Phá mã vi sai (Differential Cryptanalysis)

Lê Quốc Dũng

Ngày 30 tháng 6 năm 2023

1 TinyDES

TinyDES là một phiên bản thu nhỏ của chuẩn mã hóa DES. TinyDES là mã hóa khối theo mô hình Feistel, kích thước khối là 8 bit, kích thước khóa cũng là 8 bit. Mỗi vòng khóa con có độ dài 6 bit.

Mã TinyDES khá đơn giản. Theo mô hình Feistel, khối đầu vào 8 bit được chia thành hai nửa trái phải 4 bit. Nửa phải sẽ đi qua các hàm Expand, SBox và PBox, sau đó XOR với nửa trái để được nửa phải mới. Còn nửa trái mới là nửa phải cũ. Tóm lại công thức mô hình Feistel là

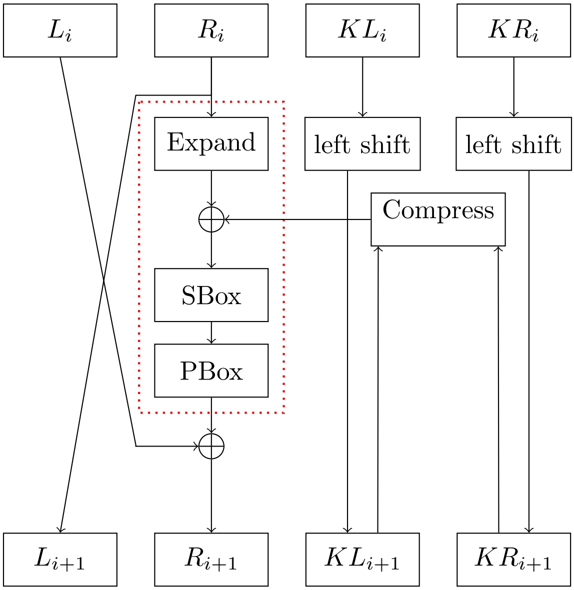
$$L_{i+1} = R_i, \quad R_{i+1} = L_i \oplus F(R_i, K_{i+1})$$

với $i = 1, 2, 3$ tương ứng 3 vòng với đầu vào của khối là (L_0, R_0).

Chúng ta cần các động tác sau:

1. Expand: mở rộng và hoán vị R_i từ 4 bit lên 6 bit. Giả sử 4 bit của R_i là $b_0b_1b_2b_3$ thì kết quả sau khi Expand là $b_2b_3b_1b_2b_1b_0$;

2. SBox: gọi 6 bit đầu vào là $b_0b_1b_2b_3b_4b_5$. Khi đó ta tra cứu theo bảng SBox với b_0b_5 chỉ số **hàng**, $b_1b_2b_3b_4$ chỉ số **cột**. Nói cách khác bảng SBox có 4 hàng, 16 cột. Kết quả của SBox là một số 4 bit;



Hình 1: Một vòng TinyDES

3. PBox: là hàm hoán vị 4 bit $b_0b_1b_2b_3$ thành $b_2b_0b_3b_1$

Như vậy, hàm F của mô hình Feistel đối với mã TinyDES là

$$F(R_i, K_i) = PBox(SBox(Expand(R_i) \oplus K_{i+1}))$$

Để sinh khóa con cho 3 vòng, khóa ban đầu được chia thành hai nửa trái phải lần lượt là KL_0 và KR_0. TinyDES thực hiện như sau:

1. Vòng 1: KL_0 và KR_0 được dịch vòng trái 1 bit để được KL_1 và KR_1;
2. Vòng 2: KL_1 và KR_1 được dịch vòng trái 2 bit để được KL_2 và KR_2;

3. Vòng 3: KL_2 và KR_2 được dịch vòng trái 1 bit để được KL_3 và KR_3.

Khi đó, khóa K_i ở vòng thứ i (với $i = 1, 2, 3$) là hoán vị và nén 8 bit của KL_i và KR_i lại thành 6 bit. Đặt 8 bit khi ghép $KL_i \| KR_i$ là $k_0k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7$, kết quả là 6 bit $k_5k_1k_3k_2k_7k_0$.

2 Phá mã vi sai (Differential Cryptanalysis)

Giả sử X_1 và X_2 là hai khối input có cùng số bit.

Ta định nghĩa vi sai của X_1 và X_2 là $X = X_1 \oplus X_2$.

Xét các phép biến đổi trong TinyDES

2.1 Phép XOR key

Gọi K là khóa con ở vòng nào đó trong thuật toán. Khi đó nếu đặt $Y_1 = X_1 \oplus K$ và $Y_2 = X_2 \oplus K$ thì vi sai của output là $Y = Y_1 \oplus Y_2 = X_1 \oplus X_2$. Như vậy K không tác động lên vi sai và đây là tính chất quan trọng để chúng ta phá mã vi sai.

2.2 Phép PBox

Phép PBox bảo toàn số bit (hoán vị 4 bit thành 4 bit) và cách xây dựng hoán vị là một biến đổi tuyến tính. Việc hoán vị 4 bit $b_0b_1b_2b_3$ thành $b_2b_0b_3b_1$ tương đương với phép nhân ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_0 \\ b_3 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Do đó nếu đặt $Y_1 = \text{PBox}(X_1)$ và $Y_2 = \text{PBox}(X_2)$ thì

$$Y_1 \oplus Y_2 = \text{PBox}(X_1) \oplus \text{PBox}(X_2) = \text{PBox}(X_1 \oplus X_2)$$

Như vậy nếu vi sai input là cố định thì vi sai output cũng cố định do tính tuyến tính.

2.3 Phép Expand

Tương tự, phép Expand cũng là biến đổi tuyến tính và nếu đặt $Y_1 = \text{Expand}(X_1)$ và $Y_2 = \text{Expand}(X_2)$ thì

$$Y_1 \oplus Y_2 = \text{Expand}(X_1) \oplus \text{Expand}(X_2) = \text{Expand}(X_1 \oplus X_2)$$

Cũng tương tự, nếu vi sai input là cố định thì vi sai output cũng cố định.

2.4 Phép SBox

Phép SBox là một biến đổi không tuyến tính với input 6 bit và output 4 bit.

Đặt $Y_1 = \text{SBox}(X_1)$ và $Y_2 = \text{SBox}(X_2)$.

Với mỗi $X = X_1 \oplus X_2$ cố định thì cứ một giá trị X_1 sẽ có duy nhất một giá trị X_2 cho ra vi sai X. Tuy nhiên vi sai output $Y_1 \oplus Y_2$ phân bố không đều nhau.

Thực hiện bruteforce đơn giản trên SBox với vi sai input $X = X_1 \oplus X_2$ có 6 bit, ta tìm được sự phân bố vi sai output $Y = Y_1 \oplus Y_2$.

Chúng ta mong muốn rằng trên một hàng có càng ít phần tử càng tốt. Từ đó sự phân bố xác suất sẽ dễ kiểm soát hơn.

Sau khi xem bảng phân phối vi sai input và output ta có thể thấy được rằng

1. Nếu vi sai input $X = 0$ thì chắc chắn vi sai output $Y = 0$
2. Nếu vi sai input $X = 16$ thì có 9 vi sai output Y
3. Nếu vi sai input $X = 52$ thì có 8 vi sai output Y

Dựa trên nhận xét này, chúng ta sẽ tấn công trên các X_1, X_2 mà $X = X_1 \oplus X_2 \in \{16, 52\}$.

Xét hai hàng 16 và 52, ta thấy rằng

1. Nếu vi sai input $X = 16$ thì vi sai output $Y = 7$ là cao nhất với xác suất 14/64
2. Nếu vi sai input $X = 52$ thì vi sai output $Y = 2$ là cao nhất với xác suất 16/64

2.5 Hàm F

Như vậy, phép XOR key, phép PBox và phép Expand cho xác suất đều nhau với các cặp vi sai (X, Y). Trong khi đó thì SBox lại cho xác suất các cặp vi sai (X, Y) không đều nhau.

Đặt $Y_1 = F(X_1)$ và $Y_2 = F(X_2)$. Dễ thấy rằng

- Vi sai input của hàm F chính là vi sai input của Expand
- Vi sai output của Expand là vi sai input của SBox (không phụ thuộc vào khóa)
- Vi sai output của SBox là vi sai input của PBox
- Vi sai output của PBox là vi sai output của hàm F

Ta có thể đưa ra nhận xét về xác suất vi sai output $Y = Y_1 \oplus Y_2$ từ vi sai $X = X_1 \oplus X_2$ như sau

1. Nếu vi sai input của F là 0 $\rightarrow$ vi sai output của Expand là 0 $\rightarrow$ vi sai output của SBox chắc chắn là 0 $\rightarrow$ vi sai output của PBox chắc chắn là 0 $\rightarrow$ vi sai output của hàm F chắc chắn là 0
2. Nếu vi sai input của F là 1 $\rightarrow$ vi sai output của Expand là 16 $\rightarrow$ vi sai output của SBox là 7 với xác suất 14/64 $\rightarrow$ vi sai output của PBox là 11 với xác suất là 14/64 $\rightarrow$ hàm F là 11 với xác suất $14/64 = 7/32$
3. Nếu vi sai input của F là 3 $\rightarrow$ vi sai output của SBox là 52 $\rightarrow$ vi sai output của SBox là 2 với xác suất 16/64 $\rightarrow$ vi sai output của PBox là 8 với xác suất 16/64 $\rightarrow$ hàm F là 8 với xác suất $16/64 = 1/4$

2.6 Chosen plaintext part 1

Do tính chất vi sai, chúng ta sẽ mong muốn tìm những cặp (plaintext, ciphertext) (P_1, C_1) và (P_2, C_2) nào đó mà vi sai input $P_1 \oplus P_2$ và vi sai output $C_1 \oplus C_2$ có thể tối ưu xác suất trên.

Giả sử chúng ta xét trường hợp 3 ở trên, khi vi sai input của F là 3 thì vi sai output của F là 8 với xác suất 1/4. Đây là xác suất lớn nhất nên ta mong muốn trong 3 vòng của TinyDES sẽ tận dụng được càng nhiều càng tốt.

Chúng ta đi từ dưới lên. Đặt

$$L_3 = R_2, \quad R_3 = L_2 \oplus F(R_2, K_3)$$

và

$$L'_3 = R'_2, \quad R'_3 = L'_2 \oplus F(R'_2, K_3)$$

Chọn $R_2 \oplus R'_2 = 3$ thì $F(R_2, K_3) \oplus F(R'_2, K_3) = 8$ với xác suất 1/4. Vì là bước cuối nên ta hy vọng ciphertext cuối cùng sẽ càng ít phức tạp càng tốt. Do đó có thể lựa chọn $L_2 = L'_2 = 0$ để bảo toàn vi sai sau khi vòng 3 kết thúc.

Ở vòng 3, xác suất để vi sai input bằng 3 và vi sai output bằng 8 là 1/4.

Tiếp theo, đặt

$$L_2 = R_1, \quad R_2 = L_1 \oplus F(R_1, K_2)$$

và

$$L'_2 = R'_1, \quad R'_2 = L'_1 \oplus F(R'_1, K_2)$$

Do $L_2 = R_1$ nên $R_1 = 0$. Tương tự $R'_1 = L'_2 = 0$. Điều đáng chú ý là $R_1 \oplus R'_1 = 0$, nghĩa là vi sai input bằng 0, nên vi sai output $F(R_1, K_2) \oplus F(R'_1, K_2)$ chắc chắn bằng 0 (xác suất bằng 1).

Ở vòng 2, xác suất để vi sai input bằng 0 và vi sai output bằng 0 là 1.

Ta lại có

$$R_2 \oplus R'_2 = 3 = L_1 \oplus F(R_1, K_2) \oplus L'_1 \oplus F(R'_1, K_2) = L_1 \oplus L'_1$$

do vi sai output hàm F chắc chắn bằng 0. Do đó $L_1 \oplus L'_1 = 3$.

Tuy nhiên, $L_1 = R_0$ và $L'_1 = R'_0$ nên $L_1 \oplus L'_1 = R_0 \oplus R'_0 = 3$. Do đó vi sai output của hàm F là $F(R_0, K_1) \oplus F(R'_0, K_1) = 8$ có xác suất $1/4$.

Ở vòng 1, xác suất để vi sai input bằng 3 và vi sai output bằng 8 là $1/4$.

Cuối cùng

$$R_1 \oplus R'_1 = L_0 \oplus F(R_0, K_1) \oplus L'_0 \oplus F(R'_0, K_1) = L_0 \oplus L'_0 \oplus 8$$

mà ta nhớ lại ở trên $R_1 \oplus R'_1 = 0$ nên suy ra $L_0 \oplus L'_0 = 8$.

Tổng kết lại, ta chọn vi sai input $(L, R) = (8, 3)$ thì xác suất để vi sai output bằng $(3, 8)$ là $(1/4) \times 1 \times (1/4) = 1/16$. Đây là xác suất cao nhất có thể sau khi TinyDES chạy đủ 3 vòng.

2.7 Chosen plaintext part 2

Tương tự, chúng ta xét trường hợp 2 ở trên, khi vi sai input của F là 1 thì vi sai output của F là 11 với xác suất $7/32$. Ta cũng mong muốn sau 3 vòng của TinyDES sẽ tận dụng được càng nhiều càng tốt.

Chúng ta lại đi dưới lên. Đặt

$$L_3 = R_2, \quad R_3 = L_2 \oplus F(R_2, K_3)$$

và

$$L'_3 = R'_2, \quad R'_3 = L'_2 \oplus F(R'_2, K_3)$$

Chọn $R_2 \oplus R'_2 = 1$ thì $F(R_2, K_3) \oplus F(R'_2, K_3) = 11$ với xác suất $7/32$. Vì là bước cuối cùng nên ta cũng hy vọng ciphertext sẽ càng ít phức tạp càng tốt. Do đó ta chọn $L_2 = L'_2 = 0$.

Ở vòng 3, xác suất để vi sai input bằng 1 và vi sai output bằng 11 là 7/32.

Tiếp theo, đặt

$$L_2 = R_1, \quad R_2 = L_1 \oplus F(R_1, K_2)$$

và

$$L'_2 = R'_1, \quad R'_2 = L'_1 \oplus F(R'_1, K_2)$$

Do $L_2 = R_1$ nên $R_1 = 0$. Tương tự $R'_1 = 0$. Suy ra $R_1 \oplus R'_1 = 0$ và vi sai output $F(R_1, K_2) \oplus F(R'_1, K_2) = 0$ với xác suất bằng 1 (chắc chắn xảy ra).

Ở vòng 2, xác suất để vi sai input bằng 0 và vi sai output bằng 0 là 1.

Ta lại có

$$R_2 \oplus R'_2 = L_1 \oplus F(R_1, K_2) \oplus L'_1 \oplus F(R'_1, K_2) = L_1 \oplus L'_1$$

do vi sai output của hàm F chắc chắn bằng 0. Do đó $L_1 \oplus L'_1 = 1$.

Tuy nhiên $L_1 = R_0$ và $L'_1 = R'_0$ nên $R_0 \oplus R'_0 = L_1 \oplus L'_1 = 1$. Do đó vi sai output của hàm F ở vòng 1 là $F(R_0, K_1) \oplus F(R'_0, K_1) = 11$ với xác suất 7/32.

Ở vòng 1, xác suất để vi sai input bằng 1 và vi sai output bằng 11 là 7/32.

Cuối cùng, do

$$R_1 \oplus R'_1 = L_0 \oplus F(R_0, K_1 \oplus L'_0 \oplus F(R'_0, K_1))$$

mà $R_1 \oplus R'_1 = 0$ và $F(R_0, K_1) \oplus F(R'_0, K_1) = 11$ nên $L_0 \oplus L'_0 = 11$.

Tổng kết lại, ta chọn vi sai input $(L, R) = (11, 1)$ thì xác suất để vi sai output bằng $(1, 11)$ là $(7/32) \times 1 \times (7/32) \approx 0.048$. Đây cũng là xác suất cao nhất có thể sau khi TinyDES chạy đủ 3 vòng.

2.8 Final attack

Như vậy, đối với TinyDES chúng ta phá mã vi sai như sau

1. Tìm một số lượng cặp plaintext, ciphertext (P_1, C_1), (P_2, C_2), ... cho tới khi tìm được $P_i \oplus P_j = 0x83$ và $C_i \oplus C_j = 0x38$
2. Tìm một số lượng cặp plaintext, ciphertext (P'_1, C'_1), (P'_2, C'_2), ... cho tới khi tìm được $P'_i \oplus P'_j = 0xB1$ và $C'_i \oplus C'_j = 0x1B$

Sau khi đã tìm được một số lượng cặp plaintext, ciphertext thỏa vi sai trên, nhớ lại hàm F ở vòng 3, do $L_3 = R_2$ và $R_3 = L_2 \oplus F(R_2, K_3) = L_2 \oplus F(L_3, K_3) = F(L_3, K_3)$ (ta chọn $L_2 = 0$ ở trên), dễ thấy rằng chúng ta có thể tìm được các K_3 thỏa mãn hàm F ở vòng 3.

Để làm điều đó thì ta tính $O = \text{Expand}(L_3)$, và do $\text{SBox}(O \oplus K_3) = \text{PBox}^{-1}(R_3)$ cũng tính được nên có thể tìm các giá trị $O \oplus K_3$ mà khi đi qua SBox cho kết quả bằng $\text{PBox}^{-1}(R_3)$. Sau đó XOR lại cho O thì sẽ tìm được các giá trị có thể của K_3. Lưu ý rằng SBox làm giảm 6 bit còn 4 bit nên sẽ có nhiều giá trị khác nhau cho cùng giá trị SBox.

Thực hiện trên hai trường hợp vi sai input-output là $(0x83, 0x38)$ và $(0xB1, 0x1B)$ ta có tập các giá trị có thể xảy ra của K_3.

Theo thuật toán sinh khóa con thì với khóa K 8 bit ban đầu, đặt là $k_0k_1k_2k_3k_4k_5k_6k_7$, thì khóa con K_3 là $k_5k_1k_3k_2k_7k_0$. Trong K_3 không có k_4 và k_6 nên chúng ta sẽ bruteforce hai bit này tới khi tìm được đúng khóa K mà tương ứng với cặp (P_i, C_i).