Nhập môn lattice

Lattice

Lê Quốc Dũng

Moscow Power Engineering Institute

Ngày 1 tháng 6 năm 2023

Tổng quan

1. Không gian vector
2. Lattice
3. Second Section

Không gian vector (Vector space)

Định nghĩa

Cho trường số thực $\mathbb{R}$. Một không gian vector trên $\mathbb{R}^m$ là tập hợp

$$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

với 2 toán tử:

- Phép cộng (+): $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$
- Phép nhân vô hướng (x): $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$

Không gian vector (Vector Space)

Không gian vector phải thỏa mãn 8 tiên đề:

1. Tính kết hợp của phép cộng: $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$
2. Tính giao hoán của phép cộng: $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. Tồn tại phần tử trung hòa của phép cộng: tồn tại phần tử $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ sao cho $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$
4. Tồn tại phần tử đối của phép cộng: $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}, \exists \boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$: $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$
5. Tính phân phối giữa phép cộng và nhân: $\forall a \in \mathbb{R}$ và $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $a \times (\boldsymbol{u} + \mathbf{v}) = a \times \boldsymbol{u} + a \times \boldsymbol{v}$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ và $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $(a + b) \times \boldsymbol{v} = a \times \boldsymbol{v} + b \times \boldsymbol{v}$
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ và $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $a \times (b \times \boldsymbol{v}) = (ab) \times \boldsymbol{v}$
8. Phần tử đơn vị trên $\mathbb{R}$: có phần tử $\mathbf{1} \in \mathbb{R}$ sao cho $\mathbf{1} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \, \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$

Tổ hợp tuyến tính (Linear combination)

Định nghĩa

Cho tập $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\} \in \mathcal{V}$. Một tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ là mọi vector có dạng:

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots \alpha_n \boldsymbol{v_n}$$

với $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
Tập hợp mọi tổ hợp tuyến tính $\{\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n} \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ được ký hiệu là $span\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$. Tập hợp $\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$ được gọi là tập sinh.

Độc lập tuyến tính (Linear Independence)

Định nghĩa

Tập hợp các vector $\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$ được gọi là **độc lập tuyến tính** nếu tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n} = 0$$

có tất cả hệ số bằng 0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Nếu có ít nhất một a_i khác 0 thì tập hợp các vector trên **phụ thuộc tuyến tính**.

Cơ sở (Basis)

Định nghĩa

Một cơ sở của $\mathcal{V}$ là tập hợp các vector độc lập tuyến tính $\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$ mà $span\mathcal{V}$.
Như vậy, mọi vector trong $\mathcal{V}$ đều biểu diễn được dưới dạng

$$\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}\colon \boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}$$

Ví dụ, xét không gian vector $\mathbb{R}^2$. Một cơ sở của nó là $\{(1,0),(0,1)\}$.
Chứng minh: mọi vector trong $\mathbb{R}^2$ có dạng (a,b). Ta có $(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$.
Như vậy $\{(1,0),(0,1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
Note: Cơ sở này còn gọi là cơ sở chính tắc của R^2

Cơ sở (Basis)

Xét không gian vector $\mathcal{V}$. Khi đó:

1. Tồn tại một cơ sở của $\mathcal{V}$
2. Hai cơ sở bất kì của $\mathcal{V}$ có cùng số phần tử. Số này được gọi là **số chiều** của $\mathcal{V}$ và được ký hiệu là $dim\mathcal{V}$
3. Gọi $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ là cơ sở của $\mathcal{V}$ và $\boldsymbol{w_1}$, $\boldsymbol{w_2}$, ..., $\boldsymbol{w_n}$ là một cơ sở khác của $\mathcal{V}$. Khi đó mỗi $\boldsymbol{w_i}$ được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các v_i:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w_1} &= \alpha_{11}\boldsymbol{v_1} + \alpha_{12}\boldsymbol{v_n} + \cdots + \alpha_{1n}\boldsymbol{v_n} \\
\boldsymbol{w_2} &= \alpha_{21}\boldsymbol{v_1} + \alpha_{22}\boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_{2n}\boldsymbol{v_n} \\
&\cdots \\
\boldsymbol{w_n} &= \alpha_{n1}\boldsymbol{v_1} + \alpha_{n2}\boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_{nn}\boldsymbol{v_n}
\end{aligned}
$$

Cơ sở (Basis)

Khi đó $\boldsymbol{w_1}$, $\boldsymbol{w_2}$, ..., $\boldsymbol{w_n}$ là cơ sở khi và chỉ khi ma trận sau khả nghịch (có định thức khác 0)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Tích vô hướng (Dot product) - Chuẩn Euclid (Euclidean norm)

Định nghĩa

Tích vô hướng (hay tích chấm - dot product) của 2 vector $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ và $\boldsymbol{v} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ là:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n$$

Độ dài (hay chuẩn Euclid) của vector $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$$

Note

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|^2$

Góc giữa 2 vector

Định nghĩa

Với 2 vector $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$ như trên, gọi θ là góc giữa 2 vector. Khi đó:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \cdot \cos\theta$$

Note

Khi $\theta = \pi/2$, tích vô hướng $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Hai vector lúc này **trực giao** (orthogonal), hoặc **vuông góc** với nhau.
Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$$

Trực giao hóa Gram-Schmidt (Gram-Schmidt orthogonalization)

Giả sử ta có một cơ sở $\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$ của $\mathcal{V}$ mà các vector trực giao đôi một, nghĩa là $\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_j} = 0, \forall i \neq j$.
Ta đã biết mọi vector trong $\mathcal{V}$ đều biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector trong cơ sở:

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}$$

Chuẩn Euclid khi đó:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{w}\|^2 &= (\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}) \cdot (\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|\boldsymbol{v_i}\|^2 \end{aligned}$$

Trực giao hóa Gram-Schmidt (Gram-Schmidt orthogonalization)

Phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt dùng để tìm hệ cơ sở trực giao như trên nếu biết được một cơ sở bất kì của $\mathcal{V}$

Thuật toán trực giao hóa Gram-Schmidt:

Giả sử ta đã biết một cơ sở của $\mathcal{V}$ là $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$. Ta thực hiện các bước:

1. Đặt $\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{v_1}$
2. Với $i = 2, 3, \cdots, n$:
    - Tính $\mu_{ij} = \boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{u_j} / \|\boldsymbol{u_j}\|^2$ với $1 \leq j < i$
    - $\boldsymbol{u_i} = \boldsymbol{v_i} - \sum_{j=1}^{i} \mu_{ij} \boldsymbol{u_i}$

Cơ sở trực giao thu được là $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \cdots, \mathbf{u_n}\}$.

Lưới (Lattice)

Định nghĩa

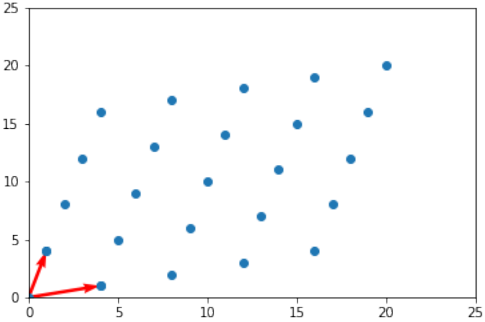
Xét tập hợp các vector $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ với $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^m$ độc lập tuyến tính. Một lattice $L \subset \mathbb{R}^m$ là tất cả tổ hợp tuyến tính của các vector trên với hệ số nguyên, tức là

$$L = \{\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$$

Khi đó, các $\boldsymbol{v}_i$ được gọi là **cơ sở** (basis) của lattice L.

Ví dụ về lưới

Trên mặt phẳng 2D Oxy chọn 2 vector sau: $\boldsymbol{v_1} = (1, 4)$ và $\boldsymbol{v_2} = (4, 1)$



Bullet Points

- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit
- Aliquam blandit faucibus nisi, sit amet dapibus enim tempus eu
- Nulla commodo, erat quis gravida posuere, elit lacus lobortis est, quis porttitor odio mauris at libero
- Nam cursus est eget velit posuere pellentesque
- Vestibulum faucibus velit a augue condimentum quis convallis nulla gravida

Blocks of Highlighted Text

In this slide, some important text will be highlighted because it's important. Please, don't abuse it.

Block

Sample text

Alertblock

Sample text in red box

Examples

Sample text in green box. The title of the block is “Examples".

Multiple Columns

Heading

1. Statement
2. Explanation
3. Example

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Table

Treatments	**Response 1**	**Response 2**
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Bảng: Table caption

Theorem

Theorem (Mass–energy equivalence)

$E = mc^2$

Figure

Uncomment the code on this slide to include your own image from the same directory as the template .TeX file.

Citation

An example of the `\cite` command to cite within the presentation:

This statement requires citation [Smith, 2012].

References

John Smith (2012)
Title of the publication
Journal Name 12(3), 45 – 678.

The End