$. Therefore

$$ab \equiv x^3 y^3 = (xy)^3 \pmod p$$

, which is cubic residue Give an example to show that (unlike the case with quadratic residues) it is possible for none of a, b and ab to the a cubic residue modulo p

Let g be primitive root modulo p. Choose $a \equiv g^{3k+1} \pmod p$, $b \equiv g^{3k'+1} \pmod p$. Hence $ab \equiv g^{(3k+1)+(3k'+1)} \equiv g^{3(k+k')+2} \pmod p$, which is not cubic residue Let g be a primitive root modulo p. Prove that a is a cubic residue modulo p if and only if $3 \mid \log_g(a)$, where $\log_g(a)$ is the discrete logarithm of a to the base g.

Proof of sufficient condition: If a is a cubic residue modulo p, $3 \mid \log_g(a)$. Suppose $a \equiv c^3 \pmod 3$ and $c \equiv g^u = \pmod p$. Hence $a = g^3 u \pmod p \Rightarrow 3 \mid \log_g(a)$

Proof of necessary condition: If $3 \mid \log_g(a)$, a is a cubic residue modulo p. This is obviously. Suppose instead that $p \equiv 2 \pmod 3$. Prove that for every integer a there is an integerr c satisfying $a \equiv c^3 \pmod p$. In other words, if $p \equiv 2 \pmod 3$, show that every number is a cube modulo p.

Return to problem: Because $p \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow \gcd(p-1, 3) = 1$. Which means that exist element d such that $3d \equiv 1 \pmod{p-1}$. Hence, equation $x^3 \equiv a \pmod p$ has solution $a^d = x \pmod p$. So every number is a cube modulo p.

□

13.3 Chapter 4

4.1. $d = 561517$, $N = 661643$ $sig = 206484$

4.2. S and S"

4.3. $p = 212081$, $q = 128311$

$\Rightarrow d = 18408628619 \Rightarrow S = D^d \pmod N = 22054770669$

4.4. With $c = m^{e_B} \pmod{N_B}$ and $s = Hash(m)^{d_A} \pmod{N_A}$

$\Rightarrow c^{d_B} = m^{e_B \cdot d_B} \pmod{N_B} = m$ and $s^{e_A} = Hash(m)^{d_A \cdot e_A} \pmod{N_A} = Hash(m)$. Hence this method works

4.5. $A = g^a \pmod p = 2065$ $S_1 = g^k \pmod p = 3534$

$S_2 = (D - a \cdot S_1)K^{-1} \pmod{p-1} = 5888$

$\Rightarrow$ signature is $(S_1, S_2) = (3534, 5888)$

4.6. $A^{S_1} \cdot S_1^{S_2} \equiv g^D \pmod p$

$\Rightarrow (S_1^{"}, S_2^{"})$ is valid signature.

4.8. $S_1 = S_1' = g^k \pmod p$, from here Eve can know at first glance that the same random element k is used $S_2 = (D - aS_1)k^{-1} \pmod{p-1}$, $S_2' = (D' - aS_1')k^{-1} \pmod{p-1}$

$\Rightarrow S_2 - S_2' \equiv (D - D')k^{-1} \pmod{p-1}$ (as $aS_1 = aS_2$)

$\Rightarrow k = (D - D')(S_2 - S_2')^{-1} \pmod{p-1}$

Here we get $D - aS_1 = S_2 k \pmod{p-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = (D - S_2 k)S_1 - 1 \pmod{p-1} \\ a = (D' - S_2' k)S_1^{-1} \pmod{p-1} \end{cases}$$

4.9. $p \equiv 1 \pmod q$, $1 \le a \le q-1$, $A = g^a \pmod p$, $S_1 = (g^k \bmod p) \bmod q$, $S_2 = (D + aS_1)k^{-1} \pmod q$

Verify: $V_1 = D \cdot S_2^{-1} \pmod q$, $V_2 = S_1 S_2^{-1} \pmod q$. We need to prove that $(g^{V_1} \cdot A^{V_2} \bmod p) \bmod q = S_1$

Here we have

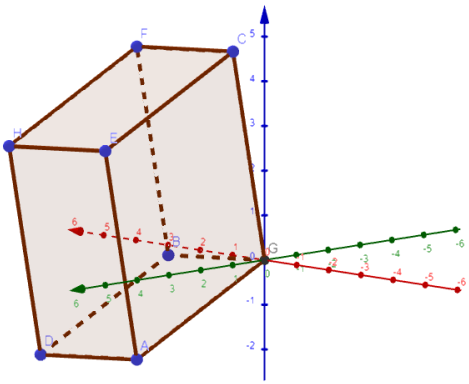
$$\begin{aligned} g^{V_1} \cdot A^{V_2} &\equiv g^{D \cdot S_2^{-1}} \cdot g^{aS_1 S_2^{-1}} \pmod{p} \\ &\equiv g^{(D+aS_1)S_2^{-1}} \pmod{p} \\ &\equiv g^k \pmod{p} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g^{V_1} A^{V_2} \bmod p) \bmod q = S_1$$

4.10. $(p, q, g) = (22531, 751, 4488)$. Public key $A = 22476$
Not valid Not valid
4.11. $A = g^a \pmod{p}$. $A = 31377$, $g = 21947$, $p = 103687 \Rightarrow a = 602$
$S_1 = (g^k \bmod p) \bmod q = 439$
$S_2 = (D + aS_1)k^{-1} \pmod{q} = 1259$

13.4 Chapter 7

7.7. $\det(L) = \text{Vol}(\mathcal{F})$
7.43. $t = b_1 b_2 / \|b_1\|^2$ and $b_2^* = b_2 - tb_1$
$\Rightarrow b_2^* \cdot b_1 = b_1(b_2 - tb_1) = b_1 b_2 - t\|b_1\|^2 = b_1 b_2 - \frac{b_1 b_2}{\|b_1\|^2} \cdot \|b_1\|^2 = 0$
Hence $b_2^* \perp b_1$ and b_2^* is the projection of b_2 onto the orthogonal complement of b_1
7.44.
$\|a - tb\|^2 = (a-tb)^2 = a^2 - 2abt + t^2 b^2 = \|a\|^2 + t^2\|b\|^2 - 2abt \geq 0$
$\Leftrightarrow a - tb = 0 \Rightarrow t = \frac{ab}{\|b\|^2}$ $(a-tb) \cdot b = ab - t\|b\|^2 = ab - \frac{ab}{\|b\|^2} \cdot \|b\|^2 = 0$.
Therefore $a - tb$ is the projection of a onto the orthogonal complement of b
7.45.
$v_1 = (14, -47)$, $v_2 = (-362, -131)$, 6 steps $v_1 = (14, -47)$, $v_2 = (-362, -131)$, 6 steps $v_1 = (147, 330)$, $v_2 = (690, -207)$, 7 steps
7.46. $W^\perp$ is the orthogonal complement of W in $V \Rightarrow \vec{z} \in W^\perp$, $\vec{z} \cdot \vec{y} = 0, \forall \vec{y} \in W$
With $\vec{z_1}, \vec{z_2} \in W^\perp \Rightarrow \vec{z_1} \cdot \vec{y} = \vec{z_2} \cdot \vec{y} = 0, \forall \vec{y} \in W$



Hình 13.1: Exercise 7.7 - Fundamental domain of L

$\Rightarrow (\vec{z_1} + \vec{z_2}) \cdot \vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{z_1} + \vec{z_2} \in W^{\perp}$
$\alpha\vec{z_1} \cdot \vec{y} = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha\vec{z_1} \in W^{\perp}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ We have 2 methods

First method: Show that $W \cup W^{\perp} = \{\vec{0}\}$. If $\vec{u}$ belongs to both W and $W^{\perp}$, then $< u, u >= 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Now denote $U = W + W^{\perp}$, we prove that $W = V$. We can choose an orthonormal basis in U and extend it to orthonormal basis in V. Thus, if $U \neq V$, there is an element $\vec{e}$ in the basis of V orthonormal to U. Since U contains W, e is orthonormal to $U \Rightarrow \vec{e} \in W^{\perp}$. The latter is a subspace of W, therefore e is in W, which is contrary. *Second method*: Let $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ be an orthonormal basis of the subspace W. For each $v \in V$, let

$$P(v) = \sum_{j=1}^{k} < v, e_j > e_j$$

Algorithm 2 Gauss's latice reduction algorithm

while True **do**
  if $\|v_2\| < \|v_1\|$ **then**
    swap v_1 and v_2
    $m \leftarrow \lfloor v_1 \cdot v_2 / \|v_1\|^2 \rceil$
  end if
  if $m = 0$ **then**
    return (v_1, v_2)
  end if
    Replace v_2 with $v_2 - mv_1$
end while

$$\Rightarrow (\forall v \in V) : v = \underbrace{P(v)}_{\in W} + \underbrace{(v - P(v))}_{\in W^\perp}$$

The fact that $v - P(v) \in W^\perp$ is:
  if $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ then

$$\begin{aligned} < v - P(v), e_j > &=< v - \sum_{l=1}^{k} < v, e_l > e_l, e_j > \\ &=< v, e_j > - < v, e_j >= 0 \end{aligned}$$

Since $\{e_1, \cdots, e_k\}$ is a basic of W, this prove that $v - P(v) \in W^\perp$
  $\|v\|^2 =< v, v >= (aw + bw')^2 = a^2w^2 + 2abww' + b^2w'^2 = a^2\|w\|^2 + 0 + b^2\|w'\|^2 = a^2\|w\|^2 + b^2|w'\|^2$

Phần VIII

Lịch sử toán học

Trong lịch sử, từ xa xưa con người đã biết tính toán, sử dụng chúng cho công việc hằng ngày.

Chúng ta không biết ai là người đầu tiên phát minh ra lịch, cũng như cách tính toán để phân chia ruộng đất, tài sản trong các nền văn minh cổ. Những điều đó được đúc kết theo kinh nghiệm qua hàng chục, thậm chí hàng trăm năm tri thức con người.

Cho tới khi những nhân vật sau (và nhiều nhân vật tương tự khác) đi du lịch Ai Cập và phương đông (ý mình là đi du học).

Đầu tiên phải nhắc tới Euclid, người đã quá quen thuộc với học sinh phổ thông với tiên đề Euclid. Hệ tiên đề Euclid đề ra trở thành cơ sở cho hình học. Bộ sách *Elements* của ông được cho là bộ sách giáo khoa đầu tiên trên thế giới và những gì ghi trong đó khá giống với những gì được giảng dạy ở trường học chúng ta ngày nay.

Nhưng ông đã không lường trước được 1 điều: thế hệ sau đã "thêm mắm dặm muối" và biến đổi hình học của ông thành hình học Phi-Euclid. Từ đó mở ra những khả năng lớn hơn của toán học.

Pythagoras: định lý Pythagoras trong tam giác vuông có lẽ là định lý đầu tiên mà học sinh tiếp cận. Phát biểu rất đơn giản:

Định lý 13.1 (Định lý Pythagoras)**.** Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

Nói cách khác, tam giác có 2 cạnh góc vuông lần lượt là a và b, cạnh huyền độ dài là c thì

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Thật ra trước thời Pythagoras rất lâu, người Ai Cập đã biết tới phương pháp này. Có nhiều bằng chứng về các cuộn giấy papyrus ghi lại các bộ số nguyên (a, b, c) mà $a^2 + b^2 = c^2$ được tìm thấy khi khai quật.

Tuy nhiên thời đó con người chỉ làm việc với các số nguyên, chính xác hơn là các số tự nhiên vì chúng "tự nhiên" xuất hiện trong đời sống.

Pythagoras là người đầu tiên nhắc tới **proof** (chứng minh) trong toán học. Một phát biểu, định lý chỉ đúng khi có một chứng minh đúng đắn cho nó. Các bước suy luận trong chứng minh dựa trên một

hệ tiên đề (axiom) cho trước. Các tiên đề này hiển nhiên đúng, từ đó các suy luận chính xác sẽ cho kết quả chính xác.

Cho tới khi Fermat phán:

Định lý 13.2 (Định lý cuối cùng của Fermat)**.** Không tồn tại một cách phân tích tam thừa thành tổng 2 tam thừa, tứ thừa thành tổng 2 tứ thừa, hay tổng quát hơn

Với mọi số nguyên $n \geq 3$, không tồn tại bộ số nguyên (a, b, c) sao cho

$$a^n + b^n = c^n$$

Và cú lừa có lẽ là lớn nhất thời đại: *"Tôi đã tìm được chứng minh cho mệnh đề kỳ diệu này nhưng lề sách quá chật không thể viết được"*.

Vâng, cái chứng minh kỳ diệu mà ông nói đã khiến các nhà toán học thiên tài bế tắc trong suốt hơn 300 năm, sử dụng nhiều công cụ phức tạp không có ở thời Fermat và hoàn thiện bởi bài báo 200 trang của Andrew Wiles.

Nghĩa là 200 lề sách cũng không viết đủ chứng minh cho định lý cuối cùng của Fermat!!!

Phần này mình làm vì đam mê tìm hiểu lịch sử toán. Ở đây ghi lại cuộc đời và công trình của các nhà toán học lớn trên thế giới suốt chiều dài lịch sử.

Phần này lấy cảm hứng từ quyển *Thiên tài và số phận* và *Định lý cuối cùng của Fermat* của thầy Lê Quang Ánh, thông tin tham khảo dựa trên nhiều nguồn (chủ yếu là quyển *Men of Mathematics* của E.T.Bell).

Tuy nhiên thông tin về cuộc đời của các nhà toán học đã có khá nhiều, mình sẽ trình bày theo cách hiểu của bản thân và đôi khi tập trung nhiều vào các công trình mức cơ sở.

Ngoại trừ phần lịch sử của nhà toán học, mình sẽ trình bày các định lý, khái niệm, ứng dụng của họ theo cách viết, cách trình bày của toán học hiện đại ngày nay để dễ tiếp cận.

Chương 14

Euclid

Lúc mình học cấp 2, tiên đề Euclid được học là một trong 5 tiên đề hình học của Euclid. Nội dung tiên đề đó như sau:

Tiên đề (Tiên đề Euclid)**.** Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng cho trước, ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Trong hình học Euclid, hình được vẽ trên *mặt phẳng*. Ở đó, với 2 điểm phân biệt ta vẽ được duy nhất một đường thẳng đi qua 2 điểm đó.

Nếu chúng ta chỉ lấy phần ở giữa 2 điểm, ta có *đoạn thẳng*. Nếu ta lấy phần ở ngoài 2 điểm nhưng chỉ một phía (đường thẳng kéo dài 2 phía) ta có nửa đường thẳng (hay còn gọi là tia).

Chúng ta có 2 công cụ để vẽ hình: thước và compa. Từ 2 công cụ này ta có thể vẽ được rất nhiều hình dạng như chia đôi góc (phân giác), chia đôi cạnh (lấy trung điểm), vẽ đường tròn, đường thẳng.

Tuy nhiên chúng lại có giới hạn: không thể chia 3 góc, hay không thể vẽ được hình đa giác đều 7 cạnh.

Những bài toán nhìn có vẻ đơn giản nhưng phải tới nhiều thế hệ sau, con người mới tìm được cách chứng minh rằng một hình nào đó có dựng được bằng thước và compa hay không.

Tiên đề là những mệnh đề mà ta thừa nhận tính đúng đắn của nó không cần chứng minh. Tuy nhiên sự đúng đắn phải được kiểm nghiệm từ thực tiễn. Cơ sở của hình học Euclid gồm hệ các tiên đề làm nền móng cho các chứng minh toán học về sau.

Chương 15

Georg Cantor

Nhà toán học vĩ đại bị vùi lấp trong sự bảo thủ - L.Q. Dũng

15.1 Dẫn nhập

Con người luôn tìm tòi, học hỏi, sáng tạo để tiến lên. Tuy nhiên luôn tồn tại những định chế bảo thủ, cố chấp theo lối mòn kìm hãm sự phát triển của những thiên tài, những ý tưởng cách mạng. Cantor có lẽ đã sinh sai thời, hoặc những phát kiến của ông quá vượt trội so với thời đại, khiến những định chế cấp cao khó lòng chấp nhận.

Georg Cantor (1845-1918), người được thầy Lê Quang Ánh gọi là *người chế ngự vô cực*, là nhà toán học vĩ đại mà mình rất nể phục.

Khi học về tổ hợp, các phương pháp đếm ở phổ thông, thầy giáo bảo lớp mình "đếm" thử xem, số lượng phần tử của tập hợp $\mathbb{N}$ và $\mathbb{Z}$ cái nào nhiều hơn. Ban đầu ai cũng nghĩ rằng $\mathbb{Z}$ lớn hơn vì rõ ràng $\mathbb{N}$ là tập con của $\mathbb{Z}$. Tuy nhiên thầy đã giải thích như sau:

Chúng ta "móc nối" giữa một phần tử thuộc $\mathbb{N}$ và một phần tử thuộc $\mathbb{Z}$ theo quy tắc

- Ta ghép một số chẵn của $\mathbb{N}$ với một và chỉ một số dương của $\mathbb{Z}$. Ví dụ $0 \to 0$, $2 \to 1$, $4 \to 2$, và tương tự;

- Ta ghép một số lẻ của $\mathbb{N}$ với một và chỉ một số âm của $\mathbb{Z}$. Ví dụ $1 \to -1$, $3 \to -2$, $5 \to -3$, và tương tự.

Thật kỳ lạ, nếu theo quy tắc này, với mọi số thuộc $\mathbb{N}$ ta luôn tìm được duy nhất một người bạn bên $\mathbb{Z}$. Ngược lại với mỗi số thuộc $\mathbb{Z}$ ta cũng tìm ngược lại được một người đồng hành bên $\mathbb{N}$. Nói theo toán học thì đây là một song ánh. Như vậy hai tập hợp có số phần tử (lực lượng) bằng nhau.

Về sau mình biết được người nghĩ ra phương pháp này là Cantor. Xét theo thời đó, đây là một phát kiến bất ngờ gây tiếng vang lớn thời đó.

Chúng ta học đếm từ nhỏ: đếm 1, 2, 3 viên bi; đếm 1, 2, 3 quả táo; vân vân. Khi một tập hợp có hữu hạn phần tử, ta đếm được số lượng phần tử của tập hợp đó. Nhưng nếu là một tập vô hạn thì sao? Chúng có đếm được không? Mà đếm là sao?

Chúng ta quay lại nguồn gốc toán học. Các con số đã được sử dụng từ xa xưa, nhất là các số tự nhiên bởi vì chúng ... tự nhiên xuất hiện. Chúng ta đếm số lượng viên bi, số lượng quả táo thông qua các số tự nhiên, mà tập hợp $\mathbb{N}$ là vô hạn. Chúng ta cứ đếm lên 1, rồi lại đếm lên 1, cứ như vậy mãi mãi. Như vậy có thể thấy tập $\mathbb{N}$ là tập vô hạn đếm được.

Cantor đã chỉ ra rằng, một tập hợp vô hạn gọi là đếm được nếu tồn tại một song ánh từ $\mathbb{N}$ tới nó. Ngược lại thì là tập không đếm được. Quay lại vấn đề về tập $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{N}$ ban nãy thì song ánh từ $\mathbb{Z}$ tới $\mathbb{N}$ (nếu ϕ là song ánh thì ánh xạ ngược ϕ^{-1} cũng là song ánh) là:

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & z \geq 0 \\ -1 - 2z, & z < 0 \end{cases}$$

Bằng lý luận tương tự, tập hợp số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ cũng là tập đếm được do có song ánh từ $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tới $\mathbb{Q}$ (tử số và mẫu số).

15.2 Cantor tiến xa

Bây giờ chúng ta xem xét tập $\mathbb{R}$, nơi hội tụ của vô số anh hào hữu tỷ, vô tỷ, siêu việt, v.v. Chúng ta không thể kiểm soát các số vô tỷ, đơn giản vì chúng không có cấu trúc đặc biệt gì cho chúng. Chẳng hạn như $\mathbb{Z}$ rời rạc kéo dài về 2 phía, hoặc $\mathbb{Q}$ là tích Descartes của $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{N}$. Cantor sẽ giúp chúng ta gỡ bỏ những rắc rối này.

Đầu tiên, Cantor chứng minh rằng tập $\mathbb{R}$ là tương đương khoảng $(0,1)$. Chúng ta dễ thấy hàm số $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ cho bởi công thức $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ là song ánh. Như vậy công việc cần làm là chứng minh không tồn tại song ánh từ khoảng $(0,1)$ tới $\mathbb{N}$ nữa là xong. Khi đó $(0,1)$ sẽ là tập không đếm được.

Cantor đưa ra hai phép chứng minh, cả hai đều chưa từng có và gây ra tiếng vang lớn thời đó.

Phương pháp đường chéo. Giả sử $(0,1)$ là tập đếm được, nhưng vậy tồn tại song ánh từ $\mathbb{N}$ tới $(0,1)$. Cantor chứng minh toàn ánh không xảy ra.

Với mọi số tự nhiên n, ta xét các số thực khác nhau thuộc $(0,1)$

$$\begin{aligned}
1 &\to a_1 = 0.a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\dots \\
2 &\to a_2 = 0.a_{21}a_{22}\dots a_{2n}\dots \\
&\dots \\
i &\to a_i = 0.a_{i1}a_{i2}\dots a_{in}\dots \\
&\dots \\
n &\to a_n = 0.a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn}\dots
\end{aligned}$$

Bây giờ ta chọn số $b = 0.b_1b_2\dots b_n\dots$ sao cho $b_i \neq a_{ii}$. Nghĩa là b khác a_i ở vị trí thứ i, từ đó $b \neq a_i$ với mọi a_i. Nhưng như vậy thì không có n nào là biến thành b. Vậy không tồn tại toàn ánh và như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Phương pháp dãy các khoảng kín bị chặn lồng vào nhau. Như trên, ta vẫn giả sử tập $(0,1)$ đếm được. Khi đó tồn tại song ánh từ $(0,1)$

tới $\mathbb{N}$, và do vậy ta có thể liệt kê (một cách vô hạn) các phần tử của $(0,1)$ như việc viết các số tự nhiên:

$$I = (0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Đầu tiên ta chọn một khoảng kín I_1 trong I sao cho $x_1 \notin I_1$. Sau đó ta chọn một khoảng kín I_2 trong I_1 sao cho $x_2 \notin I_2$. Cứ tiếp tục như vậy ta được dãy các khoảng kín lồng vào nhau

$$\ldots I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq I_2 \subseteq I_1 \subseteq I$$

sao cho $x_n \notin I_n$ với mọi số tự nhiên n. Theo tính chất của dãy các khoảng kín bị chặn lồng vào nhau thì giao của tất cả I_k $(k = 1, 2, \ldots)$ khác rỗng. Hay nói cách khác tồn tại $\alpha \in I_n$ với mọi số tự nhiên n. Khi đó $\alpha \neq x_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n$, nghĩa là α khác với mọi phần tử được liệt kê ở trên. Điều này vô lý vì $\alpha \in I_n$ nên $\alpha \in I$. Như vậy tập $(0,1)$ là không đếm được. □

Từ chứng minh trên ta có định lý Cantor:

Định lý 15.1. Tập hợp các số vô tỷ không đếm được.

15.3 Thiên tài và bi kịch

Như đầu bài đã nói, những phát kiến vượt quá thời đại thường bị những phe phái bảo thủ chống đối và kìm hãm phát triển. Người thầy cũ, cũng là gây nên vết thương đau đớn nhất cho Cantor là nhà toán học Leopold Kronecker (1823 - 1891).

Leopold Kronecker thường được biết đến với ký hiệu Leopold Kronecker trong thặng dư chính phương (như Legendre hay Jacobi). Ông là nhà toán học người Đức nổi tiếng là bảo thủ. Ông thậm chí còn cho rằng *"Thượng Đế làm ra số nguyên, tất cả còn lại là do con người."* . Theo cách nói của ông, những gì không được xây dựng trên cơ sở các số nguyên đều là lố bịch, vớ vẩn. Và giải tích tất nhiên là nạn nhân của định kiến này. Giải tích do Wierstrass tạo ra như cái gai trong mắt ông vì giải tích liên quan đến sự liên tục, tới những

thứ vô cùng nhỏ như trong ngôn ngữ $\delta - \varepsilon$ của Cauchy, điều mà Kronecker cũng thấy không ưa. Nhưng mà, thưa Kronecker tài ba, từ thời Pythargoras đã tìm ra số vô tỉ $\sqrt{2}$. Như vậy nếu ông từ chối lý thuyết tập hợp của Cantor, thì có phải ông vừa quăng sự phát triển toán học hàng thế kỷ về với gốc rễ của nó? Sự thật là đúng như vậy. Nếu phủ nhận lý thuyết tập hợp của Cantor cũng chính là phủ nhận sự tồn tại của các số vô tỉ (theo lời Cantor).

Nhưng thế lực của Kronecker lúc đó quá mạnh. Còn Cantor chỉ là giảng viên ở một trường đại học hạng hai, luôn muốn có nhiệm sở tại trung tâm khoa học của Đức - Đại học Berlin. Kronecker thậm chí còn dùng quyền lực gây ảnh hưởng lên các tòa soạn khiến các bài báo của Cantor không được đăng ở các tạp chí uy tín mà chỉ có thể đăng ở các tạp chí hạng thấp. Cuộc sống chật vật khó khăn, cộng thêm áp lực trong thời gian dài không thể chứng minh *giả thiết về sự liên tục* đã làm Cantor kiệt sức.

Hơn thế nữa, ông trời có vẻ rất thích đùa giỡn với những thiên tài. Năm 1899, người con trai út của ông - người con ông yêu thương nhất - đột ngột qua đời. Chấn động đó làm ông đột quỵ. Sau đó ông cứ nhập viện, xuất viện nhiều lần và cuối cùng rời nhiệm sở trong tình trạng gần như mất trí.

Tuy nhiên, chân lý của ông, lý thuyết của ông lúc này đã được đón nhận khắp mọi nơi sau chiến thắng của phe David Hilbert, người được gọi là nhà thông thái cuối cùng của thế kỷ 20. Lý thuyết của Cantor ban đầu đã được các nhà toán học tài năng thời đó ủng hộ như Dedekind, Wierstrass, Hilbert, ... Tuy nhiên phe bảo thủ của Kronecker quá mạnh nên sự giúp đỡ của họ cho Cantor không đủ để thắng phe bảo thủ. Và rồi cái gì cần tới cũng phải tới. Những suy luận đúng đắn, những lập luận chặt chẽ sẽ mang tới kết quả đúng đắn, dù nó có khó tin tới đâu đi nữa. Các nhà toán học cuối cùng cũng đi tới kết luận rằng lý thuyết tập hợp của Cantor là mũi tên vững chắc mở đường cho toán học phát triển.

Cantor đã ra đi mãi mãi tại bệnh viện vào ngày 6 tháng 1 năm 1918, để lại cho đời sau nhiều ý tưởng đột phá. Hilbert đã từng nói về lý thuyết của Cantor rằng *"Đó là một sản phẩm trí tuệ tinh tế nhất của một thiên tài Toán học, một trong thành tựu cao cấp nhất*

mà trí tuệ con người có thể đạt được." (Burton). Hilbert cũng nói thêm rằng *"Không ai có thể ngăn cấm chúng ta bước vào thế giới kỳ diệu mà Cantor đã tạo ra."* (Dunham).

Phần IX

Mật mã học

Chương 16

AES

Phần này tham khảo chính từ [4].

AES biến đổi theo khối 128 bit, sử dụng mô hình mạng SPN.

Bốn phép biến đổi chính là Add Round Key, Substitute Bytes, Shift Rows và Mix Columns.

Quá trình giải mã sử dụng phép biến đổi ngược của 4 phép biến đổi trên là Inverse Sub Bytes, Inverse Shift Rows, Inverse Mix Columns. Đối với Add Row Key bản thân là phép xor nên phép biến đổi ngược là chính nó.

AES hỗ trợ key với các kích thước: 128 bit, 192 bit và 256 bit. AES dùng hàm Expand Key để mở rộng khóa thành 44 word 32 bit với key 128 bit thành 11 cụm khóa con. Mỗi 4 word làm tham số cho một phép Add Row Key.

Mỗi block bản rõ 16 byte $p_0, p_1, \ldots, p_{15}$ được tổ chức dưới dạng một ma trận 4×4 (state)

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 & p_7 \\ p_8 & p_9 & p_{10} & p_{11} \\ p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & s_{03} \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{30} & s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

- Các phép biến đổi Add Round Key, Substitute Bytes, Shift Rows, Mix Columns được thực hiện trên ma trận 4×4 này
- Các phép tính số học trong AES được thực hiện trong $GF(2^8)$ với đa thức tối giản là $f(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$

16.1 Substitute Bytes

16.1.1 Substitute Bytes

Ta sử dụng một bảng tra cứu 16×16 (S-box).

Bước 1 điền các số từ 0 tới 255 theo từng hàng

Bước 2 thay thế mỗi byte trong bảng bằng nghịch đảo trong $GF(2^8)$. Quy ước $(00)^{-1} = 00$

Bước 3 với mỗi byte trong bảng, ta ký hiệu 8 bit là $b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$. Thay thế mỗi b_i bằng b'_i như sau

$$b'_i = b_i \oplus b_{(i+4) \bmod 8} \oplus b_{(i+5) \bmod 8} \oplus b_{(i+6) \bmod 8} \oplus b_{(i+7) \bmod 8} \oplus c_i$$

với c_i là bit thứ i của số $0x63$.

Việc tính trên tương đương với phép nhân trên ma trận $GF(2)$ là $B' = XB + C$

$$\begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \\ b'_5 \\ b'_6 \\ b'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận X là ma trận khả nghịch, do đó phép biến đổi S-box là song ánh (one-to-one và onto mapping).

Dựa vào bảng S-box, Substitute Bytes thực hiện như sau: mỗi byte trong ma trận state S dưới dạng thập lục phân là xy sẽ được thay bằng giá trị ở hàng x và cột y của S-box.

16.1.2 Inverse Sub Bytes

Ta cần xây dựng bảng Inverse Sub Bytes (IS-box).

Việc xây dựng bảng này giống với bảng S-box ở bước 1 và 2. Tại bước 3:

$$b_i = b'_{(i+2) \bmod 8} \oplus b'_{(i+5) \bmod 8} \oplus b'_{(i+7) \bmod 8} \oplus d_i$$

với d_i là bit thứ i của số $0x05$.

16.1.3 Ý nghĩa của Substitute Bytes

Bảng S-box dùng để chống lại known-plaintext và là bước duy nhất trong 4 bước không có quan hệ tuyến tính.

16.2 Shift Rows

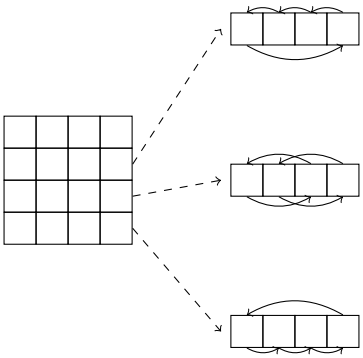
16.2.1 Shift Rows

Trong Shift Rows, các dòng của ma trận state được biến đổi như sau:

- Dòng thứ nhất giữ nguyên
- Dòng 2 dịch vòng trái 1 ô
- Dòng 3 dịch vòng trái 2 ô
- Dòng 4 dịch vòng trái 3 ô

16.2.2 Inverse Shift Rows

Các dòng thứ 2, 3, 4 dịch phải tương ứng 1, 2, 3 ô.



16.2.3 Ý nghĩa

Xáo trộn các byte để tạo ra các cột cho Mix Columns.

16.3 Mix Columns

16.3.1 Mix Columns

Mix cols biến đổi từng cột của ma trận state một cách độc lập bằng phép nhân đa thức. Giả sử cột đầu tiên của ma trận state viết dưới dạng đa thức là

$$f(z) = s_{00}z^3 + s_{10}z^2 + s_{20}z + s_{30}$$

với $z \in GF(2^8)$

Khi đó $f(z)$ sẽ được nhân với $a(z) = 3z^3 + z^2 + z + 2$ (tất cả hệ số, phép cộng và nhân thực hiện trên $GF(2^8)$) và sau đó modulo cho $n(z) = z^4 + 1$.

Bốn byte hệ số của kết quả sẽ thay thế cho 4 byte tương ứng trong cột. Nếu viết dưới dạng ma trận, ta có

$$\begin{bmatrix} s'_{00} \\ s'_{10} \\ s'_{20} \\ s'_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{00} \\ s_{10} \\ s_{20} \\ s_{30} \end{bmatrix}$$

Lưu ý rằng các số 01, 02, 03 tuy viết dưới dạng thập phân nhưng khi tính toán phải ở dạng $GF(2^8)$. Việc sử dụng 1, 2, 3 giúp tăng tốc độ tính toán vì 1 và 2 chỉ cần phép dịch bit, còn 3 là xor của 1 và 2.

16.3.2 Inverse Mix Columns

Lúc này ma trận nghịch đảo có dạng

$$\begin{bmatrix} 0E & 0B & 0D & 09 \\ 09 & 0E & 0B & 0D \\ 0D & 09 & 0E & 0B \\ 0B & 0D & 09 & 0E \end{bmatrix}$$

16.3.3 Ý nghĩa

Mỗi cột mới chỉ phụ thuộc cột ban đầu. Cùng với sự kết hợp Shift Rows sau 1 vài vòng biến đổi, 128 bit kết quả phụ thuộc vào tất cả 128 bit ban đầu. Từ đó tạo ra tính khuếch tán (diffusion).

16.4 Add Round Key

16.4.1 Add Round Key

128 bit của ma trận state được XOR với 128 bit của khóa con từng vòng (4 dword 32 bit). Phép biến đổi ngược của Add Round Key là chính nó.

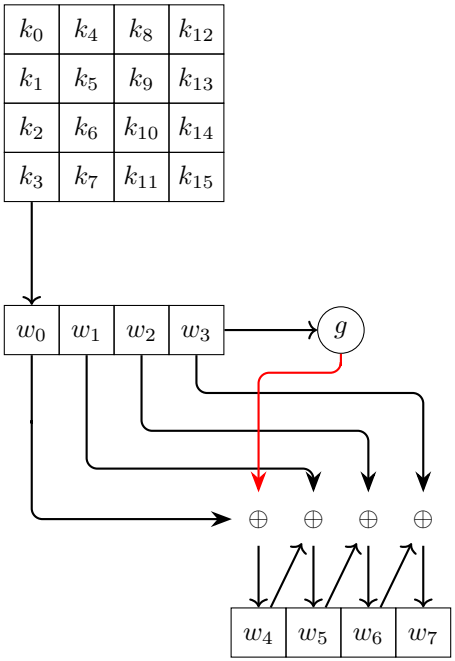
16.4.2 Ý nghĩa

Sự kết hợp với khóa tạo ra tính làm rối (confusion).

16.5 Expand Key

16.5.1 Expand Key

Input của thao tác Expand Key là 16 byte (4 word) của khóa, sinh ra 1 mảng 44 word (176 byte) sử dụng cho 11 vòng AES, mỗi vòng 4 word.



Từ 4 word đầu vào $w_0w_1w_2w_3$, lần lặp đầu sinh ra $w_4w_5w_6w_7$,

lần lặp thứ hai sinh ra $w_8 w_9 w_{10} w_{11}$, ...

if $i \bmod 4 = 0$ **then**
  $g \leftarrow SubWord(RotWord(w_{i-1})) \oplus Rcon[i/4]$
  $w_i = w_{i-4} \oplus g$
else
  $w_i = w_{i-4} \oplus w_{i-1}$
end if

Trong đó,

- *RotWord* dịch vòng trái 1 bit, nghĩa là $b_0 b_1 b_2 \rightarrow b_1 b_2 b_0$.
- *SubWord* thay mỗi byte trong word bằng bảng S-box
- *Rcon* là 1 mảng hằng số gồm 10 word tương ứng với 10 vòng AES. 4 byte của một phần tử $Rcon[j]$ là $RC[j], 0, 0, 0$ với $RC[j]$ là mảng 10 byte như sau

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$RC[j]$	1	2	4	8	10	20	40	80	18	36

16.5.2 Ý nghĩa của Expand Key

Dùng để chống lại known-plaintext (giống Sub Bytes dùng S-box). Đặc điểm của Expand Key gồm:

- Biết một số bit của khóa hay khóa con không thể tính được các bit còn lại
- KHÔNG THỂ tính ngược
- Khuếch tán: mỗi bit của khóa chính tác động lên tất cả khóa con

16.6 Kết luận

Mã hóa AES đơn giản và có thể chạy trên các chip 8 bit.

AES cung cấp 3 biến thể cho độ dài khóa là:

- 128 bit: 44 word 4 byte cho 10 vòng (11 lần ARK)

- 192 bit: 52 word 4 byte cho 12 vòng (13 lần ARK)
- 256 bit: 60 word 4 byte cho 14 vòng (15 lần ARK)

Chương 17

Magma

Hệ mật mã Magma được chính phủ Xô Viết chọn làm chuẩn mã hóa. Cũng giống như hệ mật mã DES, Magma sử dụng mô hình Feistel cho các vòng mã hóa, được định nghĩa trong GOST 34.12-2015 và còn được đặt tên là GOST 28147-89.

Phần này tham khảo chính từ [5].

Độ dài khóa là 256 bit. Độ dài khối là 64 bit. Magma biến đổi trên 32 vòng để cho ra ciphertext.

Magma thực hiện biến đổi trên 32 vòng Feistel. Khối đầu vào 64 bit được chia thành 2 nửa trái phải, mỗi nửa 32 bit.

17.1 Key schedule

Khóa 256 bit được chia thành 8 cụm khóa con, mỗi khóa con 32 bit.

Nếu ta ký hiệu 256 bit của khóa là $k_0k_1 \dots k_{254}k_{255}$ thì ta có các khóa con là

$$\underbrace{k_0 \dots k_{31}}_{K_0}\underbrace{k_{32} \dots k_{63}}_{K_1} \dots \underbrace{k_{224} \dots k_{255}}_{K_7}$$

Từ vòng 1 tới 24 sử dụng lần lượt các khóa K_0, K_1, ..., K_7 rồi lặp lại thứ tự đó.

Từ vòng 24 tới 32 sử dụng theo thứ tự ngược lại, từ K_7, K_6, ..., K_0.

17.2 Round function

Như ta đã biết, trong mô hình Feistel, mỗi khối plaintext được chia thành 2 nửa trái phải (L_0, R_0). Sau đó ở mỗi vòng biến đổi thì

$$L_{i+1} = R_i, \quad , R_{i+1} = L_i \oplus f(R_i, K_i)$$

với $i = 0, 1, \ldots$ và K_i là khóa con ở vòng i.

Hàm f của Magma khá đơn giản, bao gồm 3 động tác là cộng modulo 2^{32}, SBox và xoay 11 bit.

Đối với việc cộng modulo 2^{32}, ta xem block R_i và K_i như những số 32 bit, cộng chúng lại và modulo 2^{32}. Nghĩa là $(R_i + K_i) \bmod 2^{32}$.

Đặt $T_i = (R_i + K_i) \bmod 2^{32}$. Như vậy T_i có 32 bit. Ta chia 32 bit này thành 8 cụm 4 bit. Ứng với mỗi cụm 4 bit chúng ta cho qua một hoán vị. Như vậy cần 8 hoán vị (SBox). SBox được sử dụng chung cho tất cả vòng.

Theo wiki thì SBox có thể bí mật. Tuy nhiên việc mã hóa và giải mã cần sử dụng SBox giống nhau. Do đó thiết bị mã hóa và giải mã có cùng cơ chế pseudo-random để sinh ra SBox giống nhau.

SBox được quy định theo tiêu chuẩn chính phủ Nga là

```
sbox = [
    [0xC, 0x4, 0x6, 0x2, 0xA, 0x5, 0xB, 0x9,
        0xE, 0x8, 0xD, 0x7, 0x0, 0x3, 0xF, 0x1],
    [0x6, 0x8, 0x2, 0x3, 0x9, 0xA, 0x5, 0xC,
        0x1, 0xE, 0x4, 0x7, 0xB, 0xD, 0x0, 0xF],
    [0xB, 0x3, 0x5, 0x8, 0x2, 0xF, 0xA, 0xD,
        0xE, 0x1, 0x7, 0x4, 0xC, 0x9, 0x6, 0x0],
    [0xC, 0x8, 0x2, 0x1, 0xD, 0x4, 0xF, 0x6,
        0x7, 0x0, 0xA, 0x5, 0x3, 0xE, 0x9, 0xB],
    [0x7, 0xF, 0x5, 0xA, 0x8, 0x1, 0x6, 0xD,
        0x0, 0x9, 0x3, 0xE, 0xB, 0x4, 0x2, 0xC],
```

```
    [0x5, 0xD, 0xF, 0x6, 0x9, 0x2, 0xC, 0xA,
        0xB, 0x7, 0x8, 0x1, 0x4, 0x3, 0xE, 0x0],
    [0x8, 0xE, 0x2, 0x5, 0x6, 0x9, 0x1, 0xC,
        0xF, 0x4, 0xB, 0x0, 0xD, 0xA, 0x3, 0x7],
    [0x1, 0x7, 0xE, 0xD, 0x0, 0x5, 0x8, 0x3,
        0x4, 0xF, 0xA, 0x6, 0x9, 0xC, 0xB, 0x2],
]
```

Nếu T_i được viết dưới dạng 32 bit là $t_{31}t_{30}\dots t_1t_0$ thì SBox tương ứng của nó là

$$\underbrace{t_{31}\dots t_{28}}_{S_7}\underbrace{t_{27}\dots t_{24}}_{S_6}\dots\underbrace{t_7\dots t_4}_{S_1}\underbrace{t_3\dots t_0}_{S_0}$$

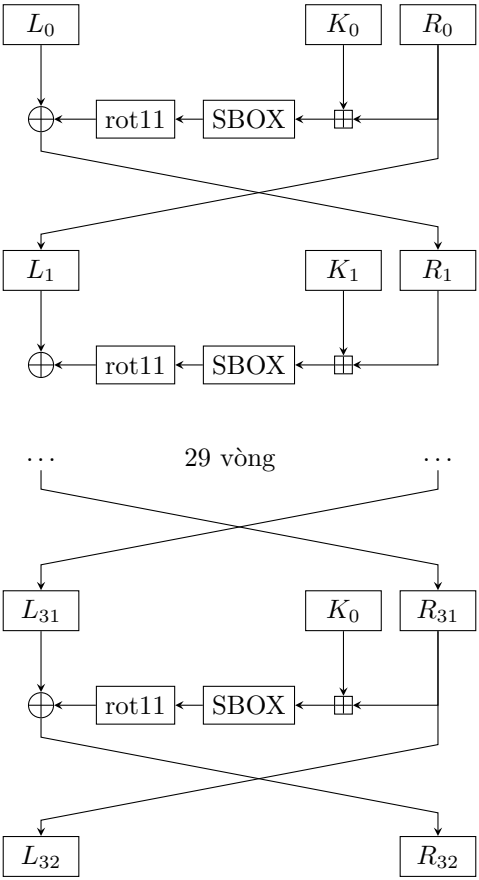
Nói cách khác, $t_{4i+3}t_{4i+2}t_{4i+1}t_{4i}$ dùng S_{7-i} với $i = 0, 1, 2, \dots, 7$.

Cuối cùng, việc xoay trái 11 bit (rot11) chỉ đơn giản là đưa 11 bit đầu về cuối và đưa 21 bit cuối lên đầu.

Để giải mã ta vẫn sử dụng round function như lúc mã hóa, chỉ cần viết với thứ tự ngược lại là được. Như vậy

$$R_i = L_{i+1}, \quad , L_i = R_{i+1} \oplus f(L_{i+1}, K_i)$$

do $R_i = L_{i+1}$. Lưu ý rằng khóa con lúc này là 0 tới 7 cho 8 vòng đầu, và 7 về 0 (rồi lặp lại) cho 24 vòng sau.



Hình 17.1: Mô hình mã khối Magma

Chương 18

Kuznyechik

Kuznyechik là một thuật toán mã hóa khối, đối xứng như AES. Kuznyechik tiếng Nga là Кузнечик, có nghĩa là châu chấu. Tuy nhiên trong văn bản quốc tế thì chúng ta giữ nguyên tên gọi là hệ mã Kuznyechik.

Mã khối Kuznyechik biến đổi trên khối 128 bit, độ dài khóa là 256 bit, biến đổi trên 9 vòng. Kuznyechik sử dụng mô hình SPN tương tự như AES, trở thành chuẩn mã hóa của Nga và được định nghĩa trong GOST R 34.12-2015.

Một điểm đặc biệt là quá trình biến đổi qua các vòng sử dụng mạng SPN, tuy nhiên thuật toán sinh khóa con cho các vòng sử dụng mô hình Feistel.

Phần này tham khảo chính từ [6].

18.1 Mã hóa

Gọi k_i là khóa con của vòng thứ i, $i = 0, 1, \ldots, 9$. Ta có các động tác biến đổi sau:

1. Hàm $X : \mathbb{F}_2^{128} \to \mathbb{F}_2^{128}$ biến đổi trên block 128 bit.

Ta chia block đầu vào thành 16 cụm 8 bit, ký hiệu

$$a = a_0 \| a_1 \| \dots \| a_{14} \| a_{15}$$

với ký tự $\|$ chỉ việc nối các chuỗi bit (concatenate). Tương tự k_i cũng được chia thành 16 cụm 8 bit. Khi đó,

$$X(k_i, a) = k_{i,0} \oplus a_0 \| k_{i,1} \oplus a_1 \| \dots \| k_{i,14} \oplus a_{14} \| k_{i,15} \oplus a_{15} \quad (18.1)$$

Nói cách khác, chúng ta xor 128 bit của khối đầu vào và 128 bit của khóa con k_i.

2. Hàm $S : \mathbb{F}_2^{128} \to \mathbb{F}_2^{128}$.

Block đầu vào tiếp tục được chia thành 16 cụm 8 bit. Mỗi cụm sẽ đi qua một bảng tra cứu SBox (gọi là bảng π). Sau đó ta nối các kết quả với nhau.

$$S(a) = \pi(a_0) \| \pi(a_1) \| \dots \| \pi(a_{14}) \| \pi(a_{15}) \quad (18.2)$$

Bảng π được định nghĩa sẵn và không tuyến tính, nên đây là bước không tuyến tính của thuật toán.

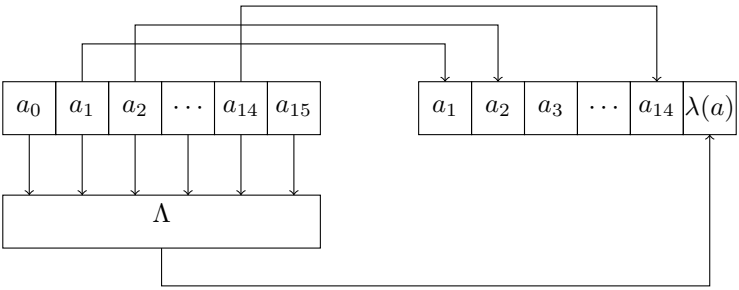
3. Hàm $L : \mathbb{F}_2^{128} \to \mathbb{F}_2^{128}$.

Block đầu vào vẫn được chia thành 16 cụm 8 bit. Tuy nhiên ở đây mỗi cụm 8 bit biểu diễn một đa thức trong trường $GF(2^8)$ với đa thức tối giản là $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x + 1$. Những phép tính cộng và nhân sau đây cũng được thực hiện trên trường $GF(2^8)$ này.

$$\begin{aligned} \lambda(a) = {} & 148a_{15} + 32a_{14} + 133a_{13} + 16a_{12} \\ & + 194a_{11} + 192a_{10} + a_9 + 251a_8 \\ & + a_7 + 192a_6 + 194a_5 + 16a_4 \\ & + 133a_3 + 32a_2 + 148a_1 + a_0 \end{aligned} \quad (18.3)$$

Tiếp theo, ta định nghĩa hàm $\Lambda : \mathbb{F}_2^{128} \to \mathbb{F}_2^{128}$ như sau

$$a = a_0 \| a_1 \| \dots \| a_{14} \| a_{15} \to a_1 \| a_2 \| \dots \| a_{15} \| \lambda(a) = \Lambda(a)$$



Hình 18.1: Hàm λ

Lưu ý rằng sau khi tính toán trên hàm λ, đa thức trên $GF(2^8)$ được chuyển trở lại thành cụm 8 bit sau đó mới nối vào dãy a_1, a_2, ..., a_{15} như mô tả ở hình 18.1.

Cuối cùng, hàm L ban đầu là thực hiện hàm Λ 16 lần.

$$L(a) = \underbrace{\Lambda(\ldots\Lambda(a)\ldots)}_{16 \text{ lần}}$$

Như vậy, phép biến đổi trên vòng thứ i với khóa con k_i là

$$R(k_i, a) = L(S(X(a))) \tag{18.4}$$

với $i = 0, 1, \ldots, 8$.

Ở vòng thứ 10 ta XOR với khóa con k_9 nữa: $X(k_9, a)$.

18.2 Thuật toán sinh khóa con

Để sinh khóa con cho 10 lần XOR, thuật toán Kuznyechik dùng mô hình Feistel. Đầu tiên ta định nghĩa hàm $F(c, a)$. Với c bất kì thuộc $\mathbb{F}_2^{128}$ và $a = a_0 \| a_1$ thuộc $\mathbb{F}_2^{256}$. Hàm $F(c, a)$ biến phần tử thuộc $\mathbb{F}_2^{128} \times \mathbb{F}_2^{256}$ thành phần tử thuộc $\mathbb{F}_2^{256}$ bằng đẳng thức

$$F(c, a) = a_1 \| a_0 \oplus R(c, a_1)$$

với hàm R được định nghĩa ở phương trình 18.4.

Với khóa đầu vào là $k \in \mathbb{F}_2^{256}$, mình ký hiệu ở dạng ghép 2 chuỗi 128 bit $k = k_0 \| k_1$ với $k_0, k_1 \in \mathbb{F}_2^{128}$ là những khóa con mở đầu. Khi đó các khóa con cho 10 phép XOR là k_0, k_1, ..., k_9.

Thuật toán sinh khóa con được sử dụng như sau

$$k_{2i+2} \| k_{2i+3} = F(c_{8i+7}, \ldots, F(c_{8i}, k_{2i} \| k_{2i+1})) \tag{18.5}$$

với $i = 0, 1, 2, 3$. Thuật toán có thể mô tả ở hình 18.2. Theo đó, các số $c_0, c_1, \ldots, c_7$ được sử dụng để sinh khóa $k_2 \| k_3$ từ $k_0 \| k_1$. Tương tự, $c_8, c_9, \ldots, c_{15}$ được dùng để sinh khóa $k_4 \| k_5$ từ khóa $k_2 \| k_3$. Các số c_0, c_1, ..., c_{31} được định nghĩa trong tiêu chuẩn.

18.3 So sánh Kuznyechik với AES

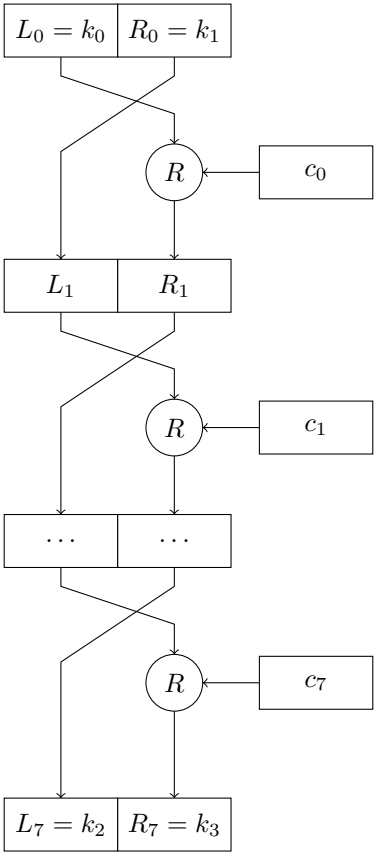
Điểm giống nhau là cả hai thuật toán đều có phần tuyến tính và phần không tuyến tính. Về phần tuyến tính, đối với AES là các động tác Shift Rows, Mix Columns và Add Round Key, còn đối với Kuznyechik là hàm X và L bên trên. Về phần không tuyến tính đều là việc sử dụng một bảng tra cứu SBox của riêng thuật toán đó.

Điểm khác nhau đầu tiên là cách xây dựng ma trận tính toán. Nếu ta xem xét Shift Rows và Mix Columns dưới dạng phép nhân ma trận trên $GF(2^8)$ thì ta thấy rằng ma trận chứa nhiều số 0 nhất có thể. Điều này giúp tăng tốc độ tính toán. Về phần Kuznyechik, phép tính ở hàm λ cũng thực hiện trên $GF(2^8)$ nhưng không chứa bất kì số 0 nào. Điều này làm tăng độ phức tạp tính toán nhưng cũng làm tăng tính an toàn.

Điểm khác nhau tiếp theo là việc sinh khóa con. AES sử dụng thuật toán sinh khóa con từng vòng từ toàn bộ 256 bit ban đầu. Trong khi Kuznyechik sử dụng mô hình Feistel, theo đó với 256 bit ban đầu được sử dụng cho 2 vòng đầu, cứ mỗi hai khóa con sẽ sinh ra hai khóa con tiếp theo. Như vậy thuật toán sinh khóa con ít phức tạp hơn AES (Kuznyechik cần 5 lần sinh khóa còn AES 14 lần).

Vào thời điểm ngày 3 tháng 5 năm 2023 mình chưa đủ trình để đọc các tài liệu nâng cao về hai hệ mật mã này nên không thể đưa ra

đánh giá hay so sánh về độ an toàn giữa hai hệ mật mã. Tuy nhiên đây là hai tiêu chuẩn mã hóa đã qua rất nhiều vòng kiểm định, vậy nên theo góc nhìn của mình thì rất đáng để nghiên cứu. :D



Hình 18.2: Biến đổi từ khóa $k_0 \| k_1$ thành $k_2 \| k_3$

Tài liệu tham khảo

[1] Ю.В. Таранников. *Дискретная математика. Задачник. Учебное пособие для академического бакалавриата.* Юрайт, 2016. ISBN 9785991662833.

[2] Thomas Judson. *Abstract Algebra. Theory and Applications.* Stephen F. Austin State University, 2012.

[3] Jeffrey Hoffstein, Jill Pipher, Joseph Silverman. *An Introduction to Mathematical Cryptography.* Springer, 2 edition, 2014. ISBN 978-0-387-77994-2.

[4] William Stallings. *Cryptography And Network Security: Principles and Practices.* Prentice Hall, 4 edition, 2005. ISBN 978-0131873162.

[5] С.Б. Гашков, Э.А. Применко, М.А. Черепнев. *Криптографические методы защиты информации.* Publishing House Akademia, 2010. ISBN 978-5-7695-4962-5.

[6] А.Б. Лось, А.Ю. Нестеренко, М.И. Рожков. *Криптографические методы защиты инфомации. Учебник.* Юрайт, 2 edition. ISBN 978-5-534-01530-0.