Nơi huyền thoại lưu danh

Lê Quốc Dũng

2023

Đường đi ngàn dặm, bắt đầu bằng một bước chân.

Lão Tử

Mục lục

Bảng các ký hiệu dùng trong sách

$\lvert S\rvert$	số lượng phần tử của tập hợp S (lực lượng của S)
$\phi(n)$	phi hàm Euler của số dương n
$\mathbb{Z}$	tập hợp số nguyên
$\mathbb{Q}$	tập hợp số hữu tỉ
$\mathbb{Q}^*$	tập hợp số hữu tỉ khác 0
$\mathbb{R}$	tập hợp số thực
$H \lhd G$	H là normal subgroup của G

Phần I

Đại cương toán học

Chương 1

Đại số cơ bản

1.1 Ánh xạ

Cho 2 tập hợp X và Y. Ánh xạ f biến một phần tử $x \in X$ thành nhiều nhất một phần tử $y \in Y$.

Ta ký hiệu

$$f : X \to Y,\ f(x) = y$$

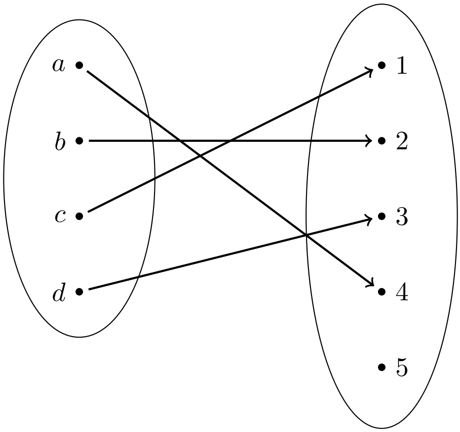
Khi đó, X được gọi là tập nguồn (domain) và Y là tập đích (image).

Ánh xạ có 3 loại:

- Đơn ánh (Injection): Hai phần tử khác nhau của tập nguồn cho hai ảnh khác nhau. Tức là với mọi $x_1, x_2 \in X$ mà $x_1 \neq x_2$, thì $f(x_1) \neq f(x_2)$
- Toàn ánh (Surjection): Mọi phần tử $y \in Y$ đều có ít nhất một phần tử $x \in X$ mà $f(x) = y$. Nói cách khác với mỗi phần tử trong Y ta đều tìm được phần tử thuộc X biến thành nó
- Song ánh (Injection): Nếu ánh xạ đó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh

Nhận xét. Dựa vào định nghĩa và hình vẽ, ta có thể rút ra kết luận như sau

- Đối với đơn ánh, do mọi phần tử của X đều có ảnh ở Y, tuy nhiên có thể có phần tử ở Y không do phần tử nào của X biến thành (trong hình là 5). Do đó $|X| \leq |Y|$
- Đối với toàn ánh, mọi phần tử của Y đều có nguồn gốc xuất xứ, tuy nhiên có thể có phần tử của X không biến thành y nào của Y (trong hình là e). Do đó $|X| \geq |Y|$
- Đối với song ánh, do là kết hợp giữa đơn ánh và toàn ánh, khi đó dấu đẳng thức xảy ra, $|X| = |Y|$

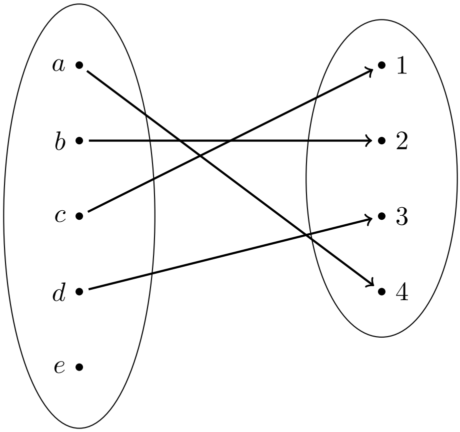


Hình 1.1: Đơn ánh

1.2 Hàm số

Khi 2 tập nguồn và đích của ánh xạ là 2 tập hợp số, ta có hàm số.

Ví dụ. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $y = f(x) = x^3 + x + 1$. Ở đây $X \equiv \mathbb{R}$ và $Y \equiv \mathbb{R}$.



Hình 1.2: Toàn ánh

Lưu ý rằng tập nguồn và đích không nhất thiết là tập hợp số cơ bản $(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ mà cũng có thể là tích Descartes của chúng.

Ví dụ. Hàm số $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $z = f(x, y) = x + y + xy$. Ở đây $X \equiv \mathbb{R}$, $Y \equiv \mathbb{R}$ và $Z \equiv \mathbb{R}$.

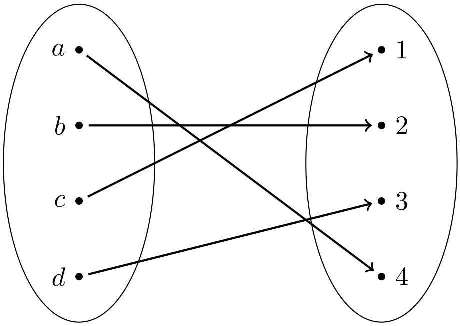
Chúng ta còn một cách gọi khác cho đơn ánh, toàn ánh, song ánh trong tiếng Anh.

đơn ánh	injection	one-to-one map
toàn ánh	surjection	onto map
song ánh	bijection	one-to-one and onto map

Bảng 1.1: Thuật ngữ tiếng Anh cho ánh xạ

Ví dụ. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $y = f(x) = x^3$ là song ánh.

Chứng minh. Ta thấy nếu $f(x_1) = f(x_2)$, tương đương $x_1^3 = x_2^3$ nên $x_1 = x_2$. Do đó f là đơn ánh.



Hình 1.3: Song ánh

Với mọi $y = x^3 \in \mathbb{R}$, do căn bậc 3 luôn tồn tại nên ta có $x = \sqrt{3}y$. Nghĩa là luôn tồn tại x để $f(x) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Do đó f là toàn ánh.

Kết luận f là song ánh. $\square$

Chương 2

Số học

2.1 Hàm Euler

Định nghĩa 2.1. Cho số nguyên dương n. Số lượng các số dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n được ký hiệu bởi $\phi(n)$ và gọi là ϕ hàm Euler. Nghĩa là

$$\phi(n) = |\{a : (a, n) = 1\}|$$

Hàm Euler có ý nghĩa quan trọng trong lý thuyết số, công cụ giúp chúng ta giải các vấn đề về số mũ trong modulo.

Sau đây chúng ta xem xét hệ thặng dư đầy đủ và hệ thặng dư thu gọn.

Với số nguyên dương n, ta định nghĩa:

Định nghĩa 2.2. Hệ thặng dư đầy đủ của n là tập $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Nói cách khác, hệ thặng dư đầy đủ của n là các số dư có thể có khi chia một số bất kì cho n.

Định nghĩa 2.3. Hệ thặng dư thu gọn của n là tập các số a mà $1 \leq a < n$ và $(a, n) = 1$. Số lượng các số a như vậy là $\phi(n)$.

Nhận xét. Hệ thặng dư thu gọn của n gồm $\phi(n)$ phần tử là

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}\}$$

Nhận xét. Nếu n là số nguyên tố thì $\phi(n) = n - 1$

2.2 Định lý Euler

Định lý 2.1. Cho số nguyên dương n. Với mọi số nguyên a mà $(a, n) = 1$ thì

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

Chứng minh. Giả sử $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}\}$ là hệ thặng dư thu gọn của n. Ta sẽ chứng minh rằng nếu a là số sao cho $(a, n) = 1$ thì tập hợp

$$\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\phi(n)}\}$$

là hoán vị của tập S.

Thật vậy, giả sử $aa_i \equiv aa_j \pmod n$ với $1 \leq i, j \leq \phi(n)$ và $i \neq j$.

Do $(a, n) = 1$ nên tồn tại nghịch đảo $a' \pmod n$, nhân a' cho 2 vế ta còn $a_i \equiv a_j \pmod n$.

Nói cách khác, nếu $a_i \not\equiv a_j \pmod n$ thì $aa_i \not\equiv aa_j \pmod n$. Suy ra tập

$$\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\phi(n)}\}$$

là hoán vị của S.

Ta nhân tất cả phần tử của S thì sẽ bằng tích phần tử của tập trên

$$aa_1 \cdot aa_2 \ldots aa_{\phi(n)} \equiv a_1 \cdot a_2 \ldots a_{\phi(n)} \pmod n$$

Đặt $I = a_1 \cdot a_2 \ldots a_{\phi(n)}$ thì phương trình trên tương đương với

$$a^{\phi(n)} I \equiv I \pmod n$$

Mà $(I, n) = 1$ do là tích các số nguyên tố cùng nhau với n nên rút gọn 2 vế ta được

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

Ta có điều phải chứng minh. □

2.3 Định lý Fermat nhỏ

Định lý 2.2. Cho số nguyên tố p. Với mọi số nguyên a thì

$$a^p \equiv a \pmod p$$

Khi $(a, p) = 1$ thì

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

Nhận xét. Khi $(a, p) = 1$ thì định lý Fermat là hệ quả trực tiếp từ định lý Euler.

2.4 Tính chất hàm Euler

Nhận xét. Với $(m, n) = 1$ thì

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$$

Chứng minh. Ta viết các số từ 1 tới mn thành bảng như sau

$$\begin{array}{cccc} 1 & m+1 & \cdots & (n-1)m+1 \\ 2 & m+2 & \cdots & (n-1)m+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & m+m & \cdots & (n-1)m+m \end{array}$$

Hàng r gồm các phần tử dạng $rm + k$ với $0 \leq r \leq n-1$ và $1 \leq k \leq m$. Ta thấy rằng nếu $(rm + k, m) = 1$ thì $(k, m) = 1$.

Do đó trên mỗi hàng có $\phi(m)$ phần tử nguyên tố cùng nhau với m.

Tiếp theo, trên các hàng vừa tìm được, do $(m, n) = 1$ nên để $(rm + k, n) = 1$ thì $(r, n) = 1$. Nghĩa là có $\phi(n)$ hàng như vậy.

Tổng kết lại, ta có $\phi(m)\phi(n)$ phần tử trong bảng nguyên tố cùng nhau với mn. Do đó có điều phải chứng minh. □

Chương 3

Lý thuyết nhóm

Câu chuyện bắt đầu vào một ngày khi mình vẫn còn sống ngày tháng tươi đẹp.

Cho tới khi học **lý thuyết nhóm** thì đời bớt đẹp hơn tí.

Để bắt đầu mình cần hiểu nhóm là gì.

3.1 Nhóm

Định nghĩa 3.1. Nhóm (Group) Một tập hợp G và toán tử 2 ngôi $\star$ trên G tạo thành một nhóm nếu:

1. Tồn tại phần tử $e \in G$ sao cho với mọi $g \in G$ thì $g \star e = e \star g = g$. Khi đó e được gọi là **phần tử đơn vị** của G.
2. Với mọi $g \in G$, tồn tại $g' \in G$ sao cho $g \star g' = g' \star g = e$. Khi đó g' được gọi là **phần tử nghịch đảo** của g.
3. Tính kết hợp: với mọi $a, b, c \in G$ thì $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.

Định nghĩa 3.2. Nhóm Abel Nếu nhóm G có thêm tính giao hoán, tức là với mọi $a, b \in G$ thì $a \star b = b \star a$ thì G gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel

Lý thuyết nhóm thuộc toán trừu tượng, và nó trừu tượng thật. Tuy nhiên khi học về nó mình dần hiểu hơn về cách toán học vận hành và phát triển.

Ví dụ. Xét tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ và phép cộng 2 số nguyên.

1. Phần tử đơn vị là 0 vì với mọi $a \in \mathbb{Z}$ thì $a + 0 = 0 + a = a$
2. Với mọi $a \in \mathbb{Z}$, phần tử nghịch đảo là $-a$ vì $a + (-a) = (-a) + a = 0$
3. Phép cộng số nguyên có tính kết hợp do đó thỏa mãn điều kiện về tính kết hợp

Như vậy $(\mathbb{Z}, +)$ tạo thành nhóm. Lưu ý do phép cộng 2 số nguyên có tính giao hoán nên đây cũng là nhóm Abel.

Ví dụ. Xét tập hợp số hữu tỉ khác 0 $\mathbb{Q}^*$ và phép nhân 2 số hữu tỉ. Ta thấy do $a, b \in \mathbb{Q}^*$ nên tích $a \cdot b$ cũng khác 0, do đó cũng thuộc $\mathbb{Q}^*$.

1. Phần tử đơn vị là 1 vì với mọi $a \in \mathbb{Q}^*$ thì $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
2. Với mọi $a \in \mathbb{Q}^*$, phần tử nghịch đảo là $\frac{1}{a}$ vì $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
3. Phép nhân 2 số hữu tỉ có tính giao hoán do đó thỏa mãn điều kiện về tính kết hợp

Tương tự như nhóm $\mathbb{Z}, +$, nhóm $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ cũng là nhóm Abel.

3.2 Nhóm con

Định nghĩa 3.3. Nhóm con (Subgroup) Cho nhóm $(G, \star)$. Tập hợp $H \subset G$ được gọi là *nhóm con* của G nếu với mọi $a, b \in H$ thì $a \star b \in H$

Nghĩa là toán tử $\star$ đóng với các phần tử trong H.

Ví dụ. Xét nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ như trên. Ta xét tập con gồm các số chẵn của nó

$$2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

Ta thấy rằng tổng 2 số chẵn vẫn là số chẵn, nghĩa là phép cộng số nguyên đóng trên $2\mathbb{Z}$. Do đó $(2\mathbb{Z}, +)$ là nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$.

Như vậy mọi tập hợp có dạng $n\mathbb{Z}$ đều là nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$.

3.3 Coset

Định nghĩa 3.4. Coset (tạm dịch - *lớp kề* theo wikipedia) Cho nhóm G và nhóm con H của G.

Coset trái của H đối với phần tử $g \in G$ là tập hợp

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

Tương tự, coset phải là tập hợp

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

Từ đây nếu không nói gì thêm ta ngầm hiểu là coset trái.

Ví dụ với nhóm con $2\mathbb{Z}$ của $\mathbb{Z}$, ta thấy rằng

1. Nếu $g \in \mathbb{Z}$ là lẻ thì khi cộng với bất kì phần tử nào của $2\mathbb{Z}$ ta có số lẻ

2. Nếu $g \in \mathbb{Z}$ là chẵn thì khi cộng với bất kì phần tử nào của $2\mathbb{Z}$ ta có số chẵn

Nói cách khác, coset của $2\mathbb{Z}$ chia tập $\mathbb{Z}$ thành

$$0(2\mathbb{Z}) = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$1(2\mathbb{Z}) = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$$

Trực quan mà nói, 2 coset trên rời nhau.

Nhận xét. Hai coset bất kì hoặc rời nhau, hoặc trùng nhau.

Chứng minh. Nếu hai coset rời nhau thì không có gì phải nói. Ta chứng minh trường hợp còn lại.

Giả sử $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$. Như vậy tồn tại $h_1, h_2 \in H$ mà $g_1h_1 = g_2h_2$.

Do $h_1^{-1} \in H$, ta có $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$, nghĩa là $g_1 \in g_2H$.

Mà mọi phần tử trong g_1H có dạng g_1h nên $g_1h = g_2h_2h_1^{-1}h$. Do H là nhóm con của G nên $h_2h_1^{-1}h \in H$. Từ đó $g_1H \subseteq g_2H$. Tương tự ta cũng có $g_2H \subseteq g_1H$. Vậy $g_1H = g_2H$. $\square$

3.4 Normal Subgroup

Định nghĩa 3.5. Normal Subgroup (tạm dịch - *nhóm con chuẩn tắc*) Nhóm con H của G được gọi là *normal subgroup* nếu với mọi $g \in G$ ta có coset trái trùng với coset phải.

$$gH = Hg \; \forall g \in G$$

Nếu H là normal subgroup của G ta ký hiệu $H \triangleleft G$.

Định nghĩa 3.6. Quotient Group (tạm dịch - *nhóm thương*, hay Factor Group - *nhóm nhân tử*). Với nhóm G và normal subgroup của nó là H. Quotient Group được ký hiệu là G/H và được định nghĩa là tập hợp các coset tương ứng với normal subgroup H.

$$G/H = \{gH : g \in H\}$$

Ta thấy rằng điều này chỉ xảy ra nếu H là normal subgroup.

Ví dụ. Với nhóm $\mathbb{Z}$ và normal subgroup của nó là $2\mathbb{Z}$. Ta thấy $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\}$

Chương 4

Lý thuyết vành

4.1 Vành

Định nghĩa 4.1. Vành (Ring) Cho tập hợp R, trên đó ta định nghĩa 2 toán tử *cộng* và *nhân*.

Khi đó, $(R, +, \times)$ tạo thành vành nếu

- $(R, +)$ là nhóm Abel
- $(R, \times)$ có tính kết hợp với phép nhân. Với mọi $a, b, c \in R$ thì $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- Tính phân phối của phép cộng và phép nhân. Với mọi $a, b, c \in R$ thì $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

Tóm lại, $(R, +, \times)$ là vành nếu nó là nhóm Abel đối với phép cộng và có tính kết hợp với phép nhân.

Lưu ý. Phép nhân ở đây không nhất thiết có phần tử đơn vị, hay phần tử nghịch đảo như trong định nghĩa nhóm. Trong trường hợp này $(R, \times)$ gọi là semigroup (nửa nhóm).

Định nghĩa 4.2. Vành với đơn vị (ring with identity). Nếu có phần tử $1_R \in R$ sao cho với mọi $r \in R$ ta đều có

$$1_R \times r = r \times 1_R = r$$

thì 1_R được gọi là phần tử đơn vị đối với phép nhân.

Ta thường ký hiệu 0_R là phần tử đơn vị của phép cộng $(R, +)$ và gọi là **phần tử trung hòa**. Khi đó phần tử nghịch đảo của phép cộng gọi là **phần tử đối** và được ký hiệu là $-a$ nếu là đối của phần tử a.

Và 1_R là **phần tử đơn vị** đối với phép nhân $(R, \times)$.

Định nghĩa 4.3. Vành giao hoán (commutative ring). Nếu ta có tính giao hoán đối với phép nhân, nghĩa là với mọi $a, b \in$ đều thỏa

$$a \times b = b \times a$$

thì ta nói là vành giao hoán (không cần nói rõ là phép nhân vì phép cộng bắt buộc phải giao hoán theo định nghĩa vành rồi).

Chương 5

Tác động nhóm

Tác động nhóm (Group Action) cho phép chúng ta đếm những cấu hình tổ hợp mà việc vét cạn rồi loại bỏ sẽ tốn nhiều công sức cũng như sai sót.

5.1 Tác động nhóm

Cho tập hợp M và nhóm G. Ta nói G *tác động trái* lên M với ánh xạ:

$$\alpha : G \times M \to M$$

thỏa mãn 2 tiên đề sau:

- Identity: $\alpha(e, m) = m$ với mọi $m \in M$
- Compatibility: $\alpha(g, \alpha(h, m)) = \alpha(gh, x)$

Ta thường ký hiệu $\alpha(g, m)$ bởi $g(m)$ hay thậm chí đơn giản hơn là gm. Ký hiệu gm sẽ được sử dụng từ đây về sau.

Khi đó 2 tiên đề trên tương đương với:

- Identity: $em = m$ với mọi $m \in M$

- Compatibility: $g(hm) = (gh)m$ với mọi $m \in M$ và $g, h \in G$

Định nghĩa 5.1. Stabilizer (tạm dịch - *nhóm con ổn đinh*). Với phần tử $m \in M$, tập hợp các phần tử $g \in G$ mà $gm = m$ được gọi là nhóm con ổn định của nhóm G. Ta ký hiệu

$$G_m = \{g \in G : gm = m\}$$

Định nghĩa 5.2. Orbit (tạm dịch - *quỹ đạo*) của phần tử $m \in M$ là tập hợp

$$G(m) = \{gm : g \in G\}$$

Nhận xét. Hai orbit của hai phần tử bất kì hoặc rời nhau, hoặc trùng nhau.

Chứng minh. Giả sử ta có $m_1, m_2 \in M$ mà $G(m_1) \cap G(m_2) \neq \emptyset$.

Khi đó tồn tại $g_1, g_2 \in G$ để $g_1m_1 = g_2m_2$. Suy ra $m_1 = g_1^{-1}g_2m_2$.

Mà mọi phần tử trong $G(m_1)$ có dạng gm_1 nên $gm_1 = gg_1^{-1}g_2m_2$ nên $G(m_1) \subseteq G(m_2)$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $G(m_2) \subseteq G(m_1)$ nên $G(m_1) \equiv G(m_2)$. □

Hệ quả 5.1. Tập hợp M là giao của các orbit rời nhau. Giả sử ta có t orbit rời nhau $G(m_1), G(m_2), \ldots, G(m_t)$ thì

$$M = G(m_1) \cup G(m_2) \cup \ldots \cup G(m_t)$$

Ví dụ. Cho nhóm $\mathcal{S}_3$ có 6 phần tử $(1)(2)(3)$, $(1)(2,3)$, $(2)(1,3)$, $(3)(1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$.

Xét tập hợp $M = \{1, 2, 3\}$. Khi đó, xét từng hoán vị trên, ta có:

$$G_1 = \{(1)(2)(3), (1)(2,3)\}$$

và

$$G(1) = \{1, 2, 3\}$$

Ta nhận thấy $G(1) = G(2) = G(3)$, và $|G| = 6 = |G_1| \cdot |G(1)|$

Hay nói cách khác, $|G(m)| = [G : G_m]$ với G_m là stabilizer của phần tử m và $[G : G_m]$ là subgroup index của $G_m \subset G$, và bằng $\frac{|G|}{|G_m|}$ nếu là nhóm hữu hạn.

Định nghĩa 5.3. Hai phần tử $m, n \in M$ được gọi là *có quan hệ* với nhau dưới tác động của nhóm G nếu tồn tại phần tử $g \in G$ sao cho $m = gn$. Ta ký hiệu là $m\tilde{G}n$.

Nhận xét. Quan hệ được định nghĩa như trên là quan hệ tương đương.

Chứng minh. Ta cần chứng minh quan hệ trên có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

1. Tác động nhóm phải thỏa mãn $em = m$ với mọi $m \in M$. Do đó có tính phản xạ.

2. Với mọi m, n mà $m\tilde{G}n$ thì tồn tại $g \in G$ mà $m = gn$. Do tồn tại $g^{-1} \in G$, nhân cho 2 vế ta có $g^{-1}m = n$, nghĩa là $n\tilde{G}m$. Vậy quan hệ này có tính đối xứng.

3. Nếu $m\tilde{G}n$ và $n\tilde{G}p$ thì tồn tại 2 phần tử $g_1, g_2 \in G$ mà $m = g_1n$ và $n = g_2p$. Suy ra $m = g_1g_2p$, tương đương $m\tilde{G}p$, do đó có tính bắc cầu. □

5.2 Bổ đề Burnside

Các trạng thái khác nhau của tập hợp M có thể là *tương đương* nhau nếu chúng nằm trong cùng lớp tương đương dưới tác động của nhóm G.

Bổ đề Burnside cho phép chúng ta tính được số trạng thái khác nhau (hay cấu hình khác nhau) mà chúng ta dễ bị nhầm lẫn hoặc bỏ sót trong quá trình vét cạn.

Bổ đề 5.1. Bổ đề Burnside Với nhóm G tác động lên tập hợp M, ta có:

$$t_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

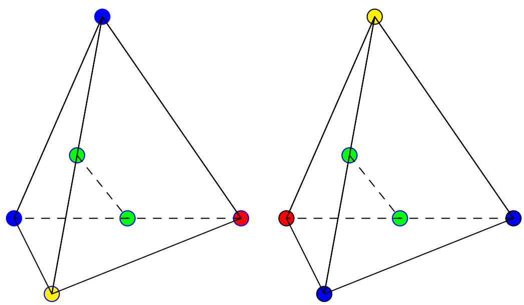
trong đó, t_G là số lớp tương đương của tập M dưới tác động của nhóm G

$|M^g|$ là số điểm bất động của tập M dưới tác động của phần tử g, nghĩa là $M^g = \{m \in M : gm = m\}$.

5.3 Ví dụ bài toán đếm sử dụng bổ đề Burnside

Ví dụ. Cho hình tứ diện đều. Ta tô 4 đỉnh của nó bằng 3 màu xanh, đỏ, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tô như vậy?

Ta cần lưu ý một điều, 2 cách tô là tương đương nhau (giống nhau) nếu tồn tại một phép quay các đỉnh biến cách tô này thành cách tô kia.



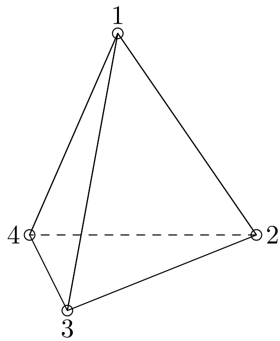
Hình 5.1: Phép quay trục tạo bởi trung điểm hai cạnh đối nhau

Như hình trên ta thấy nếu chọn trục quay là đường thẳng nối trung điểm 2 cạnh đối diện (2 điểm xanh lá) thì đỉnh trên và đỉnh dưới đổi chỗ cho nhau (xanh và vàng), đỉnh trái và đỉnh phải đổi chỗ cho nhau (xanh và đỏ).

Ta giải bài này như sau:

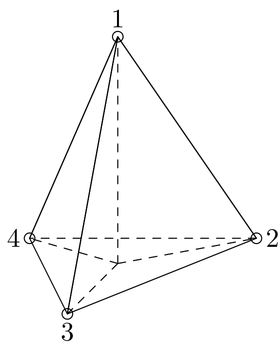
Đầu tiên ta đánh số các đỉnh của tứ diện (như hình)

Ta có 3 trường hợp biến đổi sau:



Hình 5.2: Đánh số hình

Trường hợp 1. Giữ nguyên 1 đỉnh và trục quay là đường thẳng đi qua đỉnh đó và tâm của mặt đối diện.



Hình 5.3: Trường hợp 1

Khi đó phép quay (ngược chiều đồng hồ) tương ứng hoán vị $(1)(2,3,4)$ (quay 60 độ) và $(1)(2,4,3)$ (quay 120 độ).

Do ta chọn 1 đỉnh cố định thì ta có 4 cách chọn, và với mỗi cách chọn đỉnh cố định ta có thể quay 2 cách nên ta có tổng là 8 hoán vị.

Trường hợp 2. Ta chọn trung điểm 2 cạnh đối nhau và nối lại thành trục quay như hình trong ví dụ. Khi đó tương ứng với hoán vị $(1,4)(2,3)$.

Ta có $\frac{C_4^2}{2!} = 3$ hoán vị.

Trường hợp 3. Hoán vị đồng nhất $(1)(2)(3)(4)$.

Tóm lại, tập hợp M ở đây là tập hợp 4 đỉnh của tứ diện, và nhóm tác động lên M là nhóm con 12 phần tử của $\mathcal{S}_4$.

Như vậy, ví dụ với hoán vị $(1)(2,3,4)$, nếu ta muốn sau phép quay giữ nguyên trạng thái (hay nói cách khác là tìm M^g) thì ta tô màu đỉnh 1 tùy ý, đỉnh 2-3-4 chung màu (cũng tùy ý).

Suy ra ta có $3 \cdot 3$ cách tô. Tương tự với các hoán vị dạng $(1,4)(2,3)$.

Như vậy $t_G = \frac{1}{12}(1 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^2) = 15$ cách tô màu khác nhau.

Tổng quát, nếu có k màu thì số lớp tương đương là

$$t_G = \frac{1}{12}(1 \cdot k^4 + 8 \cdot k^2 + 3 \cdot k^2) = \frac{1}{12}(k^4 + 11k^2)$$

5.4 Chỉ số chu trình

Với mỗi hoán vị trong tập G (theo định lý Cayley thì mọi nhóm hữu hạn đều isomorphism với nhóm con nào đó của nhóm hoán vị), ta viết dưới dạng các chu trình độc lập

$$\underbrace{(g_1)(g_2)\dots(g_{t_1})}_{t_1}\underbrace{(g_{j_1}g_{j_2})(g_{j_3}g_{j_4})\dots}_{t_2}$$

Nếu ta viết hoán vị dưới dạng các chu trình rời nhau, ta gọi

t_1	là số chu trình có độ dài 1
t_2	là số chu trình có độ dài 2
$\dots$	tương tự
t_n	là số chu trình có độ dài n

Khi đó, chỉ số chu trình của hoán vị ứng các biến $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là

$$I_g(z_1, z_2, , \ldots, z_n) = z_1^{t_1} z_2^{t_2} \ldots z_n^{t_n}$$

Ví dụ. Xét hoán vị $(1,2,3)(4)(5)(6,7) \in \mathcal{S}_7$

Ta có 2 chu trình độ dài 1, 1 chu trình độ dài 2 và 1 chu trình độ dài 3. Không có chu trình độ dài 4, 5, 6, 7.

Do đó chỉ số chu trình là

$$I_g(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 z_2^1 z_3^1$$

Nhận xét. Bất kì hoán vị nào thuộc $\mathcal{S}_n$ đều thỏa $1 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 + \ldots + n \cdot t_n = n$.

Định nghĩa 5.4. Cyclic index (tạm dịch - *chỉ số chu trình*) của nhóm G là

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} I_g(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

Nhìn lại ví dụ về tứ diện bên trên, các đỉnh nằm trong cùng chu trình cần được tô cùng màu. Như vậy mỗi z_i tương ứng với một màu.

Từ đó, với ví dụ trên

$$P_G(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{12}\left(z_1^4 + 8z_1 z_3 + 3z_2^2\right)$$

Cho mỗi $z_i = 3$ ta có kết quả phép tính theo bổ đề Burnside.

5.5 Định lý Polya

Định lý Polya là một mở rộng cho bổ đề Burnside, cho phép chúng ta đếm số lớp tương đương thỏa mãn điều kiện nhất định (về số lượng phần tử nhất định nhận trạng thái nhất định).

Ví dụ với hình tứ diện như trên nhưng ta thêm điều kiện tô 2 đỉnh màu vàng, 1 đỉnh màu đỏ và 1 đỉnh màu xanh (không tô tổng quát nữa).

Ta ký hiệu tập R là tập hợp các trạng thái có thể nhận của mỗi phần tử $m \in M$.

$$R = \{r_1, r_2, \ldots, r_c\}$$

Ở ví dụ trên thì $R = \{\text{đỏ}, \text{xanh}, \text{vàng}\}$.

Ta thay mỗi z_i trong chỉ số chu trình bằng tổng $\sum_{r \in R} r^i$.

Ví dụ. Giả sử ta tô màu 4 đỉnh tứ diện với 2 màu $R = \{r_1, r_2\}$.

Với z_1 ta thay bằng $r_1 + r_2$

Với z_2 ta thay bằng $r_1^2 + r_2^2$

Với z_3 ta thay bằng $r_1^3 + r_2^3$

Khi đó P_G tương đương với

$$\frac{1}{12}\left[(r_1 + r_2)^4 + 8 \cdot (r_1 + r_2)(r_1^3 + r_2^3) + 3 \cdot (r_1^2 + r_2^2)^2\right]$$

Khai triển ra (lưu ý là ở đây không có tính giao hoán phép nhân)

$$\begin{aligned}
(r_1 + r_2)^4 = & r_1r_1r_1r_1 + r_1r_1r_1r_2 + r_1r_1r_2r_1 + r_1r_1r_2r_2 \\
& + r_1r_2r_1r_1 + r_1r_2r_1r_2 + r_1r_2r_2r_1 + r_1r_2r_2r_2 \\
& + r_2r_1r_1r_1 + r_2r_1r_1r_2 + r_2r_1r_2r_1 + r_2r_1r_2r_2 \\
& + r_2r_2r_1r_1 + r_2r_2r_1r_2 + r_2r_2r_2r_1 + r_2r_2r_2r_2
\end{aligned}$$

Mình thấy rằng có 16 cấu hình khác nhau tương ứng 16 cách tô 2 màu cho 4 đỉnh. Tương tự

$$\begin{aligned}
(r_1 + r_2)(r_1^3 + r_2^3) &= r_1^4 + r_1r_2^3 + r_2r_1^3 + r_2^4 \\
&= r_1r_1r_1r_1 + r_1r_2r_2r_2 + r_2r_1r_1r_1 + r_2r_2r_2r_2
\end{aligned}$$

và cuối cùng

$$\begin{aligned}(r_1^2+r_2^2)^2 &= r_1^4 + r_1^2r_2^2 + r_2^2r_1^2 + r_2^4 \\ &= r_1r_1r_1r_1 + r_1r_1r_2r_2 + r_2r_2r_1r_1 + r_2r_2r_2r_2\end{aligned}$$

Việc không có tính giao hoán với phép nhân làm biểu thức cồng kềnh và phức tạp. Do đó mình thêm một tập hợp W là vành giao hoán, và xét ánh xạ $w : R \mapsto W$ với $w(r_i) = w_i$.

Khi đó nếu thay r_i bởi w_i vào bên trên biểu thức sẽ rất đẹp

$$P_G(w_1, w_2) = \frac{1}{12}\left[(w_1+w_2)^4 + 8(w_1+w_2)(w_1^3+w_2^3) + 3(w_1^2+w_2^2)^2\right]$$

Khai triển và thu gọn ta có

$$\begin{aligned}P_G(w_1, w_2) &= \frac{1}{12}\left[12w_1^4 + 12w_1^3w_2 + 12w_1^2w_2^2 + 12w_1w_2^3 + 12w_2^4\right] \\ &= w_1^4 + w_1^3w_2 + w_1^2w_2^2 + w_1w_2^3 + w_2^4\end{aligned}$$

Ở đây, định lý Polya nói rằng, số mũ của w_i thể hiện số lượng phần tử của tập M nhận giá trị r_i, và hệ số trước mỗi toán hạng là số lớp tương đương tương ứng với số lượng phần tử của tập M nhận các giá trị r_i.

Nói cách khác:

- có 1 lớp tương đương mà 4 đỉnh nhận màu r_1
- có 1 lớp tương đương mà 3 đỉnh nhận màu r_1 và 1 đỉnh nhận màu r_2
- có 1 lớp tương đương mà 2 đỉnh nhận màu r_1 và 2 đỉnh nhận màu r_2
- có 1 lớp tương đương mà 1 đỉnh nhận màu r_1 và 3 đỉnh nhận màu r_2
- cuối cùng là 1 lớp tương đương mà 4 đỉnh nhận màu r_2.

Quay lại vấn đề tô 4 đỉnh tứ diện với 3 màu xanh, đỏ, vàng. Tìm số cách tô 2 đỉnh màu vàng, 1 đỉnh màu đỏ và 1 đỉnh màu xanh.

Đặt $w(\text{vàng}) = x$, $w(\text{đỏ}) = y$ và $w(\text{xanh}) = z$
Ta có

$$P_G = \frac{1}{12}\left[(x+y+z)^4 + 8\cdot(x+y+z)(x^3+y^3+z^3) + 3\cdot(x^2+y^2+z^2)^2\right]$$

Như vậy đề bài tương ứng việc tìm hệ số của hạng tử x^2yz trong biểu thức trên. Mình tính ra kết quả là 1.

Chương 6

Ba đường Conic

Ba đường Conic bao gồm ellipse, hyperbol và parabol.

6.1 Ellipse

Ellipse

Đường ellipse là tập hợp các điểm sao cho tổng khoảng cách từ nó tới 2 điểm cố định là 1 hằng số.

Nghĩa là, với 2 điểm cố định F_1, F_2, tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ với a là hằng số tạo thành đường ellipse.

Ở trên hệ tọa độ, nếu ta chọn F_1 và F_2 nằm trên Ox và đối xứng qua Oy, tức là $F_1 = (-c, 0)$ và $F_2 = (c, 0)$, thì các điểm $M = (x, y)$ nằm trên ellipse thỏa

$$MF_1 + MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

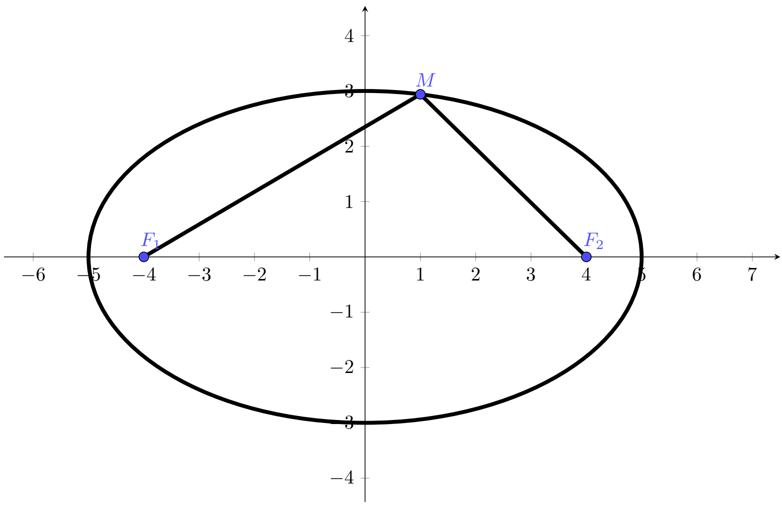
Tương ứng với biến đổi thành phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Đặt $b^2 = a^2 - c^2$ thì phương trình của ellipse trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Phương trình này gọi là **phương trình chính tắc**.



Hình 6.1: Ellipse với phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Trong phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

thì a là khoảng cách từ tâm tới 2 biên trái hoặc phải, nên a là **độ dài bán trục lớn**.

Tương tự, b là **độ dài bán trục nhỏ** (khoảng cách từ tâm tới 2 biên trên dưới).

Từ cách đặt $b^2 = a^2 - c^2$ tương đương $c^2 = a^2 - b^2$ thì c gọi là **tiêu cự** của ellipse.

Các điểm F_1, F_2 gọi là **tiêu điểm** của ellipse.

Với ví dụ trên $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ thì $a = 5, b = 3$. Suy ra $c = 4$ (lưu ý là $a, b > 0$ và $c \geq 0$).

Các đỉnh nằm ở các tọa độ $(-a, 0), (a, 0), (0, b), (0, -b)$. Các tiêu điểm nằm ở $(-c, 0), (c, 0)$.

Nhận xét. Khi $c = 0$, tức là 2 tiêu điểm trùng nhau, ta có đường tròn.

Tâm sai của ellipse là $e = \frac{c}{a} < 1$

6.2 Hyperbol

Hyperbol

Đường hyperbol là tập hợp các điểm sao cho giá trị tuyết đối hiệu số khoảng cách từ nó tới 2 điểm cố định là 1 hằng số.

Nghĩa là, với 2 điểm cố định F_1, F_2, tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ với a là hằng số tạo thành đường hyperbol.

Ở trên hệ tọa độ, nếu ta chọn F_1 và F_2 nằm trên Ox và đối xứng qua Oy, tức là $F_1 = (-c, 0)$ và $F_2 = (c, 0)$, thì các điểm $M = (x, y)$ nằm trên hyperbol thỏa

$$|MF_1 - MF_2| = |\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a$$

Tương ứng với biến đổi thành phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Đặt $b^2 = a^2 - c^2$ thì phương trình của hyperbol trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Đường hyperbol cắt trục Ox tại 2 điểm $A_1 = (-a, 0)$ và $A_2 = (a, 0)$.

Tiêu điểm của hyperbol ở $F_1 = (-c, 0)$ và $F_2 = (c, 0)$.

Đường hyperbol có 2 tiệm cận là đường thẳng $y = \frac{b}{a}x$ và $y = -\frac{b}{a}x$.

Tâm sai của hyperbol là $e = \frac{c}{a} > 1$.

6.3 Parabol

Parabol

Đường parabol là tập hợp các điểm cách đều một điểm cố định và một đường thẳng cố định.

Nghĩa là, với 1 điểm cố định F và đường thẳng cố định (d), parabol là tập hợp các điểm M sao cho $MF = d(M, d)$ với $d(M, d)$ là khoảng cách từ M tới đường thẳng (d).

Phép dời tọa độ cho phép ta dời một hình parabol có đỉnh ở bất kì điểm nào về gốc tọa độ.

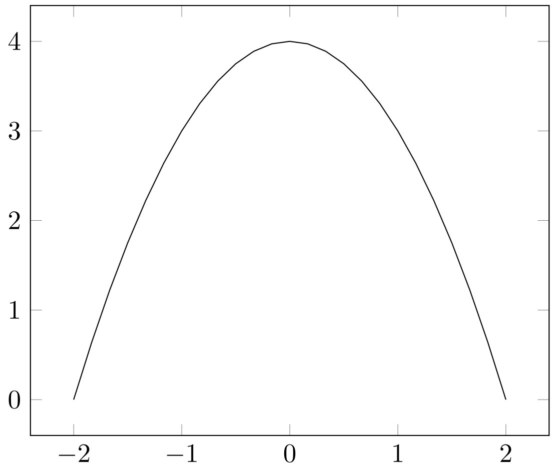
Tức là, không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét các parabol dạng $y = ax^2$ là đủ.

Điểm cố định ở trên được gọi là **tiêu điểm**. Đường thẳng cố định ở trên gọi là **đường chuẩn**.

Parabol có tính đối xứng nên tiêu điểm nằm trên Oy. Đặt tọa độ của nó là $F = (0, f)$.

Đường chuẩn nằm ngang nên ta có parabol là các điểm $M = (x, y)$ sao cho

$MF = \sqrt{x^2 + (y - f)^2}$ và $d(M, d) = y + f$ (trường hợp M trùng với đỉnh nên điều kiện của parabol xảy ra tương đương với M cách



Hình 6.2: Parabol với phương trình $y = -x^2 + 4$

đều tiêu điểm và đường chuẩn, nghĩa là đường chuẩn có dạng $y = -f$).

Do đó $\sqrt{x^2 + (y - f)^2} = y + f$. Bình phương và biến đổi ta thu gọn được

$$f = \frac{1}{4a}$$

Thường thì ta đặt $p = f$, khi đó phương trình parabol trở thành

$$x^2 = 4py$$

Đây là dạng chính tắc của parabol với trục đối xứng dọc.

Tâm sai của parabol là $e = \frac{c}{a} = 1$.

Chương 7

Đại số tuyến tính

7.1 Nhắc lại các khái niệm cơ bản

Hạng của ma trận

Cho ma trận $\boldsymbol{M}_{m\times n}$ có m hàng và n cột. **Hạng** của ma trận $\boldsymbol{M}$ là cấp của ma trận vuông con lớn nhất của $\boldsymbol{M}$ có định thức khác 0.
Ký hiệu. Hạng (hay rank) của ma trận $\boldsymbol{M}$ ký hiệu là $r = \text{rank}(\boldsymbol{M})$

Nhận xét. Nếu r là hạng của ma trận $\boldsymbol{M}_{m\times n}$ thì $r \leq \min(m, n)$

Phần II

Lời giải cho bài tập trong một số sách

Chương 8

Abstract Algebra

Phần này giải các bài tập trong quyển **Abstract Algebra: Theory and Applications** của Thomas W. Judson (Stephen F. Austin State University)

8.1 Groups (chương 3)

8.1.1 Tóm tắt lý thuyết

Tập hợp G và toán tử 2 ngôi $\star$ trên G tạo thành một nhóm nếu:

- Tồn tại phần tử $e \in G$ sao cho với mọi $g \in G$, $e \star g = g \star e = g$. Khi đó e là phần tử đơn vị của G.
- Với mọi phần tử $g \in G$, tồn tại $g' \in G$ sao cho $g \star g' = g' \star g = e$. Khi đó g' gọi là phần tử nghịch đảo của g trong G.
- Với mọi $a, b, c \in G$ thì $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ (tính kết hợp)

Nếu có thêm tính chất $a \star b = b \star a$ với mọi $a, b \in G$ thì G gọi là nhóm giao hoán (nhóm Abel).

8.1.2 Bài tập

7. Đặt $S = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ và định nghĩa toán tử 2 ngôi trên S là $a \star b = a + b + ab$. Chứng minh rằng $(S, \star)$ là nhóm Abel

Chứng minh.

- Giả sử tồn tại phần tử đơn vị e, khi đó $e \star s = s \star e = s$ với mọi $s \in S$. Nghĩa là $e + s + es = s + e + se = s$. Vậy $e + se = 0$ mà $s \neq -1$ nên $e = 0$
- Với $e = 0$, giả sử với mọi $s \in S$ có nghịch đảo s'. Do $s \star s' = s' \star s = e$ nên $s + s' + ss' = s' + s + s's = e = 0$, tức là $s'(1 + s) = -s$. Vậy $s' = \frac{-s}{1+s}$
- Với mọi $a, b, c \in S$, $a \star (b \star c) = a \star (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + b + c + ab + bc + ca + abc$ và $(a \star b) \star c = (a + b + ab) \star c = a + b + ab + c + c(a + b + bc) = a + b + c + ab + bc + ca + abc$. Như vậy $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$, tính kết hợp

□

39. Gọi G là tập các ma trận 2×2 với dạng

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

với $\theta \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng G là subgroup của $SL_2(\mathbb{R})$

Chứng minh. Với $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra định thức của tích 2 ma trận là

$$\det\left(\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

Như vậy phép nhân 2 ma trận có dạng trên đóng trên $SL_2(\mathbb{R})$.

Phần tử đơn vị là $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ tương ứng với $\theta = 0$

Phần tử nghịch đảo là $\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}$ suy ra từ công thức định thức ban nãy

Cuối cùng, phép nhân ma trận có tính kết hợp. Như vậy G là subgroup của $SL_2(\mathbb{R})$

□

47. Đặt G là nhóm và $g \in G$. Chứng minh rằng

$$Z(G) = \{x \in G : gx = xg \;\forall\; g \in G\}$$

là subgroup của G. Subgroup này gọi là **center** của G

Chứng minh. Giả sử trong G có 2 phần tử là x_1 và x_2 thuộc $Z(G)$. Khi đó

$x_1 g = g x_1$ và $x_2 g = g x_2$ với mọi $g \in G$.

Xét phần tử $x_1 x_2$, ta có

$$(x_1x_2)g = x_1(x_2g) = x_1(gx_2) = (gx_1)x_2 = g(x_1x_2)$$

với mọi $g \in G$. Do đó $x_1x_2 \in Z(G)$ nên $Z(G)$ là subgroup.

□

49. Cho ví dụ về nhóm vô hạn mà mọi nhóm con không tầm thường của nó đều vô hạn

Ví dụ tập $\mathbb{Z}$ và phép cộng số nguyên. Khi đó mọi nhóm con của $\mathbb{Z}$ có dạng $n\mathbb{Z}$ với $n \in \mathbb{Z}$. Ví dụ

$2\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$ với phần tử sinh là 2
$n\mathbb{Z} = \{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, \cdots\}$ với phần tử sinh là n
54. Cho H là subgroup của G và

$$C(H) = \{g \in G : gh = hg \;\forall\; h \in H\}$$

Chứng minh rằng $C(H)$ là subgroup của G. Subgroup này được gọi là **centralizer** của H trong G

Chứng minh. Gọi g_1 và g_2 thuộc $C(H)$. Khi đó
$g_1h = hg_1$ và $g_2h = hg_2$ với mọi $h \in H$
Xét phần tử g_1g_2, với mọi $h \in H$ ta có

$$(g_1g_2)h = g_1(g_2h) = g_1(hg_2) = (g_1h)g_2 = (hg_1)g_2 = h(g_1g_2)$$

Như vậy $g_1g_2 \in C(H)$, từ đó $C(H)$ là subgroup của G

$\square$

8.1.3 Kết luận

Bài tập số 47 và 54 là 2 khái niệm quan trọng cho bổ đề Burnside và định lý Polya.

8.2 Permutation Groups (chương 5)

8.2.1 Tóm tắt lý thuyết

Đặt S_n là nhóm hoán vị trên tập n phần tử. Như vậy S_n có $n!$ phần tử.

Mỗi phần tử trong S_n có thể biểu diễn dưới dạng các chu trình (cycle) độc lập (disjoint).

8.2.2 Bài tập

13. Đặt $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m \in S_n$ là tích của các cycle độc lập. Chứng minh rằng order của σ là LCM của độ dài các cycle $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$.

Chứng minh. Đặt l_i là độ dài cycle σ_i $(i = 1, \cdots m)$. Khi đó $\sigma_i^{k_i l_i}$ sẽ ở dạng các cycle độ dài 1 $(k_i \in \mathbb{Z})$.

Từ đó, $\sigma^l = \sigma_1^l \cdots \sigma_m^l = (1) \cdots (n)$ nếu $l = k_1 l_1 = \cdots k_m l_m$. Số l nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này là $\mathrm{lcm}(l_1, \cdots, l_m)$ (đpcm) □

23. Nếu σ là chu trình với độ dài lẻ, chứng minh rằng σ^2 cũng là chu trình

Chứng minh. Giả sử $\sigma = (g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}, g_n)$ với n lẻ. Khi đó $\sigma^2 = (g_1, g_3, \cdots, g_n, g_2, g_4, \cdots, g_{n-1})$ cũng là chu trình. □

30. Cho $\tau = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ là chu trình độ dài k.

(a) Chứng minh rằng với mọi hoán vị σ thì

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \cdots, \sigma(a_k))$$

là chu trình độ dài k.

(b) Gọi μ là chu trình độ dài k. Chứng minh rằng tồn tại hoán vị σ sao cho $\sigma\tau\sigma^{-1} = \mu$

Chứng minh. Để chứng minh 2 mệnh đề trên ta cần chú ý một số điều.

(a) Ta thấy rằng bất kì phần tử nào khác $a_1, a_2, \cdots, a_k$ thì khi qua τ không đổi, do đó khi đi qua $\sigma\tau\sigma^{-1}$ thì chỉ đi qua $\sigma\sigma^{-1}$ và cũng không đổi. Nói cách khác các phần tử $a_1, a_2, \cdots, a_k$ vẫn nằm trong chu trình nên ta có đpcm.

(b) Từ câu (a), với $\mu = (b_1, b_2, \cdots, b_k)$ thì ta chọn σ sao cho $b_i = \sigma(a_i)$.

□

8.2.3 Kết luận

Bổ đề Burnside và định lý Polya dùng để đếm số cấu hình khác nhau dựa trên nhóm hoán vị.

8.3 Cosets (chương 6)

8.3.1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 8.1 (Left coset)**.** Cho nhóm G và subgroup của nó là H. Khi đó, với phần tử $g \in G$, **left coset** của g được định nghĩa là tập $gH = \{gh : h \in H\}$

Định nghĩa 8.2 (Right coset)**.** Tương tự, **right coset** là tập $Hg = \{hg : h \in H\}$

Định lý 8.1 (Định lý Lagrange)**.** Gọi G là nhóm hữu hạn n phần tử. Khi đó mọi subgroup H của G có số phần tử chia hết cho n.

Định nghĩa 8.3. Cho nhóm G và subgroup H của nó. Số lượng left coset của H trong G được gọi là **index** và được ký hiệu là $[G : H]$

Định lý 8.2. Với H là subgroup của G. Khi đó số lượng right coset bằng số lượng left coset

8.3.2 Bài tập

11. Gọi H là subgroup của nhóm G và giả sử $g_1, g_2 \in G$. Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương:

(a) $g_1H = g_2H$

(b) $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$

(c) $g_1H \subseteq g_2H$

(d) $g_2 \in g_1H$

(e) $g_1^{-1}g_2 \in H$

Chứng minh. Từ (a) ra (b): Ta đã biết các coset là rời nhau hoặc trùng nhau, do đó với mọi $g_1h \in g_1H$, tồn tại $g_2h' \in g_2H$ mà $g_1h = g_2h'$. Suy ra $(g_1h)^{-1} = (g_2h')^{-1}$ hay $h^{-1}g_1^{-1} = h'^{1}g_2^{-1}$ (đpcm)

Từ (a) ra (c): Hiển nhiên

Từ (a) ra (d): Với mọi $g_1h \in g_1H$, tồn tại $g_2h' \in g_2H$ sao cho $g_1h = g_2h'$, hay $g_2 = g_1hh'^{-1}$, đặt $h'' = hh'^{-1}$ thì $h'' \in H$ (H là nhóm con) nên $g_1h'' \in g_1H$. Suy ra $g_2 \in g_1H$

Từ (a) ra (e): Tương tự, ta có $g_1h = g_2h'$, suy ra $hh'^{-1} = g_1^{-1}g_2 \in H$

□

16. Nếu $ghg^{-1} \in H$ với mọi $g \in G$ và $h \in H$, chứng minh rằng right coset trùng với left coset

Chứng minh. Do $ghg^{-1} \in H$ nên tồn tại $h' \in H$ sao cho $ghg^{-1} = h'$. Tương đương $gh = h'g$ với mọi $h \in H$ nên $gH = Hg$. Điều này đúng với mọi $g \in G$ nên các right coset trùng left coset. □

17. Giả sử $[G : H] = 2$. Chứng minh rằng nếu a, b không thuộc H thì $ab \in H$.

Chứng minh. Ta biết rằng 2 coset ứng với 2 phần tử g_1, g_2 bất kì là trùng nhau hoặc rời nhau.

Do đó với $eH = H$, ta suy ra 2 coset của G là H và $G\backslash H$.

Vì $a, b \notin H$ nên coset của chúng trùng nhau. Và nghịch đảo của a cũng nằm trong $G\backslash H$ vì nếu nghịch đảo của a nằm trong H thì a cũng phải nằm trong H.

Suy ra $a^{-1}H = bH$. Nghĩa là tồn tại 2 phần tử $h_1, h_2 \in H$ sao cho $a^{-1}h_1 = bh_2$, tương đương $h_1h_2^{-1} = ab \in H$ (đpcm). □

21. Gọi G là cyclic group với order n. Chứng minh rằng có đúng $\phi(n)$ phần tử sinh của G

Chứng minh. Gọi g là một phần tử sinh của G. Khi đó g sinh ra tất cả phần tử trong G, hay nói cách khác các phần tử trong G có dạng g^i với $0 \leq i < n$.

Như vậy một phần tử $h = g^i$ cũng là phần tử sinh của G khi và chỉ khi $\gcd(i, n) = 1$ và có $\phi(n)$ số i như vậy (đpcm).

□

8.3.3 Kết luận

8.4 Isomorphism (chương 9)

8.4.1 Tóm tắt lý thuyết

Cho 2 nhóm $(G, \star)$ và $(H, *)$. Ánh xạ $\varphi : G \to H$ được gọi là isomorphism từ G tới H nếu:

- với mọi $g_1, g_2 \in G$ thì $\varphi(g_1 \star g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2)$
- φ là song ánh (one-to-one và onto)

8.4.2 Bài tập

18. Chứng minh rằng subgroup của $\mathbb{Q}^*$ gồm các phần tử có dạng $2^m 3^n$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ là internal direct product tới $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Chứng minh. Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\varphi(2^m 3^n) = (m, n)$

Hàm này là well-defined vì với m cố định thì mỗi phần tử $2^m 3^n$ chỉ cho ra một phần tử (m, n). Tương tự với cố định n.

Hàm này là đơn ánh (one-to-one) vì với $m_1 = m_2$ và $n_1 = n_2$ thì $2^{m_1} 3^{n_1} = 2^{m_2} 3^{n_2}$.

Hàm này cũng là toàn ánh vì với mỗi cặp (m, n) ta đều tính được $2^m 3^n$.

Vậy hàm φ là song ánh.

Thêm nữa,

$$\begin{aligned}\varphi(2^{m_1}3^{n_1}\cdot 2^{m_2}3^{n_2}) &= \varphi(2^{m_1+m_2}3^{n_1+n_2})\\ &= (m_1+m_2, n_1+n_2) = (m_1,n_1)+(m_2,n_2)\\ &= \varphi(2^{m_1}3^{n_1})\varphi(2^{m_2}3^{n_2})\end{aligned}$$

Vậy φ là homomorphism, và là song ánh nên là isomorphism. □

20. Chứng minh hoặc bác bỏ: mọi nhóm Abel có order chia hết bởi 3 chứa một subgroup có order là 3

Chứng minh. Gọi order của nhóm Abel là $n = 3k$, và g là phần tử sinh của nhóm Abel đó. Như vậy $g^n = g^{3k} = e$.

Nếu ta chọn $h = g^k$ thì $h^3 = e$, khi đó subgroup được sinh bởi h có order 3 (đpcm). □

21. Chứng minh hoặc bác bỏ: mọi nhóm không phải Abel có order chia hết bởi 6 chứa một subgroup có order 6

Chứng minh. Với $\mathcal{S}_3$ có order là 6 nhưng không có nhóm con nào order 6 (nhóm con chỉ có order 1, 2 hoặc 3) (bác bỏ). □

22. Gọi G là group với order 20. Nếu G có các subgroup H và K với order 4 và 5 mà $hk = kh$ với mọi $h \in H$ và $k \in K$, chứng minh rằng G là internal direct product của H và K

Chứng minh. Ta chứng minh $H \cap K = \{e\}$. Giả sử tồn tại phần tử $m \in H \cap K$, khi đó do $m \in H$ nên $mk = km$ với mọi $k \in K$. Tuy nhiên $m \in K$ do đó điều này xảy ra khi và chỉ khi $m = e$.

Như vậy $H \cap K = \{e\}$. □

8.4.3 Kết luận

Isomorphism cho phép chúng ta chuyển từ việc tính toán trên một nhóm này thành tính toán trên nhóm khác dễ hơn (về mặt số học, toán tử).

Định lý 8.3 (Định lý Cayley)**.** Mọi nhóm hữu hạn n phần tử isomorphism với nhóm con nào đó của nhóm hoán vị S_n

Chương 9

Intro to Math-Crypto

Quyển **An Introduction to Mathematical Cryptography** của Hoffstein (lấy source từ 1 repo khá cũ đã đóng bụi của mình).

Lúc viết repo kia mình viết lời giải bằng tiếng Anh. Bây giờ chép lại qua đây lười dịch ra tiếng Việt :D

9.1 Chapter 2

2.3. Let g be a primitive root of $\mathbb{F}_p$

(a) Suppose that $x = a$ and $x = b$ are both integer solutions to the congruence $g^x \equiv h \pmod{p}$. Prove that $a \equiv b \pmod{p-1}$. Explain why this implies that the map (2.1) on page 64 is well-defined

(b) Prove that $\log_g(h_1 h_2) = \log_g(h_1) + \log_g(h_2)$ for all $h_1, h_2 \in \mathbb{F}_p^*$

(c) Prove that $\log_g(h^n) = n \log_g(h)$ for all $h \in \mathbb{F}_p^*$ and $n \in \mathbb{Z}$

Chứng minh. Bài này cần chứng minh mối quan hệ giữa các discrete logarithm.

(a) Because a and b are both solutions to the congruence $g^x \equiv h \pmod{p}$,

$$\begin{cases} g^a \equiv h \pmod{p} \\ g^b \equiv h \pmod{p} \end{cases}$$

$\Rightarrow g^{-b} \equiv h^{-1} \pmod{p}$
$\Rightarrow g^a g^{-b} \equiv hh^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$
$\Rightarrow g^{a-b} \equiv 1 \pmod{p}$, but g is primitive root of $\mathbb{F}_p$
$\Rightarrow \phi(p)|(a-b) \Leftrightarrow (p-1)|(a-b)$
$\Rightarrow a - b \equiv 0 \pmod{p-1}$
$\Rightarrow a \equiv b \pmod{p-1}$
(b) Suppose that

$$\begin{cases} h_1 \equiv g^{x_1} \pmod{p} \\ h_2 \equiv g^{x_2} \pmod{p} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = \log_g h_1$ and $x_2 = \log_g h_2$ (1)
And $h_1 h_2 \equiv g^{x_1+x_2} \pmod{p}$
$\Rightarrow x_1 + x_2 = \log_g(h_1 h_2)$ (2)
From (1) and (2), $\log_g h_1 + \log_g h_2 = \log_g(h_1 h_2)$
(c) Same as (b).

$\square$

2.5. Let p be an odd prime and let g be a primitive root modulo p. Prove that a has a square root modulo p if and only if its discrete logarithm $\log_g(a)$ modulo $p-1$ is even.

We have $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

(1) If a has square root modulo p, then there is b: $b \equiv a^2 \pmod{p}$
$\Rightarrow \log_g a = \log_g(b^2) = 2\log_g b \pmod{p-1}$
$\Rightarrow \log_g a$ is even.
(2) If $\log_g a$ modulo $p-1$ is even
$\Rightarrow \log_g a = 2\log_g b \pmod{p-1}$ with some $b \in \mathbb{F}_p$
$\Rightarrow \log_g a = \log_g(b^2) \pmod{p-1}$
$\Rightarrow a \equiv b^2 \pmod{p-1}$
$\Rightarrow a$ has square root modulo $p-1$

2.10. The exercise describes a public key cryptosystem that requires Bob and Alice to exchange several messages. We illustrate the system with an example.

Bob and Alice fix a publicly known prime $p = 32611$, and all of other numbers used are private. Alice takes her message $m = 11111$, chooses a random exponent $a = 3589$, and sends the number $u = m^a \pmod{p} = 15950$ to Bob. Bob chooses a random exponent $b = 4037$ and sends $v = u^b \pmod{p} = 15422$ back to Alice. Alice then computes $w = v^{15619} \equiv 27257 \pmod{32611}$ and sends $w = 27257$ to Bob. Finally, Bob computes $w^{31883} \pmod{32611}$ and recovers the value 11111 of Alice's message.

(a) Explain why this algorithm works. In particular, Alice uses the numbers $a = 3589$ and 15619 as exponents. How are they related? Similarly, how are Bob's exponents $b = 4037$ and 31883 related?

(b) Formulate a general version of this cryptosystem, i.e., using variables, and show how it works in general.

(c) What is the disadvantage of this cryptosystem over Elgamal? (*Hint.* How many times must Alice and Bob exchange data?)

(d) Are there any advantages of this cryptosystem over Elgamal? In particular, can Eve break it if she can solve the discrete logarithm problem? Can Eve break it if she can solve the Diffie-Hellman problem?

Chứng minh. (a) We have $3589 \cdot 15619 \equiv 4073 \cdot 31883 \equiv 1 \pmod{p-1}$

(b) Alice chooses a and a' satisfy that $aa' \equiv 1 \pmod{p-1}$

Bob chooses b and b' satisfy that $bb' \equiv 1 \pmod{p-1}$

From this, we have $aa' = k(p-1)+1$ and $bb' = l(p-1)+1$

$\Rightarrow v \equiv u^b \equiv (m^a)^b \equiv m^{ab} \pmod{p}$

$\Rightarrow w \equiv v^{a'} \equiv (m^{ab})^{a'} \equiv m^{aa'b} \pmod{p}$

$\Rightarrow w^{b'} \equiv m^{aa'bb'} \equiv m^{[k(p-1)+1]x[l(p-1)+1]} \equiv m^{D(p-1)+1} \equiv m \pmod{p}$ □

2.11. The group S_3 consists of the following six distinct elements

$$e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$$

where e is the identity element and multiplication is performed using the rules

$$\sigma^3 = e, \quad \tau^2 = e, \quad \tau\sigma = \sigma^2\tau$$

Compute the following values in the group S_3:
(a) $\tau\sigma^2$ (b) $\tau(\sigma\tau)$ (c) $(\sigma\tau)(\sigma\tau)$ (d) $(\sigma\tau)(\sigma^2\tau)$
Is S_3 a commutative group?

Chứng minh. (a) $\tau\sigma^2 = \tau\sigma\sigma = \sigma^2\tau\sigma = \sigma\sigma^2\tau = \sigma^3\tau = e\tau = \tau$
(b) $\tau(\sigma\tau) = (\tau\sigma)\tau = \sigma^2\tau\tau = \sigma^2\tau^2 = \sigma^2 e = \sigma^2$
(c) $(\sigma\tau)(\sigma\tau) = \sigma(\tau\sigma)\tau = \sigma(\sigma^2\tau)\tau = \sigma^3\tau^2 = ee = e$
(d) $(\sigma\tau)(\sigma^2\tau) = (\sigma\tau)(\tau\sigma) = \sigma\tau^2\sigma = \sigma e\sigma = \sigma^2$
S_3 is not a commutative group because:
$\sigma\tau = \sigma\tau$ but $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ (2 distinct elements in S_3) □

2.12. Let G be a group, let $d \geq 1$ be an integer, and define a subset of G by

$$G[d] = \{g \in G : g^d = e\}$$

(a) Prove that if g is in $G[d]$, then g^{-1} is in $G[d]$
(b) Suppose that G is commutative. Prove that is g_1 and g_2 are in $G[d]$, then their product $g_1 \star g_2$ is in $G[d]$
(c) Deduce that if G is commutative, then $G[d]$ is a group.
(d) Show by an example that is G is not a commutative group, then $G[d]$ need not be a group. (*Hint.* Use Exercise 2.11.)

Chứng minh. (a) Because $g \star g^{-1} = e \Rightarrow g \star e \star g^{-1} = e$
$\Rightarrow g \star g \star g^{-1} \star g^{-1} = e \Rightarrow g^2 \star (g^{-1})^2 = e$
Do more $d-2$ times and we get $g^d \star (g^{-1})^d = e$
$\Rightarrow e \star (g^{-1})^2 = e \Rightarrow (g^{-1})^2 = e \Rightarrow g^{-1} \in G[d]$
(b) We have $g_1^d = e$ and $g_2^d = e$
Because G is commutative, $g_1^d \star g_2^d = (g_1 \star g_2)^d$
$\Rightarrow (g_1 \star g_2)^d = e \star e = e \Rightarrow g_1 \star g_2 \in G[d]$

(c) From (b), we have $\forall g_1, g_2 \in G[d]$, then $g_1 \star g_2 \in G[d]$

We easily see that $e \in G[d]$, so it is identity element of $G[d] \Rightarrow$ identity law.

From (a) we have inverse law.

With $a, b, c \in G[d]$, which means $a^d = b^d = c^d = e$, then

$a^d \star (b^d \star c^d) = a^d \star (bc)^d$ (because G is commutative) $= (a \star b \star c)^d = (a \star b)^d \star c^d = (a^d \star b^d) \star c^d \Rightarrow$ associative law.

So, $G[d]$ is a group.

(d) Using exercise 2.11, $S_3[2] = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2, \tau, e\}$. Because $(\sigma\tau)\tau = \sigma\tau^2 = \sigma \notin S_3[2]$, $S_3[2]$ is not a group. □

2.13. Let G and H be groups. A function $\phi : G \to H$ is called a (*group*) *homomorphism* if it satisfies

$$\phi(g_1 \star g_2) = \phi(g_1) \star \phi(g_2) \text{ for all } g_1, g_2 \in G$$

(Note that the product $g_1 \star g_2$ uses the group law in the group G, while the product $\phi(g_1) \star \phi(g_2)$ uses the group law in the group H.)

(a) Let e_G be the identity element of G, let e_H be identity element of H, and the $g \in G$. Prove that

$$\phi(e_G) = e_H \qquad \text{and} \qquad \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$$

(b) Let G be a commutative group. Prove that the map $\phi : G \to G$ defined by $\phi(g) = g^2$ is a homomorphism. Give an example of a noncommutative group for which this map is not a homomorphism.

(c) Same question as (b) for the map $\phi(g) = g^{-1}$

Chứng minh. (a) $\forall g \in G$: $g = g \star e = e \star g$

$\Rightarrow \phi(g) = \phi(g \star e_G) = \phi(e_G \star g)$

$\Rightarrow \phi(g) = \phi(g) \star \phi(e_G) = \phi(e_G) \star \phi(g)$

Because $\phi(g) \in H$, $\phi(e_G)$ is identity element of $H \Leftrightarrow \phi(e_G) = e_H$

In group G, $g \star g^{-1} = e_G$
$\Rightarrow \phi(g \star g^{-1} = \phi(e_G)$
$\Rightarrow \phi(g) \star \phi(g^{-1}) = \phi(e_G)$
$\Rightarrow \phi(g) \star \phi(g^{-1}) = e_H$
$\Rightarrow \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$

(b) $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^2$

$\forall g_1, g_2 \in G$, $\phi(g_1 \star g_2) = (g_1 \star g_2)^2 = g_1^2 \star g_2^2$ (because G is commutative).
And we have $g_1^2 \star g_2^2 = \phi(g_1) \star \phi(g_2)$, which means $\phi(g_1 \star g_2) = \phi(g_1) \star \phi(g_2)$
$\Rightarrow$ G is homomorphism.

Now we consider group in Exercise 2.11 and the map $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^2$
$\Rightarrow \phi(e) = e^2 = e$, $\phi(\sigma) = \sigma^2$, $\phi(\tau) = \tau^2 = e$, $\phi(\sigma\tau) = (\sigma\tau)^2 = e$

We have: $\phi(\sigma\tau) = e \neq \sigma^2 = \phi(\sigma)\phi(\tau)$
$\Rightarrow$ Therefore, G is not homomorphism.

(c) $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^{-1}$

$\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 g_1^{-1} = e$, $g_2 g_2^{-1} = e$
$\Rightarrow g_1 g_1^{-1} g_2 g_2^{-1} = e$, but G is commutative
$\Rightarrow (g_1 g_2)(g_1^{-1} g_2^{-1}) = e$
$\Rightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} = (g_1 g_2)^{-1}$
$\Rightarrow \phi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1} = \phi(g_1)\phi(g_2)$
$\Rightarrow$ G is homomorphism.

Now we consider group in Exercise 2.11 and the map $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^{-1}$. We have

$\sigma\sigma^2 = e = \sigma^2\sigma = e, \quad \tau^2 = e, \quad (\sigma\tau)^2 = e, \quad (\sigma^2\tau)^2 = e$
$\Rightarrow \phi(\sigma\tau) = \sigma\tau \quad \text{and} \quad \phi(\sigma) = \sigma^2$, $\phi(\tau) = \tau$
$\Rightarrow \phi(\sigma\tau) = \sigma\tau \neq \sigma^2\tau = \phi(\sigma)\phi(\tau)$
$\Rightarrow$ G is not homomorphism. $\square$

2.14. Prove that each of the following maps is a group homomophism.

(a) The map $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ that sends $a \in Z$ to a mod N in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= (ab) \pmod N \\ &= (a \bmod N)(b \bmod N) \pmod N \\ &= \phi(a)\phi(b)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ homomorphism.

(b) The map $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ defined by $\phi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}^*$, $\phi(ab) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & (ab)^{-1} \end{pmatrix}$

And we have

$$\phi(a)\phi(b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & a^{-1}b^{-1} \end{pmatrix}$$

It is clear that $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, so $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \Rightarrow$ homomorphism.

(c) The discrete logarithm map $\log_g : \mathbb{F}_p^* \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, where g is a primitive root modulo p

$\phi(a) = x$ satisfying $g^x \equiv a \pmod p$

$\forall a, b \in \mathbb{F}_p^*$, $\phi(a) = x$: $g^x \equiv a \pmod p$ and $\phi(b) = y$: $g^y \equiv b \pmod p$

$\Rightarrow \phi(a)\phi(b) = x + y$ (Because x, $y \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, rule of group is addition modulo $p-1$)

And we have $g^{x+y} \equiv ab \pmod p \Rightarrow \phi(ab) = x + y$

$\Rightarrow \phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$

$\Rightarrow$ homomorphims.

2.15.

(a) Prove that $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ is a group. If A and B is 2 matrices in $\mathrm{GF}_2(\mathbb{F}_p)$, then AB also in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ (because result will be modulo 2)

Identity element is $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ because $AE = EA = A$ for all $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$

$\forall A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, because $detA \neq 0 \Rightarrow A$ has inverse in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$
$\forall A, B, C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) : (AB)C = A(BC)$
Therefore, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ is a group.

(b) Show that $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ is a noncommutative group for every prime p. Suppose we have $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ and $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$

Top left element of product AB is $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \pmod p$
Top left element of product BA is $(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) \pmod p$
If we choose $a_{12} \not\equiv b_{21}^{-1}a_{21}b_{21} \pmod p$, then $AB \neq BA$, which means noncommutative. (c) Describe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ completely. That is, list its elements and describe the multiplication table. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Multiplication table:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	A_3	A_5	A_1	A_6	A_2	A_4
A_2	A_4	A_6	A_2	A_5	A_1	A_3
A_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	A_2	A_1	A_4	A_3	A_6	A_5
A_5	A_6	A_4	A_5	A_2	A_3	A_1
A_6	A_5	A_3	A_6	A_1	A_4	A_2

(d) How many elements are there in the group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$?

First row u_1 is any vector but $(0, 0)$. We have $p^2 - 1$ ways.
Second row u_2 is any vector but multiple of first vector. We have $p^2 - p$ ways (remove $0u_1$ to $(p-1)u_1$).
$\Rightarrow$ There are $(p^2 - 1)(p^2 - p)$ elements. (e) How many elements are there in the group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$?

Similar to (d), we need first row u_1 is any vector but $(0, 0)$. We have $p^n - 1$ ways.
Second vector u_2 is any vector but a multiple of first row. We have $p^n - p$ ways.
Third vector u_3 is any vector but a linear combination of u_1 and u_2. The number of $a_1u_1 + a_2u_2$ is the number of pair (a_1, a_2) and there is p^2 posibilities $(a_1, a_2 \in \mathbb{F}_p$. So third vector has $p^n - p^2$ ways.
In general, n-th vector is any vector but a linear combination of u_1, u_2, ..., u_{n-1}, so there is $p^n - p^{n-1}$ ways.
$\Rightarrow$ There are $(p^n - 1)(p^n - p)...(p^n - p^{n-1})$ elements.

2.17. **shank_bsgs.py**

2.18. Solve each of the following simultaneous systems of congruences (or explain why no solutions exists).

(a) $x \equiv 3 \pmod 7$ and $x \equiv 4 \pmod 9$
$N = 7 \times 9 = 63$
$T_1 = 63/7 = 9$, $T_1^{-1} \bmod 7 = 4$
$T_2 = 63/9 = 7$, $T_2^{-1} \bmod 9 = 4$
$\Rightarrow x \equiv 3 \times 9 \times 4 + 4 \times 7 \times 4 \equiv 220 \equiv 31 \pmod{63}$

(b) $x \equiv 137 \pmod{423}$ and $x \equiv 87 \pmod{191}$
$N = 423 \times 191 = 90793$
$T_1 = N/423 = 191$, $T_1^{-1} \bmod 423 = 392$
$T_2 = N/191 = 423$, $T_2^{-1} \bmod 191 = 14$
$\Rightarrow x \equiv 137 \times 191 \times 392 + 87 \times 423 \times 14 \equiv 27209 \pmod N$

(c) Cannot calculate because $gcd(451, 697) = 41 \neq 1$

(d) $x \equiv 5 \pmod 9$, $x \equiv 6 \pmod{10}$ and $x \equiv 7 \pmod{11}$
$N = 9 \times 10 \times 11 = 990$
$T_1 = N/9 = 110$, $T_1^{-1} \bmod 9 = 5$
$T_2 = N/10 = 99$, $T_2^{-1} \bmod 10 = 9$
$T_3 = N/11 = 90$, $T_3^{-1} \bmod 11 = 6$
$\Rightarrow x \equiv 5 \times 110 \times 5 + 6 \times 99 \times 9 + 7 \times 90 \times 6 \equiv 986 \pmod N$

(e) $x \equiv 37 \pmod{43}$, $x \equiv 22 \pmod{49}$ and $x \equiv 18 \pmod{71}$
$N = 43 \times 49 \times 71 = 149597$
$T_1 = N/43 = 3479$, $T_1^{-1} \bmod 43 = 32$
$T_2 = N/49 = 3053$, $T_2^{-1} \bmod 49 = 36$
$T_3 = N/71 = 2107$, $T_3^{-1} \bmod 71 = 37$

$\Rightarrow x \equiv 37 \times 3479 \times 32 + 22 \times 3053 \times 36 + 18 \times 2107 \times 37 \equiv 11733 \pmod{N}$

Code in: **modular.py**

2.19. Solve the 1700-year-old Chinese remainder problem from the *Sun Tzu Suan Ching* stated on page 84.

$x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 5$ and $x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 23 \pmod{105}$

2.20. Let a, b, m, n be integers with $gcd(m, n) = 1$. Let

$$c \equiv (b - a) \cdot m^{-1} \pmod n$$

Prove that $x = a + cm$ is a solution to

$$x \equiv a \pmod m \quad \text{and} \quad x \equiv b \pmod n$$

and that every solution to (1) has the form $x = a + cm + ymn$ for some $y \in \mathbb{Z}$

2.21.

(a) Let a, b, c be positive integers and suppose that

$$a \mid c, \quad b \mid c, \quad \text{and} \quad gcd(a, b) = 1$$

Prove that $ab \mid c$

Because $a \mid c \Leftrightarrow c = ka$, $(k \in \mathbb{Z})$ and $b \mid c \Leftrightarrow c = lb$ $(l \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow ka = lb$. But $gcd(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid l \Leftrightarrow l = ma$, $(m \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow c = lb = lma \Rightarrow ab \mid c$

(b) Let $x = c$ and $x = c'$ be two solutions to the system of simultaneous congruences in the Chinese remainder theorem. Prove that

$$c \equiv c' \pmod{m_1 m_2 ... m_k}$$

If $c \equiv c' (\equiv a_i) \pmod m_i$, then $c \equiv c' \pmod{m_1 m_2 ... m_k}$

2.23. Find square roots modulo the following composite moduli

(a) 215

(b) 2654

(c) 1712, 2477, 3187, 1002

(d) $(\pm 1 \cdot 317 \cdot 1 \pm 1 \cdot 124 \cdot 3 \pm 10 \cdot 28 \cdot 10) \pmod{868}$

2.24. Let p be an odd prime, let a be an integer that is not divisible by p, and let b is a square root of a modulo p. This exercise investigates the square root of a modulo powers of p

(a) Prove that for some choise of k, the number $b+kp$ is a square root of a modulo p^2, i.e., $(b+kp)^2 \equiv a \pmod{p^2}$

(b) The number $b = 537$ is a square root of $a = 476$ modulo the prime $p = 1291$. Use the idea in (a) to compute a square root of 476 modulo p^2

(c) Suppose that b is a square root of a modulo p^n. Prove that for some choice of j, the number $b+jp^n$ is a square root of a modulo p^{n+1}

(d) Explain why (c) implies the following statements: If p is an odd prime and if a has a square root modulo p, then a has a square root modulo p^n for every power of p. Is this true if $p = 2$?

(e) Use the method in (c) to compute the square root of 3 modulo 13^3, given that $9^2 \equiv 3 \pmod{13}$

Chứng minh. (a) Let $f(b_n) = b_n^2 - a \pmod{p^n}$, with $b_1 = b \Rightarrow f(b_1) = b^2 - a \equiv 0 \pmod p$
We need to find b_2, $f(b_2) = b_2^2 - a \equiv 0 \pmod{p^2}$
Which means, $f(b_1+kp) = (b_1+kp)^2 - a = b_1^2 + 2b_1kp + (kp)^2 - a \equiv 0 \pmod{p^2}$
$\Leftrightarrow 2b_1k \equiv -(b_1^2 - a)/p \pmod{p^2}$ (because $b_1^2 - a \equiv 0 \pmod p$)
And because $2b_1 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, then exist k satisfying the equation

(b) $k = -(b^2 - a)/p \times (2b)^-1 \pmod{p^2}$

(c) We prove by induction that for each $n \geq 1$, there is a $b_n \in \mathbb{Z}$ such that

$$f(b_n) = b_n^2 - a \equiv 0 \pmod{p^n}$$
$$b_n = b \pmod{p^n}$$

The case $n = 1$ is trivial, using $b_1 = b$. If the inductive hypothesis holds for n, which means:

$$f(b_n) = b_n^2 - a \pmod{p^n}$$
$$b_n = b \pmod{p^n}$$

With b_{n+1}, $f(b_{n+1}) = b_{n+1}^2 - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$. We write $b_{n+1} = b_n + p^n t_n$

$$\Rightarrow f(b_{n+1}) = b_n^2 + 2b_n p^n t_n + p^{2n} t_n^2 - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

$$\Rightarrow b_n^2 + 2b_n p^n t_n - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

(because $2n \geq n+1$)

$$\Rightarrow 2b_n t_n \equiv -(b_n^2 - a)/p^n \pmod{p^{n+1}}$$

(from (2)). Therefore, exists solution for t_n because we assumed that $2b_n \equiv 0 \pmod{p^n}$

$$\Rightarrow f(b_{n+1}) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

, and $b_{n+1} \equiv b_n \pmod{p^n}$

This proof is used for $b + jp^n$ modulo p^n, not for p^{n+1} (d) Using induction we get that. If $p = 2$, then any integers is right

□

2.31. Let R and S be rings. A functions $\phi : R \to S$ is called a *(ring) homomorphism* if it satisfies

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$$

and

$$\phi(a \star b) = \phi(a) \star \phi(b)$$

for all $a, b \in R$

(a) Let 0_R, 0_S, 1_R and 1_S denote the additive and multiplicative identities of R and S, respectively. Prove that

$\phi(0_R) = 0_S$, $\phi(1_R) = 1_S$, $\phi(-a) = -\phi(a)$, $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$, where the last equality holds for those $a \in R$ that have a multiplicative inverse.

(b) Let p be a prime, and let R be a ring with the property that $pa = 0$ for every $a \in R$. (Here pa means to add a to itself p times.) Prove that the map

$$\phi : R \to R, \quad \phi(a) = a^p$$

is a ring homomorphism. It is called the *Frobenius homomorphism.*

Chứng minh. With $\phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b)$ and $\phi(a \star b) = \phi(a) \star \phi(b)$ for all $a, b \in R$

(a) In $R, \forall a \in R : a + 0_R = 0_R + a = a$
$\Rightarrow \phi(a) = \phi(a + 0_R) = \phi(0_R + a)$
$\Rightarrow \phi(a) = \phi(a) + \phi(0_R) = \phi(0_R) + \phi(a)$
Let $\phi(a) = b \in S$. Hence $b = b + \phi(0_R) = \phi(0_R) + b$
$\Rightarrow \phi(0_R) = 0_S$
In $R, \forall a \in R : a \star 1_R = 1_R \star a = a$
$\Rightarrow \phi(a \star 1_R) = \phi(1_R \star a) = \phi(a)$
$\Rightarrow \phi(a) \star \phi(1_R) = \phi(1_R) \star \phi(a) = \phi(a)$
$\Rightarrow \phi(1_R) = 1_S$
With $\phi(-a) = -\phi(a)$, we have in $R, a + (-a) = (-a) + a = 0_R$
$\Rightarrow \phi(a + (-a)) = \phi((-a) + a) = \phi(0_R)$
$\Rightarrow \phi(a) + \phi(-a) = \phi(-a) + \phi(a) = \phi(0_R) = 0_S$
$\Rightarrow \phi(-a) = -\phi(a)$
With $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$, we have in $R, a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = 1_R$
$\phi(a \star a^{-1}) = \phi(a^{-1} \star a) = \phi(1_R)$
$\Rightarrow \phi(a) \star \phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1}) \star \phi(a) = \phi(1_R) = 1_S$
$\Rightarrow \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$
(b) $\phi : R \to R, \quad \phi(a) = a^p$
$\Rightarrow \phi(a + b) = (a + b)^p = \sum_{i=0} p\binom{p}{i} a^i b^{p-1}$
And we have $p \mid \binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!i!}$ (because p is prime)
$\Rightarrow 1 \leq i \leq p - 1 : \binom{p}{i} = 0$ (because $pa = 0$)
$\Rightarrow \phi(a + b) = a^p + b^p = \phi(a) + \phi(b)$ (1)
$\Rightarrow \phi(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \phi(a)\phi(b)$ (2)

From (1) and (2) $\Rightarrow$ ring homomorphism

$\square$

2.32. Prove Proposition 2.41

We have $a_1 \equiv a_2 \pmod{m} \Rightarrow m \mid (a_1 - a_2)$

$\Rightarrow \exists k \in R : a_1 - a_2 = k \star m$

Similarly, $\exists l \in R : b_1 - b_2 = l \star m$

$\Rightarrow a_1 - a_2 + b_1 - b_2 = (k + l) \star m$

$\Leftrightarrow m \mid (a_1 + b_1 - (a_2 + b_2))$

$\Leftrightarrow a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \equiv m$

Similarly for $a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2 \pmod{m}$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 + k \star m \\ b_1 = b_2 + k \star m \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1 \star b_1 = (a_2 + k \star m)(b_2 + k \star m) = a_2 \star b_2 + a_2 \star l \star m + k \star b_2 \star m + k \star l \star m^2$

$\Rightarrow m \mid (a_1 \star b_1 - a_2 \star b_2)$

$\Rightarrow a_1 \star b_1 \equiv a_2 \star b_2 \pmod{m}$

2.33. Prove Proposition 2.43

According to Exercise 2.32, if we have

$$\begin{cases} a' \in \bar{a} \Leftrightarrow a' \equiv a \pmod{m} \\ b' \in \bar{b} \Leftrightarrow b' \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' + b' \equiv a + b \pmod{m} \\ a' \star b' \equiv a \star b \pmod{m} \end{cases}$$

$\Rightarrow a' + b' \in \overline{a + b}$ and $a' \star b' \in \overline{a \star b}$. Hence the set is **closed**

We have $m \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow \forall a \in R, \overline{a} + \overline{m} = \overline{a + m} = \overline{a} = \overline{m + a} = \overline{m} + \overline{a}$

$\Rightarrow$ **identity element** is $\overline{m}$

Also, because R is ring, $m + (-x) \in R, x \in R$

$\forall a \in R, \overline{a} + \overline{m - a} = \overline{a + m - a} = \overline{m} = \overline{m - a} + \overline{a}$

$\Rightarrow \overline{m - a}$ is additive inverse of a

Easily see that $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} + \overline{b+c} = \overline{a+b+c} = \overline{a+b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ **associative**

$\forall a, b \in R, \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b} + \overline{a} \Rightarrow$ **commutative**

We have $a \star 1 \equiv a \pmod{m} \forall a \in R$

$\Rightarrow \overline{a} \star \overline{1} = \overline{a \star 1} = \overline{a} = \overline{1 \star a} = \overline{1} \star \overline{a}$

$\Rightarrow$ **multiplicative identity** is $\overline{1}$

$\forall a, b, c \in R, a(bc) = (ab)c \pmod{m}$

$\Rightarrow \overline{a} \star (\overline{b} \star \overline{c}) = \overline{a} \star \overline{bc} = \overline{abc} = \overline{ab} \star \overline{c} = (\overline{a} \star \overline{b}) \star \overline{c} \Rightarrow$ **associative**

And $\overline{a} \star \overline{b} = \overline{a \star b} = \overline{b \star a} = \overline{b} \star \overline{a} \Rightarrow$ **commutative**

With $\overline{a} \star (\overline{b} + \overline{b}) = \overline{a} \star \overline{b+c} = \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \overline{a} \star \overline{b} + \overline{a} \star \overline{c} \Rightarrow$ **distribute**

Hence, $R/(m)$ is a ring

2.34. Let $\mathbb{F}$ be a field and let **a** and **b** be nonzero polynomials in $\mathbb{F}[x]$

(a) Prove that $deg(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = deg(\mathbf{a}) + deg(\mathbf{b})$

Let $a = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, with $a_i \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow deg(\mathbf{a}) = n$

Let $b = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, with $a_i \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow deg(b) = m$

$\Rightarrow deg(a \cdot b) = m + n = deg(a) + deg(b)$

(b) Prove that **a** has a multiplicative inverse in $\mathbb{F}[x]$ if and only if ᘐ is in $\mathbb{F}$, i.e., if and only if ᘐ is a constant polynomial

With $\mathbf{a} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Suppose that **a** has multiplicative inverse in $\mathbb{F}[x]$ $\mathbf{b} = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

$$\Rightarrow \mathbf{ab} = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} = 1$$

Which means $a_0 b_0 = 1$, other coefficients is 0, so **a** is constant polynomial

(c) Prove that every nonzero element of $\mathbb{F}[x]$ can be factored into a product of irreducible polynomials. (*Hint.* Use (a), (b) and induction on the degree of the polynomial.)

(d) Let R be ring ing $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Give an example to show tha (a) is false for some polynomials **a** and **b** in $R[x]$

$a = 2x^2 + 3x + 1$, $b = 3x + 2$

$\Rightarrow ab = x^2 + 3x + 2$

$deg(ab) = 2 < 3 = deg(a) + deg(b)$

2.35, 2.36. Programming on Sagemath

2.37. Prove that the polynomial $x^3 + x + 1$ is irreducible in $\mathbb{F}_2[x]$

If $f(x) = x^3+x+1$ has any factor rather than 1 and itself, it must have degree less than 3. So we have $0, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x$ but $f(x)$ is not divided by any of them. Hence irreducible

2.38. Programming on Sagemath

2.39. The field $\mathbb{F}_7[x]/(x^2+1)$ is a field with 49 elements, which for the moment we donote by $\mathbb{F}_{49}$

Using example **2.58**, every element in $\mathbb{F}_7[x]/(x^2+1)$ has form $f(x) = a + bx$, so in $\mathbb{F}_{49}$ it has form $a + bi$ (here $i^2 = -1$)

(a) Is $2+5x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? No because $(2+5x)^8 = 1$

(b) Is $2+x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? Yes

(c) Is $1+x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? No because $(1+x)^{24} = 1$

2.41. Let $\mathbb{F}$ is a finite field.

(a) Prove that there is an integer $m \geq 1$ such that if we add 1 to itself m times,

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ ones}}$$

then we get 0. Note that here 1 and 0 are the multiplicative and additive identity elements of the field $\mathbb{F}$.

Because 1 is element of $\mathbb{F}$, then $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ times}}$ always is an element of $\mathbb{F}$. And $\mathbb{F}$ is finite field, so there is $m \geq 1$ such that $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ times}}$ equals to 0 (1, 1+1, 1+1+1, ... cannot all be different)

(b) Let m be the smallest positive integer with the property described in (a). Prove that m is prime. This prime is called the

characteristic of the field $\mathbb{F}$
Suppose that m can be factor, so $m = pq$ $(1 < p, q < m) \Rightarrow$ $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ times}} = 0$

$$\overbrace{\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{p \text{ times}} + \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{p \text{ times}} + \cdots + \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{p \text{ times}}}^{q \text{ times}}$$

Because $\mathbb{F}$ is a finite field, $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p \text{ times}} = a \in \mathbb{F}$
$\Rightarrow q \cdot a = 0$ ($q > 1$ and a cannot be 0 because m is the smallest number that satisfies $1+1+\cdots+1 = 0$
$\Rightarrow$ contraction $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ cannot be a field.
So m is a prime

9.2 Chapter 3

3.4. *Euler's phi function* $\phi(N)$ is the function defined by

$$\phi(N) = |\{0 \le k < N : \gcd(k, N) = 1\}|$$

$\phi(p) = p - 1$.

Consider the set $\{ai_1, ai_2, \ldots, ai_{\phi(N)}\}$ is the set of numbers which are coprime with N, which means $\gcd(ai_j, N) = 1$. We prove that those elements are distinct.

Suppose that there are aj and ak, satisfying $aj \equiv ak \pmod{N}$

Because $\gcd(a, N) = 1 \Rightarrow j \equiv k \pmod{N}$. So every element is distinct.

Moreover, if $ai_j \equiv j_k \pmod{N}$, which means $j_k \neq 0$, so the set $\{ai_1, \ldots, ai_{\phi(N)}\}$ is a permutation of the set $\{i_1, \ldots, i_{\phi(N)}\}$

$$ai_1 \times ai_2 \times \cdots \times ai_{\phi(N)} \equiv i_1 \times i_2 \times \cdots \times i_{\phi(N)} \pmod{N}$$

Therefore $a^{\phi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$

3.5. Properties of Euler's phi function If p and q are distinct primes, how is $\phi(pq)$ related to $\phi(p)$ and $\phi(q)$?
We consider numbers from 1 to pq, there are pq elements
Notice that $iq = jq$ if and only if $i = q$ and $j = p$ because p and q are distinct primes
Next, we subtract the number of divisors having factor p, there are q elements $(1 \times p, 2 \times p, \cdots, q \times p)$
Next, we subtract the number of divisors having factor q, there are p elements $(1 \times q,\ 2 \times q, \cdots, p \times q)$
Here we get $pq - p - q$ elements, but remember that we have subtracted element pq twice, so we need to add 1
$\Rightarrow \phi(pq) = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1) = \phi(p)\phi(q)$ If p is prime, what is the value of $\phi(p^2)$? How about $\phi(p^j)$?
From 1 to p^j there are p^j elements, we subtract the number of divisors having factor p, those are $\{1p, 2p, \cdots, p^{j-1}p\} \Rightarrow p^{j-1}$ numbers
$\Rightarrow \phi(p^j) = p^j - p^{j-1}$ We write numbers from 1 to mn as matrix m rows and n columns

$$\begin{array}{cccc}
0m+1 & 1m+1 & \cdots & (n-1)m+1 \\
0m+2 & 1m+2 & \cdots & (n-1)m+2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0m+m-1 & 1m+m-1 & \cdots & (n-1)m+m-1 \\
0m+m & 1m+m & \cdots & (n-1)m+m
\end{array}$$

With number r that satisfies $\gcd(r, m) = 1$, we get $gcd(km+r, r) = 1$ $(k = \overline{0, n-1})$. Here $km + r$ is all numbers on r-th row, which means there are $\phi(m)$ rows, whose elements coprime with m
On those $\phi(m)$ rows, each row has $\phi(n)$ elements that coprime with n. Hence $\phi(m)\phi(n) = \phi(mn)$ From (b) we get $\phi(p_i) = p_i - 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \phi(N) &= \phi(p_1)\phi(p_2)\cdots\phi(p_r) \\
&= (p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_r - 1) \\
&= N\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

3.6. Let N, c, and e be positive integers satisfying the conditions $\gcd(N, c) = 1$ and $\gcd(e, \phi(N)) = 1$ Explain how to solve the congruence

$$x^e \equiv c \pmod N$$

assuming that you know the value of $\phi(N)$
Because of $\gcd(e, \phi(N)) = 1$, we can find an integers d satisfying that $ed \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ (using Extended Euclidean Algorithm)
$\Rightarrow ed = k\phi(N) + 1$ with $k \in \mathbb{Z}$
And because of $\gcd(N, c) = 1 \Rightarrow \gcd(N, x) = 1$, and

$$c^d = \left(x^e\right)^d = x^{ed} = x^{k\phi(N)+1} = (x^k)^{\phi(N)}x$$

and we have known that $(x^k)^{\phi(N)} \equiv 1 \pmod N$ from Exercise 3.4. Therefore we get

$$c^d \equiv x \pmod N$$

, we finish finding solution

3.11. Alice chooses two large primes p and q and she publishes $N = pq$. It is assumed that N is hard to factor. Alice also chooses three random numbers g, r_1, and r_2 modulo N and computes

$$g_1 \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod N \qquad \text{and} \qquad g_2 \equiv g^{r_2(q-1)} \pmod N$$

Her public key is the triple (N, g_1, g_2) and her private key is the pair of primes (p, q).

Now Bob wants to send the message m to Alice, where m is a number modulo N. He chooses two random integers s_1 and s_2 modulo N and computes

$$c_1 \equiv mg_1^{s_1} \pmod N \qquad \text{and} \qquad c_2 \equiv mg_2^{s_2} \pmod N$$

Bob sends the ciphertext (c_1, c_2) to Alice.

Decryption is extreamly fast and essy. Alice uses the Chinese remainder theorem to solve the pair of congruences

$$x \equiv c_2 \pmod p \qquad \text{and} \qquad x \equiv c_2 \pmod q$$

Prove that Alice's solution x is equal to Bob's plaintext m
First we have $c_1 \equiv mg_1^{s_1} \pmod N \equiv mg_1^{s_1} \pmod p \equiv m \pmod p$ (because $g_1^{s_1} = (g_1^{s_1 r_1})^{(p-1)} \equiv 1 \pmod p$)
Similarly, we have $c_2 \equiv m \pmod q$
The solution of congurences is

$$x \equiv c_1 qq' + c_2 pp' \pmod N$$

with $pp' + qq' = 1$
$\Rightarrow x \equiv mpp' + mqq' \equiv m(pp' + qq') \equiv m \pmod N$

We have

$$g_1 \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod N \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod p \equiv 1 \pmod p$$

$\Rightarrow p = \gcd(g_1 - 1, N)$. Similarly, $q = \gcd(g_2 - 1, N)$

From here we have recovered private keys

3.13. Find x, y such that: $xe_1 + ye_2 = 1 = gcd(e_1, e_2)$
$\Rightarrow m = c_1^x c_2^y = m^{e_1 x + e_2 y} = m \pmod N$

3.14. Because 3, 11 and 17 are primes number, $a \equiv a^3 \pmod 3$, $a \equiv a^{11} \pmod{11}$, $a \equiv a^{17} \pmod{17}$. We have system congruence

$$\begin{aligned} a &\equiv a^3 \pmod 3 \\ a &\equiv a^{11} \pmod{11} \\ a &\equiv a^{17} \pmod{17} \end{aligned}$$

Consider that $a^3 \equiv a \pmod 3$, $a^{3^2} \equiv a^3 \equiv a \pmod 3$, $\cdots$, $a^{3^i} \equiv a \pmod 3$. And $561 = 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3^1$, $a^{561} \equiv a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a \equiv a^9 \equiv a \pmod 3$.

Similarly, $a^{561} \equiv a \pmod{11}$, $a^{561} \equiv a \pmod{17}$. From system congruence:

$$\begin{aligned} a^{561} &\equiv a \pmod 3 \\ a^{561} &\equiv a \pmod{11} \\ a^{561} &\equiv a \pmod{17} \end{aligned}$$

Using CRT, $a^{561} = (187 \cdot 1 \cdot a + 51 \cdot 8 \cdot a + 33 \cdot 16 \cdot a) \pmod{561} = a \pmod{561}$ Suppose that n is even ($n \geq 4$), we have

$$(n-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} = -1 \pmod{n}$$

, but $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ for all a, which is contrary. So n must be odd. Suppose that $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ (p_i is odd prime). Because $a^{p^{e-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^e}$ and $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, we have $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$.
$\Rightarrow p^{e-1}(p-1) \mid (n-1) \Rightarrow p^{e-1} \mid (n-1)$, but $p^{e-1} \mid n$, which is contrary if $e \geq 2$. Hence e must be 1.

So $n = p_1 p_2 \cdots p_r$

3.37.

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$\Rightarrow \binom{a}{p} = \pm 1$

$\Rightarrow \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$

If a is quadratic residue, then $a \equiv b^2 \pmod{p}$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (b^2)^{\frac{p-1}{2}} = b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

If $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

Let g be generator modulo p, then $a \equiv g^m \pmod{p}$

If m is even $\Rightarrow a \equiv g^{2k} \pmod{p} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

If m is odd $\Rightarrow a = g^{2k+1} \pmod{p} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{(2k+1)\frac{p-1}{2}} \equiv g^{p-1} g^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod{p}$, because $p-1$ is smallest number that $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

From (a) and (b) $\binom{-1}{p} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$, if $p = 4k+1 \Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$
If $p = 4k+3 \Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{p}$

3.38. Prove that the three parts of the quadratic reciprocity theorem are equivalent to the following three concise formulas, where p and q are odd primes

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

With $p \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = 1 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$

Similarly with $p \equiv 3 \pmod 4$ $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

First we need a lemma (**Gauss lemma**): suppose p is an odd prime, and $a \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, p) = 1$. Consider the set

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}a$$

If s of those residues are greater than $\frac{p}{2}$, then $\binom{a}{p} = (-1)^s$

Proof of lemma: Among smallest residues of

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}a$$

, suppose that

$$u_1, u_2, \cdots, u_s$$

are residues greater than $\frac{p}{2}$, and

$$v_1, v_2, \cdots, v_t$$

are residues smaller than $\frac{p}{2}$

Because $\gcd(ja, p) = 1 \forall j, 1 \le j \le \frac{p-1}{2}$, all $u_i, v_j \neq 0 \Leftrightarrow u_i, v_j \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$. We will prove that, the set

$$\{p - u_1, p - u_2, \cdots, p - u_s, v_1, v_2, \cdots, v_t\}$$

is a permutation of $\{1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}\}$

It is clear that there are no 2 numbers u_i or 2 numbers v_j simultaneously congruent modulo p. Because if $ma \equiv na \pmod p$ and $\gcd(a, p) = 1$, then $m \equiv n \pmod p \Rightarrow$ contrast with $m, n \le \frac{p-1}{2}$

Similarly, we see that there are no numbers $p - u_i$ congruent with v_j, so

$$\Rightarrow (p - u_1)(p - u_2)\cdots(p - u_s)v_1 v_2 \cdots v_t \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

On the other hand,

$$u_1, u_2, \cdots, u_s, v_1, v_2, \cdots, v_t$$

are smallest residues of

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}$$

, so

$$\Rightarrow u_1 u_2 \cdots u_s v_1 v_2 \cdots v_t \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

So $(-1)^s a^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$

And because $\gcd(p, \left(\frac{p-1}{2}\right)!) = 1 \Rightarrow (-1)^s a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^s \pmod p$ and $\binom{a}{p} = a^{\frac{p-1}{2}}$

$\Rightarrow \binom{a}{p} = (-1)^s \pmod p$

Return to problem: using theorem above, we need to find the number of residues, which are greater than $\frac{p}{2}$ among $1 \cdot 2$, $2 \cdot 2$, $\cdots$, $\frac{p-1}{2} \cdot 2$. Therefore we only need to know which numbers are greater than $\frac{p}{2}$

$\Rightarrow$ there are $s = \frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right] \Rightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right]}$

With $p \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$, we have

$$\frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right] \equiv \frac{p^2-1}{8} \pmod 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$

We need a lemma: Suppose p is an odd prime, a is odd and $\gcd(a, p) = 1$, then $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{T(a,p)}$, with

$$T(a, p) = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ja}{p}\right]$$

<u>Proof of lemma</u>: consider smallest residues of a, $2a$, $3a$, $\cdots$, $\frac{p-1}{2}\cdot a$. As Gauss's lemma, u_1, u_2, $\cdots$, u_s, v_1, v_2, $\cdots$, v_t are residues greater and less than $\frac{p}{2}$ respectively. According to Euclidean divisor:

$$ja = p\left[\frac{ja}{p}\right] + \text{remainder}$$

, remainder is u_i or v_j. We have such $\frac{p-1}{2}$ equations and add them together

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} ja = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} p\left[\frac{ja}{p}\right] + \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{j=1}^{t} v_j$$

As we pointed out in Gauss's lemma, the set $p-u_1$, $p-u_2$, $\cdots$, $p-u_s$, v_1, v_2, $\cdots$, v_t is a permutation of the set 1, 2, $\cdots$, $\frac{p-1}{2}$

$$\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = \sum_{i=1}^{s}(p-u_i) + \sum_{j=1}^{t} v_t = ps - \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{j=1}^{t} v_t$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} ja - \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} p\left[\frac{ja}{p}\right] - ps + 2\sum_{i=1}^{s} u_i$$

From formula of $T(a,p)$, $(a-1)\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = pT(a,p) - ps + 2\sum_{i=1}^{s} u_i$

Because a, p are odd, $T(a,p) \equiv s \pmod 2$. From Gauss's lemma we finish.

<u>Return to problem</u>: Consider pairs (x,y), where $1 \le x \le \frac{p-1}{2}$ and $1 \le y \le \frac{q-1}{2}$, there are $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ pairs. We divide those pairs into 2 groups, depending on the magnitude of px and qy.

Because p, q are two different primes, $px \neq qy$, $\forall(x,y)$

We consider pairs with $qx > py$. With every fixed element of x $(1 \le x \le \frac{p-1}{2})$, exist $\left[\frac{qx}{p}\right]$ elements y satisfying $1 \le y \le \frac{qx}{p}$. Therefore, there are $\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{iq}{p}\right]$ pairs. When $qx < py$, similarly, there are $\sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right]$ pairs. Because there are $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ pairs, we have equation

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$$

From definition of $T(p,q)$, we have result

$$(-1)^{T(p,q)+T(q,p)} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

3.39 Let p be a prime satisfying $p \equiv 3 \pmod 4$.
Let a be a quadratic residue modulo p. Prove that the number

$$b \equiv a^{\frac{p+1}{4}} \pmod p$$

has the property that $b^2 \equiv a \pmod p$. (*Hint.* Write $\frac{p+1}{2}$ as $1 + \frac{p-1}{2}$ and use Exercise 3.37.) This gives an easy way to take square roots modulo p for primes that are congruent to 3 modulo 4.

Chứng minh. Using Exercise 3.37, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ because a is quadratic residue modulo p. Therefore

$$b^2 \equiv a^{\frac{p+1}{2}} \equiv a^{1+\frac{p-1}{2}} \equiv a \cdot a^{\frac{p-1}{2}} \equiv a \cdot 1 \equiv 1 \pmod p$$

□

3.40. Let p be and odd prime, let $g \in \mathbb{F}_p^*$ be a primitive root, and let $h \in \mathbb{F}_p^*$. Write $p - 1 = 2^s m$ with m odd and $s \geq 1$, and write the binary expansion of $\log_g(h)$ as

$$log_g(h) = \epsilon_0 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3 + \cdots \quad \text{with} \quad \epsilon_0, \epsilon_1, \cdots \in \{0, 1\}$$

Give an algorithm that generalizes Example 3.69 and allows you to rapidly compute $\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{s-1}$, thereby proving that the first s bits of the discrete logarithm are insecure.

3.41 Let p be a prime satisfying $p \equiv 1 \pmod 3$. We say that a is a *cubic residue modulo p* if $p \nmid a$ and there is an integer c satisfying $a \equiv c^3 \pmod p$.

Algorithm 1 Algorithm to find s least significant bits of x in $g^x \equiv h \pmod p$

Require: g, h, p ($p - 1 = 2^s m$)
Ensure: s least significant bits of $x : g^x \equiv h \pmod p$
    Array $\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{s-1}$
  for $i = 0, \ldots, s-1$ **do**
    if h is quadratic residue **then** $\epsilon_i = 0$, $h = \sqrt{h} \pmod p$
    else if $\epsilon_i = 1$ **then** $h = \sqrt{g^{-1}h} \pmod p$
    end if
  end for

Let a and b be cubic residues modulo p. Prove that ab is a cubic residue modulo p.

Chứng minh. $a \equiv x^3 \pmod p$, $y \equiv y^3 \pmod p$. Therefore

$$ab \equiv x^3 y^3 = (xy)^3 \pmod p$$

, which is cubic residue Give an example to show that (unlike the case with quadratic residues) it is possible for none of a, b and ab to the a cubic residue modulo p

Let g be primitive root modulo p. Choose $a \equiv g^{3k+1} \pmod p$, $b \equiv g^{3k'+1} \pmod p$. Hence $ab \equiv g^{(3k+1)+(3k'+1)} \equiv g^{3(k+k')+2} \pmod p$, which is not cubic residue Let g be a primitive root modulo p. Prove that a is a cubic residue modulo p if and only if $3 \mid \log_g(a)$, where $\log_g(a)$ is the discrete logarithm of a to the base g.

Proof of sufficient condition: If a is a cubic residue modulo p, $3 \mid \log_g(a)$. Suppose $a \equiv c^3 \pmod 3$ and $c \equiv g^u = \pmod p$. Hence $a = g^3 u \pmod p \Rightarrow 3 \mid \log_g(a)$

Proof of necessary condition: If $3 | \log_g(a)$, a is a cubic residue modulo p. This is obviously. Suppose instead that $p \equiv 2 \pmod 3$. Prove that for every integer a there is an integerr c satisfying $a \equiv c^3 \pmod p$. In other words, if $p \equiv 2 \pmod 3$, show that every number is a cube modulo p.

Return to problem: Because $p \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow \gcd(p-1,3)=1$. Which means that exist element d such that $3d \equiv 1 \pmod{p-1}$. Hence, equation $x^3 \equiv a \pmod p$ has solution $a^d = x \pmod p$. So every number is a cube modulo p.

$\square$

9.3 Chapter 4

4.1. $d = 561517$, $N = 661643$ $sig = 206484$

4.2. S and S"

4.3. $p = 212081$, $q = 128311$
$\Rightarrow d = 18408628619 \Rightarrow S = D^d \pmod N = 22054770669$

4.4. With $c = m^{e_B} \pmod{N_B}$ and $s = Hash(m)^{d_A} \pmod{N_A}$
$\Rightarrow c^{d_B} = m^{e_B \cdot d_B} \pmod{N_B} = m$ and $s^{e_A} = Hash(m)^{d_A \cdot e_A} \pmod{N_A} = Hash(m)$. Hence this method works

4.5. $A = g^a \pmod p = 2065$ $S_1 = g^k \pmod p = 3534$
$S_2 = (D - a \cdot S_1)K^{-1} \pmod{p-1} = 5888$
$\Rightarrow$ signature is $(S_1, S_2) = (3534, 5888)$

4.6. $A^{S_1} \cdot S_1^{S_2} \equiv g^D \pmod p$
$\Rightarrow (S_1^{"}, S_2^{"})$ is valid signature.

4.8. $S_1 = S_1' = g^k \pmod p$, from here Eve can know at first glance that the same random element k is used $S_2 = (D - aS_1)k^{-1} \pmod{p-1}$, $S_2' = (D' - aS_1')k^{-1} \pmod{p-1}$
$\Rightarrow S_2 - S_2' \equiv (D - D')k^{-1} \pmod{p-1}$ (as $aS_1 = aS_2$)
$\Rightarrow k = (D - D')(S_2 - S_2')^{-1} \pmod{p-1}$
Here we get $D - aS_1 = S_2 k \pmod{p-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = (D - S_2 k)S_1{-1} \pmod{p-1} \\ a = (D' - S_2' k)S_1^{-1} \pmod{p-1} \end{cases}$$

4.9. $p \equiv 1 \pmod q$, $1 \le a \le q-1$, $A = g^a \pmod p$, $S_1 = (g^k \bmod p) \bmod q$, $S_2 = (D + aS_1)k^{-1} \pmod q$

Verify: $V_1 = D \cdot S_2^{-1} \pmod q$, $V_2 = S_1 S_2^{-1} \pmod q$. We need to prove that $(g^{V_1} \cdot A^{V_2} \bmod p) \bmod q = S_1$

Here we have

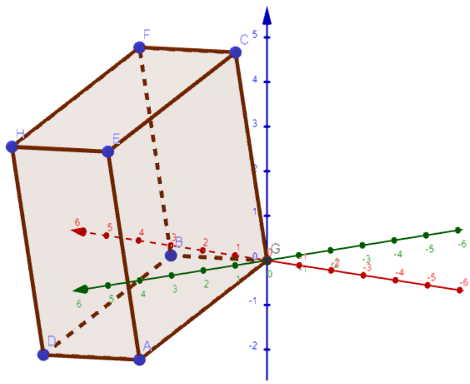
$$\begin{aligned} g^{V_1} \cdot A^{V_2} &\equiv g^{D \cdot S_2^{-1}} \cdot g^{aS_1 S_2^{-1}} \pmod p \\ &\equiv g^{(D+aS_1)S_2^{-1}} \pmod p \\ &\equiv g^k \pmod p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g^{V_1} A^{V_2} \bmod p) \bmod q = S_1$$

4.10. $(p, q, g) = (22531, 751, 4488)$. Public key $A = 22476$
Not valid Not valid
4.11. $A = g^a \pmod p$. $A = 31377$, $g = 21947$, $p = 103687 \Rightarrow a = 602$
$S_1 = (g^k \bmod p) \bmod q = 439$
$S_2 = (D + aS_1)k^{-1} \pmod q = 1259$

9.4 Chapter 7

7.7. $\det(L) = \mathrm{Vol}(\mathcal{F})$
7.43. $t = b_1 b_2 / \|b_1\|^2$ and $b_2^* = b_2 - tb_1$
$\Rightarrow b_2^* \cdot b_1 = b_1(b_2 - tb_1) = b_1 b_2 - t\|b_1\|^2 = b_1 b_2 - \frac{b_1 b_2}{\|b_1\|^2} \cdot \|b_1\|^2 = 0$
Hence $b_2^* \perp b_1$ and b_2^* is the projection of b_2 onto the orthogonal complement of b_1
7.44.
$\|a - tb\|^2 = (a - tb)^2 = a^2 - 2abt + t^2 b^2 = \|a\|^2 + t^2\|b\|^2 - 2abt \geq 0 \Leftrightarrow a - tb = 0 \Rightarrow t = \frac{ab}{\|b\|^2}$ 0 $(a - tb) \cdot b = ab - t\|b\|^2 = ab - \frac{ab}{\|b\|^2} \cdot \|b\|^2 = 0$. Therefore $a - tb$ is the projection of a onto the orthogonal complement of b
7.45.
$v_1 = (14, -47)$, $v_2 = (-362, -131)$, 6 steps $v_1 = (14, -47)$, $v_2 = (-362, -131)$, 6 steps $v_1 = (147, 330)$, $v_2 = (690, -207)$, 7 steps
7.46. $W^\perp$ is the orthogonal complement of W in $V \Rightarrow \vec{z} \in W^\perp$, $\vec{z} \cdot \vec{y} = 0, \forall \vec{y} \in W$
With $\vec{z_1}, \vec{z_2} \in W^\perp \Rightarrow \vec{z_1} \cdot \vec{y} = \vec{z_2} \cdot \vec{y} = 0, \forall \vec{y} \in W$



Hình 9.1: Exercise 7.7 - Fundamental domain of L

$\Rightarrow (\vec{z_1} + \vec{z_2}) \cdot \vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{z_1} + \vec{z_2} \in W^{\perp}$
$\alpha \vec{z_1} \cdot \vec{y} = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \vec{z_1} \in W^{\perp}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ We have 2 methods

First method: Show that $W \cup W^{\perp} = \{\vec{0}\}$. If $\vec{u}$ belongs to both W and $W^{\perp}$, then $< u, u >= 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Now denote $U = W + W^{\perp}$, we prove that $W = V$. We can choose an orthonormal basis in U and extend it to orthonormal basis in V. Thus, if $U \neq V$, there is an element $\vec{e}$ in the basis of V orthonormal to U. Since U contains W, e is orthonormal to $U \Rightarrow \vec{e} \in W^{\perp}$. The latter is a subspace of W, therefore e is in W, which is contrary. *Second method*: Let $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ be an orthonormal basis of the subspace W. For each $v \in V$, let

$$P(v) = \sum_{j=1}^{k} < v, e_j > e_j$$

Algorithm 2 Gauss's latice reduction algorithm

---

while True **do**
  if $\|v_2\| < \|v_1\|$ **then**
    swap v_1 and v_2
    $m \leftarrow \lfloor v_1 \cdot v_2 / \|v_1\|^2 \rceil$
  end if
  if $m = 0$ **then**
    return (v_1, v_2)
  end if
  Replace v_2 with $v_2 - mv_1$
end while

$$\Rightarrow (\forall v \in V) : v = \underbrace{P(v)}_{\in W} + \underbrace{(v - P(v))}_{\in W^{\perp}}$$

The fact that $v - P(v) \in W^{\perp}$ is:
if $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ then

$$\begin{aligned} < v - P(v), e_j > &= < v - \sum_{l=1}^{k} < v, e_l > e_l, e_j > \\ &= < v, e_j > - < v, e_j > = 0 \end{aligned}$$

Since $\{e_1, \cdots, e_k\}$ is a basic of W, this prove that $v - P(v) \in W^{\perp}$
$\|v\|^2 = < v, v > = (aw + bw')^2 = a^2w^2 + 2abww' + b^2w'^2 = a^2\|w\|^2 + 0 + b^2\|w'\|^2 = a^2\|w\|^2 + b^2|w'\|^2$

Phần III

Lịch sử toán học

Trong lịch sử, từ xa xưa con người đã biết tính toán, sử dụng chúng cho công việc hằng ngày.

Chúng ta không biết ai là người đầu tiên phát minh ra lịch, cũng như cách tính toán để phân chia ruộng đất, tài sản trong các nền văn minh cổ. Những điều đó được đúc kết theo kinh nghiệm qua hàng chục, thậm chí hàng trăm năm tri thức con người.

Cho tới khi những nhân vật sau (và nhiều nhân vật tương tự khác) đi du lịch Ai Cập và phương đông (ý mình là đi du học).

Đầu tiên phải nhắc tới Euclid, người đã quá quen thuộc với học sinh phổ thông với tiên đề Euclid. Hệ tiên đề Euclid đề ra trở thành cơ sở cho hình học. Bộ sách *Elements* của ông được cho là bộ sách giáo khoa đầu tiên trên thế giới và những gì ghi trong đó khá giống với những gì được giảng dạy ở trường học chúng ta ngày nay.

Nhưng ông đã không lường trước được 1 điều: thế hệ sau đã "thêm mắm dặm muối" và biến đổi hình học của ông thành hình học Phi-Euclid. Từ đó mở ra những khả năng lớn hơn của toán học.

Pythagoras: định lý Pythagoras trong tam giác vuông có lẽ là định lý đầu tiên mà học sinh tiếp cận. Phát biểu rất đơn giản:

Định lý 9.1 (Định lý Pythagoras)**.** Trong tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

Nói cách khác, tam giác có 2 cạnh góc vuông lần lượt là a và b, cạnh huyền độ dài là c thì

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Thật ra trước thời Pythagoras rất lâu, người Ai Cập đã biết tới phương pháp này. Có nhiều bằng chứng về các cuộn giấy papyrus ghi lại các bộ số nguyên (a, b, c) mà $a^2 + b^2 = c^2$ được tìm thấy khi khai quật.

Tuy nhiên thời đó con người chỉ làm việc với các số nguyên, chính xác hơn là các số tự nhiên vì chúng "tự nhiên" xuất hiện trong đời sống.

Pythagoras là người đầu tiên nhắc tới **proof** (chứng minh) trong toán học. Một phát biểu, định lý chỉ đúng khi có một chứng minh đúng đắn cho nó. Các bước suy luận trong chứng minh dựa trên một hệ tiên đề (axiom) cho trước. Các tiên đề này hiển nhiên đúng, từ đó các suy luận chính xác sẽ cho kết quả chính xác.

Cho tới khi Fermat phán:

Định lý 9.2 (Định lý cuối cùng của Fermat)**.** Không tồn tại một cách phân tích tam thừa thành tổng 2 tam thừa, tứ thừa thành tổng 2 tứ thừa, hay tổng quát hơn

Với mọi số nguyên $n \geq 3$, không tồn tại bộ số nguyên (a, b, c) sao cho

$$a^n + b^n = c^n$$

Và cú lừa có lẽ là lớn nhất thời đại: *"Tôi đã tìm được chứng minh cho mệnh đề kỳ diệu này nhưng lề sách quá chật không thể viết được"*.

Vâng, cái chứng minh kỳ diệu mà ông nói đã khiến các nhà toán học thiên tài bế tắc trong suốt hơn 300 năm, sử dụng nhiều công cụ phức tạp không có ở thời Fermat và hoàn thiện bởi bài báo 200 trang của Andrew Wiles.

Nghĩa là 200 lề sách cũng không viết đủ chứng minh cho định lý cuối cùng của Fermat!!!

Phần này mình làm vì đam mê tìm hiểu lịch sử toán. Ở đây ghi lại cuộc đời và công trình của các nhà toán học lớn trên thế giới suốt chiều dài lịch sử.

Phần này lấy cảm hứng từ quyển *Thiên tài và số phận* và *Định lý cuối cùng của Fermat* của thầy Lê Quang Ánh, thông tin tham khảo dựa trên nhiều nguồn (chủ yếu là quyển *Men of Mathematics* của E.T.Bell).

Tuy nhiên thông tin về cuộc đời của các nhà toán học đã có khá nhiều, mình sẽ trình bày theo cách hiểu của bản thân và đôi khi tập trung nhiều vào các công trình mức cơ sở.

Ngoại trừ phần lịch sử của nhà toán học, mình sẽ trình bày các định lý, khái niệm, ứng dụng của họ theo cách viết, cách trình bày của toán học hiện đại ngày nay để dễ tiếp cận.

Chương 10

Euclid

Lúc mình học cấp 2, tiên đề Euclid được học là một trong 5 tiên đề hình học của Euclid. Nội dung tiên đề đó như sau:

Tiên đề (Tiên đề Euclid)**.** Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng cho trước, ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Trong hình học Euclid, hình được vẽ trên *mặt phẳng*. Ở đó, với 2 điểm phân biệt ta vẽ được duy nhất một đường thẳng đi qua 2 điểm đó.

Nếu chúng ta chỉ lấy phần ở giữa 2 điểm, ta có *đoạn thẳng*. Nếu ta lấy phần ở ngoài 2 điểm nhưng chỉ một phía (đường thẳng kéo dài 2 phía) ta có nửa đường thẳng (hay còn gọi là tia).

Chúng ta có 2 công cụ để vẽ hình: thước và compa. Từ 2 công cụ này ta có thể vẽ được rất nhiều hình dạng như chia đôi góc (phân giác), chia đôi cạnh (lấy trung điểm), vẽ đường tròn, đường thẳng.

Tuy nhiên chúng lại có giới hạn: không thể chia 3 góc, hay không thể vẽ được hình đa giác đều 7 cạnh.

Những bài toán nhìn có vẻ đơn giản nhưng phải tới nhiều thế hệ sau, con người mới tìm được cách chứng minh rằng một hình nào đó có dựng được bằng thước và compa hay không.

Chương 11

Zeno

Zeno là nhà triết học nổi tiếng của Hy Lạp. Trong toán học, ông nổi tiếng về nghịch lý Zeno:

Archiles chạy đua với rùa. Do Archiles chạy nhanh hơn nên sẽ chấp rùa chạy trước. Khi đó Zeno bảo rằng Archiles sẽ không thể đuổi kịp rùa.

Phát biểu nghe rất mâu thuẫn nhưng được Zeno lý giải như sau:

- Giả sử ban đầu Archiles xuất phát sau con rùa một khoảng d_1
- Archiles mất một khoảng thời gian t_1 để đi hết quãng đường d_1 đó. Tuy nhiên trong khoảng thời gian t_1 đó con rùa cũng đi được một quãng đường d_2
- Archiles lại mất thêm một khoảng thời gian t_2 để đi hết quãng đường d_2. Nhưng rùa cũng đã đi được một đoạn d_3 nào đó trong thời gian t_2 rồi.
- Và cứ tiếp tục như thế, ta thấy rằng khoảng cách d_n giữa 2 người sẽ nhỏ dần đi, nhưng không bao giờ chạm 0. Nói cách khác Archiles không thể bắt kịp con rùa.

Có gì đó rất *không ổn* ở đây. Rõ ràng trên thực tế Archiles chắc chắn sẽ bắt kịp con rùa trong một khoảng thời gian nhất định. Nhưng tại sao suy luận của Zeno lại cho ra kết quả lạ thường vậy?

Câu trả lời là ở **vô cực**. Nói theo toán học hiện đại, khoảng cách d_n tiến về 0 khi n tiến ra vô cùng.

Tuy nhiên sự vô cùng chưa được hiểu đúng ở thời của Zeno. Việc này sẽ được giải quyết ở thời của Cantor.

Chương 12

Cauchy

Định lý 12.1 (Bất đẳng thức AM-GM)**.** Với 2 số không âm a, b, ta luôn có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Tổng quát cho n số ta có

Định lý 12.2 (Bất đẳng thức AM-GM tổng quát)**.** Với n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta luôn có

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Thực tế, bất đẳng thức Cauchy (còn gọi là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz) có thể hiểu theo cách cơ bản như sau:

Định lý 12.3 (Cauchy-Schwarz)**.** Với 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$

Chương 13

Nicolai Ivanovich Lobachevsky

Nhà toán học vĩ đại người Nga Лобачевский Николай Иванович (N.I. Lobachevsky) (1792-1856) là người có công rất lớn trong việc xây dựng hình học phi Euclid.

Phần IV

Mật mã học

Chương 14

AES

AES biến đổi theo khối 128 bit, sử dụng mô hình mạng SPN.

Bốn phép biến đổi chính là Add Round Key, Substitute Bytes, Shift Rows và Mix Columns.

Quá trình giải mã sử dụng phép biến đổi ngược của 4 phép biến đổi trên là Inverse Sub Bytes, Inverse Shift Rows, Inverse Mix Columns. Đối với Add Row Key bản thân là phép xor nên phép biến đổi ngược là chính nó.

AES hỗ trợ key với các kích thước: 128 bit, 192 bit và 256 bit. AES dùng hàm Expand Key để mở rộng khóa thành 44 word 32 bit với key 128 bit thành 11 cụm khóa con. Mỗi 4 word làm tham số cho một phép Add Row Key.

Mỗi block bản rõ 16 byte $p_0, p_1, \ldots, p_{15}$ được tổ chức dưới dạng một ma trận 4×4 (state)

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 & p_7 \\ p_8 & p_9 & p_{10} & p_{11} \\ p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & s_{03} \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{30} & s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

- Các phép biến đổi Add Round Key, Substitute Bytes, Shift Rows, Mix Columns được thực hiện trên ma trận 4×4 này
- Các phép tính số học trong AES được thực hiện trong $GF(2^8)$ với đa thức tối giản là $f(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$

14.1 Substitute Bytes

14.1.1 Substitute Bytes

Ta sử dụng một bảng tra cứu 16×16 (S-box).

Bước 1 điền các số từ 0 tới 255 theo từng hàng

Bước 2 thay thế mỗi byte trong bảng bằng nghịch đảo trong $GF(2^8)$. Quy ước $(00)^{-1} = 00$

Bước 3 với mỗi byte trong bảng, ta ký hiệu 8 bit là $b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$. Thay thế mỗi b_i bằng b'_i như sau

$$b'_i = b_i \oplus b_{(i+4) \bmod 8} \oplus b_{(i+5) \bmod 8} \oplus b_{(i+6) \bmod 8} \oplus b_{(i+7) \bmod 8} \oplus c_i$$

với c_i là bit thứ i của số $0x63$.

Việc tính trên tương đương với phép nhân trên ma trận $GF(2)$ là $B' = XB + C$

$$\begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \\ b'_5 \\ b'_6 \\ b'_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận X là ma trận khả nghịch, do đó phép biến đổi S-box là song ánh (one-to-one và onto mapping).

Dựa vào bảng S-box, Substitute Bytes thực hiện như sau: mỗi byte trong ma trận state S dưới dạng thập lục phân là xy sẽ được thay bằng giá trị ở hàng x và cột y của S-box.

14.1.2 Inverse Sub Bytes

Ta cần xây dựng bảng Inverse Sub Bytes (IS-box).

Việc xây dựng bảng này giống với bảng S-box ở bước 1 và 2. Tại bước 3:

$$b_i = b'_{(i+2) \bmod 8} \oplus b'_{(i+5) \bmod 8} \oplus b'_{(i+7) \bmod 8} \oplus d_i$$

với d_i là bit thứ i của số $0x05$.

14.1.3 Ý nghĩa của Substitute Bytes

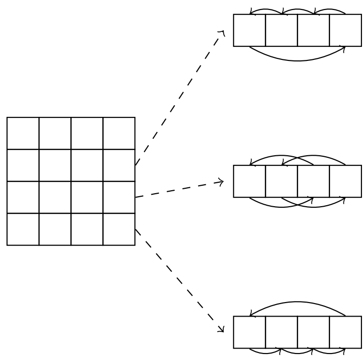
Bảng S-box dùng để chống lại known-plaintext và là bước duy nhất trong 4 bước không có quan hệ tuyến tính.

14.2 Shift Rows

14.2.1 Shift Rows

Trong Shift Rows, các dòng của ma trận state được biến đổi như sau:

- Dòng thứ nhất giữ nguyên
- Dòng 2 dịch vòng trái 1 ô
- Dòng 3 dịch vòng trái 2 ô
- Dòng 4 dịch vòng trái 3 ô



14.2.2 Inverse Shift Rows

Các dòng thứ 2, 3, 4 dịch phải tương ứng 1, 2, 3 ô.

14.2.3 Ý nghĩa

Xáo trộn các byte để tạo ra các cột cho Mix Columns.

14.3 Mix Columns

14.3.1 Mix Columns

Mix cols biến đổi từng cột của ma trận state một cách độc lập bằng phép nhân đa thức. Giả sử cột đầu tiên của ma trận state viết dưới dạng đa thức là

$$f(z) = s_{00}z^3 + s_{10}x^2 + s_{20}x + s_{30}$$

với $z \in GF(2^8)$

Khi đó $f(z)$ sẽ được nhân với $a(z) = 3z^3 + z^2 + z + 2$ (tất cả hệ số, phép cộng và nhân thực hiện trên $GF(2^8)$) và sau đó modulo cho $n(z) = z^4 + 1$.

Bốn byte hệ số của kết quả sẽ thay thế cho 4 byte tương ứng trong cột. Nếu viết dưới dạng ma trận, ta có

$$\begin{bmatrix} s'_{00} \\ s'_{10} \\ s'_{20} \\ s'_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{00} \\ s_{10} \\ s_{20} \\ s_{30} \end{bmatrix}$$

Lưu ý rằng các số 01, 02, 03 tuy viết dưới dạng thập phân nhưng khi tính toán phải ở dạng $GF(2^8)$. Việc sử dụng 1, 2, 3 giúp tăng tốc độ tính toán vì 1 và 2 chỉ cần phép dịch bit, còn 3 là xor của 1 và 2.

14.3.2 Inverse Mix Columns

Lúc này ma trận nghịch đảo có dạng

$$\begin{bmatrix} 0E & 0B & 0D & 09 \\ 09 & 0E & 0B & 0D \\ 0D & 09 & 0E & 0B \\ 0B & 0D & 09 & 0E \end{bmatrix}$$

14.3.3 Ý nghĩa

Mỗi cột mới chỉ phụ thuộc cột ban đầu. Cùng với sự kết hợp Shift Rows sau 1 vài vòng biến đổi, 128 bit kết quả phụ thuộc vào tất cả 128 bit ban đầu. Từ đó tạo ra tính khuếch tán (diffusion).

14.4 Add Round Key

14.4.1 Add Round Key

128 bit của ma trận state được XOR với 128 bit của khóa con từng vòng (4 dword 32 bit). Phép biến đổi ngược của Add Round Key là chính nó.

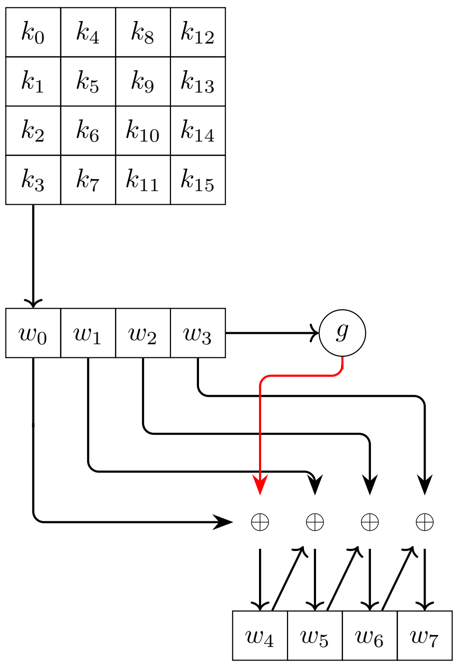
14.4.2 Ý nghĩa

Sự kết hợp với khóa tạo ra tính làm rối (confusion).

14.5 Expand Key

14.5.1 Expand Key

Input của thao tác Expand Key là 16 byte (4 word) của khóa, sinh ra 1 mảng 44 word (176 byte) sử dụng cho 11 vòng AES, mỗi vòng 4 word.



Từ 4 word đầu vào $w_0w_1w_2w_3$, lần lặp đầu sinh ra $w_4w_5w_6w_7$, lần lặp thứ hai sinh ra $w_8w_9w_{10}w_{11}$, ...

if i mod $4 = 0$ **then**

$g \leftarrow SubWord(RotWord(w_{i-1})) \oplus Rcon[i/4]$

$w_i = w_{i-4} \oplus g$

else

$w_i = w_{i-4} \oplus w_{i-1}$

end if

Trong đó,

- $RotWord$ dịch vòng trái 1 bit, nghĩa là $b_0b_1b_2 \rightarrow b_1b_2b_0$.
- $SubWord$ thay mỗi byte trong word bằng bảng S-box
- $Rcon$ là 1 mảng hằng số gồm 10 word tương ứng với 10 vòng AES. 4 byte của một phần tử $Rcon[j]$ là $RC[j], 0, 0, 0$ với $RC[j]$ là mảng 10 byte như sau

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$RC[j]$	1	2	4	8	10	20	40	80	18	36

14.5.2 Ý nghĩa của Expand Key

Dùng để chống lại known-plaintext (giống Sub Bytes dùng S-box). Đặc điểm của Expand Key gồm:

- Biết một số bit của khóa hay khóa con không thể tính được các bit còn lại
- KHÔNG THỂ tính ngược
- Khuếch tán: mỗi bit của khóa chính tác động lên tất cả khóa con

14.6 Kết luận

Mã hóa AES đơn giản và có thể chạy trên các chip 8 bit.

AES cung cấp 3 biến thể cho độ dài khóa là:

- 128 bit: 44 word 4 byte cho 10 vòng (11 lần ARK)
- 192 bit: 52 word 4 byte cho 12 vòng (13 lần ARK)
- 256 bit: 60 word 4 byte cho 14 vòng (15 lần ARK)