Mục lục

Ký hiệu chung

$\mathbb{C}$ Tập hợp số phức

$\mathbb{Q}$ Tập hợp số hữu tỷ

$\mathbb{R}$ Tập hợp số thực

$\mathbb{Z}$ Tập hợp số nguyên

Phần I

Đại số

Chương 1

Đại cương về tập hợp

1.1 Tập hợp

Mở đầu về tập hợp

Một tập hợp (set) bao gồm các phần tử khác nhau. Để biểu diễn tập hợp ta có hai cách.

1. Liệt kê. Ví dụ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$
2. Sử dụng tính chất đặc trưng. Ví dụ $A = \{a \in \mathbb{N}^* : a < 5\}$.

Ở đây hai cách biểu diễn tập hợp A là giống nhau.

Định nghĩa 1. Tập hợp rỗng

Tập hợp rỗng không chứa phần tử nào, ký hiệu là $\emptyset$.

Định nghĩa 2. Tập hợp con

Xét tập hợp A. Tập hợp B được gọi là **tập hợp con** của tập A nếu mọi phần tử của B đều nằm trong A. Nói cách khác với mọi $b \in B$ thì $b \in A$. Ta ký hiệu $B \subset A$.

Nhận xét 1

Tập hợp rỗng là con của mọi tập hợp.

Dễ thấy rằng mọi tập hợp là tập hợp con của chính nó. Do đó tập con này được gọi là tập con tầm thường (trivial subset). Để ký hiệu một tập con có thể bằng tập chứa nó ta viết $B \subseteq A$. Trong trường hợp B là tập con của A nhưng không bằng A ta có thể viết $B \subsetneq A$.

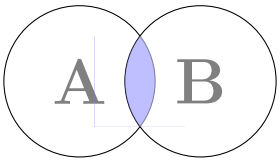
Toán tử trên tập hợp

Chúng ta xem xét 3 toán tử cơ bản trên tập hợp là *giao*, *hợp* và *hiệu* của hai tập hợp. Để biểu diễn các toán tử này ta có thể dùng biểu đồ Venn.

Định nghĩa 3. Giao của hai tập hợp

Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp các phần tử thuộc cả A và B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ và } x \in B\} \tag{1.1}$$



Hình 1.1. Phép giao hai tập hợp

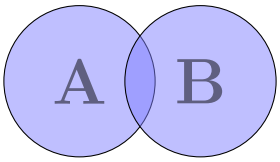
Hình 1.1 là biểu đồ Venn tương ứng của phép giao hai tập hợp. Khi giao của hai tập hợp A và B là rỗng thì ta nói hai tập rời nhau. Ký hiệu $A \cap B = \emptyset$.

Định nghĩa 4. Hợp của hai tập hợp

Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp các phần tử thuộc A hoặc B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in B\} \tag{1.2}$$

Hình 1.2 là biểu đồ Venn tương ứng của phép hợp hai tập hợp.



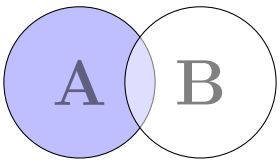
Hình 1.2. Phép hợp hai tập hợp

Định nghĩa 5. Hiệu của hai tập hợp

Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ và } x \notin B\} \tag{1.3}$$

Hình 1.3 là biểu đồ Venn tương ứng của hiệu hai tập hợp.



Hình 1.3. Phép hiệu hai tập hợp

Lực lượng của tập hợp

Để chỉ số lượng phần tử của một tập hợp ta dùng khái niệm lực lượng của tập hợp.

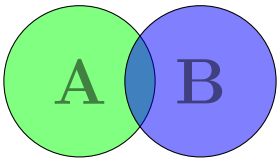
Ký hiệu lực lượng của tập hợp A là $|A|$.

Khi một tập hợp có vô số phần tử, ta gọi đó là tập vô hạn. Ngược lại ta gọi là tập hữu hạn.

Ví dụ 1. Các tập hợp số thông dụng $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ là các tập vô hạn.

Tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ là tập hữu hạn có 5 phần tử. Ký hiệu $|A| = 5$.

Từ biểu đồ Venn chúng ta cũng có thể tìm được công thức tính lực lượng của tập $A \cup B$.



Hình 1.4. Nguyên lý bù trừ cho hai tập hợp

Dựa vào hình ta có thể suy ra công thức sau

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1.4}$$

1.2 Ánh xạ

Ánh xạ

Cho 2 tập hợp X và Y. Ánh xạ f biến một phần tử $x \in X$ thành một và chỉ một phần tử $y \in Y$.

Ta ký hiệu

$$f : X \to Y,\ f(x) = y$$

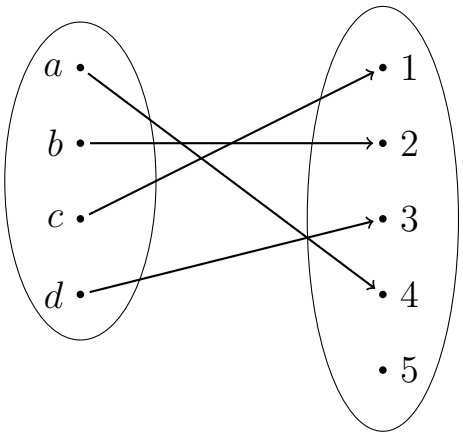
Khi đó, X được gọi là tập nguồn (domain) và Y là tập đích (image).

Ánh xạ có 3 loại:

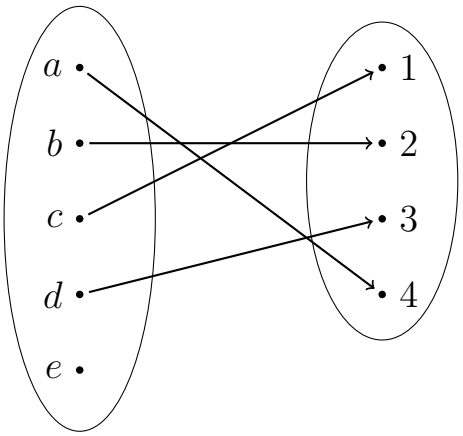
- **Đơn ánh** (hay **injection**): Hai phần tử khác nhau của tập nguồn cho hai ảnh khác nhau. Tức là với mọi $x_1, x_2 \in X$ mà $x_1 \neq x_2$, thì $f(x_1) \neq f(x_2)$
- **Toàn ánh** (hay **Surjection**): Mọi phần tử $y \in Y$ đều có ít nhất một phần tử $x \in X$ mà $f(x) = y$. Nói cách khác với mỗi phần tử trong Y ta đều tìm được phần tử thuộc X biến thành nó
- **Song ánh** (hay **Bijection**): Nếu ánh xạ đó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh

Dựa vào định nghĩa và hình vẽ, ta có thể rút ra kết luận như sau

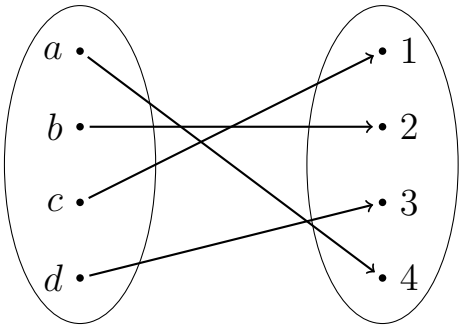
- Đối với đơn ánh, do mọi phần tử của X đều có ảnh ở Y, tuy nhiên có thể có phần tử ở Y không do phần tử nào của X biến thành (trong hình là 5). Do đó $|X| \leqslant |Y|$.
- Đối với toàn ánh, mọi phần tử của Y đều có nguồn gốc xuất xứ, tuy nhiên có thể có phần tử của X không biến thành y nào của Y (trong hình là e). Do đó $|X| \geqslant |Y|$.
- Đối với song ánh, do là kết hợp giữa đơn ánh và toàn ánh, khi đó dấu đẳng thức xảy ra, $|X| = |Y|$.



(a) Đơn ánh



(b) Toàn ánh



(c) Song ánh

Hình 1.5. Các loại ánh xạ

Hàm số

Khi 2 tập nguồn và đích của ánh xạ là 2 tập hợp số, ta có hàm số.

Ví dụ 2. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $y = f(x) = x^3 + x + 1$. Ở đây $X \equiv \mathbb{R}$ và

$Y \equiv \mathbb{R}$.

Lưu ý rằng tập nguồn và đích không nhất thiết là tập hợp số cơ bản $(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ mà cũng có thể là tích Descartes của chúng.

Ví dụ 3. Hàm số $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $z = f(x, y) = x + y + xy$. Ở đây $X \equiv \mathbb{R}$, $Y \equiv \mathbb{R}$ và $Z \equiv \mathbb{R}$.

Chúng ta còn một cách gọi khác cho đơn ánh, toàn ánh, song ánh trong tiếng Anh.

đơn ánh	injection	one-to-one map
toàn ánh	surjection	onto map
song ánh	bijection	one-to-one and onto map

Bảng 1.1. Thuật ngữ tiếng Anh cho ánh xạ

Ví dụ 4. Hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $y = f(x) = x^3$ là song ánh.

Chứng minh. Ta thấy nếu $f(x_1) = f(x_2)$, tương đương $x_1^3 = x_2^3$ nên $x_1 = x_2$. Do đó f là đơn ánh.

Với mọi $y = x^3 \in \mathbb{R}$, do căn bậc 3 luôn tồn tại nên ta có $x = \sqrt[3]{y}$. Nghĩa là luôn tồn tại x để $f(x) = y$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Do đó f là toàn ánh.

Kết luận f là song ánh. □

Đồng biến và nghịch biến

Định nghĩa 6

Xét hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b). Ta nói $f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên (a, b) nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ mà $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) < f(x_2)$.

Tương tự $f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên (a, b) nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ mà $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) > f(x_2)$.

Lưu ý ở các so sánh trên dấu bằng có thể xảy ra. Khi đó hàm số được gọi là tăng *không nghiêm ngặt* (hoặc giảm *không nghiêm ngặt*).

Nếu hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng xác định nào đó thì ta nói hàm số đơn điệu trên khoảng đó.

Đồ thị của hàm số khi đồng biến sẽ đi lên (theo chiều từ trái sang phải), và đi xuống nếu nghịch biến.

Ví dụ 5. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = x^2 + 3$.

Để khảo sát sự biến thiên, một cách làm đơn giản theo định nghĩa là ta xét $x_1 < x_2$ và so sánh $f(x_1)$ với $f(x_2)$.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + 3 - x_2^2 - 3 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$

Do $x_1 < x_2$, nên với $x_1, x_2 > 0$ thì $x_1 + x_2 > 0$ và $x_1 - x_2 < 0$. Suy ra $f(x_1) - f(x_2) < 0$ và từ đó $f(x_1) < f(x_2)$. Như vậy $f(x)$ đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Tương tự, khi $x_1, x_2 < 0$ thì $x_1 + x_2 < 0$. Khi đó $f(x_1) > f(x_2)$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty, 0)$.

Để thể hiện sự biến thiên của hàm số ta sử dụng bảng biến thiên.

Đối với hàm số $y = x^2 + 3$ ở trên bảng biến thiên có dạng:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2 + 3$	$+\infty$	3	$+\infty$

Hình 1.6. Bảng biến thiên hàm số $y = x^2 + 3$

Ta đã chứng minh được hàm số nghịch biến trên $(-\infty, 0)$ và đồng biến trên $(0, +\infty)$, giá trị $f(0) = 3$ nên bảng biến thiên thể hiện sự tăng giảm trên các khoảng. Dựa vào bảng biến thiên ta có thể hình dung ra dạng của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số

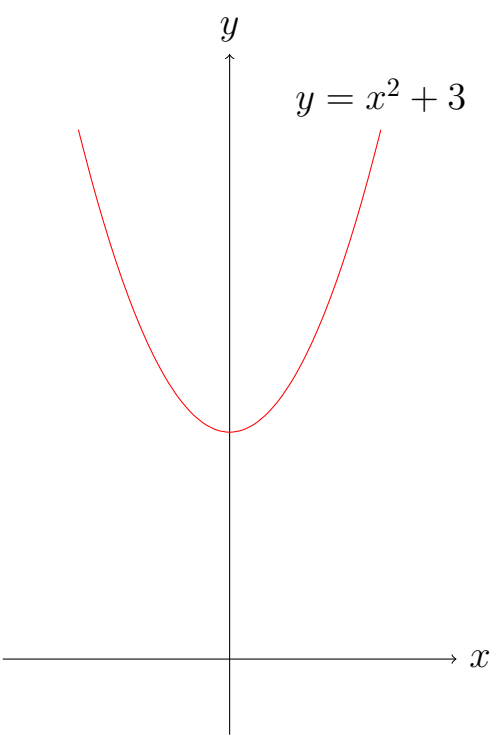
Để biểu diễn sự phụ thuộc của biến y theo biến x, hay nói cách khác là biểu diễn hàm số $y = f(x)$ ta có thể dùng đồ thị.

Đồ thị được vẽ trên hệ tọa độ Descartes Oxy. Bảng biến thiên cho ta thấy tính đơn điệu trên các khoảng xác định, và đồ thị sẽ cho ta thấy rõ hơn độ "cong" của những đường cong.

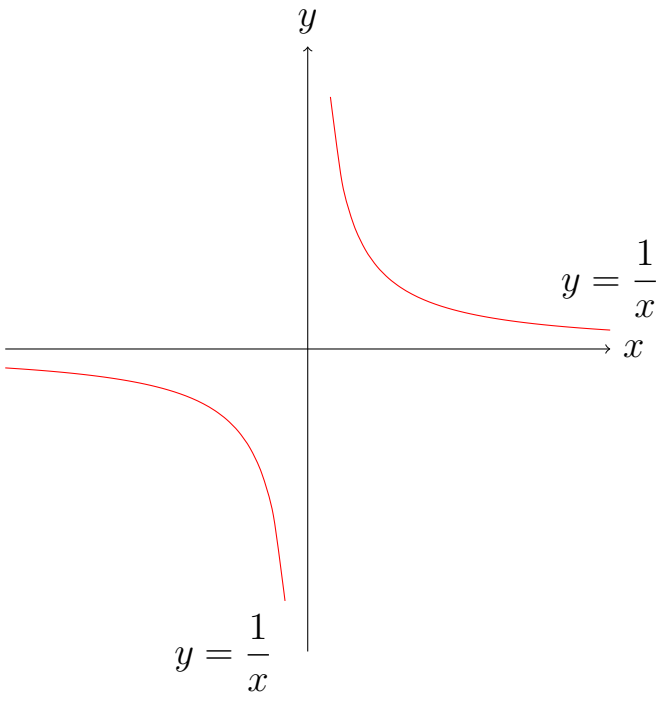
Ví dụ 6. Với hàm số $y = x^2 + 3$ ở trên. Đồ thị hàm số có dạng như hình 1.7a.

Với hàm số $y = \dfrac{1}{x}$. Ta thấy rằng hàm số không xác định tại $x = 0$. Khảo sát sự biến thiên như bên trên ta thấy hàm số nghịch biến ở hai khoảng xác định là $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$. Đồ thị hàm số có dạng như hình 1.7b.

Từ đồ thị của 2 hàm số trên ta thấy rằng mặc dù cùng là nghịch biến trên $(-\infty, 0)$ nhưng nghịch biến của $y = x^2 + 3$ nhìn "nhẹ nhàng" hơn. Trong khi đồ thị $y = \dfrac{1}{x}$ thì ban đầu "nhẹ nhàng", sau thì như "rơi tự do".



(a) Đồ thị hàm số $y = x^2 + 3$



(b) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{x}$

Hình 1.7. Đồ thị một số hàm thông dụng

1.3 Một số loại hàm số

Một số hàm số có tính chất đặc biệt giúp chúng ta tiết kiệm công sức trong chứng minh, tính toán.

Hàm chẵn và hàm lẻ

Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D có tính đối xứng, nghĩa là với mỗi phần tử dương $x \in D$ thì có phần tử âm $-x \in D$ hoặc ngược lại. Khi đó

Định nghĩa 7. Hàm số chẵn

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu với mọi $x \in D$ ta có $f(-x) = f(x)$.

Ví dụ như hàm số $y = x^2 + 3$ ở trên là một hàm chẵn vì với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3 = (-x)^2 + 3 = f(-x)$. Dễ thấy rằng hàm chẵn đối xứng qua trục tung. Dựa vào tính chất này, trong lúc khảo sát hoặc tính toán đôi khi ta chỉ cần quan tâm một bên trục tung, bên kia tương tự.

Định nghĩa 8. Hàm số lẻ

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu với mọi $x \in D$ ta có $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ như hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ ở trên là một hàm lẻ vì với mọi $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$. Dễ thấy rằng hàm lẻ đối xứng qua gốc tọa độ O.

Hàm cộng tính

Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D.

Định nghĩa 9. Hàm cộng tính

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **cộng tính** nếu với mọi $x, y \in D$ ta có $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Ví dụ 7. Hàm số $y = 2x$ trên $\mathbb{R}$ là hàm cộng tính vì với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$.

Hàm nhân tính

Tương tự hàm cộng tính, ta định nghĩa hàm nhân tính.

Định nghĩa 10. Hàm nhân tính

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **nhân tính** nếu với mọi $x, y \in D$ ta có $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

Hàm nhân tính quan trọng được sử dụng trong số học là hàm φ Euler về số lượng các số nguyên tố cùng nhau với số nguyên dương n. Nếu một hàm số học là nhân tính thì chúng ta chỉ cần quan tâm giá trị của hàm số đó tại các số nguyên tố là đủ.

Hàm tuần hoàn

Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D.

Định nghĩa 11. Hàm tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **tuần hoàn** nếu tồn tại số T sao cho $f(x+T) = f(x)$ với mọi $x \in D$.

Nói cách khác, hàm số sẽ lặp lại sau một đoạn nhất định.

Số T nhỏ nhất thỏa mãn $f(x+T) = f(x)$ được gọi là **chu kỳ** của hàm tuần hoàn. Vì sao lại là nhỏ nhất?

Ta thấy rằng, nếu $f(x+T) = f(x)$ với mọi $x \in D$, ta thay x bởi $x+T$ thì thu được $f(x+T+T) = f(x+T)$, hay $f(x+2T) = f(x+T)$. Suy ra $f(x+2T) = f(x+T) = f(x)$. Như vậy thì sau $2T$ hàm số cũng lặp lại đúng trạng thái đó. Tương tự cho $3T$, $4T$, ... Nên số T nhỏ nhất thỏa mãn đẳng thức $f(x+T) = f(x)$ sẽ là chu kỳ.

Ví dụ 8. Hàm số $y = \sin(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$. Do đó chúng ta chỉ cần khảo sát hàm số trong khoảng $(-\pi, \pi)$ thôi là đủ.

1.4 Phép quy nạp toán học

Giả sử ta muốn chứng minh một mệnh đề P đúng với mọi $n \geqslant 1$. Phép quy nạp toán học hoạt động theo ba bước như sau

1. Chứng minh mệnh đề P đúng với $n = 1$ (bước cơ sở)
2. Giả sử mệnh đề P đúng với $n = k \geqslant 1$. Đây gọi là giả thiết quy nạp
3. Chứng minh mệnh đề P đúng với $n = k+1$ từ giả thiết quy nạp bên trên

Như vậy phép quy nạp toán học hoạt động theo bậc thang. Từ giả thiết quy nạp mệnh đề P đúng với $n = 1$, theo chứng minh ở bước (3) thì nó cũng đúng ở bước $n = 1+1 = 2$. Do P đúng với $n = 2$ nên cũng đúng ở $n = 3$. Cứ tiếp tục như vậy P sẽ đúng với mọi $n \geqslant 1$. Đây là sự hiệu quả đáng kinh ngạc của phép quy nạp toán học.

Ví dụ 9. Chứng minh công thức tổng quát cho tổng $1+2+\ldots+n$ là $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Với $n = 1$ thì $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$. Như vậy công thức đúng cho $n = 1$. Đây là bước cơ sở.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geqslant 1$. Nghĩa là $1+2+\ldots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Đây là giả thiết quy nạp.

Bây giờ ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$. Nghĩa là cần chứng minh $1+2+\ldots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Từ giả thiết quy nạp ta suy ra

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Vậy là ta đã có điều cần chứng minh, và công thức đã được chứng minh đúng với mọi $n \geqslant 1$.

Nhận xét 2

Tùy thuộc bài toán, bước cơ sở có thể không phải 1 mà là một số nguyên dương nào đó khác.

Phần II

Đại số tuyến tính

Phần II: Nội dung

Chương 2

Ma trận

Trong các bài viết của về đại số tuyến tính:

- Vector sẽ được ký hiệu bởi chữ thường in đậm (ví dụ $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, \ldots$);
- Ma trận sẽ được ký hiệu bởi chữ hoa in đậm (ví dụ $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}, \ldots$);
- Các đại lượng vô hướng (số) được ký hiệu bởi chữ thường không in đậm (ví dụ $x_1,\ N,\ t, \ldots$).

Bảng 2.1. Thuật ngữ và ký hiệu

Ký hiệu	**Ý nghĩa**
$\boldsymbol{A}^T$	Ma trận chuyển vị (transpose) của ma trận $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{A}^{-1}$	Ma trận nghịch đảo (inverse) của ma trận $\boldsymbol{A}$
$\operatorname{rank} A$	Hạng (rank) của ma trận A
$\det A$	Định thức (determinant) ma trận A
$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$	Tích vô hướng hai vector $\boldsymbol{x}$ và $\boldsymbol{y}$
$\dim \mathcal{V}$	Số chiều (dimension) không gian vector $\mathcal{V}$
$\|\boldsymbol{x}\|$	Chuẩn Euclid (Euclidean norm) vector $\boldsymbol{x}$

2.1 Định thức, ma trận nghịch đảo, hạng ma trận

Định thức ma trận

Định nghĩa 1. Nghịch thế

Cho tập hợp $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ và xét hoán vị σ trên A. Ta gọi hai phần tử i và j tạo thành **nghịch thế** (inversion) nếu $i < j$ và $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Đặt $\sigma = \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ là một hoán vị của A. Ta ký hiệu

$$P\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$$

là số lượng nghịch thế của σ và đặt

$$(-1)^{P\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}} = \text{sign}\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}.$$

Ví dụ 1. Với $n = 4$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Xét hoán vị $\sigma = \{4, 2, 1, 3\}$.

Ta nhận thấy các cặp nghịch thế $(4, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(2, 1)$ gồm 4 cặp nghịch thế. Vậy $P\{4, 2, 1, 3\} = 4$ và $\text{sign}\{4, 2, 1, 3\} = (-1)^4 = 1$.

Định nghĩa 2. Định thức

Khi đó định thức của ma trận $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ được định nghĩa là:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1,i_1} \cdot a_{2,i_2} \cdot a_{n,i_n} \cdot \text{sign}\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \tag{2.1}$$

với mọi hoán vị $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ của $(1, 2, \cdots, n)$. Như vậy có $n!$ phần tử cho tổng trên.

Ví dụ 2. Tính định thức ma trận $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Xét hoán vị $\sigma_1 = \{1, 2, 3\}$. Khi đó $P\{1, 2, 3\} = 0$, $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot (-1)^0 = 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 1 = 45$.

Xét hoán vị $\sigma_2 = \{1, 3, 2\}$. Khi đó $P\{1, 3, 2\} = 1$, $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot (-1)^1 = 1 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (-1) = -48$.

Xét hoán vị $\sigma_3 = \{2, 1, 3\}$. Khi đó $P\{2, 1, 3\} = 1$, $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot (-1)^1 = 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot (-1) = -72$.

Xét hoán vị $\sigma_4 = \{2, 3, 1\}$. Khi đó $P\{2, 3, 1\} = 2$, $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot (-1)^2 = 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 = 84$.

Xét hoán vị $\sigma_5 = \{3,1,2\}$. Khi đó $P\{3,1,2\} = 2$, $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot (-1)^2 = 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1 = 96$.

Xét hoán vị $\sigma_6 = \{3,2,1\}$. Khi đó $P\{3,2,1\} = 3$, $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot (-1)^3 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (-1) = -105$.

Như vậy $\det(A) = 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 = 0$.

Định thức của ma trận còn được định nghĩa theo **đệ quy** như sau:

Với ma trận 1×1 là $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$ thì $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}$.

Với ma trận 2×2 là $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Với ma trận $n \times n$, gọi $\boldsymbol{M}_{ij}$ là ma trận có được từ ma trận $\boldsymbol{A}$ khi bỏ đi hàng i và cột j của ma trận $\boldsymbol{A}$ và ký hiệu $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\boldsymbol{M}_{ij})$. Khi đó:

Định lí 1. Định lý Laplace

Định lý Laplace cho phép ta khai triển định thức của ma trận cấp n thành tổng các ma trận cấp $n-1$.

Khai triển theo cột j:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \ j = \overline{1,n}.$$

Khai triển theo hàng i:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \ i = \overline{1,n}.$$

Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 3. Ma trận nghịch đảo

Ma trận $\boldsymbol{A}^{-1}$ được gọi là **ma trận nghịch đảo** của ma trận vuông $\boldsymbol{A}$ nếu $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$. Trong đó $\boldsymbol{I}$ là ma trận đơn vị cùng kích thước với $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}[(A_{ij})_n]^T = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Trong đó, A_{ij} cũng được định nghĩa tương tự như khi tính định thức bằng khai triển theo dòng hoặc cột. Gọi $\boldsymbol{M}_{ij}$ là ma trận có được từ ma trận $\boldsymbol{A}$ khi bỏ đi hàng i và cột j của ma trận $\boldsymbol{A}$ và ký hiệu $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{M}_{ij})$.

Như vậy, điều kiện cần và đủ để một ma trận có nghịch đảo là định thức khác 0.

Hạng của ma trận

Định nghĩa 4. Hạng của ma trận

Cho ma trận $\mathbf{A}_{m\times n}$. **Hạng** của ma trận là cấp của ma trận con lớn nhất có định thức khác 0.

Nghĩa là, một ma trận vuông mà là ma trận con (lấy một phần của ma trận ban đầu) kích thước $r \times r$ mà có định thức khác 0 và r lớn nhất, thì hạng của ma trận khi đó là r.

Nhận xét 1

Ma trận con kích thước $r \times r$ là ma trận con của ma trận kích thước $m \times n$ nên $r \leqslant \min(m, n)$.

Ví dụ 3. Ma trận $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ có định thức $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

Nhưng ma trận con của $\boldsymbol{A}$ là $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (lấy dòng 1 và 3, lấy cột 2 và 3) có định thức $\det(\boldsymbol{B}) = 2 \neq 0$, do đó $r = \text{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$ ($\text{rank}(\boldsymbol{A})$ nghĩa là hạng của $\boldsymbol{A}$).

2.2 Tổ hợp tuyến tính

Xét tập hợp các vector $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 5. Tổ hợp tuyến tính

Với vector $\boldsymbol{x}$ bất kì thuộc $\mathbb{R}$, nếu tồn tại các số thực $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_d \boldsymbol{v}_d$$

thì $\boldsymbol{x}$ được gọi là **tổ hợp tuyến tính** của các vector $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$.

Ta thấy rằng vector không $\mathbf{0}$ là tổ hợp tuyến tính của mọi tập các vector $\boldsymbol{v}_i$.

Bây giờ ta xét tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_d \boldsymbol{v}_d = \mathbf{0}$$

Định nghĩa 6. Độc lập tuyến tính

Tập hợp các vector $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_d$ được gọi **độc lập tuyến tính** nếu chỉ có duy nhất trường hợp $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_d = 0$ thỏa tổ hợp tuyến tính trên.

Định nghĩa 7. Phụ thuộc tuyến tính

Tập các vector là phụ thuộc tuyến tính nếu không độc lập tuyến tính. Nói cách khác tồn tại ít nhất một phần tử $\alpha_i \neq 0$.

2.3 Không gian vector

Không gian vector

Xét tập hợp các vector $\mathcal{V}$ trên trường $\mathbb{F}$.

Ta định nghĩa hai phép tính cộng và nhân trên các vector này.

- Phép cộng là một ánh xạ $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sao cho với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ thì $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$
- Phân nhân vô hướng là ánh xạ $\mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sao cho với mọi $\alpha \in \mathbb{F}$ và $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$

Nói cách khác, phép cộng 2 vector và phép nhân vô hướng 1 số với vector cho kết quả vẫn nằm trong không gian vector đó.

Đồng thời, phép cộng và phép nhân vô hướng phải thỏa mãn các tính chất sau

1. Tính giao hoán với phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
2. Tính kết hợp với phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$

3. Phần tử đơn vị của phép cộng: tồn tại vector không $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$ sao cho với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$
4. Phần tử đối của phép cộng: với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, tồn tại phần tử $\boldsymbol{x'} \in \mathcal{V}$ sao cho $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x'} = \mathbf{0}$
5. Phần tử đơn vị của phép nhân vô hướng: tồn tại phần tử $1_F \in \mathbb{F}$ sao cho với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $1_F \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
6. Tính kết hợp của phép nhân vô hướng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
7. Tính phân phối giữa phép cộng và nhân: với mọi $\alpha \in \mathbb{F}$, với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$ thì $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$
8. Tính phân phối giữa phép nhân vô hướng: với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ thì $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$

Ta thấy rằng không gian vector ở chương trình phổ thông là không gian vector xác định trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Khi đó $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$. Trong chương này sẽ làm việc với không gian vector thực $\mathbb{R}$.

Cơ sở và số chiều của không gian vector

Nếu trong không gian vector $\mathcal{V}$ tồn tại các vector độc lập tuyến tính $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, ..., $\boldsymbol{v_d}$ mà tất cả các vector trong $\mathcal{V}$ có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector $\boldsymbol{v_i}$ trên, thì tập hợp các vector

$$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$$

được gọi là **cơ sở** của không gian vector $\mathcal{V}$.

Khi đó,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$$

Số lượng phần tử của tập hợp các vector đó (ở đây là d) gọi là **số chiều (dimension)** của không gian vector $\mathcal{V}$. Ta ký hiệu $\dim\mathcal{V} = d$.

Ta còn ký hiệu

$$\mathcal{V} = \text{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$$

và nói là không gian vector $\mathcal{V}$ được span (hay được sinh) bởi các vector $\boldsymbol{v_i}$.

Ta thấy rằng có thể có nhiều cơ sở cho cùng một không gian vector.

Định lí 2

Mọi cơ sở của không gian vector $\mathcal{V}$ đều có số phần tử bằng $\dim\mathcal{V}$.

Giả sử ta có $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_d$ là một cơ sở của không gian vector $\mathbb{R}^n$. Khi đó nếu hệ vector $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, ..., $\boldsymbol{w}_d$ cũng là một hệ cơ sở khi và chỉ khi tồn tại ma

trận khả nghịch $\boldsymbol{A}$ sao cho $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{V}$. Ở đây $\boldsymbol{W}$ là ma trận với các hàng là các vector $\boldsymbol{w}_i$. Tương tự $\boldsymbol{V}$ là ma trận với các hàng là các vector $\boldsymbol{v}_i$.

Chứng minh. Ta viết các vector $\boldsymbol{v}_i$ dưới dạng $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) \\
\boldsymbol{v}_2 &= (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) \\
\ldots &= (\ldots, \ldots, \ldots, \ldots) \\
\boldsymbol{v}_d &= (v_{d1}, v_{d2}, \ldots, v_{dn})
\end{aligned}$$

Tương tự là các vector $\boldsymbol{w}_i$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= (w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n}) \\
\boldsymbol{w}_2 &= (w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n}) \\
\ldots &= (\ldots, \ldots, \ldots, \ldots) \\
\boldsymbol{w}_d &= (w_{d1}, w_{d2}, \ldots, w_{dn})
\end{aligned}$$

Do $\boldsymbol{v}_i$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, mọi vector trong $\mathbb{R}^n$ được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các $\boldsymbol{v}_i$.

Khi đó ta viết các $\boldsymbol{w}_i$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{v_i}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= \alpha_{11}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{12}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{1d}\boldsymbol{v}_d \\
\boldsymbol{w}_2 &= \alpha_{21}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{2d}\boldsymbol{v}_d \\
\ldots &= \ldots \\
\boldsymbol{w}_d &= \alpha_{d1}\boldsymbol{v}_1 + \alpha_{d2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_{dd}\boldsymbol{v}_d
\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{d1} & w_{d2} & \ldots & w_{dn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1d} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2d} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{d1} & \alpha_{d2} & \ldots & \alpha_{dd} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{d1} & v_{d2} & \ldots & v_{dn} \end{pmatrix}$$

Nếu $\boldsymbol{w}_i$ cũng là cơ sở của $\mathcal{V}$, thì các vector $\boldsymbol{v}_i$ cũng phải biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{w}_i$. Nói cách khác, ma trận (α_{ij}) khả nghịch và ta có điều phải chứng minh. □

Không gian vector con

Cho không gian vector $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ với phép cộng hai vector và phép nhân vô hướng. Một tập con L của $\mathcal{V}$ được gọi là không gian vector con nếu:

- Với mọi $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ thuộc L, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in L$
- Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, với mọi $\boldsymbol{x} \in L$, $\alpha\boldsymbol{x} \in L$

Nói cách khác, phép cộng và phép nhân vô hướng *đóng* trong không gian vector con.

Nhận xét 2

Trên $\mathbb{R}^n$, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có thể sinh ra một không gian vector con của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 4. Xét hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{aligned} x_1 &+ 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 &\quad + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 &+ 2x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 0 \end{aligned}$$

Biến đổi ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Như vậy hệ tương đương với

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \quad x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

Ta chọn $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ tự do, khi đó x_1 và x_2 được biểu diễn theo x_3 và x_4

$$x_1 = -2x_3 - x_4, \quad x_2 = -x_3 - 2x_4$$

Mọi vector trong không gian tuyến tính khi đó có dạng

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-2x_3 - x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \\ &= x_3 \cdot (-2, -1, 1, 0) + x_4 \cdot (-1, -2, 0, 1) \end{aligned}$$

Ở đây ta thấy x_3, x_4 nhận giá trị tùy ý trong $\mathbb{R}$, và mọi vector trong không gian nghiệm là tổ hợp tuyến tính của hai vector $(-2, -1, 1, 0)$ và $(-1, -2, 0, 1)$. Suy ra hai vector này là cơ sở của không gian nghiệm, và $\dim \mathcal{V} = 2$.

2.4 Không gian Euclide

Trên không gian vector $\mathcal{V}$ chúng ta bổ sung thêm một phép toán là tích vô hướng (dot product, tích chấm) của hai vector.

Giả sử với hai vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Khi đó tích vô hướng của $\boldsymbol{x}$ và $\boldsymbol{y}$ là

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \tag{2.3}$$

Một số sách ký hiệu tích vô hướng của hai vector $\boldsymbol{x}$ và $\boldsymbol{y}$ là $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$. Trong quyển sách này mình sẽ dùng ký hiệu $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ như trên.

Không gian vector có phép toán tích vô hướng được gọi là không gian Euclide. Khi $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ thì căn bậc hai của kết quả tích vô hướng được gọi là **chuẩn Euclide** (Euclidean norm) và được ký hiệu

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \tag{2.4}$$

Như vậy ta có thể viết $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^2$.

Định lí 3. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Với hai vector $\boldsymbol{x}$ và $\boldsymbol{y}$ bất kì ta luôn có

$$\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \geqslant |\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \tag{2.5}$$

Nghĩa là tích độ dài của hai vector bất kì trong cùng không gian Euclide lớn hơn hoặc bằng tích vô hướng giữa chúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$. Nói cách khác là hai vector cùng phương.

Chứng minh. Với mọi số thực t, ta luôn có

$$0 \leqslant \|\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}\|^2 = \boldsymbol{x}^2 - 2t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + t^2\boldsymbol{y}^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - 2t\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + t^2\|\boldsymbol{y}\|^2$$

Nếu xem biểu thức trên là đa thức bậc 2 theo t, để đa thức lớn hơn hoặc bằng 0 với mọi $t \in \mathbb{R}$ thì ta phải có $\Delta' \leqslant 0$ và $\|\boldsymbol{y}\|^2 > 0$ (luôn đúng). Ta có

$$\Delta' = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqslant 0$$

Tương đương với $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ (điều phải chứng minh). □

Hệ cơ sở trực giao

Cho không gian Euclide $\mathcal{V}$ và một cơ sở của nó là $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_d$. Thuật toán trực giao Gram-Schmidt là thuật toán biến đổi cơ sở trên thành một cơ sở mới, trong đó các vector đều trực giao nhau.

Algorithm 1 Thuật toán trực giao Gram-Schmidt

Require: $\boldsymbol{v}_1$, ..., $\boldsymbol{v}_d$ trong $\mathbb{R}^n$
Ensure: $\boldsymbol{u}_1$, ..., $\boldsymbol{u}_d$ trong $\mathbb{R}^n$ mà $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ với mọi $i \neq j$
  $\boldsymbol{u}_1 \leftarrow \boldsymbol{v}_1$
  for $i = 2 \to d$ **do**
    $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_i$
    for $j = i - 1 \to 1$ **do**
      $\mu_{i,j} = (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{u}_j)/(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j)$
      $\boldsymbol{w} \leftarrow \boldsymbol{w} - \mu_{i,j}\boldsymbol{u}_j$
    end for
    $\boldsymbol{u}_i \leftarrow \boldsymbol{w}$
  end for
  return $\boldsymbol{u}_1$, ..., $\boldsymbol{u}_d$

Nói cách khác, với $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$, với mỗi $i = 2, 3, \ldots, d$ ta tính vector $\boldsymbol{u}_i$ với công thức

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j}\boldsymbol{u}_j$$

Ở đây $\mu_{i,j} = \dfrac{\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{u}_j}{\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j}$ là hệ số trước $\boldsymbol{u}_j$.

Ví dụ 5. Xét cơ sở $\boldsymbol{v}_1 = (2, -2, 4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 0)$ và $\boldsymbol{v}_3 = (5, -3, 3)$ của $\mathbb{R}^3$.

Đặt $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = (2, -2, 4)$.

Ta có $\mu_{2,1} = \dfrac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} = \dfrac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 4}{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$.

Suy ra

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v_2} - \mu_{2,1}\boldsymbol{u}_1 = (1, -1, 0) - \frac{1}{6} \cdot (2, -2, 4) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

Tương tự $\mu_{3,1} = \dfrac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} = \dfrac{5 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) + 3 \cdot 4}{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \dfrac{28}{24} = \dfrac{7}{6}$.

Tiếp theo $\mu_{3,2} = \dfrac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2} = \dfrac{5 \cdot \dfrac{2}{3} + (-3) \cdot \dfrac{-2}{3} + 3 \cdot \dfrac{-2}{3}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2} = \dfrac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \boldsymbol{u}_3 =& \boldsymbol{v}_3 - \mu_{3,1}\boldsymbol{u}_1 - \mu_{3,2}\boldsymbol{u}_2 \\ =& (5, -3, 3) - \frac{7}{6} \cdot (2, -2, 4) - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right) \\ =& (1, 1, 0) \end{aligned}$$

Ta có thể kiểm chứng rằng $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 2 \cdot \frac{2}{3} + (-2) \cdot \frac{-2}{3} + 4 \cdot \frac{-2}{3} = 0$. Tương tự với $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$ và $\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$. Thêm nữa các vector này cũng độc lập tuyến tính nên cũng là một hệ cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Như vậy các vector $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ là một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$.

Nhận xét 3

Cơ sở trực giao cho phép ta tính độ dài của tất cả các vector khác trong không gian vector dễ dàng hơn.

Thật vậy, giả sử $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_d$ là các vector trong cơ sở trực giao. Mọi vector $\boldsymbol{x}$ trong không gian vector đều có dạng

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \alpha_d \boldsymbol{u}_d$$

Khi đó

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^2 = (\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \ldots + \alpha_d \boldsymbol{u}_d)^2 = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \boldsymbol{u}_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_j$$

Do các vector trong cơ sở đều trực giao với nhau nên $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ với $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant d$. Từ đó ta có được

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \boldsymbol{u}_i^2 = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \|\boldsymbol{u}_i\|^2$$

hay

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\alpha_1^2 \boldsymbol{u}_1^2 + \ldots + \alpha_d^2 \boldsymbol{u}_d^2}$$

Kết quả rất đơn giản, độ dài của các vector bất kì là căn bậc hai của tổ hợp độ dài các vector trong cơ sở và hệ số tương ứng.

Chứng minh thuật toán Gram-Schmidt

Cho không gian vector $\mathcal{V}$ với cơ sở là các vector $\boldsymbol{v}_1$, ..., $\boldsymbol{v}_d$. Thuật toán Gram-Schmidt biến đổi và cho kết quả là cơ sở mới $\boldsymbol{u}_1$, ..., $\boldsymbol{u}_d$ sao cho các vector trong cơ sở mới này trực giao nhau đôi một.

Đặt $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$.

Bước 1. Ta chứng minh với mọi $k \geqslant 2$ thì $\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$.

Ta có $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_1 - \mu_{2,1} \boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{v}_2 - \dfrac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} \cdot \boldsymbol{u}_1$.

Suy ra $\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 - \dfrac{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} \cdot (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0.$

Như vậy với $k = 2$ thì đẳng thức đúng. Giả sử đẳng thức $\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$ đúng tới $k \geqslant 2$. Xét $k + 1$ ta có

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{v}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \mu_{k+1,j} \boldsymbol{u}_j$$

Suy ra

$$\boldsymbol{u}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_j}{\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_j} \cdot (\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_1)$$

Ta thấy rằng với $j = 2, \ldots, k$ thì $\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$ theo giả thiết quy nạp. Như vậy chỉ còn lại $j = 1$ và kết quả là

$$\boldsymbol{u}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_1 - \frac{\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1} \cdot (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1) = 0$$

Bước 2. Ta chứng minh với mọi $k \geqslant 3$ thì $\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$.

Tương tự ta sử dụng quy nạp. Ta có $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \mu_{3,2}\boldsymbol{u}_2 - \mu_{3,1}\boldsymbol{u}_1$. Suy ra $\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 - \mu_{3,2}\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 - \mu_{3,1} \cdot \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2$. Ta đã chứng minh được $\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$. Như vậy kết quả sẽ là

$$\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2} \cdot (\cdot \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2) = 0$$

Với giả thiết quy nạp $\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ đúng tới $k \geqslant 3$, ta xét $k + 1$. Khi đó

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{v}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \mu_{k+1,j} \boldsymbol{u}_j$$

Suy ra

$$\boldsymbol{u}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_2 - \sum_{j=1}^{k} \mu_{k+1,j} \boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_2$$

Theo giả thiết quy nạp thì mọi $j \geqslant 3$ đều cho kết quả $\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$, thêm nữa là $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$ do chứng minh trên. Như vậy trong tổng chỉ còn lại $j = 2$ và kết quả sẽ là

$$\boldsymbol{u}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_{k+1} \cdot \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2} \cdot (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2) = 0$$

Từ đây có thể thấy, sử dụng phương pháp quy nạp ta có thể chứng minh được rằng với mỗi số $n \geqslant 2$, thì mọi $k \geqslant n + 1$ ta đều có $\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_n = 0$. Hay nói cách khác là khi thuật toán tính $\boldsymbol{u}_k$ thì nó sẽ trực giao với tất cả $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_{k-1}$.

Phần III

Toán rời rạc

Phần III: Nội dung

Chương 3

Discrete logarithm

3.1 Các thuật toán tính discrete logarithm

Thuật toán Baby-Step-Giant-Step (BSGS) giúp tính discrete logarithm trên nhóm cyclic với order là số nguyên tố 2.

Algorithm 2 Thuật toán Baby-Step-Giant-Step

Require: Nhóm cyclic G có order n, generator g và phần tử $h \in G$.
Ensure: Số x duy nhất thuộc $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ thỏa $g^x = h$. $m \leftarrow \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

1: **for** $j = 0 \rightarrow m - 1$ **do**
2: Tính g^j. Lưu (j, g^j) vào bảng.
3: **end for**
4: Tính g^{-m}.
5: $\gamma \leftarrow h$.
6: **for** $i = 0 \rightarrow m - 1$ **do**
7: a) Kiểm tra điều kiện $\gamma = g^j$ với $j = 0, 1, \ldots, m-1$.
8: b) Nếu điều kiện thỏa, trả về $im + j$.
9: c) Nếu không, đặt $\gamma \leftarrow \gamma \cdot g^{-m}$.
10: **end for**

Khi order của cyclic group là lũy thừa một số nguyên tố thì ta dùng thuật toán Pohlig-Hellman 3.

Algorithm 3 Thuật toán Pohlig-Hellman

Require: Nhóm cyclic G có order $n = p^e$, generator g và phần tử $h \in G$.
Ensure: Số x duy nhất thuộc $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ thỏa $g^x = h$.

1: Khởi tạo $x_0 = 0$.
2: Tính $\gamma = g^{p^{e-1}}$. Theo định lý Lagrange, γ có order là p.
3: **for** $k = 0 \to e - 1$ **do**
4: a) Tính $h_k = (g^{-x_k} \cdot h)^{e-1-k}$.
5: b) Sử dụng thuật toán baby-step-giant-step, tìm $d_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ sao cho $\gamma^{d_k} = h_k$.
6: c) Tính $x_{k+1} = x_k + p^k d_k$.
7: **end for**
8: Trả về x_e là kết quả cần tìm.

Chương 4

Quan hệ hai ngôi

4.1 Quan hệ hai ngôi

Định nghĩa 1. Quan hệ hai ngôi

Xét hai tập hợp A và B. Ta gọi $\mathcal{R}$ là một quan hệ hai ngôi trên A và B nếu $\mathcal{R} \subset A \times B$. Trong đó $A \times B$ là tích Descartes của hai tập hợp.

Nếu phần tử $(a, b) \in R$ với $a \in A$ và $b \in B$ thì ta nói a **có quan hệ với** b và ký hiệu $a\mathcal{R}b$.

Khi $A \equiv B$ thì ta nói $\mathcal{R}$ là quan hệ hai ngôi trên A. Đây cũng là yếu tố quan trọng cho các khái niệm về sau.

Ví dụ 1. Xét hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{a, b, c\}$. Khi đó tích Descartes

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), \\ (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

Giả sử $\mathcal{R} = \{(1, a), (3, b), (4, c)\}$ thì 1 quan hệ với a do $(1, a) \in \mathcal{R}$, hay $1Ra$. Tuy nhiên 1 không có quan hệ với b do $(1, b) \notin \mathcal{R}$.

Sau đây ta định nghĩa các loại quan hệ hai ngôi.

Định nghĩa 2

Cho R là quan hệ hai ngôi trên tập A. Ta nói

1. $\mathcal{R}$ **phản xạ** (hay **reflexive**) nếu với mọi $x \in A$ thì $(x, x) \in \mathcal{R}$;
2. $\mathcal{R}$ **đối xứng** (hay **symmetric**) nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì $(y, x) \in \mathcal{R}$;
3. $\mathcal{R}$ **phản xứng** (hay **antisymmetric**) nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì $(y, x) \notin \mathcal{R}$. Nói cách khác nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ và $(y, x) \in \mathcal{R}$ thì $x = y$;
4. $\mathcal{R}$ **bắc cầu** (hay **transitive**) nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ và $(y, z) \in \mathcal{R}$ thì $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Quan hệ tương đương

Quan hệ tương đương giúp ta chia (phân hoạch) một tập hợp rời rạc thành các tập con mà chỉ cần một phần tử đại diện cho tập con đó là đủ để tính toán.

Định nghĩa 3. Quan hệ tương đương

Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ trên tập A. Khi đó $\mathcal{R}$ được gọi là **quan hệ tương đương** nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ta có thể ký hiệu $x\mathcal{R}y$ với $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương là $x \sim y$ hoặc $x\widetilde{\mathcal{R}}y$.

Tiếp theo ta định nghĩa lớp tương đương chứa phần tử x và tập thương.

Định nghĩa 4. Lớp tương đương

Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên tập A. Khi đó với $x \in A$, ta định nghĩa lớp tương đương chứa phần tử x là tập các phần tử của A có quan hệ với x

$$\bar{x} = \{y \in A,\ y\mathcal{R}x\}$$

Định nghĩa 5. Tập thương

Tập hợp các lớp tương đương như trên tạo thành tập thương.

$$A/\mathcal{R} = \{\bar{x},\ x \in A\}$$

Ví dụ 2. Xét số nguyên dương n. Với số nguyên x và y, ta nói x có quan hệ với y nếu $n|(x-y)$, hay $x \equiv y \bmod n$. Ta ký hiệu quan hệ này là $n\mathbb{Z}$.

Quan hệ trên là quan hệ tương đương vì

1. $n|0 = x - x$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$ nên có tính phản xạ;
2. $n|(x-y) \Rightarrow n|-(x-y) = y - x$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$ nên có tính đối xứng;
3. $n|(x-y)$ và $n|(y-z)$ thì $n|(x-y+y-z) = (x-z)$ nên có tính bắc cầu.

Từ đó ta có thể phân tập $\mathbb{Z}$ thành các lớp tương đương

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\} \\
\overline{1} &= \{\ldots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \ldots\} \\
&\vdots \\
\overline{n-1} &= \{\ldots, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, \ldots\}
\end{aligned}$$

Tập thương của chúng ta là $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 6. Quan hệ thứ tự

Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A. Ta nói $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Định nghĩa 7

Cho tập hợp A và quan hệ $\mathcal{R}$ trên A là quan hệ thứ tự. Nếu $x\mathcal{R}y$ thì ta ký hiệu $x \prec y$. Khi đó $(A, \prec)$ được gọi là **tập có thứ tự**.

Tiếp theo là một số định nghĩa quan trọng về tập hợp có thứ tự.

Định nghĩa 8

Với $(A, \prec)$ và $x, y \in A$,

1. Nếu $x \prec y$, ta nói y **là trội của** x, hay là x **được trội bởi** y;
2. y là **trội trực tiếp** của x nếu không tồn tại z sao cho $x \prec z$ và $z \prec y$.

Định nghĩa 9

Xét $(A, \prec)$.

1. x và y thuộc A được gọi là **so sánh được** nếu $x \prec y$ hoặc $y \prec x$;
2. nếu với mọi $x, y \in A$, x và y so sánh được thì $(A, \prec)$ được gọi là **quan hệ thứ tự toàn phần**. Ngược lại thì gọi là **quan hệ thứ tự bán phần**.

Để biểu diễn sự so sánh trong một tập hợp, ta sử dụng biểu đồ Hasse.

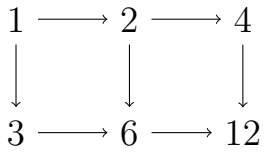
Định nghĩa 10

Biểu đồ Hasse của $(A, \prec)$ với A là tập hữu hạn bao gồm

1. Tập điểm - mỗi điểm biểu diễn một phần tử của A;
2. Tập cung - vẽ một cung từ x tới y nếu y là trội trực tiếp của x.

Ví dụ 3. Xét tập $U_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ với quan hệ $x\mathcal{R}y$ được định nghĩa x là ước của y.

Theo đó, biểu đồ Hasse của quan hệ trên là hình 4.1.



Hình 4.1. Biểu đồ Hasse của U_{12}

Định nghĩa 11

Xét quan hệ thứ tự $(A, \prec)$.

1. Phần tử $M \in A$ được gọi là
   (a) **Tối đại** nếu $M \prec x$ thì $x = M$;
   (b) **Cực đại** (hay **lớn nhất**) nếu với mọi $x \in A$ thì $x \prec M$.
2. Phần tử $m \in A$ được gọi là
   (a) **Tối tiểu** nếu $x \prec m$ thì $x = m$;
   (b) **Cực tiểu** (hay **nhỏ nhất**) nếu với mọi $x \in A$ thì $m \prec x$.

Nhận xét 1

1. Phần tử cực đại nếu có là duy nhất. Tương tự cho cực tiểu;
2. Nếu n là phần tử tối đại duy nhất thì nó cũng là cực đại. Tương tự cho tối tiểu.

Trong ví dụ U_{12} ở trên thì 1 là tối tiểu và cũng là cực tiểu, và 12 là tối đại và cũng là cực đại.

Chương 5

Lý thuyết nhóm

Bảng 5.1. Thuật ngữ và ký hiệu

Ký hiệu	Ý nghĩa
$\mathcal{S}_n$	Nhóm hoán vị n phần tử
$\ker f$	Hạt nhân (kernel) của ánh xạ f
$\operatorname{im} f$	Ảnh (Image) của ánh xạ f
$\cong$	Đẳng cấu nhóm (group isomorphism)

5.1 Nhóm

Nhóm và nhóm con

Định nghĩa 1. Nhóm (Group)

Một tập hợp G và toán tử 2 ngôi $\star$ trên G tạo thành một nhóm nếu:

1. Tồn tại phần tử $e \in G$ sao cho với mọi $g \in G$ thì $g \star e = e \star g = g$. Khi đó e được gọi là **phần tử đơn vị** của G;
2. Với mọi $g \in G$, tồn tại $g' \in G$ sao cho $g \star g' = g' \star g = e$. Khi đó g' được gọi là **phần tử nghịch đảo** của g;
3. Tính kết hợp: với mọi $a, b, c \in G$ thì $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.

Định nghĩa 2. Nhóm Abel

Nếu nhóm G có thêm tính giao hoán, tức là với mọi $a, b \in G$ thì $a \star b = b \star a$ thì G gọi là **nhóm giao hoán** hay **nhóm Abel**.

Ví dụ 1. Xét tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ và phép cộng hai số nguyên.

1. Phần tử đơn vị là 0 vì với mọi $a \in \mathbb{Z}$ thì $a + 0 = 0 + a = a$;
2. Với mọi $a \in \mathbb{Z}$, phần tử nghịch đảo là $-a$ vì $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
3. Phép cộng số nguyên có tính kết hợp do đó thỏa mãn điều kiện về tính kết hợp.

Như vậy $(\mathbb{Z}, +)$ tạo thành nhóm. Lưu ý do phép cộng hai số nguyên có tính giao hoán nên đây cũng là nhóm Abel.

Ví dụ 2. Xét tập hợp số hữu tỉ khác 0 $\mathbb{Q}^*$ và phép nhân 2 số hữu tỉ. Ta thấy do $a, b \in \mathbb{Q}^*$ nên tích $a \cdot b$ cũng khác 0, do đó cũng thuộc $\mathbb{Q}^*$.

1. Phần tử đơn vị là 1 vì với mọi $a \in \mathbb{Q}^*$ thì $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
2. Với mọi $a \in \mathbb{Q}^*$, phần tử nghịch đảo là $\frac{1}{a}$ vì $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$;
3. Phép nhân hai số hữu tỉ có tính giao hoán do đó thỏa mãn điều kiện về tính kết hợp.

Tương tự như nhóm $(\mathbb{Z}, +)$, nhóm $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ cũng là nhóm Abel.

Nhóm con

Định nghĩa 3. Nhóm con (Subgroup)

Cho nhóm $(G, \star)$. Tập hợp $H \subset G$ được gọi là **nhóm con** của G nếu với mọi $a, b \in H$ thì $a \star b \in H$

Nghĩa là toán tử $\star$ đóng với các phần tử trong H.

Ví dụ 3. Xét nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ như trên. Ta xét tập con gồm các số chẵn của nó

$$2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

Ta thấy rằng tổng 2 số chẵn vẫn là số chẵn, nghĩa là phép cộng số nguyên đóng trên $2\mathbb{Z}$. Do đó $(2\mathbb{Z}, +)$ là nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$.

Như vậy mọi tập hợp có dạng $n\mathbb{Z}$ đều là nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$.

Coset

Định nghĩa 4. Coset, *lớp kề*

Cho nhóm G và nhóm con H của G.

Coset trái của H đối với phần tử $g \in G$ là tập hợp

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

Tương tự, coset phải là tập hợp

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

Từ đây nếu không nói gì thêm ta ngầm hiểu là coset trái.

Ví dụ với nhóm con $2\mathbb{Z}$ của $\mathbb{Z}$, ta thấy rằng

1. Nếu $g \in \mathbb{Z}$ là lẻ thì khi cộng với bất kì phần tử nào của $2\mathbb{Z}$ ta có số lẻ;
2. Nếu $g \in \mathbb{Z}$ là chẵn thì khi cộng với bất kì phần tử nào của $2\mathbb{Z}$ ta có số chẵn.

Nói cách khác, coset của $2\mathbb{Z}$ chia tập $\mathbb{Z}$ thành

$$0 + 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

$$1 + 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$$

Rõ ràng hai coset trên rời nhau.

Nhận xét 1

Hai coset bất kì hoặc rời nhau, hoặc trùng nhau.

Chứng minh. Nếu hai coset rời nhau thì không có gì phải nói. Ta chứng minh trường hợp còn lại.

Giả sử $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$. Như vậy tồn tại $h_1, h_2 \in H$ mà $g_1h_1 = g_2h_2$.

Do $h_1^{-1} \in H$, ta có $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$, nghĩa là $g_1 \in g_2H$.

Mà mọi phần tử trong g_1H có dạng g_1h nên $g_1h = g_2h_2h_1^{-1}h$. Do H là nhóm con của G nên $h_2h_1^{-1}h \in H$. Từ đó $g_1H \subseteq g_2H$. Tương tự ta cũng có $g_2H \subseteq g_1H$. Vậy $g_1H = g_2H$. □

Normal Subgroup

Định nghĩa 5. Normal Subgroup, *nhóm con chuẩn tắc*

Nhóm con H của G được gọi là **normal subgroup** nếu với mọi $g \in G$ ta có coset trái trùng với coset phải.

$$gH = Hg \quad \text{với mọi } g \in G$$

Nếu H là normal subgroup của G ta ký hiệu $H \triangleleft G$. Khi đó, với mọi $a, b \in G$ thì $(aH)(bH) = (ab)H$.

Định nghĩa 6. Quotient Group, *nhóm thương*

Với nhóm G và normal subgroup của nó là H. Quotient Group được ký hiệu là G/H và được định nghĩa là tập hợp các coset tương ứng với normal subgroup H.

$$G/H = \{gH : g \in H\}$$

Ta thấy rằng điều này chỉ xảy ra nếu H là normal subgroup.

Quotient Group còn được gọi là Factor Group - *nhóm nhân tử*

Ví dụ 4. Với nhóm $\mathbb{Z}$ và normal subgroup của nó là $2\mathbb{Z}$. Ta thấy $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 2\mathbb{Z}\}$

5.2 Nhóm hoán vị

Nhóm hoán vị

Xét tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ta gọi $\mathcal{S}_n$ là tập tất cả hoán vị của tập hợp trên. Như vậy $\mathcal{S}_n$ có $n!$ phần tử.

Nếu ta lấy hoán vị gốc là $(1, 2, \ldots n)$, mỗi hoán vị đều có thể được biểu diễn bằng hai hàng như sau

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Ta định nghĩa toán tử trên $\mathcal{S}_n$. Với hai hoán vị σ và τ, hoán vị $\sigma \star \tau$ là vị trí của σ theo τ. Nói cách khác, nếu

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

và

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

thì

$$\sigma \star \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$$

Nhóm $\mathcal{S}_n$ và toán tử như trên tạo thành một nhóm và được gọi là **nhóm hoán vị**.

Ví dụ 5. Xét nhóm hoán vị $\mathcal{S}_5$.

Gọi $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ và $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó, đặt $z = x \star y$ thì

$$\begin{aligned} z(1) &= x(y(1)) = x(5) = 5, \\ z(2) &= x(y(2)) = x(1) = 4, \\ z(3) &= x(y(3)) = x(4) = 2, \\ z(4) &= x(y(4)) = x(3) = 1, \\ z(5) &= x(y(5)) = x(2) = 3 \end{aligned}$$

Như vậy $z = x \star y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Nhận xét 2

Trong một hoán vị, khi biểu diễn trên hai hàng thì thứ tự viết không quan trọng, miễn là đảm bảo i tương ứng với $\sigma(i)$ trên từng cột.

Ví dụ 6. Xét hoán vị $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ thuộc $\mathcal{S}_5$.

Ta có $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 2$ và $\sigma(5) = 5$. Như vậy hai cách viết sau là giống nhau

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Chu trình độc lập

Xét nhóm hoán vị $\mathcal{S}_n$ và hoán vị σ thuộc $\mathcal{S}_n$.

Khi đó tồn tại các tập $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, ..., $\sigma(i_{k-1}) = \sigma(i_k)$ và $\sigma(i_k) = i_1$.

Ví dụ 7. Xét $\mathcal{S}_5$ và hoán vị $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ta thấy rằng $\sigma(1) = 5$, $\sigma(5) = 2$, $\sigma(2) = 1$. Như vậy ta có chu trình $1 \to 5 \to 2 \to 1$.

Tương tự, $\sigma(3) = 4$ và $\sigma(4) = 3$. Như vậy ta có thêm chu trình $3 \to 4 \to 3$.

Hai chu trình trên không chứa phần tử chung nên chúng được gọi là hai **chu trình độc lập**.

Nhận xét 3

Mọi hoán vị đều có thể viết được dưới dạng tích của các chu trình độc lập. **Chu trình có thể chứa một phần tử** ($\sigma(i) = i$).

Ví dụ 8. Hoán vị $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ như trên thì ta có thể viết lại thành $\sigma = (1, 5, 2)(3, 4)$.

Nhận xét 4

Thứ tự của chu trình trong tích không quan trọng. Điều này dễ thấy vì các chu trình độc lập nhau, do đó dù viết trước hay sau thì hoán vị vẫn nằm trong chu trình đó.

Để giải thích rõ hơn, chúng ta có thể xem mỗi chu trình độc lập như một hoán vị, trong đó các phần tử không thuộc chu trình đứng yên.

Ví dụ với chu trình $(1, 5, 2) = (1, 5, 2)(3)(4)$ ở trên tương đương với

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

và với chu trình $(3, 4) = (3, 4)(1)(2)(5)$ tương đương với

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Do đó tích của chúng (hay toán tử trên nhóm hoán vị) sẽ cho ra kết quả hoán vị ban đầu.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{p_1} \star \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{p_2}$$

5.3 Group homomorphism

Đồng cấu nhóm

Định nghĩa 7. Đồng cấu nhóm

Xét hai nhóm $(G, \star)$ và $(H, *)$ và một ánh xạ $f : G \to H$. Ánh xạ f được gọi là **đồng cấu** (hay **homomorphism**) nếu với mọi g_1, g_2 thuộc G ta có $f(g_1 \star g_2) = f(g_1) * f(g_2)$.

Do g_1, g_2 là các phần tử thuộc G nên toán tử giữa chúng là $\star$. Trong khi đó $f(g_1)$, $f(g_2)$ là các phần tử thuộc H nên toán tử giữa chúng là $*$.

Nhận xét 5

1. Gọi e_G là phần tử đơn vị của G và e_H là phần tử đơn vị của H. Khi đó $f(e_G) = e_H$
2. Với mọi phần tử $g \in G$, nếu g^{-1} là nghịch đảo của nó trong G thì $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

Chứng minh. 1. Nếu e_G là phần tử đơn vị của G thì với mọi $g \in G$ ta có $g \star e_G = e_G \star g = g$. Ta lấy f cả 3 vế và theo định nghĩa homomorphism thu được $f(g \star e_G) = f(e_G \star g) = f(g) \Rightarrow f(g) * f(e_G) = f(e_G) * f(g) = f(g)$. Đẳng thức trên đúng với mọi $g \in G$ nên đúng với mọi $f(g)$, suy ra $f(e_G)$ là phần tử đơn vị trong nhóm $(H, *)$ và do đó $f(e_G) = e_H$

2. Từ việc tìm ra phần tử đơn vị, ta cũng chứng minh được tính chất nghịch đảo trên. □

Các loại homomorphism

Tương tự như ánh xạ, chúng ta có các loại homomorphism sau

Định nghĩa 8. Đơn cấu (Monomorphism)

Ánh xạ được gọi là **đơn cấu** (hay **monomorphism**) nếu nó là ánh xạ one-to-one (đơn ánh). Nói cách khác, với mọi $g_1 \neq g_2$ và g_1, $g_2 \in G$, thì $f(g_1) \neq f(g_2)$

Định nghĩa 9. Toàn cấu (Epimorphism)

Ánh xạ được gọi là **toàn cấu** (hay **epimorphism**) nếu nó là ánh xạ onto (toàn ánh). Nói cách khác, với mọi $h \in H$ thì tồn tại $g \in G$ mà $f(g) = h$.

Định nghĩa 10. Đẳng cấu (Isomorphism)

Ánh xạ được gọi là **đẳng cấu** (hay **isomorphism**) nếu nó là ánh xạ one-to-one và onto (song ánh). Nói cách khác, ánh xạ này vừa là đơn cấu, vừa là toàn cấu.

Định nghĩa 11. Tự đẳng cấu (Automorphism)

Ánh xạ được gọi là **tự đẳng cấu** (hay **automorphism**) nếu nó là song ánh từ nó lên chính nó. Ta ký hiệu tự đồng cấu nhóm G là $\mathrm{Aut}(G)$.

Hạt nhân và ảnh

Xét một homomorphism f từ nhóm $(G, \star)$ tới nhóm $(H, *)$. Ta nói

Định nghĩa 12. Hạt nhân (Kernel)

Hạt nhân (hay **kernel**) của f là tập hợp các phần tử của G cho ảnh là e_H, ký hiệu là $\ker f$. Nói cách khác

$$\ker f = \{g \in G, f(g) = e_H\} \tag{5.1}$$

Như vậy $\ker f$ là tập con của G.

Nhận xét 6

$K = \ker f$ là normal subgroup của G.

Chứng minh. Để chứng minh, ta thấy rằng theo định nghĩa homomorphism, với $g_1, g_2 \in K$ thì $f(g_1) = f(g_2) = e_H$.

Ta có $f(g_1 \star g_2) = f(g_1) * f(g_2) = e_H * e_H = e_H$. Như vậy $g_1 \star g_2 \in K$ nên K là nhóm con của G.

Tiếp theo để chứng minh K là normal subgroup, ta chứng minh $gKg^{-1} = K$ với mọi $g \in G$.

Do $gKg^{-1} = \{g \star k \star g^{-1} : k \in K\}$, lấy f mỗi phần tử bên trong ta có

$$f(g \star k \star g^{-1}) = f(g) * f(k) * f(g^{-1}) = f(g) * e_H * f(g^{-1}) = f(g) * f(g^{-1})$$

mà theo tính chất của homomorphism thì $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ nên $f(g \star k \star g^{-1}) = f(g) * f(g)^{-1} = e_H$ nên $g \star k \star g^{-1} \in K$ với mọi $g \in G$, với mọi $k \in K$. Do đó $gKg^{-1} = K$ và ta có điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 13. Ảnh (Image)

Ảnh (hay **image**) của f là tập hợp tất cả giá trị nhận được khi biến các phần tử thuộc G thành phần tử thuộc H. Nói cách khác

$$\operatorname{im} f = \{f(g), g \in G\} \tag{5.2}$$

Như vậy $\operatorname{im} f$ là tập con của H.

Dựa trên hai khái niệm này, chúng ta có một định lý quan trọng trong lý thuyết nhóm là **Định lý thứ nhất về sự đẳng cấu** (First isomorphism theorem).

Định lí 1. First isomorphism theorem

Với hai nhóm $(G, \star)$ và $(H, *)$. Xét homomorphism $f : G \to H$. Khi đó $\operatorname{im} f$ đẳng cấu (isomorphism) với nhóm thương $G/\ker f$.

Chứng minh. Gọi G, H là hai nhóm và homomorphism $f : G \to H$. Đặt $K = \ker f$. Ta xét biến đổi

$$\theta : \operatorname{im} f \to G/K, f(g) \to gK$$

với $g \in G$.

Ta cần chứng minh biến đổi này là ánh xạ xác định (well-defined, nghĩa là tuân theo quy tắc ánh ánh xạ, mỗi phần tử tập nguồn biến thành **một và chỉ một** phần tử tập đích), là homomorphism, là đơn ánh và là toàn ánh.

Đầu tiên ta chứng minh ánh xạ xác định. Giả sử ta có $g_1K = g_2K$, do g_1 và g_2 thuộc cùng coset nên $g_1^{-1}g_2 \in K$, hay $f(g_1^{-1}g_2) = e_H$.

Với f là homomorphism, ta có

$$f(g_1^{-1}g_2) = f(g_1^{-1})f(g_2) = f(g_1)^{-1}f(g_2) = e_H$$

Suy ra $f(g_1) = f(g_2)$. Như vậy nếu $f(g_1) = f(g_2)$ thì $\theta(f(g_1)) = \theta(f(g_2))$.

Tiếp theo ta chứng minh θ là homomorphism. Do K là normal subgroup của G nên với mọi g_1, g_2 thuộc G thì $g_1g_2K = (g_1K)(g_2K)$.

Do $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$ nên

$$\theta(f(g_1g_2)) = g_1g_2K = (g_1K)(g_2K) = \theta(f(g_1))\theta(f(g_2))$$

Suy ra θ là homomorphism.

Dễ thấy với mọi $g \in G$ ta đều tìm được $f(g)$ và gK tương ứng. Do đó θ là toàn ánh.

Để chứng minh θ là đơn ánh, giả sử $g_1K = g_2K$ ta có $g_1^{-1}g_2 \in K$ nên $f(g_1^{-1}g_2) = e_H$. Suy ra $f(g_1^{-1})f(g_2) = e_H \Rightarrow f(g_1)^{-1}f(g_2) = e_H \Rightarrow f(g_1) = f(g_2)$. Như vậy θ là đơn ánh.

Kết luận, θ là song ánh. Định lý thứ nhất về sự đẳng cấu được chứng minh. □

5.4 Vành và trường

Vành

Định nghĩa 14. Vành (Ring)

Cho tập hợp R, trên đó ta định nghĩa hai toán tử **cộng** và **nhân**.

Khi đó, $(R, +, \times)$ tạo thành **vành** (hay **ring**) nếu

- $(R, +)$ là nhóm Abel;
- $(R, \times)$ có tính kết hợp với phép nhân. Với mọi $a, b, c \in R$ thì $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$;
- Tính phân phối của phép cộng và phép nhân. Với mọi $a, b, c \in R$ thì $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

Tóm lại, $(R, +, \times)$ là vành nếu nó là nhóm Abel đối với phép cộng và có tính kết hợp với phép nhân.

Lưu ý. Phép nhân ở đây không nhất thiết có phần tử đơn vị, hay phần tử nghịch đảo như trong định nghĩa nhóm. Trong trường hợp này $(R, \times)$ gọi là semigroup (nửa nhóm).

Định nghĩa 15. Vành với đơn vị (Ring with identity)

Nếu có phần tử $1_R \neq 0_R \in R$ sao cho với mọi $r \in R$ ta đều có

$$1_R \times r = r \times 1_R = r$$

thì 1_R được gọi là phần tử đơn vị đối với phép nhân.

Ta thường ký hiệu 0_R là phần tử đơn vị của phép cộng $(R, +)$ và gọi là **phần tử trung hòa**. Khi đó phần tử nghịch đảo của phép cộng gọi là **phần tử đối** và được ký hiệu là $-a$, chỉ phần tử đối của phần tử a.

Ta ký hiệu 1_R là **phần tử đơn vị** đối với phép nhân $(R, \times)$.

Từ phần tử đơn vị đối với phép nhân ta có khái niệm đặc số (characteristic) của vành với đơn vị.

Định nghĩa 16. Đặc số (Characteristic)

Xét trường R với phần tử đơn vị là 1 và phần tử trung hòa là 0. Số dương p nhỏ nhất sao cho

$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1 + 1}_{n \text{ lần}} = 0$$

được gọi là **đặc số** (hay **characteristic**) của R.

Định nghĩa 17. Vành giao hoán (Commutative Ring)

Nếu ta có tính giao hoán đối với phép nhân, nghĩa là với mọi $a, b \in$ đều thỏa

$$a \times b = b \times a$$

thì ta nói là vành giao hoán.

Trường

Định nghĩa 18. Trường (Field)

Cho tập hợp F và hai toán tử hai ngôi trên F là phép cộng $+$ và phép nhân $\times$. Khi đó $(F, +, \times)$ là **trường** (hay **field**) nếu

- $(F, +, \times)$ là vành giao hoán với đơn vị
- Với mọi phần tử $f \neq 0_F$, tồn tại nghịch đảo f^{-1} của f đối với phép nhân, nghĩa là $f \times f^{-1} = f^{-1} \times f = 1_F$

Nói cách khác, $(F, \times)$ là nhóm Abel. Trên trường ta thực hiện được bốn phép tính cộng, trừ, nhân, chia.

Ví dụ 9. Các tập hợp sau với phép cộng và nhân là trường.

1. Tập hợp số thực $\mathbb{R}$;
2. Tập hợp các số phức $\mathbb{C}$;
3. Tập hợp các số dạng $a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

Những trường trên được gọi là **trường vô hạn** vì có vô số phần tử.

Ngược lại, chúng ta cũng có các **trường hữu hạn**.

Trường hữu hạn

Trường hữu hạn modulo nguyên tố

Cho p là số nguyên tố. Khi đó tập hợp các số dư khi chia cho p cùng với phép cộng và nhân modulo p tạo thành trường.

Chứng minh. Xét tập hợp các số dư khi chia cho p là $S = \{0, 1, \ldots, p-2, p-1\}$.

Ta thấy rằng với mọi $a, b \in S$ thì $a + b \pmod p$ và $a \cdot b \pmod p$ đều thuộc S.

- Vì $0 + a = a + 0 = a \pmod p$ với mọi $a \in S$ nên 0 là phần tử đơn vị của phép cộng.
- Với mọi $a \in S$, ta có $(p - a) + a = a + (p - a) \equiv 0 \pmod p$ nên phần tử nghịch đảo của a đối với phép cộng là $p - a \in S$.
- Phép cộng modulo có tính kết hợp
- Phép cộng modulo có tính giao hoán

Như vậy $(S, +)$ là nhóm Abel.

Tiếp theo, ta thấy rằng phép cộng và nhân có tính phân phối trên modulo. Đồng thời phép nhân modulo cũng có tính kết hợp. Do đó $(S, +, \cdot)$ là vành.

- Phần tử đơn vị của phép nhân là 1
- Phép nhân modulo có tính giao hoán
- Do mọi phần tử thuộc S đều nguyên tố cùng nhau với p nên luôn tồn tại nghịch đảo của phần tử khác 0 trong S

Kết luận: $(S, +, \cdot)$ là trường. □

Ta thường ký hiệu trường này là $GF(p)$ (GF là viết tắt của Galois Field để tưởng nhớ người có đóng góp quan trọng trong lý thuyết nhóm).

Trường hữu hạn modulo đa thức

Xét các đa thức với hệ số nguyên

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Ta thấy rằng phép cộng và nhân hai đa thức tạo thành một vành giao hoán với đơn vị (đa thức $f(x) \equiv 1$).

Thêm nữa vành này có vô số phần tử. Ta cần một phương án để số phần tử là hữu hạn, và đồng thời là trường.

Với p là số nguyên tố và n là số nguyên dương. Mình xét các đa thức có bậc tối đa là $n - 1$ với hệ số nằm trong tập hợp các số dư khi chia cho p. Như vậy mình có p^n đa thức như vậy.

Ví dụ 10. Với $p = 3$ và $n = 2$. Khi đó các đa thức có thể có là $0, 1, 2, x, x + 1, x + 2, 2x, 2x + 1, 2x + 2$

Tương tự với việc modulo cho một số nguyên tố, ở đây mình xét phép cộng và nhân trên modulo một đa thức tối giản (irreducible polynomial) có bậc n (vì khi modulo một đa thức bậc bất kì cho đa thức bậc n ta có đa thức bậc nhỏ hơn n).

Đồng thời hệ số của đa thức từ phép cộng và nhân cũng được modulo p (nằm trong $GF(p)$).

Với trường hợp $p = 3$ và $n = 2$ ở trên mình có thể chọn đa thức modulo là $m(x) = x^2 + 2x + 2$. Khi đó bảng phép nhân (phép cộng khá đơn giản nên mình không viết) 2 đa thức bậc nhỏ hơn 2 trong modulo $m(x)$ là bảng 5.2

	0	1	2	x	$x+1$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	x	$x+1$
2	0	2	1	$2x$	$2x+2$
x	0	$2x$	$x+1$	$2x$	$2x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$2x+2$	$2x+1$	2
$x+2$	0	$x+2$	$2x+1$	1	x
$2x$	0	$2x$	x	$2x+2$	$x+2$
$2x+1$	0	$2x+1$	$x+2$	2	$2x$
$2x+2$	0	$2x+2$	$x+1$	$x+2$	1

(a) Nửa đầu bảng nhân

	$x+2$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$
0	0	0	0	0
1	$x+2$	$2x$	$2x+1$	$2x+2$
2	$2x+1$	x	$x+2$	$x+1$
x	1	$2x+2$	2	$x+2$
$x+1$	x	$x+2$	$2x$	1
$x+2$	$2x+2$	2	$x+1$	$2x$
$2x$	2	$x+1$	1	$2x+1$
$2x+1$	$x+1$	1	$2x+2$	x
$2x+2$	$2x$	$2x+1$	x	2

(b) Nửa sau bảng nhân

Bảng 5.2. Bảng nhân trên $GF(3^2)$

Ta thấy rằng bảng phép nhân đối xứng qua đường chéo chính. Điều này chứng tỏ phép nhân có tính giao hoán. Thêm nữa ở mỗi hàng hoặc cột khác 0 đều có 9 phần tử khác nhau.

Ideal

Định nghĩa 19. Ideal

Xét vành $(R, +, \times)$. Một tập con I của R được gọi là **ideal trái** nếu
- $(I, +)$ là nhóm con của $(R, +)$;
- với mọi $r \in R$, với mọi $x \in I$ thì $rx \in I$.

Ta định nghĩa tương tự với ideal phải, khi đó $xr \in I$. Từ đây về sau nếu không nói gì thêm nghĩa là mình xét ideal trái.

Định nghĩa 20. Ideal chính (Principal Ideal)

Nếu $I = aR$ với a là phần tử nào đó trong R thì I được gọi là **principal ideal**.

Nói cách khác, nếu có một phần tử trong R "sinh" ra được I thì I là principal.

Định nghĩa 21. Ideal cực đại (Maximal Ideal)

Nếu I là một ideal của R và không tồn tại tập con I' mà $I \subset I' \subset R$ (tập con thực thụ) thì I được gọi là **maximal ideal**.

Hệ quả 1. Xét vành số nguyên $\mathbb{Z}$. Khi đó mọi ideal của $\mathbb{Z}$ đều là principal.

Chứng minh. Giả sử ideal I của $\mathbb{Z}$ có phần tử dương nhỏ nhất là n. Theo định nghĩa của ideal thì với mọi $q \in \mathbb{Z}$ ta có $qn \in I$.

Nếu phần tử $a \in I$, theo phép chia Euclid ta có $a = qn + r$ với $0 \leq r < n$, mà $a \in I$ và $qn \in I$ nên $r = a - qn \in I$. Tuy nhiên phần tử dương nhỏ nhất thuộc I là n, do đó $r = 0$.

Nói cách khác mọi phần tử $a \in I$ đều có dạng qn với $q \in \mathbb{Z}$.

Vậy mọi ideal đều là principal. □

Hệ quả 2. Ideal I của $\mathbb{Z}$ là maximal khi và chỉ khi $I = n\mathbb{Z}$ với n là số nguyên tố.

Chứng minh. Ta chứng minh chiều thuận, chiều ngược tương tự. Sử dụng phản chứng, ta giả sử n là hợp số. Khi đó $n = n_1 n_2$ $(n_1 \geq n_2 > 1)$.

Khi đó $n\mathbb{Z} \subset n_1\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, suy ra ideal không phải maximal. Ta có điều phải chứng minh. □

Định lí 2

Gọi R là vành giao hoán với đơn vị. Khi đó, nếu I là ideal của R thì R/I là trường khi và chỉ khi I là maximal ideal.

Chứng minh. Ta chứng minh điều kiện cần và điều kiện đủ.

Điều kiện cần. Ta có I là maximal ideal. Ta thấy rằng $a + I \neq 0 \Leftrightarrow a \notin I$. Vì nếu $a \in I$ thì tồn tại $-a \in I$. Theo định nghĩa vành thì aR cũng là ideal nên $I + aR$ là ideal, mà $a \notin I$ và $a \in I + aR$ suy ra $I \subset I + aR$. Ta lại có I là maximal nên $I + aR = R$, do đó tồn tại $n \in I$ và $b \in R$ sao cho $n + ab = 1$. Tóm lại là tồn tại nghịch đảo của phép nhân, do đó R/I là trường.

Điều kiện đủ. Với R/I là trường. Ta giả sử I không là maximal ideal. Khi đó tồn tại I' sao cho $I \subset I' \subset R$. Khi đó tồn tại phần tử $a \in I'$ và $a \notin I$ mà $a + I \neq 0$. Do đó $(a + I)(b + I) = 1 + I$ suy ra tồn tại $n \in I \subset I'$ sao cho $ab = 1 + n$. Do $a, b \in I'$ nên $1 \in I'$, từ đó $1 \in R$ nên I' không phải maximal. □

Ví dụ 11. Xét tập hợp $\mathbb{Z}$ là vành giao hoán với đơn vị. Khi đó nếu n là số nguyên tố thì $n\mathbb{Z}$ là maximal ideal (đã chứng minh ở trên). Do đó tập $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ là trường hữu hạn modulo nguyên tố gồm các phần tử $\{0, 1, \ldots, p - 1\}$.

Ring kernel và ring homomorphism

Xét vành $(R, +, \times)$. Khi đó:

- với mọi $a \in R$, $a \times 0 = 0 \times a = 0$;
- $(-a) \times b = -(a \times b)$.

Định nghĩa 22. Ring homomorphism

Xét hai vành là $(R_1, +, \times)$ và $(R_2, \boxplus, \otimes)$ và ánh xạ $f : R_1 \to R_2$.

Ánh xạ f được gọi là **homomorphism** trên hai vành nếu f là homomorphism trên phép cộng và phép nhân.

- với mọi $a, b \in R_1$, $f(a) \boxplus f(b) = f(a + b)$;
- với mọi $a, b \in R_1$, $f(a) \otimes f(b) = f(a \times b)$.

Định nghĩa 23. Hạt nhân (kernel)

Hạt nhân (hay **kernel**) của f là

$$\ker f = \{x | x \in R_1, f(x) = 0_2\}$$

với 0_2 là phần tử trung hòa của R_2.

Định lí 3

ker f là một ideal của R_1.

Chứng minh. Ta có $f(0_1) = 0_2$ theo định nghĩa homomorphism. Do đó với mọi $a \in R_1$ và với mọi $b \in \ker f$ thì $f(a) \otimes f(b) = f(a) \otimes 0_2 = 0_2 = f(a \times b)$.

Do đó $a \times b \in \ker f$ nên suy ra $\ker f$ là ideal trái của R_1.

Tương tự cho với mọi $a \in R_1$ và với mọi $b \in \ker f$ thì $f(b) \otimes f(a) = 0_2 = f(b \times a)$. Suy ra $b \times a \in \ker f$ nên $\ker f$ cũng là ideal phải của R_1.

Kết luận: $\ker f$ là ideal của R_1. □

5.5 Tác động nhóm

Tác động nhóm (Group Action) cho phép chúng ta đếm những cấu hình tổ hợp mà việc vét cạn rồi loại bỏ sẽ tốn nhiều công sức cũng như sai sót.

Tác động nhóm

Cho tập hợp M và nhóm G. Ta nói G **tác động trái** lên M với ánh xạ:

$$\alpha : G \times M \to M$$

thỏa mãn 2 tiên đề sau:

- Identity: $\alpha(e, m) = m$ với mọi $m \in M$ và e là phần tử đơn vị của G;
- Compatibility: $\alpha(g, \alpha(h, m)) = \alpha(gh, x)$.

Ta thường ký hiệu $\alpha(g, m)$ bởi $g(m)$ hay thậm chí đơn giản hơn là gm. Ký hiệu gm sẽ được sử dụng từ đây về sau.

Khi đó 2 tiên đề trên tương đương với:

- Identity: $em = m$ với mọi $m \in M$;
- Compatibility: $g(hm) = (gh)m$ với mọi $m \in M$ và $g, h \in G$.

Định nghĩa 24. Stabilizer - *nhóm con ổn đinh*

Với phần tử $m \in M$ cho trước, tập hợp các phần tử $g \in G$ mà $gm = m$ được gọi là **stabilizer** của nhóm G. Ta ký hiệu

$$G_m = \{g \in G : gm = m\}$$

Định nghĩa 25. Orbit - *quỹ đạo*

Orbit của phần tử $m \in M$ là tập hợp

$$G(m) = \{gm : g \in G\}$$

Nhận xét 7

Hai orbit của hai phần tử bất kì hoặc rời nhau, hoặc trùng nhau.

Chứng minh. Giả sử ta có $m_1, m_2 \in M$ mà $G(m_1) \cap G(m_2) \neq \emptyset$.

Khi đó tồn tại $g_1, g_2 \in G$ để $g_1 m_1 = g_2 m_2$. Suy ra $m_1 = g_1^{-1} g_2 m_2$.

Mà mọi phần tử trong $G(m_1)$ có dạng gm_1 nên $gm_1 = gg_1^{-1} g_2 m_2$ nên $G(m_1) \subseteq G(m_2)$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $G(m_2) \subseteq G(m_1)$ nên $G(m_1) \equiv G(m_2)$. □

Hệ quả 3. Tập hợp M là giao của các orbit rời nhau. Giả sử ta có t orbit rời nhau $G(m_1), G(m_2), \ldots, G(m_t)$ thì

$$M = G(m_1) \cup G(m_2) \cup \ldots \cup G(m_t)$$

Ví dụ 12. Cho nhóm $\mathcal{S}_3$ có 6 phần tử $(1)(2)(3)$, $(1)(2,3)$, $(2)(1,3)$, $(3)(1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$.

Xét tập hợp $M = \{1, 2, 3\}$. Khi đó, xét từng hoán vị trên, ta có:

$$G_1 = \{(1)(2)(3), (1)(2,3)\}$$

và

$$G(1) = \{1, 2, 3\}$$

Ta nhận thấy $G(1) = G(2) = G(3)$, và $|G| = 6 = |G_1| \cdot |G(1)|$

Hay nói cách khác, $|G(m)| = [G : G_m]$ với G_m là stabilizer của phần tử m và $[G : G_m]$ là subgroup index của $G_m \subset G$, và bằng $\dfrac{|G|}{|G_m|}$ nếu là nhóm hữu hạn.

Định nghĩa 26

Hai phần tử $m, n \in M$ được gọi là **có quan hệ** với nhau dưới tác động của nhóm G nếu tồn tại phần tử $g \in G$ sao cho $m = gn$. Ta ký hiệu là $m \tilde{G} n$.

Nhận xét 8

Quan hệ được định nghĩa như trên là quan hệ tương đương.

Chứng minh. Để chứng minh một quan hệ là tương đương, ta cần chứng minh tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Đối với tính phản xạ, mọi vector đều có quan hệ với chính nó qua phần tử đơn vị $e \in G$.

Đối với tính đối xứng, nếu m có quan hệ với n thì tồn tại $g \in G$ sao cho $m = gn$. Theo tính chất nhóm thì tồn tại phần tử g^{-1} là nghịch đảo của g trong G. Do đó $g^{-1}m = n$. Nói cách khác n cũng có quan hệ với m. Như vậy ta có tính đối xứng.

Đối với tính bắc cầu, nếu m có quan hệ với n thì tồn tại $g_1 \in G$ sao cho $m = g_1 n$. Tiếp theo, nếu n có quan hệ với p thì tồn tại $g_2 \in G$ sao cho $n = g_2 p$. Suy ra $m = g_1 n = g_1(g_2 p) = (g_1 g_2)p$. Do $g_1, g_2 \in G$ nên $g_1 g_2 \in G$. Như vậy m cũng có quan hệ với p nên quan hệ có tính bắc cầu.

Vậy quan hệ được định nghĩa như trên là quan hệ tương đương. □

Bổ đề Burnside

Các trạng thái khác nhau của tập hợp M là **tương đương** nhau nếu chúng nằm trong cùng lớp tương đương dưới tác động của nhóm G.

Các ví dụ về bổ đề Burnside và định lý Polya được tham khảo tại [1].

Bổ đề 3. Bổ đề Burnside

Với nhóm G tác động lên tập hợp M, ta có:

$$t_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

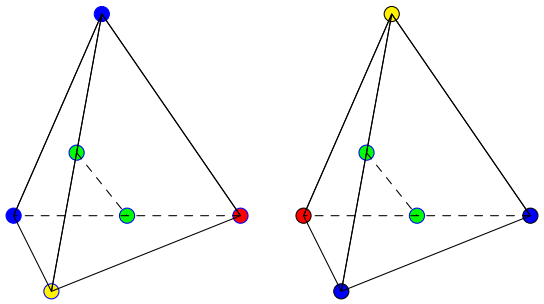
trong đó:

- t_G là số lớp tương đương của tập M dưới tác động của nhóm G;
- $|M^g|$ là số điểm bất động của tập M dưới tác động của phần tử g, nghĩa là $M^g = \{m \in M : gm = m\}$.

Bài toán tô màu bốn đỉnh tứ diện

Cho hình tứ diện đều. Ta tô bốn đỉnh của nó bằng ba màu xanh, đỏ, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tô như vậy?

Ta cần lưu ý một điều, hai cách tô là tương đương nhau (giống nhau) nếu tồn tại một phép quay các đỉnh biến cách tô này thành cách tô kia.

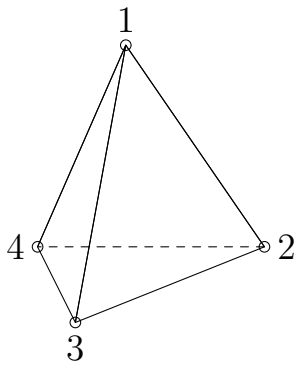


Hình 5.1. Phép quay trục tạo bởi trung điểm hai cạnh đối nhau

Như hình trên ta thấy nếu chọn trục quay là đường thẳng nối trung điểm 2 cạnh đối diện (2 điểm xanh lá) thì đỉnh trên và đỉnh dưới đổi chỗ cho nhau (xanh và vàng), đỉnh trái và đỉnh phải đổi chỗ cho nhau (xanh và đỏ).

Ta giải bài này như sau:

Đầu tiên ta đánh số các đỉnh của tứ diện (như hình)



Hình 5.2. Đánh số hình

Ta có 3 trường hợp biến đổi sau:

Trường hợp 1. Giữ nguyên 1 đỉnh và trục quay là đường thẳng đi qua đỉnh đó và tâm của mặt đối diện.

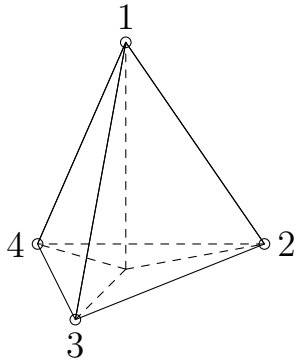
Khi đó phép quay (ngược chiều đồng hồ) tương ứng hoán vị $(1)(2,3,4)$ (quay 60 độ) và $(1)(2,4,3)$ (quay 120 độ).

Do ta chọn 1 đỉnh cố định thì ta có 4 cách chọn, và với mỗi cách chọn đỉnh cố định ta có thể quay 2 cách nên ta có tổng là 8 hoán vị.

Trường hợp 2. Ta chọn trung điểm 2 cạnh đối nhau và nối lại thành trục quay như hình trong ví dụ. Khi đó tương ứng với hoán vị $(1,4)(2,3)$.

Ta có $\dfrac{C_4^2}{2!} = 3$ hoán vị.

Trường hợp 3. Hoán vị đồng nhất $(1)(2)(3)(4)$.



Hình 5.3. Trường hợp 1

Tóm lại, tập hợp M ở đây là tập hợp 4 đỉnh của tứ diện, và nhóm tác động lên M là nhóm con 12 phần tử của $\mathcal{S}_4$.

Như vậy, ví dụ với hoán vị $(1)(2,3,4)$, nếu ta muốn sau phép quay giữ nguyên trạng thái (hay nói cách khác là tìm M^g) thì ta tô màu đỉnh 1 tùy ý, đỉnh 2-3-4 chung màu (cũng tùy ý).

Suy ra ta có $3 \cdot 3$ cách tô. Tương tự với các hoán vị dạng $(1,4)(2,3)$.

Như vậy $t_G = \dfrac{1}{12}(1 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^2) = 15$ cách tô màu khác nhau.

Tổng quát, nếu có k màu thì số lớp tương đương là

$$t_G = \frac{1}{12}\left(1 \cdot k^4 + 8 \cdot k^2 + 3 \cdot k^2\right) = \frac{1}{12}(k^4 + 11k^2)$$

Tác động nhóm lên vector

Xét nhóm G và không gian vector $\mathbb{F}_2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Khi đó hai vector $\boldsymbol{x}$ và $\boldsymbol{y}$ thuộc $\mathbb{F}_2^n$ được gọi là **quan hệ với nhau** nếu tồn tại $g \in G$ mà $\boldsymbol{x} = g\boldsymbol{y}$.

Ví dụ, xét nhóm hoán vị $\mathcal{S}_3$. Giả sử các vector trong $\mathbb{F}_2^3$ có dạng

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}_2^3.$$

Khi đó vector $(1,0,0)$ có quan hệ với $(0,0,1)$ với hoán vị $(1,3)(2)$. Cụ thể là $(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{(1,3)(2)} (x_3, x_2, x_1)$.

Tương tự, vector $(1,0,0)$ cũng có quan hệ với $(0,1,0)$ với hoán vị $(1,2)(3)$. Thêm nữa, vector $(1,0,0)$ có quan hệ với chính nó qua hoán vị đồng nhất $(1)(2)(3)$.

Trong môn toán rời rạc ta đã biết, nếu một tập có quan hệ tương đương thì ta có thể phân các phần tử của tập đó vào các lớp tương đương rời nhau. Nghĩa là nếu hai phần tử có quan hệ với nhau thì vào cùng một lớp tương đương. Từ phần trên ta đã biết rằng dưới tác động của nhóm, các phần tử trong tập hợp bất kì sẽ phân bổ thành các lớp tương đương.

Câu hỏi đặt ra là, có bao nhiêu lớp tương đương như vậy?

Để giải quyết vấn đề này ta sử dụng bổ đề Burnside.

Nhóm $\mathcal{S}_3$ có các hoán vị

$$\mathcal{S}_3 = \{(1)(2)(3), (1,2)(3), (1,3)(2), (2,3)(1), (1,3,2), (1,2,3)\}$$

Lần lượt xét từng hoán vị. Đầu tiên, với $(1)(2)(3)$ thì các phần tử trong vector đứng yên. Do đó dưới tác động của hoán vị này, x_1 biến thành x_1, x_2 biến thành x_2 và x_3 biến thành x_3. Số cách chọn cho mỗi x_i là 2 nên theo quy tắc nhân ta có $2^3 = 8$ cách.

Tiếp theo, với hoán vị $(1,2)(3)$ thì $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$ và $x_3 \to x_3$. Do đó x_1 và x_2 có cùng giá trị nên có 2 cách chọn, x_3 cũng có 2 cách chọn nên tổng số cách là $2 \cdot 2 = 4$. Hoán vị $(1,3)(2)$ và $(2,3)(1)$ tương tự.

Với hoán vị $(1,2,3)$ thì $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_3$ và $x_3 \to x_1$ nên $x_1 = x_2 = x_3$, có 2 cách chọn trong trường hợp này. Hoán vị $(1,3,2)$ tương tự.

Như vậy, theo bổ đề Burnside, số lớp tương đương các vector trong $\mathbb{F}_2^3$ là

$$t(\mathcal{S}_3) = \frac{1}{6}(1 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) = 4$$

Thật vậy, ta có thể chia các vector thành 4 lớp tương đương là $\{000\}$, $\{001, 010, 011\}$, $\{011, 101, 110\}$, $\{111\}$.

Ngoài nhóm $\mathcal{S}_3$ ra còn các nhóm khác cũng tác động lên các vector. Một số nhóm hay được sử dụng là:

1. Nhóm general linear: gồm các ma trận khả nghịch $n \times n$ trên $\mathbb{F}_2$. Tác động nhóm lúc này là phép nhân ma trận $\boldsymbol{A} \in GL(n, 2)$ với vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$, hay $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$.
2. Nhóm general affine: gồm các ma trận khả nghịch $n \times n$ trên $\mathbb{F}_2$ và vector bất kì trong $\mathbb{F}_2^n$. Tác động nhóm lúc này là biến đổi affine $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ với $\boldsymbol{A} \in GL(n, 2)$ và $\boldsymbol{b} \in \mathbb{F}_2^n$.

Tác động nhóm lên hàm boolean

Ta tiếp tục xét nhóm G và không gian vector $\mathbb{F}_2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Khi đó hai hàm boolean n biến $f(x_1, \ldots, x_n)$ và $g(x_1, \ldots, x_n)$ được gọi là **quan hệ với nhau** nếu tồn tại $g \in G$ mà $g(\boldsymbol{x}) = f(g\boldsymbol{x})$ với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$.

Ta cũng xét hoán vị $\mathcal{S}_3$. Ta cũng lần lượt xét các phần tử của nhóm.

Đặt $f_0, f_1, \ldots, f_7$ lần lượt là các giá trị hàm f với các vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^3$.

Đầu tiên, với $(1)(2)(3)$, ta có bảng chuyển vector như hình 5.4.

Ta thấy rằng $f_0 \to f_0$, $f_1 \to f_1$, ..., $f_7 \to f_7$ nên có 8 chu trình. Vậy số lượng cách chọn là 2^8.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

$\xrightarrow{(1)(2)(3)}$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

Hình 5.4. Hoán vị $(1)(2)(3)$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

$\xrightarrow{(1)(2,3)}$

x_1	x_3	x_2	f
0	0	0	f_0
0	1	0	f_2
0	0	1	f_1
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	1	0	f_6
1	0	1	f_5
1	1	1	f_7

Hình 5.5. Hoán vị $(1)(2,3)$

Tiếp theo, xét các hoán vị dạng $(1)(2,3)$, ta có bảng chuyển vector như hình 5.5.

Ta thấy rằng $f_0 \to f_0$, $f_1 \to f_2 \to f_1$, $f_3 \to f_3$, $f_4 \to f_4$, $f_5 \to f_6 \to f_5$, $f_7 \to f_7$. Ở đây có 6 chu trình nên số cách chọn là 2^6.

Tiếp theo ta xét các hoán vị dạng $(1,2,3)$ (hình 5.6).

Ta thấy rằng $f_0 \to f_0$, $f_1 \to f_2 \to f_4 \to f_1$, $f_3 \to f_6 \to f_5 \to f_3$, $f_7 \to f_7$ nên ở đây có 4 chu trình. Số cách chọn là 2^4.

Như vậy theo bổ đề Burnside, số lớp hàm bool tương đương dưới tác động của nhóm $\mathcal{S}_3$ là

$$t(\mathcal{S}_3) = \frac{1}{6}(2^8 + 3 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4) = 80.$$

$(1,2,3)$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	f_0
0	0	1	f_1
0	1	0	f_2
0	1	1	f_3
1	0	0	f_4
1	0	1	f_5
1	1	0	f_6
1	1	1	f_7

→

x_2	x_3	x_1	f
0	0	0	f_0
0	1	0	f_2
1	0	0	f_4
1	1	0	f_6
0	0	1	f_1
0	1	1	f_3
1	0	1	f_5
1	1	1	f_7

Hình 5.6. Hoán vị $(1,2,3)$

t_1	là số chu trình có độ dài 1
t_2	là số chu trình có độ dài 2
...	tương tự
t_n	là số chu trình có độ dài n

Định lý Polya

Với mỗi hoán vị trong tập G, ta viết dưới dạng các chu trình độc lập

$$\underbrace{(g_1)(g_2)\dots(g_{t_1})}_{t_1}\underbrace{(g_{j_1}g_{j_2})(g_{j_3}g_{j_4})}_{t_2}\cdots$$

Nếu ta viết hoán vị dưới dạng các chu trình rời nhau, ta gọi

Khi đó, **cycle index** (hay **chỉ số chu trình**) của hoán vị ứng các biến $z_1, z_2, \dots, z_n$ là

$$I_g(z_1, z_2, , \dots, z_n) = z_1^{t_1} z_2^{t_2} \dots z_n^{t_n}$$

Ví dụ 13. Xét hoán vị $(1,2,3)(4)(5)(6,7) \in \mathcal{S}_7$

Ta có hai chu trình độ dài 1, một chu trình độ dài 2 và một chu trình độ dài 3 và không có chu trình độ dài 4, 5, 6, 7.

Do đó chỉ số chu trình là $I_g(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 z_2^1 z_3^1$.

Nhận xét 9

Bất kì hoán vị nào thuộc $\mathcal{S}_n$ đều thỏa $1 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 + \dots + n \cdot t_n = n$.

Định nghĩa 27. Cyclic index - *chỉ số chu trình*

Chỉ số chu trình của nhóm G là

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{G}\sum_{g\in G} I_g(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

Nhìn lại ví dụ về tứ diện bên trên, các đỉnh nằm trong cùng chu trình cần được tô cùng màu. Từ đó ta có chỉ số chu trình

$$P_G(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{12}(z_1^4 + 8z_1z_3 + 3z_2^2)$$

Cho mỗi $z_i = 3$ ta có kết quả phép tính theo bổ đề Burnside.

Định lý Polya là một mở rộng cho bổ đề Burnside, cho phép chúng ta đếm số lớp tương đương thỏa mãn điều kiện nhất định (về số lượng phần tử).

Ví dụ với hình tứ diện như trên nhưng ta thêm điều kiện tô hai đỉnh màu vàng, một đỉnh màu đỏ và một đỉnh màu xanh.

Ta ký hiệu tập R là tập hợp các trạng thái có thể nhận của mỗi phần tử $m \in M$.

$$R = \{r_1, r_2, \ldots, r_c\}$$

Ở ví dụ trên thì $R = \{\text{đỏ}, \text{xanh}, \text{vàng}\}$.

Ta thay mỗi z_i trong chỉ số chu trình bằng tổng $\sum_{r\in R} r^i$.

Ví dụ 14. Giả sử ta tô màu 4 đỉnh tứ diện với 2 màu $R = \{r_1, r_2\}$.

Với z_1 ta thay bằng $r_1 + r_2$

Với z_2 ta thay bằng $r_1^2 + r_2^2$

Với z_3 ta thay bằng $r_1^3 + r_2^3$

Khi đó P_G tương đương với

$$\frac{1}{12}\left[(r_1 + r_2)^4 + 8 \cdot (r_1 + r_2)(r_1^3 + r_2^3) + 3 \cdot (r_1^2 + r_2^2)^2\right]$$

Ta khai triển P_G (lưu ý là ở đây không có tính giao hoán phép nhân)

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2)^4 =& r_1r_1r_1r_1 + r_1r_1r_1r_2 + r_1r_1r_2r_1 + r_1r_1r_2r_2\\ &+r_1r_2r_1r_1 + r_1r_2r_1r_2 + r_1r_2r_2r_1 + r_1r_2r_2r_2\\ &+r_2r_1r_1r_1 + r_2r_1r_1r_2 + r_2r_1r_2r_1 + r_2r_1r_2r_2\\ &+r_2r_2r_1r_1 + r_2r_2r_1r_2 + r_2r_2r_2r_1 + r_2r_2r_2r_2\end{aligned}$$

Mình thấy rằng có 16 cấu hình khác nhau tương ứng 16 cách tô 2 màu cho 4 đỉnh. Tương tự

$$\begin{aligned}(r_1+r_2)(r_1^3+r_2^3) &= r_1^4+r_1r_2^3+r_2r_1^3+r_2^4\\ &= r_1r_1r_1r_1+r_1r_2r_2r_2+r_2r_1r_1r_1+r_2r_2r_2r_2\end{aligned}$$

và cuối cùng

$$\begin{aligned}(r_1^2+r_2^2)^2 &= r_1^4+r_1^2r_2^2+r_2^2r_1^2+r_2^4\\ &= r_1r_1r_1r_1+r_1r_1r_2r_2+r_2r_2r_1r_1+r_2r_2r_2r_2\end{aligned}$$

Việc không có tính giao hoán với phép nhân làm biểu thức cồng kềnh và phức tạp. Do đó mình thêm một tập hợp W là vành giao hoán, và xét ánh xạ $w : R \mapsto W$ với $w(r_i) = w_i$.

Khi đó nếu thay r_i bởi w_i vào bên trên biểu thức sẽ rất đẹp

$$P_G(w_1,w_2) = \frac{1}{12}\big[(w_1+w_2)^4+8(w_1+w_2)(w_1^3+w_2^3)+3(w_1^2+w_2^2)^2\big]$$

Khai triển và thu gọn ta có

$$\begin{aligned}P_G(w_1,w_2) &= \frac{1}{12}\big[12w_1^4+12w_1^3w_2+12w_1^2w_2^2+12w_1w_2^3+12w_2^4\big]\\ &= w_1^4+w_1^3w_2+w_1^2w_2^2+w_1w_2^3+w_2^4\end{aligned}$$

Ở đây, định lý Polya nói rằng, số mũ của w_i thể hiện số lượng phần tử của tập M nhận giá trị r_i, và hệ số trước mỗi toán hạng là số lớp tương đương tương ứng với số lượng phần tử của tập M nhận các giá trị r_i.

Nói cách khác:

- có 1 lớp tương đương mà 4 đỉnh nhận màu r_1;
- có 1 lớp tương đương mà 3 đỉnh nhận màu r_1 và 1 đỉnh nhận màu r_2;
- có 1 lớp tương đương mà 2 đỉnh nhận màu r_1 và 2 đỉnh nhận màu r_2;
- có 1 lớp tương đương mà 1 đỉnh nhận màu r_1 và 3 đỉnh nhận màu r_2;
- có 1 lớp tương đương mà 4 đỉnh nhận màu r_2.

Quay lại vấn đề tô bốn đỉnh tứ diện với ba màu xanh, đỏ, vàng. Tìm số cách tô hai đỉnh màu vàng, một đỉnh màu đỏ và một đỉnh màu xanh.

Đặt $w(\text{vàng}) = x$, $w(\text{đỏ}) = y$ và $w(\text{xanh}) = z$.

Ta có

$$P_G = \frac{1}{12}\big[(x+y+z)^4+8\cdot(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)+3\cdot(x^2+y^2+z^2)^2\big]$$

Như vậy đề bài tương ứng việc tìm hệ số của hạng tử x^2yz trong biểu thức trên. Kết quả là 1.

Chương 6

Số học

Toán học là vua của các môn khoa học, và số học là nữ hoàng

Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

6.1 Phép chia Euclid và thuật toán Euclid

Phép chia Euclid

Đây là nền tảng, cơ sở của số học. Từ khi biết tới phép chia hai số nguyên, ta có thể tìm *thương* và *số dư*. Nói theo toán học, nếu ta có hai số nguyên dương a và b thì tồn tại cặp số q, r sao cho $a = qb + r$ với $0 \leqslant r < b$.

Khi đó, a gọi là số bị chia, b gọi là số chia, q là thương (q trong quotient) và r là số dư (r trong remainder).

Đặc biệt là sự tồn tại của cặp số q và r là duy nhất. Thật vậy, nếu ta giả sử tồn tại 2 cặp số (q_1, r_1) và (q_2, r_2) đều thỏa đẳng thức trên, nghĩa là

$$a = q_1 b + r_1, \quad a = q_2 b + r_2$$

Trừ 2 đẳng thức vế theo vế ta có $(q_1 - q_2)b + (r_1 - r_2) = 0$. Tương đương $(r_2 - r_1) = (q_1 - q_2)b$, mà $0 \leqslant r_1, r_2 < b$ nên $-b < r_2 - r_1 < b$. Như vậy chỉ có thể xảy ra trường hợp $r_2 - r_1 = 0$ hay $r_2 = r_1$, kéo theo $q_1 = q_2$.

Thuật toán Euclid

Dựa trên phép chia Euclid, ta có một thuật toán hiệu quả để tìm ước chung lớn nhất giữa hai số a và b.

Ký hiệu $\gcd(a, b)$ là ước chung lớn nhất của a và b. Chúng ta thực hiện đệ quy như sau:

$$\gcd(a, b) = \begin{cases} a, & \text{nếu } b = 0 \\ \gcd(b, a \bmod b), & \text{nếu } b \neq 0 \end{cases}$$

Điểm quan trọng ở thuật toán Euclid là thuật toán chắc chắn sẽ dừng sau một số hữu hạn bước, và kết quả sẽ là ước chung lớn nhất của hai số a và b.

Chứng minh. Đặt $r_0 = a$ và $r_1 = b$. Theo thuật chia Euclid ta có các số q_0 và r_2 sao cho $r_0 = r_1 q_0 + r_2$ với $0 \leqslant r_2 < r_1$. Thuật toán Euclid hoạt động như sau:

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 q_0 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_1 + r_3 \\ r_2 &= r_3 q_2 + r_4 \\ \dots &= \dots \\ r_i &= r_{i+1} q_i + r_{i+2} \\ \dots &= \dots \\ r_k &= r_{k+1} q_k + 0 \\ r_{k+1} &= 0 \end{aligned}$$

Ta thấy rằng ở mỗi bước, r_{i+2} luôn nhỏ hơn r_{i+1}. Do đó cuối cùng sẽ bằng 0, và khi đó ta có ước chung lớn nhất. □

Thuật toán Euclid mở rộng

Định nghĩa 1. Phương trình Diophantos

Cho trước các số nguyên a, b và c. Phương trình Diophantus là phương trình có dạng

$$ax + by = c$$

với x, y là các số nguyên.

Ví dụ 1. Giải phương trình $5x + 3y = 1$.

Ta có $y = \dfrac{1-5x}{3} = \dfrac{1-2x-3x}{3} = \dfrac{1-2x}{3} - x$. Như vậy nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $\dfrac{1-2x}{3} \in \mathbb{Z}$, nghĩa là $1-2x$ chia hết cho 3. Vậy $1-2x = 3k$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Tiếp tục, $1-2x = 3k$, suy ra $x = \dfrac{1-3k}{2} = \dfrac{1-k-2k}{2} = \dfrac{1-k}{2} - k$. Do x nguyên nên tương tự $\dfrac{1-k}{2}$ cũng nguyên, hay $1-k = 2t$, tương đương với $k = 1-2t$.

Thay ngược lại ta có $x = \dfrac{1-3k}{2} = \dfrac{1-3(1-2t)}{2} = -1+3t$. Tiếp tục thay vào để tìm y thì $y = \dfrac{1-5x}{3} = \dfrac{1-5(-1+3t)}{3} = 2-5t$.

Như vậy nghiệm của phương trình là tất cả các nghiệm (x, y) mà $x = -1+3t$, $y = 2-5t$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Ở đây chúng ta đã thực hiện phép chia có dư liên tiếp để tìm nghiệm. Nói cách khác ta đã thực hiện thuật toán Euclid ở bên trên để làm giảm độ phức tạp ở mỗi bước giải. Tổng quát ta có thuật toán Euclid mở rộng để tìm ước chung lớn nhất $\gcd(a, b)$ của hai số a, b, và **một** nghiệm của phương trình $ax + by = \gcd(a, b)$.

Ở ví dụ trên, ta thấy rằng $(-1, 2)$ là một nghiệm của phương trình $5x+3y = 1$. Khi đó ta có thể suy ra tất cả nghiệm (họ nghiệm) của phương trình có dạng $(-1+3t, 2-5t)$ với $t \in \mathbb{Z}$.

Ở thuật toán trên, r_0, r_1 và r_2 hoạt động như thuật toán Euclid chuẩn. Ở mỗi bước q là thương của phép chia hai số nguyên và ta sử dụng q đó để tính x_0 và y_0 mới. Kết quả cuối cùng (r_0, x_0, y_0) lần lượt là ước chung lớn nhất, và hai số x, y thỏa mãn $ax_0 + yb_0 = r_0$.

Tại sao chúng ta lại có $(x_0, x_1) = (1, 0)$ và $(y_0, y_1) = (0, 1)$? Nói cách khác,

Algorithm 4 Thuật toán Euclid mở rộng

Require: $a, b \in \mathbb{Z}$
Ensure: $\gcd(a, b)$, x, y
  $r_0 \leftarrow a$, $r_1 \leftarrow b$, $r_2 \leftarrow 0$
  $x_0 \leftarrow 1$, $x_1 \leftarrow 0$, $x_2 \leftarrow 0$
  $y_0 \leftarrow 0$, $y_1 \leftarrow 1$, $y_2 \leftarrow 0$
  while $r_1 \neq 0$ **do**
    $q \leftarrow r_0$ div r_1
    $r_2 \leftarrow r_0 - q * r_1$, $r_0 \leftarrow r_1$, $r_1 \leftarrow r_2$
    $x_2 \leftarrow x_0 - q * x_1$, $x_0 \leftarrow x_1$, $x_1 \leftarrow x_2$
    $y_2 \leftarrow y_0 - q * y_1$, $y_0 \leftarrow y_1$, $y_1 \leftarrow y_2$
  end while
  return r_0, x_0, y_0

làm sao biết thuật toán hoạt động đúng?

Mục đích của chúng ta là tìm các số (x, y) sao cho $ax + by = \gcd(a, b)$. Khi đó, dựa trên thuật toán Euclid cơ bản ở trên, ta xây dựng dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ sao cho ở mọi bước thứ n ta đều có

$$ax_n + by_n = r_n \tag{6.1}$$

Ta có $r_i = r_{i+1}q_i + r_{i+2}$. Từ q_i ở mỗi bước ta tính được

$$x_i = x_{i+1}q_i + x_{i+2}, \quad y_i = y_{i+1}q_i + y_{i+2}$$

Thay vào 6.1 ta được

$$a(x_{i+1}q_i + x_{i+2}) + b(y_{i+1}q_i + y_{i+2}) = r_i \tag{6.2}$$

Tương đương với

$$(ax_{i+1} + by_{i+1})q_i + (ax_{i+2} + bx_{i+2}) = r_i$$

Mà $ax_{i+1} + by_{i+1} = r_{i+1}$ và $ax_{i+2} + by_{i+2} = r_{i+2}$. Suy ra $r_{i+1}q_i + r_{i+2} = r_n$, đúng với thuật toán Euclid chuẩn ban đầu. Nghĩa là thuật toán hoạt động đúng. Bây giờ ta cần chọn (x_0, x_1) và (y_0, y_1) vì chúng ta đã đặt $r_0 = a$ và $r_1 = b$. Ở bước thứ 0,

$$r_0 = a = ax_0 + by_0$$

và ở bước thứ 1,

$$r_1 = b = ax_1 + by_1$$

Dễ thấy ở bước 0 ta chọn $(1, 0)$ và ở bước 1 ta chọn $(0, 1)$ là được.

6.2 Hàm Euler

Định nghĩa 2. Phi hàm Euler

Cho số nguyên dương n. Số lượng các số dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n được ký hiệu bởi $\varphi(n)$ và gọi là φ hàm Euler.

$$\varphi(n) = |\{a : (a, n) = 1\}|$$

Hàm Euler có ý nghĩa quan trọng trong lý thuyết số, công cụ giúp chúng ta giải các vấn đề về số mũ trong modulo.

Sau đây chúng ta xem xét hệ thặng dư đầy đủ và hệ thặng dư thu gọn.

Với số nguyên dương n, ta định nghĩa

Định nghĩa 3. Hệ thặng dư đầy đủ

Hệ thặng dư đầy đủ của n là tập $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Nói cách khác, hệ thặng dư đầy đủ của n là các số dư có thể có khi chia một số bất kì cho n.

Định nghĩa 4. Hệ thặng dư thu gọn

Hệ thặng dư thu gọn của n là tập các số a mà $1 \leqslant a < n$ và $(a, n) = 1$. Số lượng các số a như vậy là $\varphi(n)$.

Nhận xét 1

1. Hệ thặng dư thu gọn của n gồm $\varphi(n)$ phần tử là

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}\}$$

2. Nếu n là số nguyên tố thì $\varphi(n) = n - 1$.

Tính chất hàm Euler

Nhận xét 2

Với $(m, n) = 1$ thì $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & m+1 & \cdots & (n-1)m+1 \\ 2 & m+2 & \cdots & (n-1)m+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & m+m & \cdots & (n-1)m+m \end{array}$$

Chứng minh. Ta viết các số từ 1 tới mn thành bảng như sau

Hàng r gồm các phần tử dạng $rm+k$ với $0 \leqslant r \leqslant n-1$ và $1 \leqslant k \leqslant m$. Ta thấy rằng nếu $(rm+k, m) = 1$ thì $(k, m) = 1$.

Do đó trên mỗi hàng có $\varphi(m)$ phần tử nguyên tố cùng nhau với m.

Tiếp theo, trên các hàng vừa tìm được, do $(m, n) = 1$ nên để $(rm+k, n) = 1$ thì $(r, n) = 1$. Nghĩa là có $\varphi(n)$ hàng như vậy.

Tổng kết lại, ta có $\varphi(m)\varphi(n)$ phần tử trong bảng nguyên tố cùng nhau với mn. Do đó có điều phải chứng minh. □

Do tính chất này nên hàm Euler là hàm nhân tính.

Nhận xét 3

Cho số nguyên dương n. Khi đó $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Chứng minh. Giả sử phân tích thừa số nguyên tố của n là

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$$

Khi đó mỗi ước d của n đều có dạng $p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k}$ với $0 \leqslant f_i \leqslant e_i$ với $i = 1, 2, \dots, k$.

Như vậy

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{0 \leqslant f_i \leqslant e_i} \varphi\left(p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_k^{f_k}\right) = \varphi\left(p_1^{f_1}\right)\varphi\left(p_2^{f_2}\right)\dots\varphi\left(p_k^{f_k}\right)$$

Một dạng biểu thức đơn giản là $(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy$ hay với 3 biến là $(1+x)(1+y)(1+y) = 1+x+y+z+xy+yz+yz+xyz$. Tổng quát cho k biến ở trên thì biểu thức tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqslant f_i \leqslant e_i} \varphi(p_1^{f_1})\varphi(p_2^{f_2})\dots\varphi(p_k^{f_k}) =& (1+\varphi(p_1)+\varphi(p_1^2)+\dots+\varphi(p_1^{e_1})) \\ & \times(1+\varphi(p_2)+\varphi(p_2^2)+\dots+\varphi(p_2^{e_2})) \\ & \times\dots \\ & \times(1+\varphi(p_k)+\varphi(p_k^2)+\dots+\varphi(p_k^{e_k})) \end{aligned}$$

Ở đây ta rút gọn dễ dàng với $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} &1 + \varphi(p_i) + \varphi(p_i^2) + \ldots + \varphi(p_i^{e_i}) \\ =&1 + p_i - 1 + p_i^2 - p_i + \ldots + p_i^{e_i} - p_i^{e_i - 1} \\ =&p_i^{e_i} \end{aligned}$$

Như vậy mỗi tổng $1 + \varphi(p_i) + \ldots$ bằng chính $p_i^{e_i}$. Nhân chúng lại với nhau ta có lại n. □

Định lý Euler

Định lí 1. Định lý Euler

Cho số nguyên dương n. Với mọi số nguyên a mà $(a, n) = 1$ thì

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \tag{6.3}$$

Chứng minh. Giả sử $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}\}$ là hệ thặng dư thu gọn của n. Ta sẽ chứng minh rằng nếu a là số sao cho $(a, n) = 1$ thì tập hợp

$$\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\varphi(n)}\}$$

là hoán vị của tập S.

Thật vậy, giả sử $aa_i \equiv aa_j \pmod{n}$ với $1 \leqslant i, j \leqslant \varphi(n)$ và $i \neq j$.

Do $(a, n) = 1$ nên tồn tại nghịch đảo $a' \pmod{n}$, nhân a' cho 2 vế ta còn $a_i \equiv a_j \pmod{n}$.

Nói cách khác, nếu $a_i \not\equiv a_j \pmod{n}$ thì $aa_i \not\equiv aa_j \pmod{n}$. Suy ra tập

$$\{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\varphi(n)}\}$$

là hoán vị của S.

Ta nhân tất cả phần tử của S thì sẽ bằng tích phần tử của tập trên

$$aa_1 \cdot aa_2 \ldots aa_{\varphi(n)} \equiv a_1 \cdot a_2 \ldots a_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

Đặt $I = a_1 \cdot a_2 \ldots a_{\varphi(n)}$ thì phương trình trên tương đương với

$$a^{\varphi(n)} I \equiv I \pmod{n}$$

Mà $(I, n) = 1$ do là tích các số nguyên tố cùng nhau với n nên rút gọn hai vế ta được

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Định lý Fermat nhỏ

Định lí 2. Định lý Fermat nhỏ

Cho số nguyên tố p. Với mọi số nguyên a thì

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Khi $(a, p) = 1$ thì

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Nhận xét 4

Khi $(a, p) = 1$ thì định lý Fermat là hệ quả trực tiếp từ định lý Euler.

6.3 Thặng dư chính phương

Định nghĩa 5. Số chính phương modulo p

Xét số dương nguyên tố lẻ p. Số a được gọi là **số chính phương modulo** p nếu $(a, m) = 1$ và tồn tại số x sao cho $x^2 = a \pmod{p}$.

Nói cách khác phương trình đồng dư $x^2 \equiv a \pmod{p}$ có nghiệm.

Chúng ta sử dụng kí hiệu Legendre (Legendre symbol) để thể hiện một số a có phải là số chính phương modulo nguyên tố p không.

Định nghĩa 6. Legendre symbol

Xét p là số nguyên tố, a là số nguyên không chia hết cho p. Khi đó kí hiệu Legendre được định nghĩa là

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } a \text{ là số chính phương modulo } p. \\ -1, & \text{nếu ngược lại.} \end{cases} \tag{6.4}$$

Một trường hợp tổng quát hơn của kí hiệu Legendre là kí hiệu Jacobi áp dụng cho số nguyên dương bất kì.

Định nghĩa 7. Jacobi symbol

Xét n là số nguyên dương, a là số nguyên không chia hết cho n. Khi đó kí hiệu Jacobi được định nghĩa là

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } a \text{ là số chính phương modulo } n \\ -1, & \text{nếu ngược lại.} \end{cases} \tag{6.5}$$

6.4 Hàm Möbius

August Ferdinand Möbius là nhà toán học người Đức, đóng góp nổi tiếng của ông là dải Möbius. Tuy nhiên ở đây chúng ta xem xét một hàm số học mang tên ông.

Hàm Möbius đóng vai trò quan trọng trong việc tính các đại lượng liên quan tới số học.

Hàm Möbius

Định nghĩa 8. Hàm Möbius

Hàm Möbius của số nguyên dương n được định nghĩa như sau:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } n = 1 \\ (-1)^k, & \text{nếu } n = p_1 p_2 \dots p_k \text{ với } p_i \text{ là số nguyên tố} \\ 0, & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases} \tag{6.6}$$

Điều này có nghĩa là, nếu n là tích của các số nguyên tố bậc 1 thì $\mu(n) = (-1)^k$ với k là số lượng số nguyên tố trong tích. Như vậy, nếu tồn tại số nguyên tố p sao cho $p^2 \mid n$ thì $\mu(n) = 0$.

Tính chất hàm Möbius

1. Nếu $(n_1, n_2) = 1$ thì $\mu(n_1, n_2) = \mu(n_1)\mu(n_2)$
2. $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ với $n = p_1 p_2 \dots p_k$

Chứng minh. Với tính chất 1, ta dễ thấy rằng do n_1 và n_2 nguyên tố cùng nhau nên trong cách phân tích thừa số nguyên tố của chúng sẽ chứa các số nguyên

tố khác nhau. Khi đó $\mu(n_1)$ và $\mu(n_2)$ không bị phụ thuộc nhau và có thể tách thành phép nhân như trên.

Với tính chất 2, chúng ta lần lượt chọn d là tổ hợp của 0, 1, 2, ..., k số nguyên tố.

- Nếu $d = 1$ thì $\mu(d) = 1$
- Nếu $d = p_i$ thì $\mu(d) = (-1)^1 = -1$ với $i = \overline{1,k}$
- Nếu $d = p_i p_j$ với $i \neq j$ thì $\mu(d) = (-1)^2 = 1$
- Tương tự như vậy, nếu d là tích của t số nguyên tố thì $\mu(d) = (-1)^t$

Ở mỗi trường hợp trên, do d là tổ hợp của t số nguyên tố ($0 \leqslant t \leqslant k$) nên số cách chọn số nguyên tố p_i ở mỗi trường hợp là C_k^t. Cộng chúng lại

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 - C_k^1 + C_k^2 - \ldots + (-1)^k C_k^k = 0$$

theo nhị thức Newton. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Công thức nghịch đảo Möbius

Giả sử ta có hai hàm f và g từ $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Khi đó hai cách biểu diễn sau là tương đương.

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) \tag{6.7}$$

Nghĩa là nếu chúng ta có hai hàm số f và g thỏa phương trình đầu (biểu diễn f theo g) thì chúng ta cũng sẽ tìm được cách biểu diễn g theo f.

Chứng minh. Với $d \mid n$, đặt $d' = \dfrac{n}{d} \Rightarrow d = \dfrac{n}{d'}$.

Suy ra $f(d) \cdot \mu\left(\dfrac{n}{d}\right) = f\left(\dfrac{n}{d'}\right) \cdot \mu(d')$. Sau đó lấy tổng lại thì

$$\sum_{d|n} f(d) \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d'}\right) \cdot \mu(d') = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \mu(d)$$

Ở đây lưu ý rằng nếu d là ước của n thì $d' = \dfrac{n}{d}$ cũng là ước của n. Do đó ta hoàn toàn có thể thay thế d' bởi d trong tổng trên.

Vì $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ nên

$$\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} g(d') \tag{6.8}$$

Dễ thấy rằng do $d \mid n$ và $d' \mid \frac{n}{d}$ nên tồn tại k, l sao cho $kd = n$ và $ld' = \frac{n}{d}$. Khi đó $n = ldd'$ và $kd = n$. Suy ra $d' \mid n$ và $d \mid \frac{n}{d'}$.

Tương tự như trên, ta có thể thay thế d bởi d' và ngược lại

$$(6.8) = \sum_{d'|n} g(d') \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(d)$$

mà $\sum_{a|p} \mu(a) = 0$ nếu $p \neq 1$ và bằng 1 với $p = 1$. (đã chứng minh ở trên), nên từ đây suy ra

$$\sum_{d'|n} g(d') \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(d) = \sum_{d'|n} g(d') \cdot 1 \,(\text{khi } n = d') = g(n)$$

□

Tương tự ta cũng có công thức nghịch đảo Möbius đối với phép nhân

$$f(n) = \prod_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \tag{6.9}$$

Liên hệ với hàm Euler

Nếu ta chọn $f(n) = n$ và $g(n) = \varphi(n)$ thì theo công thức nghịch đảo Möbius ta có $\varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ do ta đã biết $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

6.5 Định lý số dư Trung Hoa

Định lý số dư Trung Hoa (Chinese Remainder Theorem - CRT) là một trong những định lý quan trọng nhất của số học nói riêng và toán học nói chung.

Chứng minh định lý số dư Trung Hoa

Giả sử ta có hệ phương trình đồng dư

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv x_2 \pmod{m_2} \\ &\dots \\ x &\equiv x_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

Trong đó $\gcd(m_i, m_j) = 1$ với mọi $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$.

Khi đó định lý số dư Trung Hoa phát biểu rằng hệ phương trình đồng như này có nghiệm duy nhất trong modulo $M = m_1 m_2 \dots m_k$.

Chứng minh. Chúng ta cần chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm.

Để chứng minh sự tồn tại, ta xây dựng cách tính nghiệm bằng quy nạp.

Bước cơ sở. Với $k = 2$, ta có $x \equiv x_1 \pmod{m_1}$ và $x \equiv x_2 \pmod{m_2}$. Do $\gcd(m_1, m_2) = 1$ nên tồn tại hai số nguyên n_1, n_2 sao cho $m_1n_1 + m_2n_2 = 1$ (bổ đề Bézout).

Quan sát một chút, nếu ta modulo hai vế $m_1n_1 + m_2n_2 = 1$ cho m_1 thì sẽ có $m_2n_2 \equiv 1 \pmod{m_1}$. Như vậy $x \equiv x_1 \cdot 1 \pmod{m_1} \Leftrightarrow x \equiv x_1 \cdot (m_2n_2) \pmod{m_1}$ (?).

Tương tự, $m_1n_1 \equiv 1 \pmod{m_2}$ nên $x \equiv x_2 \cdot 1 \pmod{m_2} \Leftrightarrow x \equiv x_2 \cdot (m_1n_1) \pmod{m_2}$.

Từ đó ta có công thức nghiệm là

$$x \equiv x_1m_2n_2 + x_2m_1n_1 \pmod{m_1m_2}$$

Khi modulo cho m_1 và m_2 thì kết quả là hai phương trình đồng dư ban đầu.

Tiếp theo chúng ta sử dụng quy nạp để chứng minh với mọi $k \geqslant 2$ thì nghiệm của hệ phương trình đồng dư là

$$x \equiv x_1M_1N_1 + x_2M_2N_2 + \ldots + x_kM_kN_k \pmod{M} \tag{6.10}$$

Trong đó $M = m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$, $M_i = M/m_i$, N_i là nghịch đảo của M_i trong modulo m_i

Giả thiết quy nạp. Giả sử 6.10 đúng với $k \geqslant 2$. Đặt $M = m_1 \cdots m_k$ và $X_k = x_1M_1N_1 + \ldots + x_kM_kN_k$. Với $k + 1$ ta có

$$\begin{aligned} x &\equiv X_k \pmod{M} \\ x &\equiv x_{k+1} \pmod{m_{k+1}} \end{aligned}$$

Tương tự với hai modulo ở trên, do $\gcd(m_{k+1}, m_i) = 1$ với mọi $1 \leqslant i \leqslant k$ nên $\gcd(m_{k+1}, m_1 \cdots m_k) = \gcd(m_{k+1}, M) = 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên α và β sao cho $\alpha M + \beta m_{k+1} = 1$.

Nghiệm của hệ hai phương trình đồng dư khi này là

$$x \equiv X_k\beta m_{k+1} + x_{k+1}\alpha M \pmod{M \cdot m_{k+1}}$$

Đặt $M' = M \cdot m_{k+1} = m_1 \cdots m_k \cdot m_{k+1}$. Ở đây $M = M'/m_{k+1}$ chính là M'_{k+1} trong cách xây dựng nghiệm ở trên. Từ đó α chính là N'_{k+1}.

Ta có $X_k\beta m_{k+1} = (x_1M_1N_1 + \ldots + x_kM_kN_k)\beta m_{k+1}$. Để ý rằng $M_i = M/m_i = M'/(m_i \cdot m_{k+1})$ nên $M_i \cdot m_{k+1} = M'/m_i = M'_i$.

Tiếp theo, do $\beta m_{k+1} \equiv 1 \pmod{M}$ và $M = m_1 \cdots m_k$ nên $\beta m_{k+1} \equiv 1 \pmod{m_i}$ với $1 \leqslant i \leqslant k$. Ở trên ta có $N_iM_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ nên suy ra $\beta m_{k+1} \cdot N_iM_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Tương đương với $(\beta N_i) \cdot (M_im_{k+1}) \equiv 1 \pmod{m_i}$. Ta đã

chứng minh ở trước $M_i m_{k+1} = M'/m_i = M'_i$ nên $\beta N_i = N'_i$. Tới đây thì ta đã hoàn thành chứng minh do

$$\begin{aligned}
&X_k \cdot \beta \cdot m_{k+1} + x_{k+1} \cdot \alpha \cdot M \\
=&(x_1 M_1 N_1 + \ldots + x_k M_k N_k) \cdot \beta \cdot m_{k+1} + x_{k+1} \cdot N'_{k+1} \cdot M'_{k+1} \\
=&x_1 \cdot (\beta N_1) \cdot (M_1 m_{k+1}) + \ldots + x_k \cdot (\beta N_k) \cdot (M_k m_{k+1}) \\
&+ x_{k+1} \cdot N'_{k+1} \cdot M'_{k+1} \\
=&x_1 N'_1 M'_1 + \ldots x_k N'_k M'_k + x_{k+1} N'_{k+1} M'_{k+1}
\end{aligned}$$

Để chứng minh sự duy nhất của nghiệm, giả sử y là một nghiệm khác x của hệ phương trình đồng dư (modulu M). Khi đó $y \equiv x_i \equiv x \pmod{m_i}$. Như vậy $y = x + t_i m_i$, hay nói cách khác y khác x một bội của m_i. Do đó trong modulo m_i chỉ có thể có trường hợp $y \equiv x$ nên nghiệm tìm được ở modulo tổng là duy nhất. □

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của hệ phương trình đồng dư sau

$$\begin{aligned}
x &\equiv 1 \pmod 3 \\
x &\equiv 4 \pmod 7
\end{aligned}$$

Ta có $\gcd(3, 7) = 1$ và $3 \cdot 5 + 7 \cdot (-2) = 1$. Do đó nghiệm của hệ phương trình có dạng

$$x \equiv 1 \cdot 7 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \pmod{21}$$

Ta thấy rằng $4 \equiv 1 \pmod 3$ và $4 \equiv 4 \pmod 7$ thỏa mãn hệ phương trình đồng dư.

Chương 7

Đại số boolean

Boolean (hay luận lý) chỉ giá trị đúng hoặc sai của mệnh đề nào đó. Theo cách hiểu cơ bản, boolean gồm hai giá trị 0 hoặc 1 (sai hoặc đúng). Chương này tham khảo chính từ [2] và [3].

7.1 Hàm boolean

Hàm boolean f đối với các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hàm số nhận giá trị trong $\mathbb{F}_2^n$ và trả về giá trị thuộc $\mathbb{F}_2$.

Nói cách khác f là ánh xạ từ $\mathbb{F}_2^n$ tới $\mathbb{F}$.

Ta ký hiệu hàm boolean n biến là $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Do $x_i \in \mathbb{F}_2$ nên ta có 2^n vector (bộ số) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Giá trị của hàm f lại nằm trong tập $\{0, 1\}$ nên ứng với mỗi vector có thể có 2 giá trị của hàm boolean, và ta có 2^n vector nên số lượng hàm boolean có thể có là 2^{2^n}.

Một số toán tử boolean hay dùng: đối, AND, OR, XOR, NAND, NOR, kéo theo, tương đương.

Để biểu diễn hàm boolean chúng ta dùng bảng chân trị. Bảng chân trị tương ứng với các toán tử boolean trên là:

		AND	OR	XOR	NAND	NOR
x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0

Bảng 7.1. Các toán tử AND, OR, XOR, NAND, NOR

Toán tử đối làm đổi giá trị của hàm bool (0 thành 1 và 1 thành 0). Ký hiệu

$\overline{x}$.

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

(a) Toán tử đối

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

(b) Toán tử kéo theo và tương đương

Bảng 7.2. Các toán tử đối, kéo theo, tương đương

Toán tử tương đương còn chỉ sự tương đương của hai mệnh đề logic. Khi hai biểu thức logic có cùng bảng chân trị thì hai mệnh đề đó tương đương nhau. Do đó ta có thể viết một số kết quả như sau (từ các bảng chân trị cơ bản trên):

- $x_1|x_2 \sim \overline{x_1 \cdot x_2}$. Ở đây ta đổi dấu từng giá trị hàm boolean $x_1 \cdot x_2$
- $x_1 \downarrow x_2 \sim \overline{x_1 \vee x_2}$. Tương tự ta đổi dấu từng giá trị hàm boolean $x_1 \vee x_2$

Đa thức Zhegalkin

Định nghĩa 1. Đa thức Zhegalkin

Với hàm boolean n biến $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, **đa thức Zhegalkin** tương ứng với hàm bool đó là cách biểu diễn đa thức đó dưới dạng tổng các tích như sau

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus a_k x_1 x_2 \ldots x_n \quad (7.1)$$

với $a_i \in \{0, 1\}$. Ta thấy rằng có n biến, do đó có 2^n hệ số a_i ($k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$).

Khi đó ta nói hàm boolean f được biểu diễn ở **dạng chuẩn tắc đại số** (algebraic normal form).

Ví dụ 1. Cho hàm bool $f(x, y) = x \vee y$. Ta có bảng chân trị sau

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bảng chân trị này tương đương với đa thức Zhegalkin

$$f(x, y) = x \oplus y \oplus xy$$

Định nghĩa 2. Bậc của đa thức Zhegalkin

Tương tự như bậc của một đa thức đại số thông thường, bậc của đa thức Zhegalkin là bậc của hạng tử chứa nhiều đơn thức x_i nhất. Ký hiệu là $\deg(f)$.

Ví dụ 2. Xét hàm boolean $f(x, y, z) = 1 \oplus x \oplus yz \oplus xyz$. Khi đó $\deg(f) = 3$ vì hạng tử chứa nhiều đơn thức nhất là xyz có 3 đơn thức.

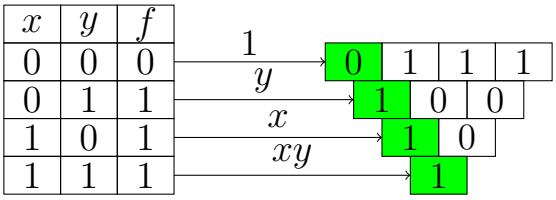
Xét hàm boolean $f(x, y, z) = 1 \oplus z \oplus zy \oplus xy$. Khi đó $\deg(f) = 2$ vì hạng tử chứa nhiều đơn thức nhất là zy (cũng có thể xét xy).

Cách tìm đa thức Zhegalkin từ bảng chân trị

Ta có nhiều phương pháp để tìm đa thức Zhegalkin của một hàm boolean từ bảng chân trị.

Phương pháp tam giác

Ở hàng đầu ta viết các phần tử bảng chân trị từ trái sang phải. Với n biến sẽ có 2^n ô. Hàng thứ hai có $2^n - 1$ ô. Phần tử dưới sẽ bằng XOR của 2 phần tử ngay trên nó (tạo thành tam giác). Tiếp tục như vậy tới khi ta có hàng cuối chỉ có 1 ô.



Hình 7.1. Phương pháp tam giác

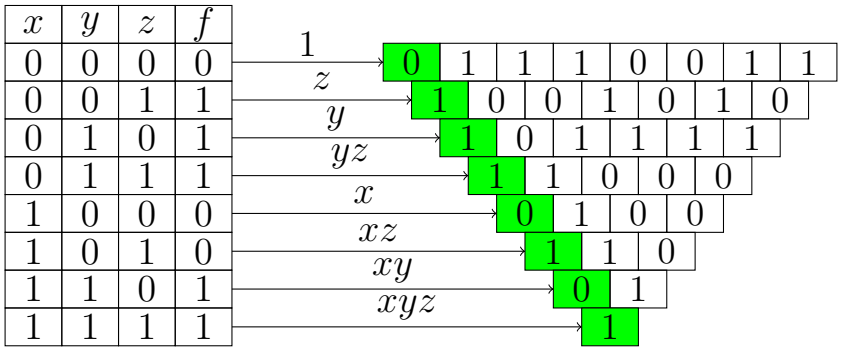
Khi đó, tương ứng với các biến, nếu biến đó là 1 thì hạng tử chứa biến đó, 0 thì không ghi. Ở ví dụ trên, nếu $(x, y) = (0, 0)$ thì không có gì (phần tử 1), $(x, y) = (0, 1)$ tương ứng với hạng tử y trong đa thức Zhegalkin, $(x, y) = (1, 0)$ tương ứng hạng tử x. Cuối cùng $(x, y) = (1, 1)$ tương ứng hạng tử xy.

Hệ số trước mỗi hạng tử là phần tử đầu tiên bên trái theo bảng kim tự tháp. Như vậy đa thức Zhegalkin là:

$$f(x, y) = 0 \cdot 1 \oplus 1 \cdot y \oplus 1 \cdot x \oplus 1 \cdot xy = x \oplus y \oplus xy$$

Đa thức Zhegalkin đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực, bao gồm cả toán học, vật lý, khoa học máy tính, vì AND và XOR là hai toán tử đại số cơ bản, do đó biểu diễn đa thức Zhegalkin được gọi là dạng chuẩn tắc đại số như ở trên đề cập.

Một ví dụ khác của đa thức Zhegalkin với hàm 3 biến x, y và z như hình sau:



Như vậy ứng với hàm boolean f thì đa thức Zhegalkin là:

$$f(x, y, z) = z \oplus yz \oplus x \oplus xz \oplus xyz$$

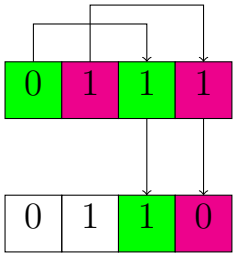
Phương pháp Möbius

Phương pháp này cho phép chúng ta tính hệ số đa thức Zhegalkin như phương pháp tam giác nhưng nhanh hơn và đỡ sai sót hơn.

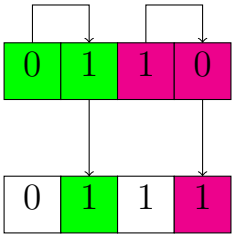
Đầu tiên chúng ta chia đôi bảng chân trị thành hai nửa trái phải. Nửa trái giữa nguyên, mỗi phần tử ở nửa phải được XOR (cộng modulo 2) với phần tử tương ứng ở nửa trái.

Giả sử với hàm $f(x, y) = (0, 1, 1, 1)$ như trên. Bước 1, ta giữ nguyên 2 phần tử đầu 0 và 1. Phần tử thứ ba (mới) bằng phần tử thứ ba (cũ) XOR với phần tử đầu ($0 \oplus 1 = 1$). Phần tử thứ tư (mới) bằng phần tử thứ tư (cũ) XOR với phần tử thứ hai ($1 \oplus 1 = 0$).

Tiếp theo, chúng ta xử lý như trên cho 2 phần tử bên nửa trái (2 phần tử bên nửa phải xử lý tương tự).



(a) Bước 1



(b) Bước 2

Như vậy ta có kết quả là $(0, 1, 1, 1)$, tương ứng với các hạng tử 1, y, x, xy (như trên). Vậy đa thức Zhegalkin là $f(x, y) = x \oplus y \oplus xy$.

Hàm affine và hàm tuyến tính

Định nghĩa 3. Hàm boolean affine

Xét hàm boolean n biến $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó f được gọi là **hàm boolean affine** nếu nó có dạng

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \tag{7.2}$$

Khi $a_0 = 0$ thì ta gọi là **hàm boolean tuyến tính** (linear).

Ta thấy rằng chỉ có các hạng tử dạng $a_i x_i$ xuất hiện trong biểu diễn đa thức Zhegalkin tương ứng của hàm boolean đó. Hay nói cách khác hàm boolean là affine khi $\deg(f) = 1$.

Ví dụ 3. Hàm boolean $f(x, y) = x \oplus y$ là hàm boolean affine và cũng tuyến tính. Hàm boolean $f(x, y) = x \oplus xy$ không là hàm boolean affine.

Tiếp theo ta sẽ xét sự so sánh của hai vector và hàm boolean đơn điệu.

Hàm đơn điệu

Định nghĩa 4. Vector so sánh được

Xét hai vector $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ $(a_i, b_i \in \{0, 1\})$. Ta nói $\boldsymbol{a}$ **so sánh được nhỏ hơn** $\boldsymbol{b}$ nếu với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ ta có $a_i \leqslant b_i$. Ký hiệu $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$.

Ví dụ 4. Ta có $(1, 0, 0) \prec (1, 0, 1)$, còn $(1, 0, 0)$ và $(0, 1, 0)$ thì không so sánh được (vị trí thứ 1 và thứ 2).

Định nghĩa 5. Hàm boolean đơn điệu

Hàm boolean n biến $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là **hàm boolean đơn điệu** (monotone) nếu với mọi vector $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ thì ta có

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, b_2, \ldots, b_n) \tag{7.3}$$

Ví dụ 5. Xét hàm boolean $f(x, y) = (0, 1, 0, 1)$.

Ta thấy rằng:

- $(0, 0) \prec (0, 1)$ và $f(0, 0) = 0 \leqslant 1 = f(0, 1)$
- $(0, 0) \prec (1, 0)$ và $f(0, 0) = 0 \leqslant 0 = f(1, 0)$

- $(0,0) \prec (1,1)$ và $f(0,0) = 0 \leqslant 1 = f(1,1)$
- $(0,1)$ và $(1,0)$ không so sánh được nên bỏ qua
- $(0,1) \prec (1,1)$ và $f(0,1) = 1 \leqslant 1 = f(1,1)$
- $(1,0) \prec (1,1)$ và $f(1,0) = 0 \leqslant 1 = f(1,1)$

Vậy đây là hàm đơn điệu.

7.2 Trọng số, phổ Furier, phổ Walsh, Hamming distance

Ở phần này ký hiệu vector không $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, vector một $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.

Trọng số của hàm boolean

Định nghĩa 6. Trọng số hàm boolean

Trọng số (hay **weight**) của hàm boolean n biến $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là số lượng giá trị khác 0 của hàm f.

Ký hiệu là $\mathrm{wt}(f)$.

Ví dụ 6. Hàm boolean $f(x, y) = (0, 1, 0, 1)$ có trọng số $\mathrm{wt}(f) = 2$. Hàm boolean $f(x, y, z) = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ có trọng số $\mathrm{wt}(f) = 5$.

Một số tính chất của trọng số:

1. $0 \leqslant \mathrm{wt}(f) \leqslant 2^n$
2. $\mathrm{wt}(f \oplus \mathbf{1}) = 2^n - \mathrm{wt}(f)$
3. Nếu h cũng là một hàm boolean từ $\mathbb{F}_2^n$ tới $\mathbb{F}_2$ thì

$$\mathrm{wt}(f \oplus h) = \mathrm{wt}(f) + \mathrm{wt}(h) - 2\,\mathrm{wt}(fh)$$

4. Giá trị $\mathrm{wt}(f)$ nhận giá trị lẻ khi và chỉ khi $\deg(f) = n$

Biến đổi Fourier

Với mỗi vector $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}_2^n$, ta ký hiệu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle$ là hàm sau:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \tag{7.4}$$

Mỗi hàm boolean $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sẽ được biểu diễn dưới dạng duy nhất với

$$f(\boldsymbol{x}) = 2^{-n} \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n} F_f(\boldsymbol{a}) \cdot (-1)^{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle} \tag{7.5}$$

Trong đó

$$F_f(\boldsymbol{a}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_2^n} f(\boldsymbol{x}) \cdot (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle} \tag{7.6}$$

Khi đó, tập hợp $\{F_f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n\}$ được gọi là **phổ Fourier** (spectre Fourier) của hàm boolean f.

Nhận xét 1

Đầu tiên ta có nhận xét rằng, với vector $\boldsymbol{z}$ cố định thì

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n} (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{z}\rangle} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0} \\ 2^n, & \text{nếu } \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{7.7}$$

Chứng minh. Để chứng minh nhận xét này, ta thấy rằng nếu $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ thì có ít nhất một bit $z_i \neq 0$.

Ta chọn vector $\Delta = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ với bit 1 nằm ở vị trí i. Khi đó với mọi vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n$ tồn tại duy nhất vector $\boldsymbol{a}' \in \mathbb{F}_2^n$ sao cho $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a}' = \Delta$.

Suy ra $\langle \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a}', \boldsymbol{z}\rangle = \langle \Delta, \boldsymbol{z}\rangle = 1$ vì $z_i \cdot 1 = 1$, các vị trí còn lại $z_j \cdot 0 = 0$.

Lý do ta chọn vector Δ như vậy là vì $\langle \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a}', \boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}\rangle \oplus \langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{z}\rangle = 1$. Tương đương với $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}\rangle = 1 \oplus \langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{z}\rangle$. Do đó $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}\rangle$ và $\langle \boldsymbol{a}', \boldsymbol{z}\rangle$ là hai bit khác nhau, dẫn tới $(-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{z}\rangle}$ và $(-1)^{\langle \boldsymbol{a}',\boldsymbol{z}\rangle}$ là hai số trái dấu nhau nên tổng chúng là 0. Chúng ta có $2^n/2$ cặp như vậy và tổng cuối cùng là 0.

Trong trường hợp $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ thì $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}\rangle = \boldsymbol{0}$ với mọi $\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n$. Do đó $(-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{z}\rangle} = (-1)^0 = 1$ với mọi vector $\boldsymbol{a}$. Hàm boolean n biến có 2^n vector $\boldsymbol{a}$ nên tổng là $2^n \cdot 1 = 2^n$. □

Nhận xét 7.7 đã được chứng minh. Ta quay lại bài toán.

Chứng minh. Với mọi vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$, ta khai triển từ vế phải của 7.5 và từ 7.6

$$\begin{aligned} & 2^{-n} \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n} F_f(\boldsymbol{a}) \cdot (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle} \\ =& 2^{-n} \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n} \left(\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{F}_2^n} f(\boldsymbol{y}) \cdot (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{y}\rangle} \right) \cdot (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle} \\ =& 2^{-n} \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{F}_2^n} f(\boldsymbol{y}) \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n} (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{x}\rangle} \end{aligned}$$

Theo 7.7, nếu ta coi $\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ thì

$$\sum_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} \rangle} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ 2^n, & \text{nếu } \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Nghĩa là trong tổng trên thì chỉ có $\boldsymbol{y}$ thỏa $\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ thì $f(\boldsymbol{y})$ không bị triệt tiêu. Nói cách khác là $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ và do đó tổng trên còn lại $2^{-n}(f(\boldsymbol{x}) \cdot 2^n) = f(\boldsymbol{x})$ và ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 7. Xét hàm boolean $f(x_1, x_2) = (1, 0, 0, 1)$.

Xét $\boldsymbol{a} = (0, 0)$. Ta có:

- Với $\boldsymbol{x} = (0, 0)$, $f(\boldsymbol{x}) = 1$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$.
- Với $\boldsymbol{x} = (0, 1)$, $f(\boldsymbol{x}) = 0$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$
- Với $\boldsymbol{x} = (1, 0)$, $f(\boldsymbol{x}) = 0$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$
- Với $\boldsymbol{x} = (1, 1)$, $f(\boldsymbol{x}) = 1$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$

Suy ra $F_f(\boldsymbol{a}) = 1 \cdot (-1)^0 + 0 \cdot (-1)^0 + 0 \cdot (-1)^0 + 1 \cdot (-1)^0 = 2$ khi $\boldsymbol{a} = (0, 0)$.

Tương tự, ta có các giá trị $F_f(\boldsymbol{a})$ sau:

- Với $\boldsymbol{a} = (0, 1)$, $F_f(\boldsymbol{a}) = F_f(0, 1) = 0$
- Với $\boldsymbol{a} = (1, 0)$, $F_f(\boldsymbol{a}) = F_f(1, 0) = 0$
- Với $\boldsymbol{a} = (1, 1)$, $F_f(\boldsymbol{a}) = F_f(1, 1) = 2$

Bây giờ ta đã có đủ $F_f(\boldsymbol{a})$ với $\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^2$ nên ta có thể kiểm chứng với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^2$ thỏa công thức 7.5.

Biến đổi Walsh-Hadamard

Với mỗi hàm boolean $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\boldsymbol{x})$ ta định nghĩa một hàm tương ứng như sau:

$$f^*(\boldsymbol{x}) = (-1)^{f(\boldsymbol{x})}$$

Ta định nghĩa $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle$ như trên, khi đó hàm $f^*(\boldsymbol{x})$ sẽ có dạng

$$f^*(\boldsymbol{x}) = 2^{-n} \sum_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n} W_f(\boldsymbol{a})(-1)^{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle} \tag{7.8}$$

Trong đó

$$W_f(\boldsymbol{a}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{f(\boldsymbol{x}) \oplus \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle} \tag{7.9}$$

Tập hợp $\{W_f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n\}$ được gọi là **phổ Walsh** (spectre Walsh) của hàm $f(\boldsymbol{x})$. Các giá trị $W_f(\boldsymbol{a})$ được gọi là hệ số Walsh.

Chứng minh. Tương tự như trên, ta khai triển vế phải của 7.8 và thay 7.9 vào

$$\begin{aligned}
&2^{-n}\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n} W_f(\boldsymbol{a})(-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle} \\
=&2^{-n}\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n}\left(\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{F}_2^n}(-1)^{f(\boldsymbol{y})\oplus\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{y}\rangle}\right)(-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle} \\
=&2^{-n}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{F}_2^n}(-1)^{f(\boldsymbol{y})}\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n}(-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{x}\rangle}
\end{aligned}$$

Cũng từ 7.7, tương tự như trên ta có

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n}(-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{x}\rangle} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0} \\ 2^n, & \text{nếu } \boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \end{cases}$$

Do đó trong các $\boldsymbol{y}\in\mathbb{F}_2^n$ thì chỉ có $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ không bị triệt tiêu nên kết quả là $2^{-n}\cdot(-1)^{f(\boldsymbol{x})}\cdot 2^n = (-1)^{f(\boldsymbol{x})} = f^*(\boldsymbol{x})$. □

Các hệ số Walsh liên hệ với nhau bởi công thức

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n} W_f(\boldsymbol{a})W_f(\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{d}) = \begin{cases} 2^{2n}, & \boldsymbol{d}=\boldsymbol{0} \\ 0, & \boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0} \end{cases} \tag{7.10}$$

Trường hợp $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ được gọi là **đẳng thức Parcel**

$$\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n}(W_f(\boldsymbol{a}))^2 = 2^{2n} \tag{7.11}$$

Liên hệ giữa hệ số Fourier và hệ số Walsh

Nhận xét 2

Quan hệ giữa hệ số Fourier và hệ số Walsh là biểu thức sau

$$W_f(\boldsymbol{a}) = 2^n\Delta(\boldsymbol{a}) - 2F_f(\boldsymbol{a}) \tag{7.12}$$

với $\Delta(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \\ 0, & \text{nếu } \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0} \end{cases}$

Chứng minh. Ta có

$$W_f(\boldsymbol{a}) + 2F_f(\boldsymbol{a}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_2^n} (-1)^{f(\boldsymbol{x})\oplus\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle} + 2\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_2^n} f(\boldsymbol{x})(-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_2^n} (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle}[(-1)^{f(\boldsymbol{x})} + 2f(\boldsymbol{x})]$$

Để ý rằng, nếu $f(\boldsymbol{x}) = 0$ thì $(-1)^{f(\boldsymbol{x})} + 2f(\boldsymbol{x}) = (-1)^0 + 2\cdot 0 = 1$, còn nếu $f(\boldsymbol{x}) = 1$ thì $(-1)^{f(\boldsymbol{x})} + 2f(\boldsymbol{x}) = (-1)^1 + 2\cdot 1 = 1$. Nói cách khác biểu thức trên trở thành

$$W_f(\boldsymbol{a}) + 2F_f(\boldsymbol{a}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_2^n} (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle}$$

Từ 7.5 ta có

$$\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_2^n} (-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \\ 2^n, & \text{nếu } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Như vậy nếu đặt $\Delta(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} 1, \text{nếu } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \\ 0, \text{nếu } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \end{cases}$ thì ta có điều phải chứng minh.

□

Nhận xét 3

Khi $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ thì với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ ta đều có $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$. Do đó

$$F_f(\boldsymbol{0}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_2^n} f(\boldsymbol{x})(-1)^{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle} = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{F}_2^n} f(\boldsymbol{x})(-1)^0 = wt(f)$$

Suy ra

$$W_f(\boldsymbol{0}) = 2^n - 2wt(f) \Leftrightarrow wt(f) = 2^{n-1} - \frac{1}{2}W_f(\boldsymbol{0}) \tag{7.13}$$

Khoảng cách Hamming

Định nghĩa 7. Khoảng cách Hamming giữa hai vector

Với hai vector $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ thuộc $\mathbb{F}_2^n$, đặt

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{wt}(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) \tag{7.14}$$

là **khoảng cách Hamming** giữa hai vector $\boldsymbol{x}$ và $\boldsymbol{y}$. Trong đó $\mathrm{wt}(\boldsymbol{z})$ là trọng số vector $\boldsymbol{z}$.

Định nghĩa 8. K/cách Hamming từ vector tới tập vector

Xét $M \subseteq \mathbb{F}_2^n$. Khi đó với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$, ta nói khoảng cách từ $\boldsymbol{x}$ tới M là

$$d(\boldsymbol{x}, M) = \min_{\boldsymbol{y} \in M} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{7.15}$$

Định nghĩa 9. Khoảng cách Hamming giữa hai hàm boolean

Xét hai hàm boolean n biến là $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó khoảng cách Hamming từ hàm f tới hàm g là

$$d(f, g) = \mathrm{wt}(f \oplus g) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n} f(\boldsymbol{x}) \oplus g(\boldsymbol{x}) \tag{7.16}$$

Hàm Bent

Ta ký hiệu $\mathcal{L}$ là tập hợp tất cả các hàm boolean affine với n biến. Nghĩa là

$$\mathcal{L} = \{l_{a_0}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \,|\, a_0 \in \mathbb{F}_2, \boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n\} \tag{7.17}$$

với $l_{a_0}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$.

Định nghĩa 10. Nonlinearity của hàm boolean

Nonlinearity của hàm boolean f bất kì được định nghĩa là khoảng cách Hamming từ f tới $\mathcal{L}$, hay nói cách khác $N_f = d(f, \mathcal{L})$.

Nhận xét 4

Xét hàm f với n biến và phổ Walsh tương ứng của hàm f là $\{W_f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n\}$. Khi đó

$$N_f = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{\boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^n} |W_f(\boldsymbol{a})| \tag{7.18}$$

Nhận xét 5

Từ đẳng thức Parcel ta có

$$2^n \cdot \left(\max_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n}(W_f(\boldsymbol{a}))^2\right) \geqslant \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n}(W_f(\boldsymbol{a}))^2 = 2^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n}(W_f(\boldsymbol{a}))^2 \geqslant \frac{2^{2n}}{2^n} = 2^n$$

$$\Leftrightarrow \max_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_2^n}|W_f(\boldsymbol{a})| \geqslant 2^{n/2}$$

Từ nhận xét trên và từ định nghĩa nonlinearity ở trên ta có

$$N_f \leqslant 2^{n-1} - \frac{1}{2}2^{n/2}$$

Hàm f khiến dấu bằng xảy ra được gọi là hàm Bent. Điều kiện cần và đủ để hàm f có n biến là hàm Bent là khi $n = 2k$.

Tính chất quan trọng của hàm Bent là với mọi vector $\boldsymbol{a}$ thì

$$W_f(\boldsymbol{a}) = \pm 2^{n/2}$$

Ví dụ 8. Với $n = 2$, hàm $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_1x_2$ là hàm Bent. Ta có thể tính toán và thấy rằng $W_f(0,0) = 2$, $W_f(0,1) = -2$, $W_f(1,0) = 2$ và $W_f(1,1) = 2$.

7.3 Linear Feedback Shift Register

Linear Feedback Shift Register (LFSR) là một ứng dụng quan trọng của hàm boolean để sinh ra một chuỗi các giá trị.

Linear Feedback Shift Register

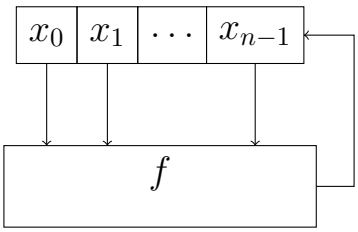
Xét hàm boolean n biến $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Khi đó với các giá trị (bit) khởi tạo x_0, x_1, ..., x_{n-1} thuộc $\mathbb{F}_2$, ta có thể sinh ra bit ở các vị trí tiếp theo

$$x_n = f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

Tương tự, $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_{n+2} = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$, $x_{n+3} = f(x_3, x_4, \ldots, x_{n+2})$, ...

Tổng quát, để sinh bit thứ $n+i$ thì đầu vào sẽ là các bit x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n-1}.

$$x_{n+i} = f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}) \tag{7.19}$$



Hình 7.3. Feedback Shift Register

Theo hình 7.3, kết quả của hàm f sẽ được nối vào sau của dãy bit. Theo đó dãy bit sẽ luôn có dạng x_0, x_1, ..., x_n, ...

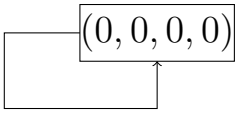
Thông qua hàm f, các vector trong $\mathbb{F}_2^n$ sẽ chuyển trạng thái lẫn nhau theo công thức

$$(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0) \to (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) \tag{7.20}$$

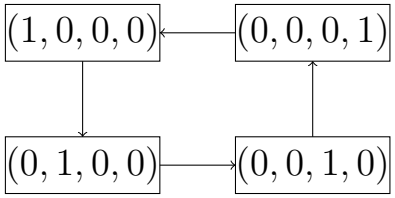
Ví dụ 9. Xét hàm boolean $f(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_3x_2 \oplus x_0$. Bảng chân trị của hàm f là

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$$

Ví dụ, với $(0, 0, 0, 1)$, ta có $f(0, 0, 0, 1) = 1$ nên $(0, 0, 0, 1)$ biến đổi thành $(1, 0, 0, 0)$. Như vậy chúng ta có các chuyển đổi đối với hàm f được thể hiện thành 4 chu trình ở hình 7.4 và 7.5.



(a) Chu trình thứ nhất



(b) Chu trình thứ hai

Hình 7.4. Các chu trình chuyển đổi của f

Ta thấy rằng tập các vector $\boldsymbol{x} = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1})$ có 2^n trường hợp. Do đó sẽ có một lúc nào đó (số i nào đó) mà vector $\boldsymbol{x}$ trở lại đúng vector ban đầu. Nghĩa là tồn tại i sao cho

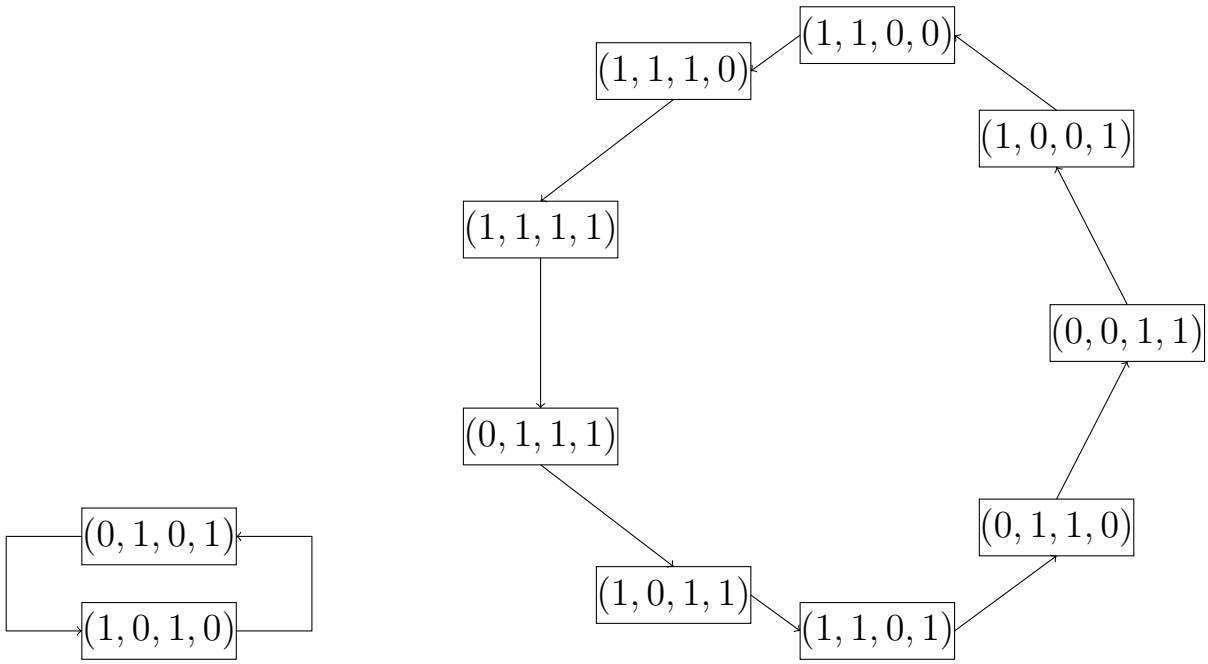
$$(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1})$$

Từ đó dãy bit tiếp theo được sinh ra sẽ giống hệt trước đó nên số i nhỏ nhất thỏa mãn đẳng thức được gọi là **chu kì** của Feedback Shift Register.

Trong các hàm boolean thì hàm boolean tuyến tính được quan tâm nhiều nhất để sinh ra chuỗi bit Feedback Shift Register. Do đó từ đây ta tập trung vào các hàm boolean tuyến tính và Linear Feedback Shift Register.

Nhắc lại, hàm boolean tuyến tính là hàm boolean có dạng

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = a_0x_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_{n-1}x_{n-1}$$



(a) Chu trình thứ ba (b) Chu trình thứ tư

Hình 7.5. Các chu trình chuyển đổi của f

Trong đó $a_i \in \mathbb{F}_2$ là các hệ số cho trước. Ta định nghĩa đa thức đặc trưng cho hàm boolean tuyến tính như sau.

Định nghĩa 11. Đa thức đặc trưng

Xét hàm boolean tuyến tính

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = a_0x_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_{n-1}x_{n-1}$$

Khi đó đa thức đặc trưng tương ứng với hàm f là đa thức trong $GF(2^n)$

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \tag{7.21}$$

Do hàm boolean tuyến tính có tính chất là $f(\mathbf{0}) = 0$ nên chu kì tối đa có thể đạt được là $2^n - 1$. Ta có một vài định nghĩa sau để một LFSR đạt được chu kì tối đa.

Định nghĩa 12. Đa thức primitive

Xét đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ thuộc $GF(2^n)$. Ta đã biết trường $GF(2^n)$ có $2^n - 1$ phần tử khác không. Đặt $p = 2^n - 1$. Đa thức $P(x)$ được gọi là **primitive** khi với mọi ước nguyên tố q của p thì

$$x^s \not\equiv 1 \bmod P(x), \quad \text{với } s = \frac{p}{q} = \frac{2^n - 1}{q}$$

Định nghĩa 13. Đa thức đặc trưng với chu kì cực đại

Đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ được gọi là **đa thức đặc trưng với chu kì cực đại** nếu đa thức đó tối giản và là đa thức primitive.

Ví dụ 10. Xét đa thức $f(x) = x^4 + x^3 + 1$. Ta có thể xác định xem đa thức này có sinh ra LFSR với chu kì tối đa hay không mà không cần tìm đồ thị chuyển trạng thái của LFSR.

Đầu tiên ta chứng minh $f(x)$ là đa thức tối giản. Thật vậy, giả sử ngược lại, $f(x)$ là tích của hai đa thức bậc nhỏ hơn 4. Hai trường hợp có thể xảy ra là $f(x)$ chia hết cho đa thức tối giản bậc 1 hoặc bậc 2.

Các đa thức tối giản bậc 1 là x và $x + 1$. Ta có thể kiểm chứng rằng $f(x)$ không chia hết cho bất kì đa thức nào ở trên. Tương tự, đa thức tối giản bậc 2 (trong $GF(2^4)$) là $x^2 + x + 1$ và $f(x)$ cũng không chia hết cho đa thức này. Như vậy ta có thể kết luận rằng $f(x)$ là đa thức tối giản.

Trong $GF(2^4)$ có $2^4 - 1 = 15$ phần tử khác 0. Các ước nguyên tố của 15 là 3 và 5. Ta thấy rằng $x^3 \not\equiv 1$ và $x^5 = x \cdot x^4 = x \cdot (x^3 + 1) = x^4 + x = x^3 + x + 1 \not\equiv 1$. Như vậy $f(x)$ là đa thức primitive.

Như vậy ta có thể kết luận rằng đa thức $f(x)$ sinh ra LFSR với chu kì tối đa.

Thuật toán Berlekamp-Massey

Thuật toán Berlekamp-Massey là thuật toán tìm đa thức sinh có chu kì ngắn nhất sinh ra một dãy LFSR cho trước.

Bài toán ở đây là, giả sử chúng ta có một dãy bit

$$u_0, u_1, \ldots, u_{l-1}$$

là một dãy bit được sinh giả ngẫu nhiêu (pseudorandom). Làm thế nào từ đoạn bit này ta xây dựng được đa thức đặc trưng của LFSR mà sinh ra tất cả các bit sau đó? Hơn nữa l phải nhỏ nhất có thể.

Nhắc lại, đa thức đặc trưng là đa thức có dạng

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

thì hàm boolean tuyến tính sinh ra bit tiếp theo sẽ có dạng

$$x_n = f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = a_0x_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_{n-1}x_{n-1}$$

Tổng quát, công thức để sinh ra bit thứ $n + i$ sẽ là

$$x_{n+i} = f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+i-1}) = a_0x_i \oplus a_1x_{i+1} \oplus \ldots \oplus a_{n-1}x_{n+i-1}$$

với $i = 0, 1, \ldots$.

Thuật toán Berlekamp-Massey

Đầu vào là dãy bit $u_0, u_1, \ldots, u_{l-1}$. Ta sẽ tìm đa thức đặc trưng bậc nhỏ nhất mà sinh ra toàn bộ dãy bit trên, bắt đầu từ các bit $u_0, u_1, \ldots$ nhất định.

Bước -1. Gọi n_0 là vị trí đầu tiên mà $u_{n_0} = 1$ (các bit được đánh số từ 0). Khi đó đặt $P_{-1}(x) = 1$ và $k_{-1} = 1$. Nếu $P_{-1}(x)$ sinh ra toàn bộ dãy bit thì ta dừng thuật toán. Ngược lại thì tiếp tục bước 1.

Bước 0. Đặt $P_0(x) = x^{n_0+1} \oplus P_{-1}(x)$ với n_0 là vị trí bit 1 đầu tiên và đặt $k_0 = \deg P_0(x) = n_0 + 1$.

Ở mỗi bước từ đây trở đi, gọi m là số sao cho $k_{-1} = k_0 = \ldots = k_{m-1} < k_m = k_{s+2} = \ldots$.

Bước n. Để tìm $P_n(x)$ ta tính $a = m - k_{m-1}$ và $b = n - k_{n-1}$.

Nếu $a \geqslant b$ thì $P_n(x) = P_{n-1}(x) \oplus x^{a-b} P_{m-1}(x)$.

Nếu $a < b$ thì $P_n(x) = x^{b-a} P_{n-1}(x) \oplus P_{m-1}$.

Trong quá trình tìm $P_n(x)$, khi nào bậc k_n của $P_n(x)$ thỏa mãn điều kiện số m thì ta cập nhật lại số m.

Ở mỗi bước, nếu $P_n(x)$ sinh ra toàn bộ dãy bit thì ta dừng thuật toán.

Ví dụ 11. Xét dãy 111100100. Đặt $n_0 = 0$, $P_{-1}(x) = 1$ và $k_{-1} = 0$.

Theo $P_{-1}(x) = 1$ thì $1 \to 1 \to 1 \to 1$, nghĩa là bit đầu thành bit thứ hai, bit thứ hai thành bit thứ ba và thứ ba thành thứ tư. Từ đó suy ra

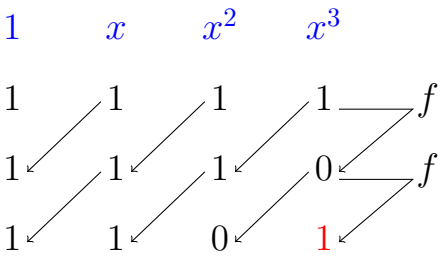
$$P_0(x) = P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = x^{0+1} \oplus 1 = x \oplus 1.$$

Do $k_{-1} < k_0 = k_1 = k_2 = k_3$ $(0 < 1)$ nên $m = 0$.

Để tìm $P_4(x)$, ta có $a = m - k_{m-1} = 0 - 0 = 0$ và $b = n - k_{n-1} = 4 - 1 = 3$. Do $a < b$ nên

$$P_4(x) = x^3 P_3(x) \oplus P_{-1}(x) = x^3 \cdot (x \oplus 1) \oplus 1 = x^4 \oplus x^3 \oplus 1.$$

Do $k_4 > k_3$ $(4 > 1)$ nên $m = 4$.



Hình 7.6. LFSR tương ứng $P_4(x)$

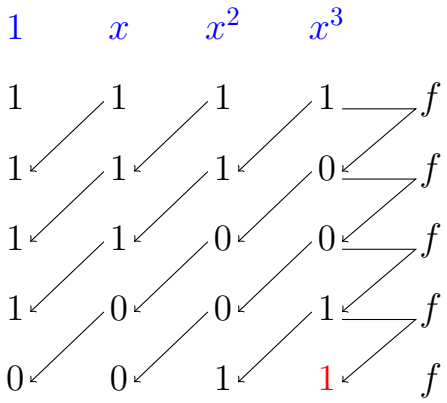
Trong hình trên, hàng đầu từ trái sang phải là u_0, u_1, u_2, u_3. Hàng thứ hai từ trái sang phải là u_1, u_2, u_3, u_4. Hàng thứ ba là u_2, u_3, u_4, u_5 nhưng $u_5 = 0$ theo

dãy ban đầu nên LFSR sinh ra 1 là chưa đúng, thuật toán chuyển sang bước tiếp theo.

Để tìm $P_5(x)$, ta có $a = m - k_{m-1} = 4 - 1 = 3$ và $b = n - k_{n-1} = 5 - 4 = 1$. Suy ra

$$P_5(x) = P_4(x) \oplus x^2 P_3(x) = x^4 \oplus x^3 \oplus 1 \oplus x^2 \cdot (x \oplus 1) = x^4 \oplus x^2 \oplus 1.$$

Theo $P_5(x) = x^4 \oplus x^2 \oplus 1$ thì LFSR sẽ hoạt động như hình dưới đây. Cũng theo hình dưới thì $P_6(x) = P_5(x) = x^4 \oplus x^2 \oplus 1$.

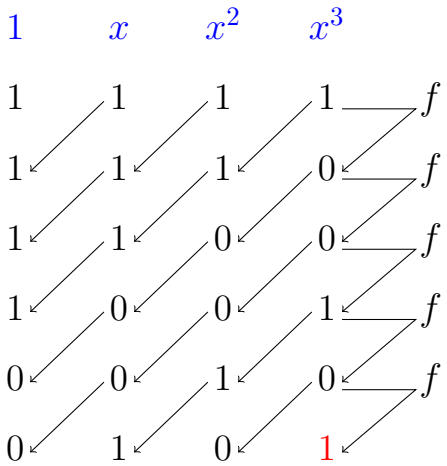


Hình 7.7. LFSR tương ứng $P_5(x)$ và $P_6(x)$

Để tìm $P_7(x)$, ta có $a = m - k_{m-1} = 3$ và $b = n - k_{n-1} = 7 - 4 = 3$. Do $a \geqslant b$ nên

$$P_7(x) = P_6(x) \oplus P_3(x) = x^4 \oplus x^2 \oplus 1 \oplus x \oplus 1 = x^4 \oplus x^2 \oplus x.$$

Khi đó LFSR sẽ được sinh như hình.

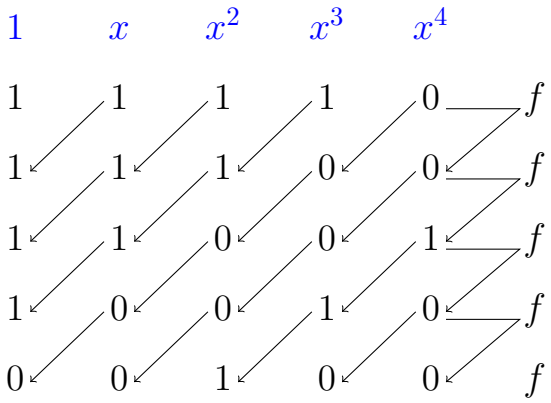


Hình 7.8. LFSR tương ứng $P_7(x)$

Để tìm $P_8(x)$, $a = 3$ và $b = 8 - 4 = 4$. Do $a < b$ nên

$$P_8(x) = xP_7(x) \oplus P_3(x) = x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1.$$

Lúc này LFSR sẽ là



Hình 7.9. LFSR tương ứng $P_8(x)$

Như vậy đa thức sinh ra dãy bit ban đầu là $x^5 \oplus x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 1$. Thuật toán Berlekamp-Massey tìm ra đa thức đặc trưng với độ phức tạp là 8 (tìm tới $P_8(x)$).

Ví dụ trên có thể được kiểm tra bởi chương trình Python ở đây.

Chương 8

Chuyên đề: Lý thuyết Galois

Tài liệu tham khảo trong phần này lấy từ sách [4] và trang youtube[1].

8.1 Extension Fields

Extension Fields

Định nghĩa 1. Mở rộng trường (Extension Field)

Trường E được gọi là **mở rộng trường** (hay **extension field**) của trường F nếu F là trường con của E. Khi đó F được gọi là **trường cơ sở** (hay **base field**) và ký hiệu $F \subset E$.

Ví dụ 1. Trường nào nhỏ nhất chứa $\mathbb{Q}$ và $\sqrt{2}$?

Đáp án là trường $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Việc chứng minh $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ là trường khá đơn giản, phần tử nghịch đảo đối với phép nhân của $a + b\sqrt{2}$ là

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-2b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

Ví dụ 2. Trường nào nhỏ nhất chứa $\mathbb{Q}$ và i (ở đây i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$)?

Đáp án là trường $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Tương tự, ở đây phần tử nghịch đảo đối với phép nhân của $a + bi$ là

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

[1] https://youtu.be/Buv4Y74_z7I?si=sQ0lOodnuLR0Yb00

Ở đây $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ và $\mathbb{Q}(i)$ đều là mở rộng của $\mathbb{Q}$ và đều là tập con của $\mathbb{C}$. Tuy nhiên hai trường này không phải tập con của nhau.

Như vậy, bằng việc mở rộng $\mathbb{Q}$ với $\sqrt{2}$ ta có trường $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Tương tự, bằng việc mở rộng $\mathbb{Q}$ với i ta có trường $\mathbb{Q}(i)$.

Vậy trường nào chứa $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ và i?

Ví dụ 3. Trường chứa cả $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ và i là tập hợp

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \{a + b\sqrt{2} + ci + d\sqrt{2}i : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

Trường trên có thể suy ra từ logic sau. Ta đã có $\mathbb{Q}(i)$ chứa $\mathbb{Q}$ và i. Ta muốn thêm $\sqrt{2}$ vào trường $\mathbb{Q}(i)$ nên ta sẽ muốn mở rộng $\mathbb{Q}(i)$ lên $\mathbb{Q}(i)(\sqrt{2})$.

Khi đó $\mathbb{Q}(i)(\sqrt{2})$ tương tự sẽ có dạng

$$\mathbb{Q}(i)(\sqrt{2}) = \{\alpha + \beta\sqrt{2} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(i)\}$$

Nói cách khác $\alpha = a + bi$ và $\beta = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, nên ta có

$$\alpha + \beta\sqrt{2} = a + bi + c\sqrt{2} + d\sqrt{2}i, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}$$

Khi đó ta viết

$$\mathbb{Q}(i)(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \{a + b\sqrt{2} + ci + d\sqrt{2}i : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

Nhận xét 1

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ là trường con của $\mathbb{R}$ nhưng $\mathbb{Q}(i)$ không phải;
2. $\mathbb{Q}(i)$ nhỏ hơn $\mathbb{C}$ rất nhiều (không chứa $\sqrt{2}$);
3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ chứa tất cả nghiệm của đa thức $f(x) = x^2 - 2$ trên $\mathbb{Q}$. Do đó $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ được gọi là **trường phân rã** của đa thức $f(x)$.

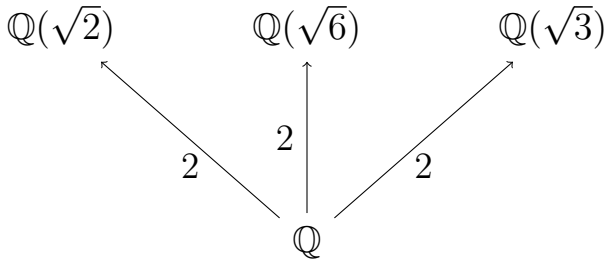
Biểu diễn quan hệ giữa các trường qua lattice

Ở phần trước, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ là mở rộng của $\mathbb{Q}$ và với hai phần tử $a, b \in \mathbb{Q}$ xác định một phần tử $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Do $a + b\sqrt{2} = a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2}$ nên $\{1, \sqrt{2}\}$ là **cơ sở** (hay **basis**) của $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Cơ sở chứa hai phần tử nên ta nói **bậc của mở rộng đơn** (hay **degree**) từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ là 2.

Tương tự, mở rộng từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{Q}(i)$ cũng có bậc là 2 với cơ sở là $(1, i)$.

Như vậy ta cũng các trường $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ và $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ là các mở rộng đơn bậc 2 của $\mathbb{Q}$ (hình 8.1).



Hình 8.1. Mở rộng trường $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ và $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$

Do $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ dẫn ta tới câu hỏi, trường nào nhỏ nhất chứa cả $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$?

Thực hiện tương tự với $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ ở trên ta có trường

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

là trường nhỏ nhất chứa cả $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$.

Ở đây, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ là mở rộng bậc 4 của $\mathbb{Q}$ với cơ sở là $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$.

Bằng việc mở rộng từ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ ta cũng có đây là mở rộng bậc 2 (tương tự chứng minh phía trên cho $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$). Như vậy mở rộng từ $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ cũng là mở rộng bậc 2.

Vậy mở rộng từ $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ là bậc mấy? Để xác định ta cần chứng minh nhận xét sau

Nhận xét 2

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \equiv \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, trong đó $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ là trường nhỏ nhất chứa $\mathbb{Q}$ và $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Chứng minh. Ta chứng minh $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Do $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nên nghịch đảo $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Khi đó, $\dfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \pm \dfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Vế trái sẽ bằng $\sqrt{2}$ hoặc $\sqrt{3}$. Như vậy $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Phép nhân trên trường cho ta $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Như vậy với mọi $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ta có $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Điều này tương đương với $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Nhưng mà $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ là trường nhỏ nhất chứa $\mathbb{Q}$ và $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, và $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ là trường nhỏ nhất chứa $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$, kéo theo chứa cả $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nên $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \equiv \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. □

Ta có $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) = \{a + b\sqrt{6} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Khi đó

$$\mathbb{Q}(\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \{\alpha + \beta(\sqrt{2}+\sqrt{3}) : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{6})\} \tag{8.1}$$

Đặt $\alpha = a+b\sqrt{6}$ và $\beta = c+d\sqrt{6}$, như vậy mỗi phần tử trong $\mathbb{Q}(\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ có dạng

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{6} + (c+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) =& a + (c+3d)\sqrt{2} + (c+2d)\sqrt{3} + b\sqrt{6} \\ =& a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{6} \end{aligned}$$

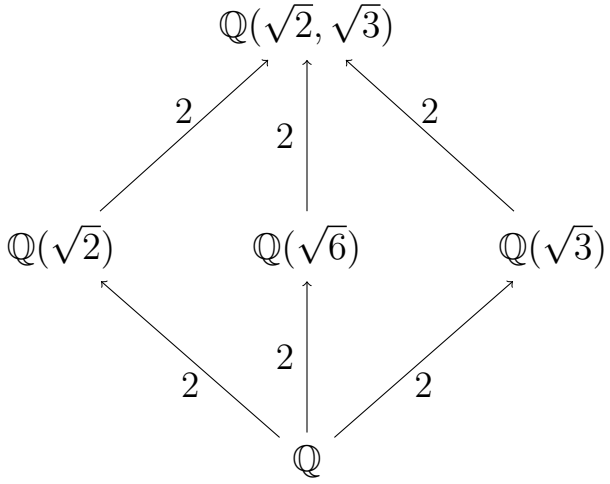
với $a \to a'$, $c+3d \to b'$, $c+2d \to c'$ và $b \to d'$.

Biến đổi này tương đương với hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$$

Ma trận trên khả nghịch trên $\mathbb{Q}$, do đó $\mathbb{Q}(\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \equiv \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Ở dạng biểu diễn 8.1 ta suy ra mở rộng từ $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ là mở rộng bậc 2.

Sơ đồ mở rộng trường bây giờ như sau



Splitting Field

Định nghĩa 2. Trường phân rã (Splitting Field)

Xét trường F và đa thức khác hằng $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ trên $F[x]$ ($a_i \in F$ với mọi $i = 1, 2, \ldots$).

Trường mở rộng E của trường F được gọi là **trường phân rã** (hay **splitting field**) của $p(x)$ nếu tồn tại các phần tử $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ thuộc E sao cho $E = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ và

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

Khi đó ta nói đa thức $p(x) \in F[x]$ phân rã (split) trong E nếu nó phân tích thành các nhân tử bậc nhất (tuyến tính) trong $E[x]$.

Nói nôm na, nếu đa thức có hệ số trong một trường F nào đó (tức thuộc $F[x]$) thì các nghiệm của nó nằm trong một trường lớn hơn chứa F.

Ví dụ 4. Đa thức $f(x) = x^2 - 2$ trên $\mathbb{Q}[x]$ không có nghiệm trên $\mathbb{Q}$. Tuy nhiên $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ là trường chứa $\mathbb{Q}$ và các nghiệm của $f(x)$ là $\pm\sqrt{2}$. Vì vậy $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ là trường phân rã của $f(x)$.

Ví dụ 5. Đa thức $g(x) = x^2 + i$ trên $\mathbb{Q}[x]$ không có nghiệm trên $\mathbb{Q}$. Tuy nhiên $g(x)$ có hai nghiệm là $\pm i$ và $\mathbb{Q}(i)$ chứa cả $\mathbb{Q}$ và $\pm i$ nên $\mathbb{Q}(i)$ là một trường phân rã của $g(x)$.

Ở đây, bậc của đa thức $f(x) = x^2 - 2$ bằng với bậc của mở rộng trường từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Tương tự, bậc của mở rộng trường từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ bằng bậc đa thức $g(x) = x^2 - 3$, và bậc của mở rộng trường từ $\mathbb{Q}$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ bằng với bậc đa thức $h(x) = x^2 - 6$.

Ở trên ta đã chứng minh bậc của mở rộng trường từ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ là 2, điều này tương ứng với bậc của đa thức $k(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3) = x^4 - 5x + 6$.

Tổng kết lại, nếu E là trường phân rã của F trên đa thức $f(x) \in F[x]$ thì bậc của mở rộng trường từ F lên E bằng với bậc của $f(x)$.

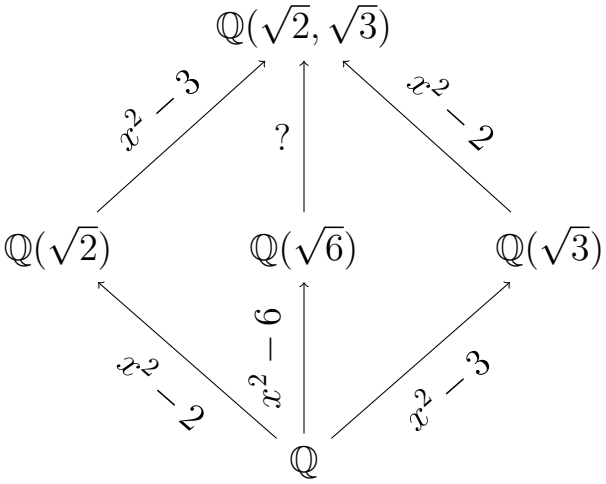
Từ sơ đồ mở rộng trường bên trên ta có sơ đồ với đa thức tương ứng.

Vậy còn mở rộng từ $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ thành $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$? Ở trên ta đã chứng minh rằng đây là mở rộng bậc 2. Vậy chúng ta cần tìm một đa thức bậc 2 có hệ số trong $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ mà không có nghiệm trong $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

Quay lại một chút, ta đã mở rộng $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ lên $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ với sự trợ giúp của phần tử $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Từ đây ta có thể xây dựng đa thức

$$m(x) = x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = x^2 - 5 - 2\sqrt{6}$$

Đa thức $m(x)$ có hệ số trong $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ nhưng không có nghiệm trong $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ mà trong $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Ta có điều phải chứng minh.


$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$
x^2-3
?
x^2-2
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{6})$
$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$
x^2-2
x^2-6
x^2-3
$\mathbb{Q}$

Phần IV

Giải tích

Phần IV: Nội dung

Chương 9

Giải tích

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

9.1 Giới hạn

Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Cho dãy số $\{a_n\}$. Ta nói dãy $\{a_n\}$ có giới hạn hữu hạn L nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ thì

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Ví dụ 1. Xét dãy số cho bởi công thức $a_n = \dfrac{1}{n}$. Ta chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn là 0.

Với mọi $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta cần chứng minh tồn tại số $n_0 \geqslant 1$ sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ thì $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Nói cách khác $a_{n_0} < \varepsilon$, hay tương đương với $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon \Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Vậy ta chỉ cần chọn n_0 thỏa bất đẳng thức trên (luôn tìm được).

Kết luận: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Định nghĩa 2. Dãy số có giới hạn vô cực

Cho dãy số $\{a_n\}$. Ta nói dãy số có giới hạn ở dương vô cực nếu với mọi $M > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geqslant n_0$ thì $a_n > M$.

Nói cách khác, nếu ta chọn một số M rất lớn bất kì, thì mọi số hạng của dãy số kể từ một số hạng nào đó trở đi luôn lớn hơn M. Định nghĩa về dãy số có giới hạn ở âm vô cực cũng tương tự.

Giới hạn của hàm số

Để định nghĩa giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi x tiến tới x_0 ta có hai loại định nghĩa.

Định nghĩa 3. Giới hạn hàm số qua giới hạn dãy số

Xét hàm số $f(x)$. Ta nói hàm số có giới hạn hữu hạn L khi x tiến tới x_0, nếu với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Định nghĩa này tuân theo giới hạn của dãy số. Khi đó mọi phần tử của dãy số từ một số hạng nào đó trở đi cho giá trị $f(x_n)$ tiến về L.

Định nghĩa của hàm số theo kiểu Cauchy (hay còn được gọi là ngôn ngữ $\delta - \varepsilon$) là kiểu định nghĩa phổ biến được giảng dạy trong nhà trường.

Định nghĩa 4. Giới hạn hàm số kiểu Cauchy

Xét hàm số $f(x)$. Ta nói hàm số có giới hạn hữu hạn L khi x tiến tới x_0, nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x mà $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Ta có thể thấy ở đây x tiến về x_0 (khá giống định nghĩa giới hạn hàm số) và $f(x)$ tương ứng tiến về L.

Tương tự ta cũng có giới hạn hàm số ở vô cực.

Định nghĩa 5. Giới hạn hàm số ở vô cực

Với hàm số $f(x)$, ta nói hàm số có giới hạn tại dương vô cực khi x tiến về x_0 nếu với mọi $M > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi x mà $|x - x_0| < \delta$ thì $f(x) > M$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Định nghĩa 6. Giới hạn một bên

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn phải L tại x_0 khi x tiến về bên phải x_0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $0 < x - x_0 < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Nghĩa là chúng ta chỉ xét giới hạn khi x tiến tới x_0 từ bên phải $x > x_0$. Tương tự cho giới hạn trái.

Lưu ý rằng trong nhiều trường hợp, mặc dù cùng tiến tới x_0 nhưng giới hạn trái và giới hạn phải có thể không bằng nhau.

Ví dụ 2. Xét hàm số $y = \frac{1}{x}$. Ta thấy hàm số không xác định tại $x = 0$, và giới hạn trái và phải khác nhau do

$$\lim_{x \to 0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} = -\infty$$

Tính liên tục của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D và x_0 là một điểm thuộc D.

Định nghĩa 7. Hàm số liên tục tại một điểm

Ta nói hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Định nghĩa tương tự cho liên tục trái và liên tục phải (ta lấy giới hạn một bên).

Như vậy, có 3 khả năng hàm số không liên tục tại một điểm.

1. Hàm số không xác định tại x_0
2. Hàm số xác định tại x_0 nhưng giới hạn tại đó không bằng $f(x_0)$
3. Giới hạn trái và giới hạn phải không bằng nhau

Nếu hàm số không liên tục tại x_0 ta gọi hàm số bị **gián đoạn** tại x_0.

Nếu hàm số liên tục tại mọi điểm trên khoảng (a, b) thì ta nói hàm số liên tục trên khoảng đó.

9.2 Đạo hàm

Định nghĩa 8. Đạo hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên miền D và x_0 là điểm thuộc D. Ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 (hoặc khả vi tại x_0) nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ký hiệu đạo hàm của f tại x_0 là $f'(x_0)$.

Ví dụ 3. Xét hàm số $f(x) = x^2 + 1$ trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm tại $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(x) - f(x_0) = x^2 + 1 - (x_0^2 + 1) = (x - x_0)(x + x_0)$.

Khi đó $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = x + x_0$ nên ta có $\lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$.

Nếu hàm số khả vi trên mọi điểm thuộc khoảng (đoạn) nào đó thì ta nói hàm số khả vi trên khoảng (đoạn) đó và ký hiệu là $f'(x)$.

Với ví dụ trên, ta thấy giới hạn tồn tại với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$ nên ta có thể thay x_0 bởi x và có $f'(x) = 2x$ với $f(x) = x^2 + 1$.

Nhận xét 1

Từ định nghĩa ta thấy rằng nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì nó cũng liên tục tại x_0. Tuy nhiên chiều ngược lại không đúng. Ví dụ với hàm số $y = |x|$, hàm số liên tục tại $x = 0$ nhưng giới hạn (đạo hàm) phải là 1, còn giới hạn (đạo hàm) trái là -1.

Về mặt hình ảnh, khi hàm số khả vi tại một điểm thì đồ thị sẽ "trơn", không gấp khúc tại điểm đó.

Cực trị

Đầu tiên chúng ta cần một định lý về tính đơn điệu của hàm số khả vi.

Định lí 1

Xét hàm số $f(x)$ khả vi trên khoảng (a, b). Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên (a, b).

Tương tự, $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên (a, b).

Định nghĩa 9. Cực tiểu của hàm số

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b). Điểm $(x_0, f(x_0))$ được gọi là **cực tiểu** của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một lân cận U chứa x_0 nằm trong khoảng (a, b) sao cho với mọi $x \in U$ thì $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Định nghĩa 10. Cực đại của hàm số

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b). Điểm $(x_0, f(x_0))$ được gọi là **cực đại** của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một lân cận U chứa x_0 nằm trong khoảng (a, b) sao cho với mọi $x \in U$ thì $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Theo định nghĩa cực tiểu thì chỉ cần tồn tại lân cận chứa x_0 mà $f(x) \geqslant f(x_0)$ thì điểm đó là cực tiểu. Như vậy một hàm số có thể có nhiều cực tiểu, tương tự cũng có thể có nhiều cực đại.

Lưu ý rằng cực đại và cực tiểu không phải điểm chỉ giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số. Nó chỉ lớn nhất hoặc nhỏ nhất trong vùng lân cận đó theo định nghĩa, nên người ta còn gọi là cực trị địa phương.

Định nghĩa 11. Dãy Cauchy

Dãy (x_n) được gọi là dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho, với mọi $m, n > N_0$ thì $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Định lí 2. Tiêu chuẩn Cauchy

Dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Định lí 3. Bổ đề Fermat

Cho f là một hàm số có đạo hàm trên (a, b). Nếu $x_0 \in (a, b)$ là một điểm cực trị của f thì ta có $f'(x_0) = 0$.

Chứng minh. Ta chứng minh trong trường hợp x_0 là điểm cực tiểu. Trường hợp điểm cực đại tương tự.

Hàm f có đạo hàm trên (a, b) nên tại điểm x_0 nó có đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải, và hai đạo hàm này bằng nhau.

Ta có $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Vì $x \to x_0^+$ nghĩa là $x > x_0$ (x tiến tới x_0 từ bên phải), và do x_0 là cực tiểu $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$ nên phân số dưới dấu giới hạn lớn hơn 0. Suy ra $f'(x_0^+) \geqslant 0$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $f'(x_0^-) \leqslant 0$. Và do $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$ nên $f'(x_0) = 0$.

Ta có điều phải chứng minh. □

Định lí 4. Định lí Rolle

Xét hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$, có đạo hàm trên khoảng (a, b) và $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại c thuộc (a, b) sao cho $f'(c) = 0$.

Định lí 5. Định lí Lagrange

Xét hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$, có đạo hàm trên khoảng (a, b). Khi đó tồn tại c thuộc (a, b) sao cho $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.

Định nghĩa 12. Hàm lõm

Hàm số f liên tục trên khoảng $\mathbb{I}$ nếu với mọi α, β mà $\alpha + \beta = 1$ ta đều có

$$f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{I} \tag{9.1}$$

Chương 10

Lý thuyết xác suất

10.1 Introduction

Định nghĩa xác suất

Định nghĩa 1. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Định nghĩa thống kê của xác suất nói rằng, giả sử trong một phép thử có n khả năng có thể xảy ra. Xét một biến cố A xảy ra khi thực hiện phép thử có k khả năng xảy ra. Khi đó xác suất của biến cố A ký hiệu là $P(A)$ và được tính

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Dễ thấy, do biến cố A là một trường hợp nhỏ trong tổng thể tất cả trường hợp khi thực hiện phép thử, do đó $0 \leq k \leq n$. Nghĩa là

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

với mọi biến cố A bất kì.

Ví dụ 1. Xét phép thử tung hai đồng xu. Gọi A là biến cố hai đồng xu cùng mặt.

Ta ký hiệu S là đồng xu sấp, N là đồng xu ngửa. Khi đó các trường hợp có thể xảy ra của phép thử là $S-S$, $S-N$, $N-S$, $N-N$ (4 trường hợp).

Trong khi đó, các trường hợp có thể xảy ra của biến cố A là $S-S$, $N-N$ (2 trường hợp).

Kết luận: $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Chúng ta gọi tập hợp tất cả các trường hợp khi thực hiện phép thử là **không gian mẫu** và ký hiệu là Ω. Mỗi phần tử trong không gian mẫu được gọi là **biến cố sơ cấp**. Trong ví dụ trên, $\Omega = \{S-S, S-N, N-S, N-N\}$.

Tập hợp các trường hợp có thể xảy ra của biến cố gọi là **không gian biến cố** và ký hiệu là Ω_A. Trong ví dụ trên, $\Omega_A = \{S-S, N-N\}$.

Như vậy, $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

Ví dụ 2. Tung hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất tổng số nút của hai con súc sắc bằng 4.

Việc tung mỗi con súc sắc có 6 trường hợp. Do đó $|\Omega| = 6^2 = 36$

Gọi A là biến cố tổng số nút của hai con súc sắc bằng 4. Ta có các trường hợp là $4 = 1+3 = 3+1 = 2+2$ (3 trường hợp).

Như vậy $|\Omega_A| = 3$ và $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Định nghĩa 2. Biến cố xung khắc

Hai biến cố được gọi là **xung khắc** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia chắc chắn không xảy ra. Nói cách khác giao của chúng bằng rỗng.

Khi đó, nếu A và B là hai biến cố xung khắc,

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Ta còn có thể ký hiệu $P(A+B)$ là $P(A \cup B)$ (hợp hai biến cố).

Định nghĩa 3. Biến cố độc lập

Hai biến cố được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến việc xảy ra của biến cố kia.

Khi đó, nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Xác suất có điều kiện

Xét hai tập hợp A và B. Số phần tử của phép hợp hai tập hợp trong trường hợp tổng quát được tính như sau:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Tương tự, xác suất của phép cộng xác suất đối với hai biến cố có giao khác rỗng là:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Xét các tập hợp A_1, A_2, ..., A_n. Khi đó, số phần tử khi hợp các tập hợp này là:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| \\ + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\ = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_i} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}|\end{aligned}$$

Tương tự, ta có phép cộng xác suất:

Định lí 1. Phép cộng xác suất mở rộng

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_i} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i})$$

Định lí 2. Xác suất có điều kiện

Xét hai biến cố A và B. Khi đó xác suất xảy ra của biến cố B với điều kiện biến cố A xảy ra là:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{10.1}$$

Lúc này, A và B không độc lập.

Tổng quát, nếu n biến cố A_i, $i = 1, \ldots, n$ không độc lập thì:

$$\begin{aligned}P(A_1 A_2 \cdots A_n) =& P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 A_1) \cdots \\ & P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Xét hai câu hỏi trắc nghiệm có 4 lựa chọn. Tính xác suất học sinh trả lời đúng câu thứ hai với điều kiện câu đầu trả lời sai.

Giải. Gọi A là biến cố câu đầu tiên học sinh trả lời sai. $P(A) = \frac{3}{4}$

Gọi B là biến cố câu thứ hai học sinh trả lời đúng. $P(B) = \frac{1}{4}$.

Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{3}{16}$

Như vậy, xác suất học sinh trả lời đúng câu thứ hai với điều kiện câu đầu trả lời đúng là: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3/16}{3/4} = \frac{1}{4}$

Công thức xác suất đầy đủ

Định nghĩa 4. Hệ biến cố đầy đủ

Xét phép thử có không gian mẫu là Ω. Một hệ các biến cố A_1, A_2, ..., A_n được gọi là **đầy đủ** nếu chúng thỏa các điều kiện:

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$

Định lí 3. Công thức xác suất đầy đủ

Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ biến cố đầy đủ. Khi đó, với biến cố B bất kì trong phép thử:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots P(A_n) \cdot P(B|A_n) \tag{10.2}$$

Định lí 4. Công thức Bayes

Xét hệ có n biến cố đầy đủ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Với biến cố B bất kì thì:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

với $1 \leq i \leq n$.

10.2 Biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên

Xét phép thử với không gian mẫu Ω. Với mỗi biến cố sơ cấp $\omega \in \Omega$ ta liên kết với một số thực $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$ thì ξ được gọi là **biến ngẫu nhiên** (BNN).

Định nghĩa 5. Biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên ξ của một phép thử với không gian mẫu Ω là ánh xạ:

$$\xi = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

Giá trị $\xi(\omega)$ được gọi là một giá trị của biến ngẫu nhiên ξ.

- Nếu $\xi(\Omega)$ là một tập hữu hạn $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ hay tập vô hạn đếm được thì ξ được gọi là **biến ngẫu nhiên rời rạc**.
- Nếu $\xi(\Omega)$ là một khoảng của $\mathbb{R}$ hay toàn bộ $\mathbb{R}$ thì ξ được gọi là **biến ngẫu nhiên liên tục**.

Định nghĩa 6. Hàm phân phối

Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên ξ là hàm số $F(x)$, xác định bởi:

$$F(x) = P(\xi \leq x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{10.3}$$

Ở đây ta viết gọn $P(\xi \leq x)$ từ $P(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\})$. Tập hợp $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}$ có thể không thuộc một biến cố nào, do đó có thể là tập rỗng (ứng với xác suất là 0).

Tính chất của hàm phân phối

Tính chất 1. Hàm phân phối $F(x)$ không giảm trên mọi đoạn thẳng.

Chứng minh. Đặt $x_2 > x_1$. Ta thấy rằng

$$\{\xi \leq x_2\} = \{\xi \leq x_1\} + \{x_1 < \xi \leq x_2\},$$

Do đó nếu ta lấy xác suất thì cũng có

$$P(\xi \leq x_2) = P(\xi \leq x_1) + P(x_1 < \xi \leq x_2)$$

Xác suất luôn không âm, hay $P(x_1 < \xi \leq x_2) \geq 0$, suy ra $P(\xi \leq x_2) \geq P(\xi \leq x_1)$, hay $F(x_2) \geq F(x_1)$. □

Tính chất 2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Tính chất 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Tính chất 4. Hàm phân phối $F(x)$ liên tục phải trên toàn trục số.

Để chứng minh các tính chất 2, 3, 4 chúng ta cần các tiên đề của sự liên tục (continunity axioms) và sẽ không đề cập ở đây.

Biến ngẫu nhiên rời rạc

Cho BNN rời rạc $\xi = \xi(\omega)$, $\xi = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Giả sử $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ với xác suất tương ứng là $P(\xi = a_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$

ξ	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

Ta có thể biểu diễn biến ngẫu nhiên và xác suất tương ứng của nó bằng bảng phân phối xác suất của ξ.

Rõ ràng rằng $p_n \geq 0$ với mọi n. Hơn nữa

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

Không gian mẫu lúc này là hợp của các tập biến ngẫu nhiên rời rạc:

$$\Omega = \{\xi = a_1\} \cup \{\xi = a_2\} \cup \dots$$

Các biến ngẫu nhiên xung khắc nhau (vì ξ không thể nhận hai giá trị khác nhau cùng lúc), do đó xác suất cả không gian mẫu là

$$1 = P(\Omega) = P(\xi = a_1) + P(\xi = a_2) + \dots = p_1 + p_2 + \dots$$

Định nghĩa 7. Phân phối nhị thức

Biến ngẫu nhiên ξ được gọi là có **phân phối nhị thức** với tham số p, n, với $p \in (0, 1)$ và n là số tự nhiên, nếu ξ nhận các giá trị $0, 1, \dots, n$ và

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{10.4}$$

Ở đây $q = 1 - p$.

Ví dụ 4. Một bài kiểm tra có 100 câu hỏi trắc nghiệm bốn đáp án. Xác suất chọn ngẫu nhiên đúng đáp án của mỗi câu hỏi thì bằng nhau và bằng $\frac{1}{4}$.

Ở đây xác suất chọn ngẫu nhiên đúng đáp án của một câu hỏi bất kì là $p = \frac{1}{4}$, và số lượng câu hỏi là $n = 100$.

Gọi ξ là biến ngẫu nhiên số câu hỏi trả lời đúng. Khi đó ξ nhận các giá trị $0, 1, \dots, 100$.

Do đó bài toán này có phân phối nhị nhức và

$$P(\xi = k) = C_{100}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{100-k}$$

Định nghĩa 8. Phân phối Poisson

Biến ngẫu nhiên ξ được gọi là có **phân phối Poisson** với tham số λ, nếu ξ nhận các giá trị $0, 1, \ldots, n$ và

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{10.5}$$

Tham số λ thể hiện số lần trung bình mà một sự kiện xảy ra trong một khoảng thời gian nhất định. Khi đó, nếu một biến ngẫu nhiên có số lần xuất hiện trung bình của một sự kiện trong thời gian t thì nó có phân phối Poisson với tham số λt, với λ là số lần trung bình trong một đơn vị thời gian.

Biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 9. Biến ngẫu nhiên liên tục

Biến ngẫu nhiên ξ được gọi là **liên tục**, nếu nó nhận giá trị tại mọi điểm thuộc một đoạn liên tục nào đó trên trục số, và tồn tại một hàm số không âm $p(x)$ sao cho với mọi đoạn $[a, b]$ (hữu hạn hoặc vô hạn) ta có

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b p(x)\,dx \tag{10.6}$$

Hàm $p(x)$ được gọi là **hàm mật độ** của biến ngẫu nhiên ξ.

Tương tự biến ngẫu nhiên rời rạc, $p(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và khi hai cận là vô cực thì biến ngẫu nhiên bao quát toàn bộ không gian mẫu. Nghĩa là

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$

Từ định nghĩa của hàm phân phối $F(x) = P(\xi \leq x)$ ta có hai tính chất của hàm mật độ:

1. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$
2. $p(x) = F'(x)$

Tính chất thứ nhất là từ định nghĩa hàm phân phối. Tính chất thứ hai suy ra từ việc cận trên của tích phân là hữu hạn.

Hàm mật độ của X là

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{khi } x = x_i, \\ 0 & \text{khi } x \neq x_i, \forall i \end{cases}$$

Nhận xét 1

Ta có các lưu ý sau:

- $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots$
- $P(a < X \leq b) = \sum\limits_{a<x_i\leq b} p_i$

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục

Định nghĩa 10

Hàm số $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ được gọi là **hàm mật độ** của biến ngẫu nhiên liên tục X nếu:

$$P(a \leq X \leq b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Nhận xét 2

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ và $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Ý nghĩa hình học. Xác suất của biến ngẫu nhiên X nhận giá trị trong $[a, b]$ bằng diện tích hình thang cong giới hạn bởi $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ và Ox.

Phần V

Hình học

Phần V: Nội dung

Chương 11

Hình học giải tích

11.1 Theo dòng lịch sử

Hình học xuất hiện từ thời xa xưa, xuất phát từ những nhu cầu thực tế nhất của con người là đo đạc để phân chia đất đai, xây dựng, canh tác, ... Từ đó con người đã có nhận thức rất sớm về quan hệ song song và vuông góc giữa hai đường thẳng.

Một cách hình ảnh (mà thật ra hình học là môn học về hình ảnh) thì hai đường thẳng song song không cắt nhau dù có kéo dài chúng ra vô tận. Các đường thẳng song song luôn có nhiều điều thú vị, cả ở mặt phẳng Euclid lẫn trong không gian. Đầu tiên phải kể đến định lý mang tên triết gia vĩ đại của Hy Lạp: Thales.

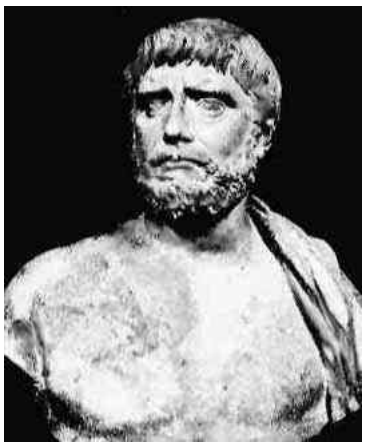
Thales của Miletus

Thales của Miletus được cho rằng sinh vào khoảng năm 624 Trước Công nguyên (TCN) và mất năm 547 TCN tại Miletus (Thổ Nhĩ Kì ngày nay)[1].

Ông được xem là nhà triết học đầu tiên khi không cố gắng giải thích tự nhiên bằng thần thoại hay các thế lực siêu nhiên như trước. Trường phái triết học do ông sáng lập, trường phái Milet, cho rằng mọi vật có nguồn gốc từ nước. Nhà triết học nổi tiếng Aristotle đánh giá rằng Thales là người sáng lập ra *triết học duy vật sơ khai*.

Trong toán học, Thales được biết tới với định lý mang tên ông về các đường song song. Định lý Thales được phát biểu như sau:

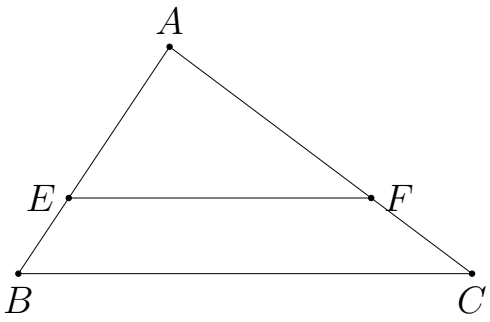
[1] `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thales/`



Thales của Miletus

Định lí 1. Định lý Thales

Trong một tam giác, đường thẳng song song với một cạnh chắn trên hai cạnh còn lại các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Hình 11.2. Định lý Thales trên mặt phẳng

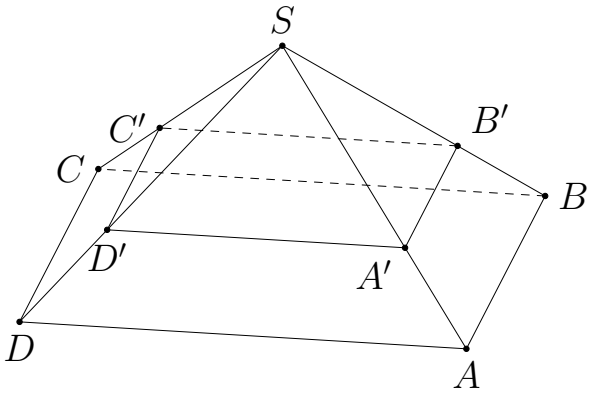
Theo định lý Thales, nếu EF song song với BC thì ta có $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$ (hình 11.2).

Không dừng lại ở mặt phẳng, khi mở rộng lên không gian định lý Thales cũng cho chúng ta một kết quả quan trọng khi nói tới các mặt phẳng song song nhau.

Định lí 2. Định lý Thales trong không gian

Trong khối chóp, mặt phẳng song song mặt đáy chắn các cạnh nối từ đỉnh hình chóp tới các đỉnh của mặt phẳng đáy các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Theo định lý Thales, nếu mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ thì $\dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{SB}{SB'} = \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SD}{SD'}$ (hình 11.3).



Hình 11.3. Định lý Thales trong không gian

Pythagoras của Samos

Khi nhắc tới vuông góc, chúng ta thường nhớ tới định lý ngày nào được học ở thời học sinh: định lý Pythagoras. Định lý này nói về quan hệ giữa độ dài các cạnh trong một tam giác vuông. Định lý tuy đơn giản nhưng có ý nghĩa rất quan trọng trong đời sống và khoa học của con người suốt chiều dài lịch sử. Đây cũng là tiền đề cho định lý mang tính lịch sử của nhân loại: định lý cuối cùng của Fermat.

Pythagoras của Samos

Pythagoras của Samos cũng là nhà triết học Hy Lạp cổ, được cho rằng sinh vào khoảng năm 570 TCN và mất năm 490 TCN[2]. Ông được học tập từ nhà triết học Thales và cũng có nhiều đóng góp cho sự phát triển của toán học, thiên văn học và âm nhạc. Tuy nhiên khác với thầy mình, trường phái triết học của ông cho rằng những con số là nguồn gốc của vạn vật và sử dụng những con số để giải thích những hiện tượng khoa học. Từ đây, các lý thuyết về âm nhạc được ra đời, cụ thể là các mối liên hệ về tần số với sự rung của dây nhạc cụ.

Ông là một trong những người hiếm hoi cho phép cả phụ nữ đi học ở lớp của mình vào thời ấy. Điều đó giúp phổ biến toán học nói riêng và kiến thức

[2]https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras/

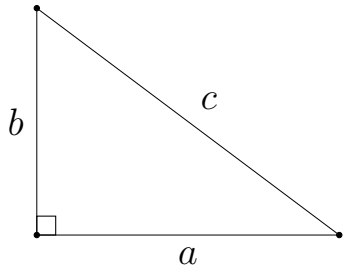
nói chung tới nhiều tầng lớp nhân dân. Tuy nhiên ông cũng có một hội kín rất thú vị. Như đã nói ở trên, trường phái triết học Pythagoras cố gắng giải thích nguồn gốc vạn vật bằng những con số. Điều này đã dẫn họ tới những khám phá động trời vào thời ấy.

Một trong những khám phá đó là về sự tồn tại của số vô tỉ dựa vào định lý mang tên ông. Lịch sử đã chỉ ra rằng trước Pythagoras, người Babylon và Ai Cập đã tìm ra rất nhiều bộ số nguyên (a, b, c) thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$ là độ dài ba cạnh tam giác vuông. Định lý Pythagoras mà ngày nay chúng ta biết được phát biểu rằng:

Định lí 3. Định lý Pythagoras

Trong một tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

Như vậy nếu gọi độ dài cạnh huyền là c, độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là a và b thì $a^2 + b^2 = c^2$ (hình 11.5).



Hình 11.5. Định lý Pythagoras

Nếu $a = b = 1$ thì sao? Khi đó bình phương độ dài cạnh huyền $c^2 = 2$. Tuy nhiên không thể tìm ra một số hữu tỉ nào để bình phương lên là 2 cả. Phát hiện này là một chấn động đối với thời Pythagoras và ông yêu cầu tất cả thành viên trong hội phải giữ kín bí mật về sự phát hiện này. Tuy nhiên thông tin vẫn lọt ra ngoài và truyền thuyết kể rằng ông đã xử tội chết cho thành viên của hội không tuân thủ.

Pythagoras đã đưa một khái niệm cực kì quan trọng trong toán học, gọi là *chứng minh* (proof). Để chứng minh một mệnh đề là đúng, chúng ta cần các mệnh đề (thường đơn giản hơn) đúng trước đó. Bằng các phép suy luận thích hợp dựa trên các mệnh đề đúng trước đó, chúng ta có thể kết luận rằng mệnh đề cần chứng minh là đúng. Phép chứng minh có thể gọi là *xương sống* của toán học, vì nếu không có một phép chứng minh đúng đắn thì một mệnh đề không thể được xác định được là có đúng hay không. Trong trường hợp của Fermat, khi ông đưa ra định lý Fermat nhưng không kèm chứng minh (vì lề sách quá chật nên không viết lời giải được) thì chúng ta không thể biết định lý Fermat có đúng hay không (?).

Nếu việc suy luận dựa trên các mệnh đề, hoặc định lý, đã đúng trước đó, thì phải có một lúc nào đó việc này dừng lại. Chúng ta không thể suy ngược tới vô hạn lần được. Do đó chúng ta cần những mệnh đề luôn đúng nhưng tính đúng đắn của nó được kiểm nghiệm trong thực tiễn. Chúng được gọi là *tiên đề* (axiom). Nhân vật tiếp theo được đề cập tới sẽ dẫn chúng ta tới hệ thống tiên đề làm nền tảng cho hình học.

Euclid của Alexandria

Đúng vậy, Euclid là người đặt nền móng cho hình học với bộ sách nổi tiếng *Elements* của mình. Trong bộ sách này đề cập tới những tiên đề, định lý làm nền tảng cho bộ môn hình học và vẫn còn ý nghĩa cho tới tận ngày nay. Những gì viết trong đó không quá xa lạ với những gì được giảng dạy trong nhà trường.

Euclid của Alexandria

Euclid của Alexandria sinh vào khoảng năm 325 TCN và mất vào khoảng năm 265 TCN[3]. Thông tin về ông không có nhiều. Nhưng chỉ mỗi bộ sách *Elements* cũng đủ để người đời sau cho rằng ông là người có ảnh hưởng nhất trong 2000 năm lịch sử phát triển của toán học.

Năm tiên đề cơ bản của hình học được ông phát biểu trong bộ *Elements* được phát biểu như sau:

1. Qua hai điểm bất kì luôn vẽ được một đường thẳng
2. Đường thẳng có thể kéo dài vô hạn về cả hai phía
3. Ta có thể xác định một đường tròn bằng tâm và bán kính của nó
4. Mọi góc vuông đều bằng nhau
5. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khiến tổng hai góc trong cùng phía nhỏ hơn hai vuông thì hai đường thẳng đó chắc chắn sẽ cắt nhau tại một điểm nào đó

Tiên đề số 5 là rắc rối và phức tạp nhất. Nó không thực sự tự nhiên và có nhiều sự vướng mắc. Đây chính là tiên đề cho sự ra đời của hình học phi-Euclid

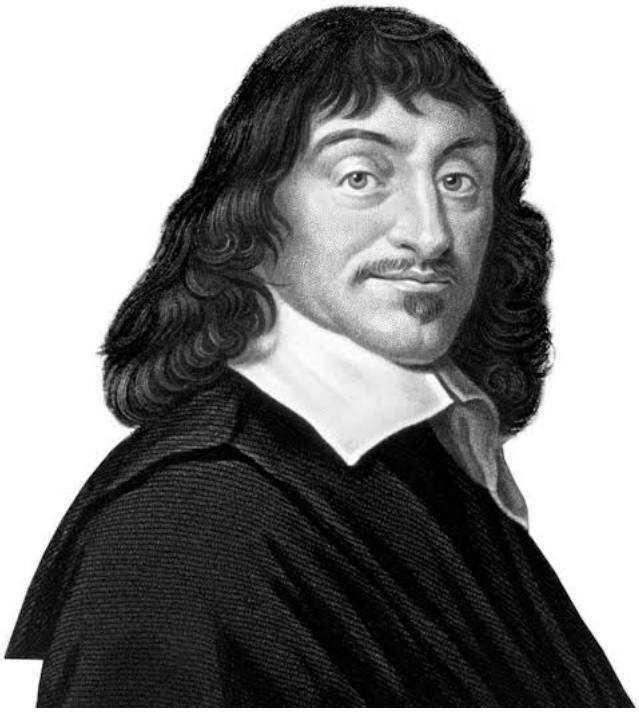
[3] `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/`

hơn 1500 năm sau.

Bộ *Elements* của Euclid bao gồm 13 quyển. Trong đó đề cập tới rất nhiều vấn đề của hình học, từ những phần tử đơn giản nhất cấu tạo nên hình học là điểm, đoạn thẳng, đường thẳng, tới những hình học lớn hơn như hình chữ nhật, hình tròn, đa giác, mặt phẳng. Thậm chí ông cũng đã có những dấu chân ở hình học không gian như hình chóp, hình cầu, hình nón ([5], [6]).

11.2 Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

Cuộc cách mạng trong hình học xảy ra khi nhà toán học lãng tử René Descartes phát minh ra hệ tọa độ và từ đó mọi đối tượng hình học có thể được biểu diễn bởi các phương pháp đại số như phương trình, đẳng thức.



René Descartes (1596-1650)

Danh mục thuật ngữ và ký hiệu

Đầu tiên chúng ta thống nhất các thuật ngữ cũng như ký hiệu được sử dụng kể từ đây.

Điểm là đơn vị cơ bản của hình học. Bất kì đối tượng hình học nào cũng là một *tập hợp điểm*. Điểm được ký hiệu bởi chữ in hoa, ví dụ như A, B_1, B_2.

Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước. Đường thẳng có thể kéo dài vô hạn về hai phía. Đường thẳng được ký hiệu bởi chữ in thường hoặc chữ Hy Lạp trong ngoặc đơn, ví dụ như (d), (Δ).

Đoạn thẳng chỉ phần đường thẳng nằm giữa hai điểm.

Nửa đường thẳng chỉ phần đường thẳng nằm một phía của một điểm trên đường thẳng và chỉ kéo dài vô hạn về phía đó.

Vector là đoạn thẳng có hướng. Với điểm đầu là A và điểm cuối là B thì vector từ A tới B được ký hiệu là $\overrightarrow{AB}$. Để chỉ một vector không cần biết điểm đầu và điểm cuối ta dùng chữ thường in đậm, ví dụ như $\boldsymbol{a}$.

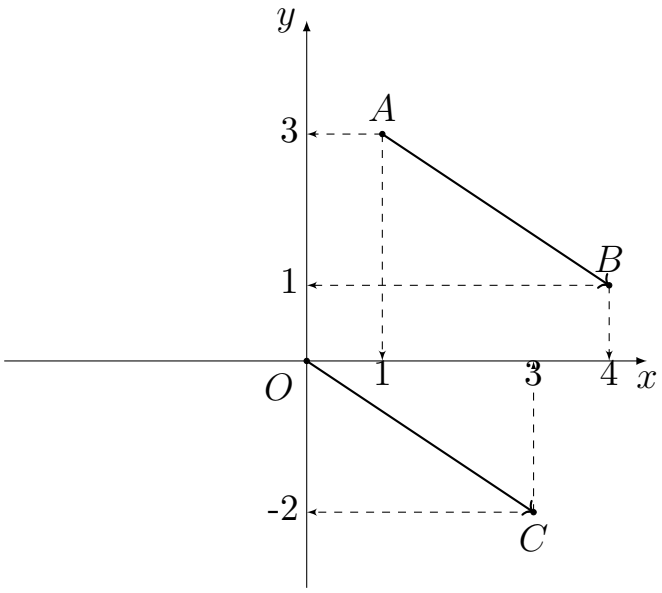
Góc giữa hai vector $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là góc $\angle AOB$ và ký hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Tương tự đối với vector $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ thì góc giữa chúng ký hiệu là $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Vector trong mặt phẳng

Trong hệ tọa độ Oxy với tâm O và hai trục Ox (trục hoành) và Oy (trục tung) vuông góc nhau, đặt $O = (0, 0)$ là tọa độ của tâm O.

Tiếp theo, mọi điểm trong mặt phẳng Euclid đi liền với cặp số (x, y) chỉ tọa độ của điểm đó. Ví dụ $A = (1, 3)$, $B = (4, 1)$.



Hình 11.8. Tọa độ của điểm trong mặt phẳng

Tọa độ của điểm cũng là tọa độ của vector từ O tới điểm đó. Với hình 11.8 thì $\overrightarrow{OA} = (1, 3)$ và $\overrightarrow{OB} = (4, 1)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ khi đó sẽ là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4, 1) - (1, 3) = (3, -2)$. Cũng theo hình 11.8 thì ta thấy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = (3, -2)$.

Như vậy, nếu ta có hai điểm $A = (x_A, y_A)$ và $B = (x_B, y_B)$ thì vector $\overrightarrow{AB}$ là

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \tag{11.1}$$

Tích vô hướng của hai vector $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ và $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$ được định

nghĩa là

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{11.2}$$

Ta cũng có thể ký hiệu tích vô hướng là $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Ta ký hiệu $\|\boldsymbol{a}\|$ là độ dài (chuẩn Euclid, Euclid norm) của vector $\boldsymbol{a}$. Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc, theo định lý Pythagoras, độ dài của vector là độ dài cạnh huyền tam giác vuông (hình 11.8). Như vậy, độ dài đoạn thẳng AB với $A = (x_A, y_A)$ và $B = (x_B, y_B)$ là

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{11.3}$$

Khi đó cosin góc giữa hai vector $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ là

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \tag{11.4}$$

Nếu góc giữa hai vector bằng 90 độ thì hai vector được gọi là vuông góc nhau. Khi đó tích vô hướng $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

Phương trình đường thẳng trong mặt phẳng

Theo tiên đề Euclid, một đường thẳng được xác định khi biết hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng đó. Trong hệ tọa độ, chúng ta có hai cách tìm phương trình đường thẳng.

Bằng vector pháp tuyến. Vector pháp tuyến của đường thẳng là vector vuông góc với mọi vector có phương là đường thẳng đó. Giả sử $\boldsymbol{v} = (a, b)$ là vector pháp tuyến của đường thẳng đi qua điểm $M_0 = (x_0, y_0)$. Khi đó đường thẳng đi qua qua M_0 nhận $\boldsymbol{v}$ làm vector pháp tuyến là *tập hợp điểm* $M = (x, y)$ trên mặt phẳng sao cho $\boldsymbol{v} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$. Điều này tương đương với

$$\boldsymbol{v} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0 \tag{11.5}$$

Bằng vector chỉ phương. Vector chỉ phương của đường thẳng là vector có phương song song với đường thẳng đó. Giả sử $\boldsymbol{v}' = (a', b')$ là vector chỉ phương của đường thẳng đi qua điểm $M_0 = (x_0, y_0)$. Khi đó đường thẳng đi qua M_0 nhận $\boldsymbol{v}'$ làm vector chỉ phương là *tập hợp điểm* $M = (x, y)$ trên mặt phẳng sao cho $\boldsymbol{v}' \parallel \overrightarrow{M_0 M}$. Điều này tương đương với

$$\boldsymbol{v}' \parallel \overrightarrow{M_0 M} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} \tag{11.6}$$

1. Cả hai cách biểu diễn khi khai triển ra đều có dạng $ax + by + c = 0$ với c là hằng số. Đây được gọi là dạng tổng quát của phương trình đường thẳng.

2. Cách viết $\dfrac{x-x_0}{a'} = \dfrac{y-y_0}{b'}$ được gọi là dạng chính tắc của phương trình đường thẳng.
3. Dạng chính tắc của phương trình đường thẳng còn có một tác dụng đặc biệt khác

$$\frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = t$$

với $t \in \mathbb{R}$. Khi đó tọa độ $M = (x, y)$ có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + a't \\ y = y_0 + b't \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{11.7}$$

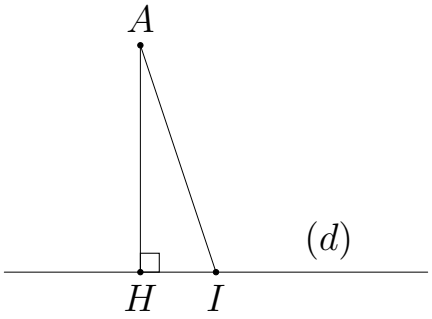
Đây được gọi là phương trình dạng tham số.

Chúng ta chú ý rằng nếu đường thẳng song song với một trong hai trục tọa độ thì vector chỉ phương của nó sẽ cùng phương với vector đơn vị $(1, 0)$ hoặc $(0, 1)$. Do đó không thể viết dưới dạng chính tắc được (không thể chia cho 0) nhưng có thể viết dưới dạng tổng quát hoặc dạng tham số.

Khoảng cách giữa điểm và đường thẳng

Nhắc lại một chút kiến thức cơ sở. **Khoảng cách** từ một điểm A nằm ngoài đường thẳng (d) là độ dài đoạn thẳng AH với $H \in (d)$ sao cho AH nhỏ nhất (hình 11.9).

Khi đó H được gọi là **hình chiếu** của A lên đường thẳng (d) và AH là **khoảng cách** từ A tới (d). Do AH là đoạn thẳng có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi $AH \perp (d)$.



Hình 11.9. Hình chiếu và khoảng cách tới đường thẳng

Như vậy, để tìm hình chiếu của điểm A lên đường thẳng (d), ta dựng đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với (d).

Giả sử phương trình đường thẳng (d) với vector pháp tuyến $\boldsymbol{v} = (a, b)$ là $(d) : ax + by + c = 0$.

Gọi (d') là đường thẳng đi qua $A = (x_0, y_0)$ và vuông góc với d. Do $\boldsymbol{v}$ là vector pháp tuyến của (d) nên $\boldsymbol{v}$ là vector chỉ phương của (d'). Khi đó phương trình dạng tham số của (d') là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Gọi H là hình chiếu của A lên (d). Khi đó H là giao điểm của (d) và (d'). Vì $H \in (d')$ nên tọa độ của H có dạng $(x_0 + at, y_0 + bt)$ với t nào đó thuộc $\mathbb{R}$. Chúng ta sẽ đi tìm t này.

Vì $H \in (d)$ nên ta thay tọa độ của H vừa tìm được vào phương trình của (d) thu được

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

Như vậy là ta đã tìm được t từ đó xác định được tọa độ của H.

Từ đây ta tính được khoảng cách từ A tới (d) hay nói cách khác là độ dài đường AH. Ta có $A = (x_0, y_0)$ và $H = (x_0 + at, y_0 + bt)$ nên $\overrightarrow{AH} = (at, bt)$. Suy ra

$$\begin{aligned} AH =& \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(at)^2 + (bt)^2} = |t|\sqrt{a^2 + b^2} \\ =& \left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

11.3 Đạo hàm

Phép tính vi tích phân đã được con người nghiên cứu từ lâu. Câu chuyện về ai là người phát minh ra phép tính vi tích phân: Newton hay Leibniz, được coi là một trong những vụ tranh cãi đáng xấu hổ nhất lịch sử toán học. Nhưng họ cũng đã để lại một mảnh đất màu mỡ cho toán học về sau.

Cơ học và sự ra đời của đạo hàm

Trường phái Newton sử dụng đạo hàm như công cụ khảo sát vận tốc từ quãng đường. Ở bậc trung học chúng ta biết rằng *vận tốc trung bình* bằng quãng đường chia thời gian. Tuy nhiên điều đó chỉ đúng cho *chuyển động thẳng đều*. Nếu quãng đường là một hàm số phụ thuộc thời gian (quãng đường là $s(t)$ với t là thời gian) thì điều đó không đúng nữa.

Do quãng đường phụ thuộc thời gian nên có thể là vận tốc cũng phụ thuộc thời gian? Hợp lí đấy. Nhưng với mỗi một giá trị thời gian t cho ta một vị

trí $s(t)$ trên trục số, còn vận tốc thì không thể phụ thuộc một giá trị thời gian được. Rõ ràng vật phải di chuyển một quãng đường từ thời gian t_0 tới t_1 thì mới có vận tốc trên quãng đường đó chứ?

Cách tiếp cận ở đây là, chúng ta cho sự thay đổi thời gian, tức hiệu $\Delta t = t_1 - t_0$, rất nhỏ. Khi đó vật đi từ $s(t_0)$ tới $s(t_1)$, vậy là chúng ta có thể tính vận tốc với công thức $v = \dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$. Do Δt rất nhỏ, hay *tiến về 0*, thì vận tốc gần như xảy ra vào đúng một thời điểm. Do đó vận tốc lúc này được gọi là *vận tốc tức thời*. Đó cũng chính là ý nghĩa cơ học và sự ra đời của đạo hàm theo trường phái Newton.

Định nghĩa đạo hàm

Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) có chứa điểm x_0. Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 được định nghĩa là giới hạn

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{11.8}$$

Lưu ý rằng nếu giới hạn trên không phải là giới hạn hữu hạn (không tồn tại hoặc tiến tới vô cực) thì hàm số không có đạo hàm tại điểm x_0.

Ví dụ, để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ tại $x_0 = 4$, ta khai triển

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =& \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\
=& \frac{x^3 + 2x^2 - 4 - (4^3 + 2 \cdot 4^2 - 4)}{x - 4} \\
=& \frac{(x^3 - 4^3) + 2(x^2 - 4^2)}{x - 4} \\
=& \frac{(x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 2(x - 4)(x + 4)}{x - 4} \\
=& x^2 + 4x + 16 + 2(x + 4)
\end{aligned}$$

Cho x tiến tới 4 thì ta có đạo hàm tại $x = 4$

$$\begin{aligned}
f'(4) =& \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\
=& \lim_{x \to 4} (x^2 + 4x + 16 + 2(x + 4)) \\
=& 4^2 + 4 \cdot 4 + 16 + 2 \cdot (4 + 4) = 64
\end{aligned}$$

Trong định nghĩa ở 11.8, nếu ta đặt $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$, ta gọi Δx là *số gia* của biến x, tương tự Δy là *số gia* của biến y.

Trong định nghĩa, x tiến tới x_0 tương đương với Δx tiến tới 0. Chuyển vế x_0 ta có $x = x_0 + \Delta x$ và từ đó $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$. Định nghĩa đạo hàm ở trên có thể được viết lại

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{11.9}$$

Nếu hàm số có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng (a, b) thì ta nói hàm số khả vi trên khoảng đó.

Ví dụ đối với hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ như trên. Với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 + 2x^2 - 4 - (x_0^3 + 2x_0^2 - 4)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3 - x_0^3) + 2(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) + 2(x + x_0) \\ &= x_0^2 + x_0 \cdot x_0 + x_0^2 + 2(x_0 + x_0) = 3x_0^2 + 4x_0 \end{aligned}$$

Ta thấy rằng giới hạn trên luôn tồn tại với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$ nên thay x_0 thành x ta có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 4x$ của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Vi phân

Trong cách ký hiệu

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ta thay Δy thành dy và Δx thành dx thì vi phân được định nghĩa là

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow dy = f'(x)\, dx \tag{11.10}$$

Cách ký hiệu vi phân có ý nghĩa là vế trái là vi phân theo biến y và vế phải là vi phân theo biến x. Do $y = f(x)$ nên khi vi phân hai vế sẽ cho ra $dy = f'(x)\, dx$ (vế trái là đa thức bậc 1 biến y).

Ví dụ phương trình $y^2 = x^3 + 4x - 7$ thì khi vi phân hai vế ta có

$$(y^2)'\, dy = (x^3 + 4x - 7)\, dx \Leftrightarrow 2y\, dy = (3x^2 + 4)\, dx$$

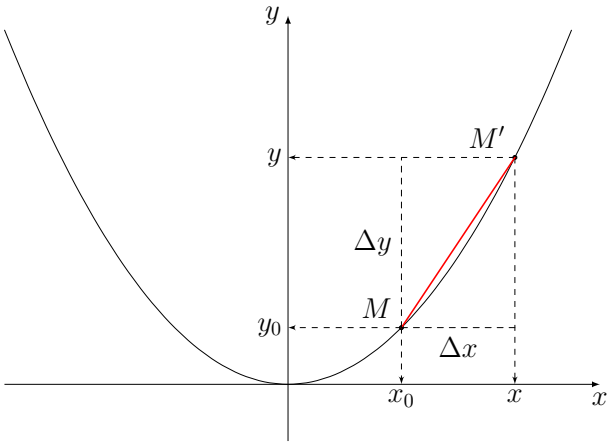
Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) chứa điểm x_0.

Gọi $M' = (x, y)$ là một điểm thuộc hàm số $y = f(x)$. Khi đó đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 là giới hạn

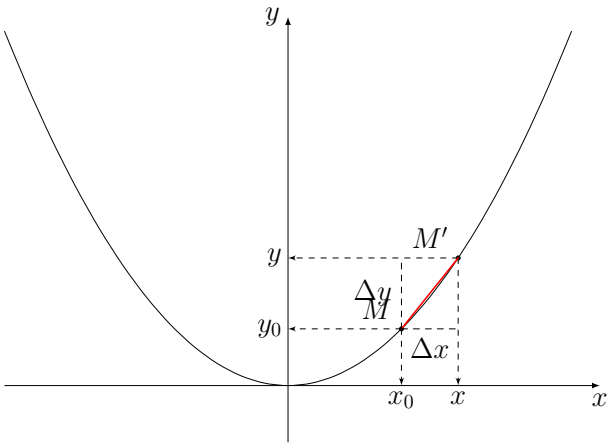
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Xét hình 11.10, tỉ số $\Delta y / \Delta x$ là tangent của góc hợp bởi trục hoành Ox và đường thẳng MM'.



Hình 11.10. Hệ số góc (trường hợp 1)

Tiếp theo, xét hình 11.11, ta thấy đường thẳng MM' ngày càng tiến sát lại với đường cong. Như vậy, khi Δx tiến tới 0 thì đường thẳng MM' cắt đường cong tại hai điểm càng sát nhau. Đến khi hai điểm đó trùng nhau, đường thẳng MM' chỉ đi qua đúng một điểm thuộc đường cong và khi đó MM' trở thành tiếp tuyến của đường cong tại điểm $M = (x_0, y_0)$.



Hình 11.11. Hệ số góc (trường hợp 2)

Khi đó $f'(x_0)$ là tangent của góc hợp bởi MM' và trục hoành Ox, hay nói cách khác là *hệ số góc* của đường tiếp tuyến. Thêm nữa $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ nên phương trình đường tiếp tuyến đi qua $M = (x_0, y_0)$ là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \tag{11.11}$$

11.4 Tích phân

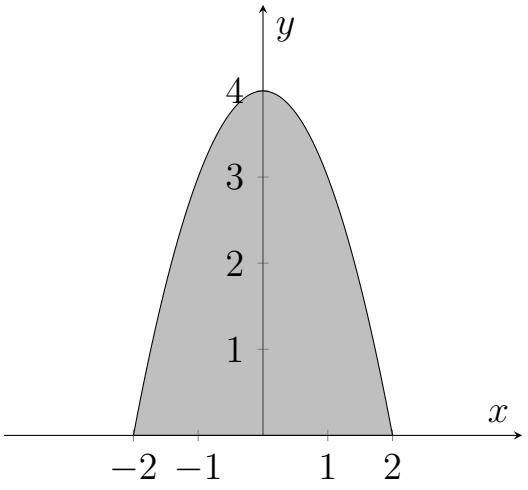
Tích phân là khái niệm quan trọng trong giải tích. Sau đây sẽ trình bày cách tính tích phân theo tổng Riemann.

Tích phân và phân chia diện tích

Xét phương trình của một đường cong $y = f(x) > 0$ trên đoạn $[a, b]$.

Theo định nghĩa, tích phân từ a tới b là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai trục đứng $x = a$, $x = b$.

Ở hình 11.12, diện tích phần tô màu xám là tích phân từ -2 tới 2 của hàm số $f(x) = -x^2 + 4$.



Hình 11.12. Tích phân từ -2 tới 2 của $f(x) = -x^2 + 4$

Chúng ta có thể tính diện tích hình chữ nhật, hình thang, hình vuông. Vậy có cách nào để tính diện tích một hình giới hạn bởi các đường cong bất kì không? Có đấy. Chúng ta sẽ tính xấp xỉ bằng tổng diện tích các hình chữ nhật.

Ví dụ với hàm số $f(x) = -x^2 + 4$ ở trên, ta chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau

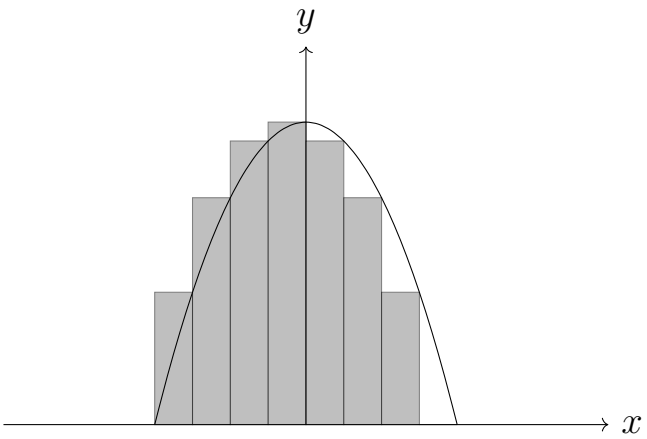
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Trong đó $x_{i+1} - x_i$ cố định và bằng $\dfrac{b-a}{n}$.

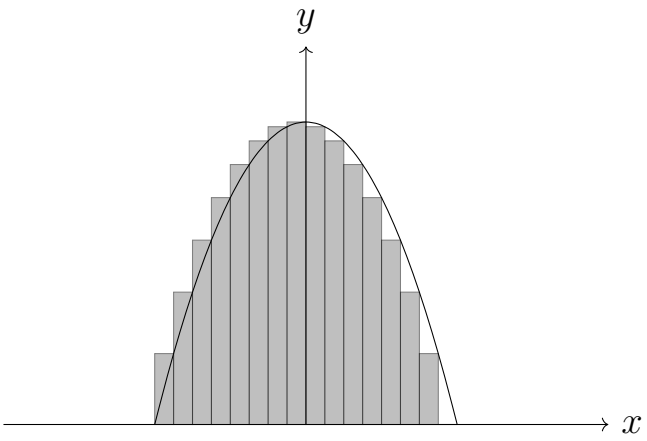
Đối với hình 11.13 ta xấp xỉ bằng 7 hình chữ nhật. Đối với hình 11.14 ta xấp xỉ bằng 15 hình chữ nhật. Đối với hình 11.15 ta xấp xỉ bằng 31 hình chữ nhật.

Càng dùng nhiều hình chữ nhật, tổng diện tích của chúng càng gần với diện tích cần tìm, hay là tích phân cần tìm.

Ở ba hình trên, mỗi hình chữ nhật trong đó có chiều rộng bằng nhau là



Hình 11.13. Xấp xỉ diện tích bởi 7 hình chữ nhật



Hình 11.14. Xấp xỉ diện tích bởi 15 hình chữ nhật

$\dfrac{b-a}{n}$ với n là số đoạn. Chiều dài là $f(x_i)$ với $x_i = a + \dfrac{b-a}{n}i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (biên sau).

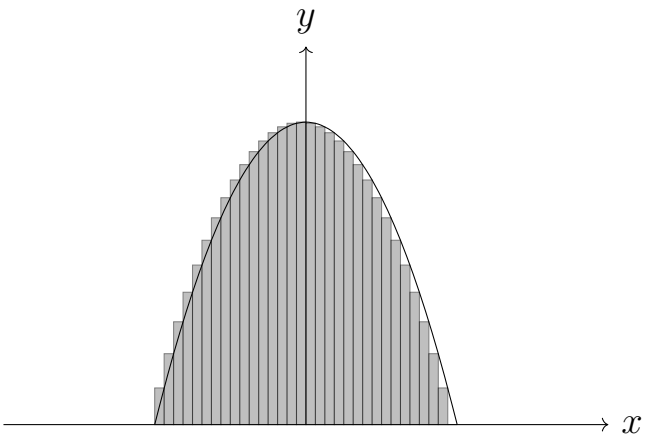
Cụ thể hơn, hình chữ nhật từ x_{i-1} tới x_i sẽ có chiều dài là $f(x_i)$ và chiều rộng là $\dfrac{b-a}{n}$.

Khi đó, tổng diện tích của các hình chữ nhật là

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_i) \tag{11.12}$$

Khi số lượng hình chữ nhật tăng lên tới vô hạn thì tổng diện tích sẽ tiến tới diện tích chính xác của hình cần tìm, hay nói cách khác là tích phân. Do đó kết quả sẽ là

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_i), \quad x_i = a + \frac{b-a}{n}i \tag{11.13}$$



Hình 11.15. Xấp xỉ diện tích bởi 31 hình chữ nhật

Ví dụ tính tích phân qua tổng Riemann

Ví dụ, tính tích phân từ -2 tới 2 của hàm số $f(x) = -x^2 + 4$ ở trên. Ta có $b = 2$ và $a = -2$ nên

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{n} f(x_i) =& \frac{4}{n}\Big(-\Big(-2 + \frac{4}{n}i\Big)^2 + 4\Big) \\ =& \frac{4}{n}\Big(-4 + \frac{16}{n}i - \frac{16}{n^2}i^2 + 4\Big) \\ =& \frac{64}{n}\Big(\frac{i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\Big)\end{aligned}$$

Tính tổng i từ 1 tới n ta có $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tính tổng i^2 từ 1 tới n ta có $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{64}{n}\Big(\frac{i}{n} - \frac{i^2}{n^2}\Big) =& \frac{64}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ =& -\frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

Khi n tiến tới vô cực thì biểu thức trên tiến tới $\dfrac{64}{2} - \dfrac{64 \cdot 2}{6} = \dfrac{32}{3}$. Đây chính là giá trị của tích phân $\displaystyle\int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\, dx$.

Chương 12

Hình học affine

12.1 Không gian affine

Không gian affine

Định nghĩa 1. Không gian affine

Cho $\mathcal{V}$ là một không gian vector trên trường $\mathbb{F}$, và $\mathcal{A}$ là một tập khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là **điểm**. Giả sử có ánh xạ φ

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\to \mathcal{V} \\ (M, N) &\to \varphi(M, N)\end{aligned}$$

thỏa mãn hai điều kiện sau

1. Với mọi điểm $M \in \mathcal{A}$ và vector $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$ có duy nhất một điểm $N \in \mathcal{A}$ sao cho $\varphi(M, N) = \overrightarrow{v}$;
2. Với ba điểm M, N, P bất kì ta luôn có

$$\varphi(M, N) + \varphi(N, P) = \varphi(M, P).$$

Ta nói $\mathcal{A}$ là một **không gian affine**.

Tên gọi đầy đủ: **$\mathcal{A}$ là không gian affine trên trường $\mathbb{F}$ liên kết với không gian vector $\mathcal{V}$ bởi ánh xạ liên kết φ.**

Khi đó, $\mathcal{V}$ được gọi là **không gian vector liên kết** với (hay **không gian nền**) của $\mathcal{A}$ và được ký hiệu là $\overrightarrow{\mathcal{A}}$.

φ được gọi là **ánh xạ liên kết**. Ta ký hiệu $\varphi(M, N) = \overrightarrow{MN}$ từ đây về sau. Khi đó hai điều kiện trên được viết lại là

1. Với mọi $M \in \mathcal{A}$, với mọi $\overrightarrow{v} \in \mathcal{V}$, tồn tại duy nhất $N \in \mathcal{A}$ sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{v}$
2. Với mọi M, N, P thuộc $\mathcal{A}$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

Biểu thức ở điều kiện 2 còn được gọi là **hệ thức Chales**.

Nếu $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ thì ta gọi là không gian affine thực.

Nếu $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ thì ta gọi là không gian affine phức.

Nếu muốn nhấn mạnh trường $\mathbb{F}$ ta nói là $\mathbb{F}$-không gian affine.

Ta ký hiệu một không gian affine là bộ $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \varphi)$. Ta cũng có thể ghi tắt là $\mathcal{A}(\mathbb{F})$ hoặc chỉ là $\mathcal{A}$.

Nếu $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ là không gian vector n chiều thì ta nói $\mathcal{A}$ là không gian affine n chiều và ký hiệu là $\mathcal{A}^n$. Như vậy

$$\dim \mathcal{A} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}}$$

Ví dụ 1. Xét tập hợp các điểm trong không gian $\mathbb{R}^3$ học ở THTP. Khi đó $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ là tập hợp các điểm, $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ là tập hợp các vector trong $\mathbb{R}^3$. Một vector từ điểm A tới điểm B (theo nghĩa hình học) là một đoạn thẳng có hướng nối từ A tới B.

Lưu ý. Ở THPT chúng ta học rằng tọa độ của một điểm M cũng chính là tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$. Tuy nhiên điều đó không phải lúc nào cũng đúng. Ở các phần sau sẽ giải thích lý do tại sao.

Tính chất của không gian affine

Với mọi M, N, Q thuộc $\mathcal{A}$ ta có

1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ khi và chỉ khi $M \equiv N$
2. $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$
3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$
4. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$

Chứng minh. Để chứng minh các tính chất trên ta sử dụng hai điều kiện trong định nghĩa không gian affine (đặc biệt là hệ thức Chales).

1. Nếu $M \equiv N$ thì $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM}$. Suy ra $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$ hay $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$. Từ đây, nếu $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ thì theo điều kiện 1 trong định nghĩa, tồn tại duy nhất điểm N thỏa $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$. Điều này tương đương với $M \equiv N$.

2. Từ hệ thức Chales ta có

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$$

3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ}$ nên $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ}$, hay $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

4. $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$, chuyển vế $\overrightarrow{PM}$ ta có điều phải chứng minh. □

Phẳng

Ở THPT ta có điểm tương đương 0-phẳng, đường thẳng tương đương 1-phẳng, mặt phẳng tương đương 2-phẳng.

Trong mặt phẳng Oxy, một đường thẳng được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một vector chỉ phương $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Khi đó đường thẳng đi qua P nhận $\overrightarrow{v}$ làm vector chỉ phương là tập hợp các điểm $M \in \mathbb{R}^2$ sao cho $\overrightarrow{PM}$ cùng phương $\overrightarrow{v}$. Nói cách khác

$$d = \{M \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{PM} = a\overrightarrow{v},\ a \in \mathbb{R}\}$$

Trong không gian $Oxyz$, tương tự một đường thẳng xác định khi biết một điểm thuộc nó và một vector chỉ phương $\overrightarrow{v}$ tương ứng

$$d = \{M \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{PM} = a\overrightarrow{v},\ a \in \mathbb{R}\}$$

Một mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$ xác định khi biết một điểm thuộc nó và một cặp vector chỉ phương $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ của nó

$$\alpha = \{M \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{PM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v},\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Trong hình học affine ta mở rộng các khái niệm phẳng trên.

Định nghĩa 2. Phẳng

Cho không gian affine $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \varphi)$, P là một điểm thuộc $\mathcal{A}$ và $\overrightarrow{\alpha}$ là một không gian vector con của $\overrightarrow{\mathcal{A}}$. Khi đó tập hợp

$$\alpha = \{M \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PM} \in \alpha\}$$

được gọi là **phẳng** đi qua P với (không gian chỉ) phương $\overrightarrow{\alpha}$.

Nếu $\dim \overrightarrow{\alpha} = m$ thì ta nói α là một **phẳng** m **chiều** hay một m-phẳng và viết $\dim \alpha = m$. Như vậy

$$\dim \alpha = \dim \overrightarrow{\alpha}$$

Theo cách gọi thông thường, 1-phẳng là đường thẳng, 2-phẳng là mặt phẳng. **Siêu phẳng** là tên gọi của phẳng có đối chiều 1, tức là nếu số chiều của không gian là n thì số chiều của siêu phẳng là $n - 1$.

Chúng ta có một số nhận xét sau.

1. Nếu α là phẳng đi qua P thì $P \in \alpha$ và với mọi M, N thuộc α ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$ cũng thuộc α;

2. 0-phẳng là tập chỉ gồm một điểm. Do đó ta có thể xem một điểm là một 0-phẳng;
3. Điểm P trong định nghĩa không có vai trò quan trọng gì. Mọi điểm P trong α đều có ý nghĩa như nhau;
4. Giả sử α là phẳng đi qua P với phương $\overrightarrow{\alpha}$, β là phẳng đi qua Q với phương $\overrightarrow{\beta}$. Khi đó $\alpha \subset \beta$ khi và chỉ khi $P \in \beta$ và $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$. Suy ra $\alpha \equiv \beta$ khi $P \in \beta$ (hay $Q \in \alpha$) và $\overrightarrow{\alpha} \equiv \overrightarrow{\beta}$;
5. Nếu α là phẳng với phương $\overrightarrow{\alpha}$ thì α được gọi là không gian affine liên kết với $\overrightarrow{\alpha}$ bởi ánh xạ liên kết
$$\varphi_{\alpha\times\alpha} : \alpha \times \alpha \to \overrightarrow{\alpha}$$
Vì vậy ta có thể xem phẳng là không gian affine con.

Để xác định đường thẳng ta chỉ cần biết một vector chỉ phương là đủ. Để xác định mặt phẳng ta chỉ cần biết hai vector không song song của mặt phẳng đó là đủ. Tổng quát, để xác định phương $\overrightarrow{\alpha}$ của m-phẳng α ta chỉ cần biết một cơ sở là đủ.

Từ định nghĩa của không gian vector (tập sinh) ta thấy rằng một m-phẳng chỉ có một không gian chỉ phương duy nhất, nhưng có thể có nhiều cơ sở khác nhau.

Độc lập affine và phụ thuộc affine

Định nghĩa 3

Hệ $m+1$ điểm $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ $(m \geq 1)$ của không gian affine $\mathcal{A}$ được gọi là **độc lập affine** nếu hệ m vector
$$\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$$
của $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ là một hệ vector độc lập tuyến tính.

Hệ điểm không độc lập tuyến tính được gọi là **phụ thuộc affine**.

Chúng ta có một số lưu ý từ định nghĩa.

1. Tập chỉ gồm một điểm A_0 bất kì được quy ước là luôn độc lập;
2. Trong định nghĩa trên điểm A_0 bình đẳng như các điểm khác vì nếu hệ
$$\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$$
độc lập affine thì hệ
$$\{\overrightarrow{A_iA_0}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_m}\}$$
cũng độc lập affine;

3. Hệ $\{A_0, \ldots, A_m\}$ phụ thuộc affine thì hệ

$$\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}\}$$

phụ thuộc affine;
4. Hệ con của một hệ độc lập thì độc lập, nhưng hệ con của một hệ phụ thuộc chưa chắc phụ thuộc.

Ta sẽ chứng minh lưu ý thứ hai.

Chứng minh. Ta xét tổ hợp tuyến tính

$$\lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \lambda_2\overrightarrow{A_0A_2} + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{A_0A_m}$$

Do hệ vector độc lập tuyến tính nên $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Khi đó ta khai triển vế trái

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \lambda_2\overrightarrow{A_0A_2} + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{A_0A_m}\\
=&\lambda_1(\overrightarrow{A_iA_1} - \overrightarrow{A_iA_0}) + \lambda_2(\overrightarrow{A_iA_2} - \overrightarrow{A_iA_0}) + \ldots\\
&+ \lambda_{i-1}(\overrightarrow{A_iA_{i-1}} - \overrightarrow{A_iA_0}) - \lambda_i\overrightarrow{A_iA_0} + \lambda_{i+1}(\overrightarrow{A_iA_{i+1}} - \overrightarrow{A_iA_0})\\
&+ \lambda_m(\overrightarrow{A_iA_m} - \overrightarrow{A_iA_0})\\
=&\lambda_1\overrightarrow{A_iA_1} + \lambda_2\overrightarrow{A_iA_2} + \ldots + \lambda_{i-1}\overrightarrow{A_iA_{i-1}} + \lambda_{i+1}\overrightarrow{A_iA_{i+1}} + \ldots\\
&+ \lambda_m\overrightarrow{A_iA_m} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m)\overrightarrow{A_iA_0} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Do $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ nên tổ hợp tuyến tính ứng với các vector $\overrightarrow{A_iA_j}$ $(j \neq i)$ độc lập tuyến tính và ta có điều phải chứng minh. □

Định lí 1

Trong không gian affine n chiều $\mathcal{A}^n$, với $0 < m \leq n+1$, luôn tồn tại các hệ m điểm độc lập. Mọi hệ gồm hơn $n+1$ điểm đều phụ thuộc.

Giao của các phẳng. Bao affine

Cho $\{\alpha_i : i \in I\}$ là một họ không rỗng các phẳng trong không gian affine $\mathcal{A}$.

Định lí 2

Nếu $\bigcap\limits_{i\in I}\alpha_i \neq \emptyset$ thì $\bigcap\limits_{i\in I}\alpha_i$ là một phẳng có phương $\bigcap\limits_{i\in I}\overrightarrow{\alpha_i}$.

Chứng minh. Vì $\bigcap_{i\in I}\alpha_i \neq \emptyset$ nên tồn tại $P \in \bigcap_{i\in I}\alpha_i$, hay $P \in \alpha_i$ với $i \in I$.

Nếu $M \in \bigcap_{i\in I}$ thì $M \in \alpha_i$ với $i \in I$. Suy ra $\overrightarrow{PM} \in \alpha_i$. Do đó

$$\bigcap_{i\in I}\alpha_i = \{M \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PM} \in \bigcap_{i\in I}\overrightarrow{\alpha_i}\}$$

Điều này nghĩa là $\bigcap_{i\in I}\alpha_i$ là phẳng đi qua P với không gian chỉ phương là $\bigcap_{i\in I}\overrightarrow{\alpha_i}$. □

Định nghĩa 4. Phẳng giao

Phẳng $\bigcap_{i\in I}\alpha_i$ trong định lý trên được gọi là **phẳng giao** của các phẳng α_i.

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng $\bigcap_{i\in I}\alpha_i$ là phẳng lớn nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa trong tất cả các phẳng α_i, $i \in I$.

Định nghĩa 5. Bao affine

Cho X là một tập con khác rỗng của không gian affine $\mathcal{A}$. Khi đó giao của mọi phẳng chứa X trong $\mathcal{A}$ sẽ là một phẳng, gọi là **bao affine** của X, ký hiệu là $\langle X\rangle$.

Như vậy, bao affine $\langle X\rangle$, theo quan hệ bao hàm, của tập X là phẳng bé nhất chứa X.

Tương tự phép giao và hợp của hai tập hợp, chúng ta có phép giao các phẳng ở trên và phép tổng của các phẳng sẽ đề cập sau đây.

Định nghĩa 6. Phẳng tổng

Cho $\{\alpha_i : i \in I\}$ là một họ không rỗng các phẳng. Bao affine của tập hợp $\bigcup_{i\in I}\alpha_i$ được gọi là **phẳng tổng** (hay **tổng**) của các phẳng α_i, ký hiệu là $\sum_{i\in I}\alpha_i$.

Như vậy, phẳng tổng là phẳng bé nhất chứa tất cả các phẳng α_i, $i \in I$.

Ta có nhận xét sau. Nếu X là một hệ hữu hạn điểm $X = \{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ thì tổng $P_0 + P_1 + \ldots + P_m$ (ta xem các P_i là các 0-phẳng) là phẳng có số chiều bé nhất đi qua các điểm này. Hơn nữa

$$\dim(P_0 + P_1 + \ldots + P_m) = \text{rank}\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}\}$$

Do đó hệ điểm $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ độc lập thì $\dim(P_0 + P_1 + \ldots + P_m) = m$.

Chứng minh. Đặt $I = P_0 + P_1 + \ldots + P_m$ là phẳng tổng của hệ điểm

$$\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$$

Khi đó I đi qua các điểm P_0, P_1, ..., P_m.

Đặt α_i là phẳng đi qua P_0 và P_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Khi đó α_i có phương là $\overrightarrow{P_0P_i}$. Tổng I chính là tổng các phẳng $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$, và $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0P_2}$, ..., $\overrightarrow{P_0P_m}$ là các vector chỉ phương của nó. Như vậy nếu $\overrightarrow{I}$ là không gian chỉ phương của I thì nó gồm các vector độc lập tuyến tính $\overrightarrow{P_0P_{i_1}}$, $\overrightarrow{P_0P_{i_2}}$, ..., $\overrightarrow{P_0P_{i_k}}$. Khi đó $\dim I = \dim \overrightarrow{I} = k = \text{rank}\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m}\}$. Từ đây ta có điều phải chứng minh. □

Định lí 3

Cho α và β là hai phẳng. Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì với mọi $P \in \alpha$ và với mọi $Q \in \beta$ ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.

Ngược lại nếu có điểm $P \in \alpha$ và $Q \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ thì $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.

Chứng minh. Giả sử $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Khi đó tồn tại điểm $M \in \alpha \cap \beta$, suy ra $M \in \alpha$ và $M \in \beta$. Với mọi $P \in \alpha$ và với mọi $Q \in \beta$ thì $\overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{MQ} \in \overrightarrow{\beta}$. Từ đó $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.

Đảo lại, giả sử ta có điểm $P \in \alpha$ và điểm $Q \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Khi đó tồn tại hai vector $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ sao cho $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ với $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\beta}$. Theo định nghĩa của không gian affine thì với điểm $P \in \alpha$, tồn tại duy nhất điểm $M \in \alpha$ sao cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u}$. Tương tự với điểm $Q \in \beta$ tồn tại duy nhất điểm $N \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{v}$. Suy ra $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{QN}$. Chuyển vế $\overrightarrow{QN}$ ta có $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{PN}$. Điều này chỉ xảy ra khi $M \equiv N$, hay nói cách khác M và N thuộc $\alpha \cap \beta$. Như vậy $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. □

Định lí 4

Giả sử α và β là hai phẳng với phương lần lượt là $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$. Khi đó
1. Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim(\alpha) + \dim(\beta) - \dim(\alpha \cap \beta)$$

2. Nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ thì

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim(\alpha) + \dim(\beta) - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) + 1$$

Chứng minh. 1. Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì theo định lý 12.1 ta có $\alpha \cap \beta$ là một phẳng có phương $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$. Lấy $P \in \alpha \cap \beta$ và gọi γ là phẳng đi qua P với phương $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Ta có $\alpha \subset \gamma$ và $\beta \subset \gamma$. Ngoài ra nếu có phẳng γ' chứa α và β thì $P \in \gamma'$ và phương của γ' phải chứa $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$. Nói cách khác $\gamma \subset \gamma'$. Vậy γ là phẳng bé nhất chứa α và β, tức là $\gamma = \alpha + \beta$. Do đó

$$\begin{aligned}\dim(\alpha + \beta) &= \dim \gamma = \dim \overrightarrow{\gamma} = \dim(\alpha + \beta) \\ &= \dim \overrightarrow{\alpha} + \dim \overrightarrow{\beta} - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) \\ &= \dim \alpha + \dim \beta - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta})\end{aligned}$$

2. Nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ thì theo định lý 12.1, nếu ta lấy $P \in \alpha$ và $Q \in \beta$ thì $\overrightarrow{PQ} \notin \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Gọi $\overrightarrow{\gamma}$ là không gian con một chiều sinh bởi $\overrightarrow{PQ}$, ta có $(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) \cap \overrightarrow{\gamma} = \{\overrightarrow{0}\}$ (các không gian vector không có vector nào chung ngoài $\overrightarrow{0}$). Gọi η là phẳng đi qua P có không gian chỉ phương là $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}$ thì ta có $\alpha \subset \eta$ và $\beta \subset \eta$. Suy ra $\alpha + \beta \subset \eta$.

3. η' là một phẳng chứa α và β thì $P \in \eta'$ và phương $\overrightarrow{\eta'}$ của η' phải chứa $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ và $\overrightarrow{\gamma}$. Từ đó $\eta \subset \eta'$. Suy ra η là phẳng bé nhất chứa α và β, hay $\eta = \alpha + \beta$. Do $\dim((\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) \cap \overrightarrow{\gamma}) = 0$ nên

$$\begin{aligned}\dim(\alpha + \beta) &= \dim \eta = \dim(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}) \\ &= \dim \overrightarrow{\alpha} + \dim \overrightarrow{\beta} + \dim \overrightarrow{\gamma} - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) \\ &= \dim \alpha + \dim \beta + 1 - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta})\end{aligned}$$

Như vậy ta có công thức tính số chiều của phẳng giao. □

Vị trí tương đối

Định nghĩa 7. Cắt nhau, chéo nhau, song song

Hai phẳng α và β được gọi là **cắt nhau cấp** r nếu $\alpha \cap \beta$ là một r-phẳng.

Chúng được gọi là **chéo nhau cấp** r nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ và $\dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) = r$.

Chúng được gọi là **song song** (với nhau) nếu $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ hoặc $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$.

Theo định lý về dim bên trên, trong $\mathbb{R}^3$ không tồn tại hai mặt phẳng chéo nhau cấp 0 hoặc 1.

Định lí 5

Cho hai phẳng song song α và β. Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì $\alpha \subset \beta$ hoặc $\beta \subset \alpha$.

Chứng minh. Do α và β có điểm chung nên $\alpha \cap \beta$ là một phẳng có phương $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$. Theo định nghĩa về sự song song, α song song β dẫn tới $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ hoặc $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$. Nếu $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ thì $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha}$. Suy ra $\alpha \cap \beta = \alpha$ hay $\alpha \subset \beta$. Trường hợp $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$ tương tự. □

Định lí 6

Qua một điểm A có một và chỉ một m-phẳng song song với m-phẳng α đã cho.

Chứng minh. Gọi β là m-phẳng đi qua A với phương là $\overrightarrow{\alpha}$. Khi đó β là phẳng m chiều song song với α. Nếu β' cũng là m-phẳng đi qua A và song song với α thì $\overrightarrow{\beta'} = \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha}$. Do β và β' có điểm chung nên theo định lý 12.1 ta có $\beta \equiv \beta'$ □

Định lí 7

Trong không gian affine n chiều $\mathcal{A}^n$ cho một siêu phẳng α và một m-phẳng β $(1 \leq m \leq n-1)$. Khi đó α và β hoặc song song hoặc cắt nhau theo một $(m-1)$-phẳng.

Mục tiêu và tọa độ affine

Định nghĩa 8. Mục tiêu affine

Cho $\mathcal{A}^n$ là một không gian affine n chiều. Hệ $\{O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ gồm một điểm $O \in \mathcal{A}^n$ và một cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ của $\overrightarrow{\mathcal{A}^n}$ được gọi là **mục tiêu affine** (hay **mục tiêu**) của $\mathcal{A}^n$.

Điểm O được gọi là **gốc**, vector $\overrightarrow{e_i}$ được gọi là **vector cơ sở thứ** i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Giả sử $\{O, \overrightarrow{e_i}\}$ là một mục tiêu của không gian affine $\mathcal{A}^n$. Khi đó với mọi $M \in \mathcal{A}^n$, vector $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathcal{A}^n}$ nên ta có biểu diễn tuyến tính của $\overrightarrow{OM}$ qua các cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$$

Nhắc lại đại số tuyến tính, lúc này vector $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$, $x_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Khi đó bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là *tọa độ* của M trong mục tiêu $\{O, \overrightarrow{e_i}\}$ và x_i được gọi là tọa độ thứ i. Ta ký hiệu tọa độ của M là $M(x_i)$ hoặc (x_i).

Giả sử M có tọa độ (x_i) và N có tọa độ (y_i) đối với mục tiêu $\{\overrightarrow{e_i}\}$. Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (y_i - x_i)$. Như vậy $(y_i - x_i)$ là tọa độ của vector $\overrightarrow{MN}$ trong mục tiêu $\{O, \overrightarrow{e_i}\}$.

Ta có một số nhận xét về mục tiêu affine.

1. Giả sử trên $\mathcal{A}^n$ đã chọn được mục tiêu cố định $\{O, \overrightarrow{e_i}\}$. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} &\to \mathbb{F}^n \\ M &\to (x_i) \end{aligned}$$

   với (x_i) là tọa độ của M. Khi đó φ là song ánh và mỗi điểm được đồng nhất với một phần tử của $\mathbb{F}^n$. Nói cách khác đối tượng hình học được đồng nhất với đối tượng đại số.
2. Xét mục tiêu affine $\{O, \overrightarrow{e_i}\}$ của $\mathcal{A}^n$ và gọi $E_i \in \mathcal{A}$ là các điểm sao cho $\overrightarrow{OE_i} = \overrightarrow{e_i}$. Khi đó hệ điểm $\{O, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ độc lập affine. Ngược lại, một hệ gồm $n+1$ điểm $\{O, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ độc lập affine xác định một mục tiêu affine $\{O, \overrightarrow{e_i}\}$ với $\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{OE_i}$. Nếu ta chọn $O = (0, \ldots, 0)$ và $E_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ với số 1 ở vị trí i thì đây được gọi là cơ sở chính tắc.
3. Siêu phẳng đi qua n điểm độc lập O, E_1, E_2, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n được gọi là **siêu phẳng tọa độ thứ** i. Dễ thấy M thuộc siêu phẳng tọa độ thứ i khi và chỉ khi $x_i = 0$ với x_i là tọa độ thứ i của M.

Phần VI

Chưa phân loại

Chương 13

Machine Learning

Linear Regression

Giả sử ta có N điểm dữ liệu đầu vào $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ với $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^d$. Ứng với từng điểm dữ liệu đầu vào $\boldsymbol{x}_i$ ta có một đầu ra y_i. Nghĩa là ta có N cặp dữ liệu $(\boldsymbol{x}_i, y_i)$.

Mục tiêu là xây dựng hàm số $\hat{y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ sao cho tổng sai số của y_i và $\hat{y}_i$ là nhỏ nhất, tức là

$$\sum_{i=1}^{N} \|y_i - \hat{y}_i\|^2 \to \min$$

Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) ta tìm cực trị của hàm số và khảo sát. Tuy nhiên không phải hàm số nào cũng đạo hàm được. Một cách tiếp cận đơn giản là sử dụng hàm tuyến tính, dễ xây dựng và luôn khả vi. Ta đặt

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_d) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_d x_d$$

Lúc này, hàm mất mát ở trên có dạng

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \|y_i - (w_0 + w_1 x_{i1} + w_2 x_{i2} + \ldots + w_d x_{id})\|^2$$

Bình phương chuẩn Euclid chính là bình phương của vector. Do đó dưới dấu tổng là các hàm số bình phương. Khi đạo hàm riêng theo w_j ta có

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_j} = \sum_{i=1}^{N} 2x_{ij} \cdot [y_i - (w_0 + w_1 x_{i1} + w_2 x_{i2} + \ldots + w_d x_{id})]$$

với $1 \leqslant j \leqslant d$.

Với $j = 0$ có chút khác biệt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_0} = \sum_{i=1}^{N} 2 \cdot [y_i - (w_0 + w_1 x_{i1} + \ldots + w_d x_{id})]$$

Ta cho các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_j}$ bằng 0 thì được

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} x_{ij}(w_0 + w_1 x_{i1} + w_2 x_{i2} + \ldots + w_d x_{id}) = \sum_{i=1}^{N} x_{ij} y_i \\ \Leftrightarrow\ & w_0 \sum_{i=1}^{N} x_{ij} + w_1 \sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{i1} + w_2 \sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{i2} \\ &\qquad + \cdots + w_d \sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{id} = \sum_{i=1}^{N} x_{ij} y_i \end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta cần biểu diễn các dấu tổng lại thành dạng đại số (ma trận, vector) vì chúng sẽ được sử dụng để nhân với vector $\boldsymbol{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_d)$.

Ta có $\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{Nj} \end{pmatrix}$.

Ta cũng có $\sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{i1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{N1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{Nj} \end{pmatrix}$.

Cứ tương tự như vậy, ta xếp các dấu sigma thành dạng cột thì tương đương với

$$\begin{pmatrix} * & \sum_{i=1}^{N} x_{ij} & * \\ * & \sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{i1} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{id} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{N1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{1d} & x_{2d} & \cdots & x_{Nd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & x_{1j} & * \\ * & x_{2j} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & x_{Nj} & * \end{pmatrix}$$

Ghép các cột theo thứ tự j từ 0 tới d ta có

$$\begin{pmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{N1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{1d} & x_{2d} & \cdots & x_{Nd} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1d} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2d} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{Nd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1d} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2d} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{Nd} \end{pmatrix}$$

Hay nói cách khác, nếu ta đặt $\boldsymbol{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_d)$ là ma trận hàng, $\boldsymbol{X}$ là ma trận có các hàng là các input, thì phương trình trên được viết lại là $\boldsymbol{wX}^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{yX}$.

Nếu đặt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ và $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{yX}$ thì đây là hệ phương trình theo các ẩn $w_0, w_1, \ldots, w_d$. Tuy nhiên không phải lúc nào $\boldsymbol{A}$ cũng khả nghịch nên chúng ta sẽ sử dụng một khái niệm gọi là *giả nghịch đảo* để tìm nghiệm cho hệ phương trình.

Ký hiệu $\boldsymbol{A}^\dagger$ là giả nghịch đảo của ma trận $\boldsymbol{A}$. Khi đó nghiệm của hệ phương trình là $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{bA}^\dagger$.

K-Means clustering

Một công việc thường được quan tâm là phân loại một nhóm các đối tượng thành những nhóm nhỏ hơn theo những tiêu chí nhất định.

Tương tự như phần trước, chúng ta có N điểm dữ liệu $\boldsymbol{x}_i$ thuộc $\mathbb{R}^d$. Ta muốn phân cụm các vector này vào những cluster (cụm) sao cho chúng gần nhau nhất (về mặt khoảng cách Euclid).

Giả sử ta muốn phân N điểm dữ liệu trên vào $K < N$ cluster. Ta cần tìm các điểm $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_K$ là tâm của các cụm, sao cho tổng khoảng cách từ các điểm $\boldsymbol{x}_i$ tới tâm cluster mà nó được phân vào là nhỏ nhất. Nghĩa là ứng với center $\boldsymbol{m}_1$ ta cần tìm các điểm $\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_t}$ sao cho $\sum_{j=1}^{t} \|\boldsymbol{x}_{i_j} - \boldsymbol{m}_1\|^2$ nhỏ nhất. Tương tự cho các tâm khác.

Nhưng câu chuyện phức tạp ở đây là, tâm nằm ở đâu để có thể bao quát

các điểm? Tâm được chọn phải có tính tổng quát, và việc phân các điểm vào cluster tương ứng với tâm thực hiện như thế nào?

Một kỹ thuật thường được sử dụng là *one-hot*. Với mỗi điểm dữ liệu $\boldsymbol{x}_i$ ta thêm một label $\boldsymbol{y}_i = (y_{i1}, \cdots y_{iK})$. Điểm $\boldsymbol{x}_i$ sẽ thuộc cluster j khi $y_{ij} = 1$, không thuộc thì bằng 0. Như vậy chỉ có đúng một phần tử của $\boldsymbol{y}_i$ bằng 1, còn lại bằng 0. Như vậy ràng buộc của $\boldsymbol{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{iK})$ là $y_{ij} \in \{0, 1\}$ và $\sum_{j=1}^{K} y_{ij} = 1$.

Khi đó, ta mong muốn phân các điểm $\boldsymbol{x}_i$ vào cluster $\boldsymbol{m}_k$ để khoảng cách tới tâm $\boldsymbol{m}_k$ là ngắn nhất, hay $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_k\|^2 \to \min$. Thêm nữa, với cách ký hiệu y_{ij} như trên, biểu thức tương đương với

$$\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_k\|^2 = y_{ik}\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_k\|^2 = \sum_{j=1}^{K} y_{ij}\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_j\|^2$$

vì điểm $\boldsymbol{x}_i$ sẽ thuộc cluster $\boldsymbol{m}_k$ nào đó với $1 \leq k \leq K$.

Sai số cho toàn bộ dữ liệu lúc này sẽ là

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{M}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} y_{ij}\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_j\|^2$$

Ta cần tối ưu $\boldsymbol{Y}$ và $\boldsymbol{M}$. Việc tối ưu hai ma trận cùng lúc là rất khó thậm chí bất khả thi. Do đó chúng ta có một cách tiếp cận khác là luân phiên cố định một bên và tối ưu bên còn lại. Từ đó công việc được chia làm hai bước.

Bước 1. Cố định $\boldsymbol{M}$, tìm $\boldsymbol{Y}$.

Giả sử ta đã biết các center $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_K$. Lúc này ta cần phân các điểm $\boldsymbol{x}_i$ vào cluster gần nó nhất. Dễ thấy rằng center gần nó nhất sẽ có khoảng cách Euclid ngắn nhất. Do đó ta tìm j sao cho $\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_j\|^2$ đạt nhỏ nhất. Không cần thiết phải tính căn bậc hai để giảm độ phức tạp.

Bước 2. Cố định $\boldsymbol{Y}$, tìm $\boldsymbol{M}$.

Khi đã biết $\boldsymbol{Y}$ tức là ta đã biết điểm nào được phân vào cluster nào. Khi đó ta cần tìm tâm cho từng cluster. Gọi $l(\boldsymbol{m}_j)$ là hàm tổng bình phương khoảng cách các điểm trong cluster tới tâm $\boldsymbol{m}_j$. Nghĩa là

$$l(\boldsymbol{m}_j) = \sum_{i=1}^{N} y_{ij}\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_j\|^2$$

Mục tiêu của chúng ta là tối ưu tâm $\boldsymbol{m}_j$. Do đó ta đạo hàm theo vector $\boldsymbol{m}_j$

thu được $\frac{\partial l(\boldsymbol{m}_j}{\partial \boldsymbol{m}_j} = \sum_{i=1}^{N} 2y_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_j)$. Cho đạo hàm bằng 0 và biến đổi ta có

$$\begin{aligned} & 2\sum_{i=1}^{N} y_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{m}_j) = 0 \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{m}_j \sum_{i=1}^{N} y_{ij} = \sum_{i=1}^{N} y_{ij}\boldsymbol{x}_i \\ \Leftrightarrow & \boldsymbol{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_{ij}\boldsymbol{x}_i}{\sum_{i=1}^{N} y_{ij}} \end{aligned}$$

Để ý rằng, $\sum_{i=1}^{N} y_{ij}$ là số lượng điểm trong cluster, và $\sum_{i=1}^{N} y_{ij}\boldsymbol{x}_i$ là tổng các điểm trong cluster. Như vậy $\boldsymbol{m}_j$ là trung bình cộng các điểm trong cluster j.

Algorithm 5 Thuật toán K-Means clustering

Require: Dữ liệu $\boldsymbol{X}$ (có N điểm dữ liệu) và số cluster K
Ensure: Các center $\boldsymbol{M}$ và label $\boldsymbol{y}$ cho mỗi điểm dữ liệu

1. Chọn K điểm bất kì làm các cluster ban đầu.
2. Phân mỗi điểm dữ liệu vào cluster gần nó nhất (cố định M, tìm Y).
3. Nếu việc phân dữ liệu vào các cluster ở bước 2 không thay đổi so với trước đó thì dừng thuật toán.
4. Cập nhật center mới cho mỗi cluster bằng cách lấy trung bình cộng các điểm trong cluster (cố định Y, tìm M).
5. Quay lại bước 2.

Gradient Descent

Trong nhiều trường hợp chúng ta thường không thể tìm nghiệm của phương trình đạo hàm để từ đó tìm các cực trị địa phương. Một phương pháp hiệu quả là gradient descent.

Hàm một biến

Giả sử x^* là local extremum (cực trị địa phương) của hàm số $f(x)$. Khi đó chúng ta xây dựng dãy số $\{x_n\}$ hội tụ về x^*. Ý tưởng thực hiện là dựa trên nhận xét, nếu x_n nằm bên phải x^* thì x_{n+1} nằm giữa x^* và x_n. Ta đã biết nếu x^* là một điểm cực trị thì $f'(x) > 0$ với $x > x^*$ mà x_n đi từ bên phải sang bên trái (ngược chiều Ox nên mang dấu âm). Từ đó chúng ta có công thức chung sau

$$x_{n+1} = x_n - \eta f'(x_n)$$

Trong đó η là một số dương nhỏ, gọi là *learning rate* (tốc độ học).

Ta chọn x_0 là một điểm bất kì. Tuy nhiên việc chọn x_0 cũng có thể ảnh hưởng đến tốc độ hội tụ.

Ví dụ với hàm số $f(x) = x^2 + 5\sin x$. Ta có đạo hàm là $f'(x) = 2x + 5\cos x$. Việc giải phương trình đạo hàm bằng 0 là điều không dễ dàng. Do đó gradient descent tỏ ra hiệu quả trong trường hợp này.

Chọn $\eta = 0.1$ và $x_0 = 5$. Sau đó chọn $\eta = 0.1$ và $x_0 = -5$. Ta thấy trường hợp sau tốn ít vòng lặp hơn do $x_0 = -5$ gần điểm cực trị hơn (≈ -1.11).

Hàm nhiều biến

Lúc này đầu vào của hàm số là một vector $\boldsymbol{x}$. Đặt $\nabla f(\boldsymbol{x})$ là đạo hàm của hàm f theo vector $\boldsymbol{x}$. Tương tự, ta xây dựng dãy vector $\{\boldsymbol{x}_n\}$ hội tụ về cực trị $\boldsymbol{x}^*$. Công thức lúc này là

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - \eta \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_n)$$

Ta đã biết đạo hàm của hàm số theo vector cũng là vector cùng cỡ. Do đó giả sử $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì đạo hàm của nó là

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)$$

Với ví dụ là bài toán Linear Regression, lúc này hàm mất mát là

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} \|y_i - \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{w}^T\|^2 = \frac{1}{2N}\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{w}^T\|^2$$

Đạo hàm của hàm mất mát là

$$\nabla \mathcal{L} = \frac{1}{N}(\boldsymbol{w}\boldsymbol{X}^T - \boldsymbol{y})\boldsymbol{X}$$

Lúc này, với vector khởi đầu $\boldsymbol{w}_0$ chúng ta xây dựng dãy $\{\boldsymbol{w}_n\}$ tới khi nhận được $\boldsymbol{w}_n/d < \varepsilon$, với d là độ dài vector $\boldsymbol{w}$.

Perceptron Learning Algorithm

Một trong những nhiệm vụ quan trọng nhất của ML là phân loại (tiếng Anh - classification).

Perceptron là thuật toán phân loại cho trường hợp đơn giản nhất khi có hai lớp. Nếu ta có các điểm dữ liệu cho trước trong không gian d chiều, ta muốn

tìm một siêu phẳng (chương hình học affine gọi là $(d-1)$-phẳng) chia các điểm dữ liệu đó thành hai phần. Sau đó khi có một điểm dữ liệu mới ta chỉ cần bỏ nó vào bên này hoặc bên kia của siêu phẳng.

Trong dạng này, mỗi điểm dữ liệu được biểu diễn ở dạng cột của ma trận. Giả sử các điểm dữ liệu là $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N$, với $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^d$, thì ma trận dữ liệu là $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^T & \boldsymbol{x}_2^T & \cdots & \boldsymbol{x}_N^T \end{pmatrix}$. Ta gọi nhãn tương ứng với N điểm dữ liệu trên là vector $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ với $y_i = 1$ nếu $\boldsymbol{x}_i$ thuộc class xanh, và $y_i = -1$ nếu $\boldsymbol{x}_i$ thuộc class đỏ.

Một siêu phẳng có phương trình là

$$f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = w_0 + w_1 x_1 + \ldots + w_d x_d = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}^T$$

Một điểm thuộc nửa không gian (tạm gọi là *bên này*) đối với siêu phẳng thì $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) < 0$, nếu thuộc nửa *bên kia* thì $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) > 0$, nếu nằm trên phẳng thì bằng 0.

Gọi label($\boldsymbol{x}$) là nhãn của điểm $\boldsymbol{x}$. Khi đó điểm $\boldsymbol{x}$ thuộc một trong hai bên của phẳng nên label($\boldsymbol{x}$) = sgn($\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}^T$) với sgn là hàm dấu. Ta quy ước sgn(0) = 1.

Khi một điểm bị phân loại sai class thì ta nói điểm đó bị **misclassified**. Ý tưởng của thuật toán là làm giảm thiểu số lượng điểm bị misclassified qua nhiều lần lặp. Đặt

$$J_1(\boldsymbol{w}) = \sum_{\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{M}} (-y_i \cdot \text{sgn}(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}_i^T))$$

trong đó $\mathcal{M}$ là tập các điểm bị misclassified (tập này sẽ thay đổi theo $\boldsymbol{w}$).

Nếu $\boldsymbol{x}_i$ bị misclassified thì y_i và sgn($\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i^T$) ngược dấu nhau. Nói cách khác, $-y_i \cdot \text{sgn}(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i^T) = 1$. Từ đó $J_1(\boldsymbol{w})$ là hàm đếm số lượng điểm bị misclassified. Ta thấy rằng $J_1(\boldsymbol{w}) \geq 0$ nên ta cần tối ưu để hàm này đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0. Khi đó không điểm nào bị misclassified.

Tuy nhiên có một vấn đề. Hàm $J_1(\boldsymbol{w})$ là hàm rời rạc (hàm sgn) nên rất khó tối ưu vì không thể tính đạo hàm. Do đó chúng ta cần một cách tiếp cận khác, một hàm mất mát khác tốt hơn.

Nếu ta bỏ đi hàm sgn thì có hàm

$$J(\boldsymbol{w}) = \sum_{\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{M}} (-y_i \cdot \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}^T)$$

Nhận xét. Một điểm bị misclassified nằm càng xa biên giới (siêu phẳng) thì giá trị $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i^T$ càng lớn, tức là hàm J đi ra xa so với giá trị nhỏ nhất. Hàm J cũng đạt min ở 0 nên ta cũng có thể dùng hàm này để loại bỏ các điểm bị misclassified.

Lúc này hàm $J(\boldsymbol{x})$ khả vi nên ta có thể dùng GD hoặc SGD để tìm nghiệm cho bài toán.

Nếu xét tại một điểm thì

$$J(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}_i, y_i) = -y_i \cdot \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i^T \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{w}} = -y_i \boldsymbol{x}_i$$

Khi đó quy tắc để cập nhật là $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \eta \cdot y_i \cdot \boldsymbol{x}_i$ với η là learning rate (thường chọn bằng 1). Nói cách khác ta đang xây dựng dãy $\{\boldsymbol{w}_n\}$ hội tụ lại nghiệm bài toán với công thức $\boldsymbol{w}_{n+1} = \boldsymbol{w}_n + \eta \cdot y_i \cdot \boldsymbol{x}_i$.

Thuật toán PLA có thể được mô tả như sau:

1. Chọn ngẫu nhiên vector $\boldsymbol{w}$ với w_i xấp xỉ 0.
2. Duyệt ngẫu nhiên qua các $\boldsymbol{x}_i$:
   - Nếu $\boldsymbol{x}_i$ được phân lớp đúng, tức $\text{sgn}(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}_i^T) = y_i$ thì ta không cần làm gì.
   - Nếu $\boldsymbol{x}_i$ bị misclassified, ta cập nhật $\boldsymbol{w}$ theo công thức $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \eta \cdot y_i \cdot \boldsymbol{x}$.
3. Kiểm tra xem có bao nhiêu điểm bị misclassified. Nếu không còn điểm nào thì ta dừng thuật toán, ngược lại thì quay lại bước 2.

Chương 14

Zero Knowledge Proofs

14.1 Zero knowledge proof

ZKP là một protocol mật mã cho phép một bên thuyết phục bên còn lại rằng họ sở hữu những thông tin quan trọng mà không để lộ bất cứ thông tin nào về việc chứng minh.

Khi đó, bên thuyết phục được gọi là **prover**, bên đưa ra thử thách để prover chứng minh bản thân gọi là **challenger** hoặc **verifier**.

Mỗi protocol zero-knowledge phải đảm bảo ba tính chất sau:

- Completeness (tính đầy đủ): nếu mệnh đề đúng thì verifier có thể xác nhận và bị thuyết phục bởi prover;
- Soundness: nếu mệnh đề sai thì prover không thể thuyết phục verifier rằng nó đúng;
- Zero-knowlegde: verifier không biết gì về tính đúng sai của mệnh đề.

Lấy một ví dụ đơn giản để xem cách hoạt động của ZKP là protocol QR[1].

Ví dụ 1. Mệnh đề cần kiểm tra: x là thặng dư chính phương modulo n.

Public input: x và n.

Prover's (Alice) private input: số w sao cho $x = w^2 \pmod{n}$.

Prover $\rightarrow$ Verifier: Alice chọn ngẫu nhiên số u từ $\mathbb{Z}_n^*$ và gửi Bob $y = u^2 \pmod{n}$.

Verifier $\rightarrow$ Prover: Bob chọn $b \in \{0, 1\}$.

Prover $\rightarrow$ Verifier: Nếu $b = 0$ thì Alice gửi u cho Bob. Nếu $b = 1$ thì Alice gửi $w \cdot u \pmod{n}$.

Verification: Gọi z là số được gửi bởi ALice. Bob **chấp nhận** proof nếu $b = 0$ và $z^2 = y \pmod{n}$. Nếu $b = 1$ thì Bob chấp nhận nếu $z^2 = xy \pmod{n}$.

Bob chỉ biết x và n trong khi Alice biết căn bậc hai của x modulo n (thậm

[1] https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall07/cos433/lec15.pdf

chí factor của $n = p \cdot q$ trong đó p và q là các số nguyên tố).

Ở đây Alice muốn thuyết phục Bob rằng mình biết căn bậc hai của x (thậm chí factor của n).

Nếu Alice thật sự biết căn bậc hai của x là w, hay $x = w^2 \pmod{n}$ thì Alice cần chứng minh cho Bob thấy.

1. Alice chọn số random $u \in \mathbb{Z}_n^*$ và gửi $y = u^2 \pmod{n}$ cho Bob.

2. Bob chọn ngẫu nhiên $b \in \{0, 1\}$ và gửi cho Alice.

3a. Nếu $b = 0$ thì Alice cần tính căn bậc hai của y modulo n và gửi cho Bob. Đó chính là u.

3b. Nếu $b = 1$ thì Alice cần tính căn bậc hai của xy (x public và y được gửi trước đó). Ta có $xy = w^2u^2 \pmod{n}$ nên Alice cần gửi wu. Nếu Alice thật sự biết căn bậc hai của x thì có thể tính được wu.

Bob có thể kiểm tra số z được gửi tới có thỏa mãn $z^2 = y \pmod{n}$ (nếu $b = 0$) hoặc thỏa mãn $z^2 = xy \pmod{n}$ (nếu $b = 1$) hay không.

Trong ví dụ trên, ta thấy các tính chất của ZKP:

- Completeness: khi x thực sự là số chính phương modulo n và Alice có thể đưa số w sao cho $x = w^2 \pmod{n}$ thì Bob sẽ chấp nhận với xác suất bằng 1. Điều này khá dễ thấy;
- Soundness: nếu x không là số chính phương modulo n thì Bob có thể bác bỏ chứng minh của Alice với xác suất ít nhất 1/2 (trong trường hợp $b = 1$). Trong khi đó $b = 0$ thì vẫn có "cơ may" đúng;
- Zero knowledge: Bob không biết bất cứ thông tin nào liên quan đến Alice nhưng Alice có thể thuyết phục Bob tin rằng mình biết căn bậc hai của x. Zero knowledge có nghĩa là trong suốt quá trình Bob không biết thêm thông tin gì hơn từ Alice.

Phần tiếp theo được tổng hợp từ một số nguồn dành cho newbie:

- What is a zk-SNARK?[2]

14.2 Mô hình zero-knowledge proof

ZKP bao gồm ba bước là: key generation, proof generation và verification.

Key generation

Bước này tạo các tham số để một bên proof và để bên còn lại verification.

Thông thường, ở bước này có một hàm $C(x, w)$ nhận hai tham số là x (public input) và w (private input, witness).

[2] https://blog.thirdweb.com/what-is-a-zk-snark/

Một tham số private là λ giúp việc sinh ra các tham số gồm public key pk và private key vk.

Ký hiệu: Setup$(C, \lambda) \rightarrow (pk, vk)$.

Trong đó pk được gửi cho prover để họ chứng minh bản thân (thuyết phục verifier rằng họ sở hữu thông tin).

Ngược lại, vk được gửi cho verifier để họ kiểm tra mệnh đề từ prover.

Proof generation

Bước này thực hiện bởi prover để sinh ra giá trị gửi cho bên verifier kiểm tra.

Với đầu vào gồm private input là w, public input là x và public key là pk, prover sẽ tính toán prf rồi gửi cho verifier.

Ký hiệu: Prove$(w, x, pk) \rightarrow$ prf.

Verification

Bước này thực hiện bởi verifier để kiểm tra mệnh đề prf được gửi từ prover.

Với đầu vào gồm public input x, proof là prf và private key là vk, verifier kiểm tra tính đúng đắn của prf.

Ký hiệu: Verify$(x, \text{prf}, vk) \rightarrow$ đúng (nếu hợp lệ) hoặc sai (ngược lại).

Chương 15

Đường đoản thời

Lời nói đầu

Động lực để tác giả viết bài này là sau khi đọc về sự ra đời phép tính vi tích phân cùng vụ tranh cãi đáng xấu hổ trong lịch sử toán học giữa Newton và Leibniz, cùng với bài toán của Johann Bernoulli.

Bài nghiên cứu này được tham khảo nhiều nguồn (từ Miguel A. Lerma[1] và Lê Quang Ánh[2]) và là tài liệu học tập cá nhân. Tác giả hy vọng rằng bài nghiên cứu nhỏ này sẽ giúp ích được cho các bạn học sinh, sinh viên đam mê toán và vật lý (mặc dù tác giả không phải dân lý hihi).

Bối cảnh lịch sử

Thế kỷ 17 đã chứng kiến một drama có thể gọi là đáng xấu hổ nhất lịch sử toán học. Hai nhà toán học có ảnh hưởng rất lớn lại vướng vào một vụ kiện tụng và tranh cãi khó coi để xem ai là người phát minh ra phép tính vi tích phân. Vâng, chúng ta đang nói đến Newton và Leibniz. Vào thời điểm đó có một nhà toán học xuất sắc thuộc một dòng họ cũng gồm rất nhiều nhân vật xuất sắc đã đưa ra một bài toán đố cho các nhà toán học trên thế giới. Bài toán đó đã chứng minh được ưu thế vượt trội trong phương pháp vi tích phân của Leibniz.

Nhà toán học xuất sắc đó là Johann Bernoulli, thuộc dòng họ Bernoulli nổi tiếng. Bài toán đó được phát biểu như sau:

Cho hai điểm A và B nằm trong mặt phẳng thẳng đứng P (A cao hơn B). Hãy xác định đường nối hai điểm A và B và nằm trong mặt phẳng P sao cho một điểm chỉ chịu trọng lực chạy từ A đến B trong thời gian ngắn nhất.

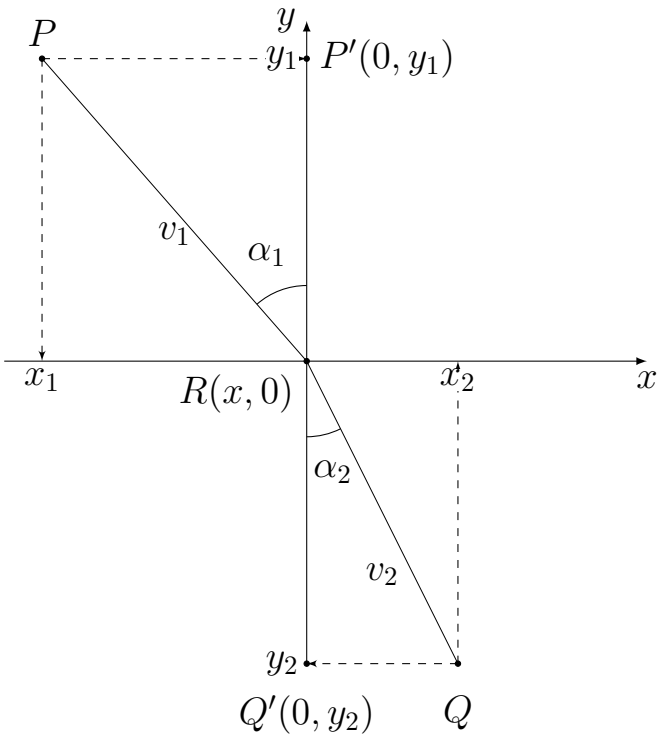
[1] *A simple derivation of the equation for the brachistochrone curve*, https://sites.math.northwestern.edu/~mlerma/papers-and-preprints/brachistochrone.pdf

[2] *Gia đình Bernoulli: một dòng họ Toán học*, trang 7, https://rosetta.vn/lequanganh/gia-dinh-bernoulli-mot-dong-ho-toan-hoc/

Chúng ta đã biết rằng đường đi ngắn nhất giữa hai điểm là đoạn thẳng nối hai điểm đó. Tuy nhiên trong bài toán của Johann Bernoulli thì đại lượng ngắn nhất cần tìm không phải khoảng cách giữa hai điểm mà là thời gian di chuyển giữa hai điểm. Mục tiêu cần làm ở bài toán này là xác định đường đi (hay quỹ đạo) thời gian ngắn nhất đó. Do đó bài toán này được gọi là bài toán *đường đoản thời* (brachistochrone curve).

Để giải bài toán này chúng ta cần một định luật cũng về thời gian ngắn nhất. Đó là nguyên lý thời gian ngắn nhất của Fermat và một hệ quả của nó là định luật Snell-Descartes.

Định luật Snell-Descartes



Hình 15.1. Định luật Snell-Descartes

Nguyên lý thời gian ngắn nhất của Fermat phát biểu rằng

Khi ánh sáng truyền từ môi trường này sang môi trường khác thì nó luôn truyền đi theo đường nhanh nhất.

Hệ quả của nguyên lý của Fermat là định luật Snell-Descartes mà chúng ta thường thấy ở chương trình vật lý ở phổ thông dưới dạng định luật khúc xạ ánh sáng

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{15.1}$$

với α_1 và α_2 lần lượt là góc hợp bởi tia vào và tia ra với pháp tuyến tại điểm tới, v_1 và v_2 là vận tốc truyền trong môi trường ở nửa trên và nửa dưới Ox (xem

hình 15.1).

Để chứng minh định luật trên, ta thấy rằng v_1 là vận tốc khi di chuyển từ điểm P tới điểm R nên thời gian t_1 đi từ điểm P tới R là

$$t_1 = \frac{\|\overrightarrow{PR}\|}{v_1} = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}{v_1} \tag{15.2}$$

Lưu ý rằng tia sáng không truyền tới gốc tọa độ $O(0,0)$ mà truyền tới một điểm $R(x,0)$ là vì điểm bắt đầu là $P(x_1,y_1)$ và ánh sáng truyền đi theo đường nhanh nhất (theo nguyên lý Fermat) nên không có gì đảm bảo rằng nó sẽ truyền tới $O(0,0)$.

Tương tự, thời gian t_2 đi từ điểm R tới Q là

$$t_2 = \frac{\|\overrightarrow{RQ}\|}{v_2} = \frac{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}{v_2} \tag{15.3}$$

Kết hợp hai phương trình của t_1 và t_2 lại thì tổng thời gian di chuyển từ P tới Q biểu diễn theo x là

$$T(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}{v_2} \tag{15.4}$$

Đạo hàm theo x ta có

$$T'(x) = \frac{x-x_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}} + \frac{x-x_2}{v_2\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}} \tag{15.5}$$

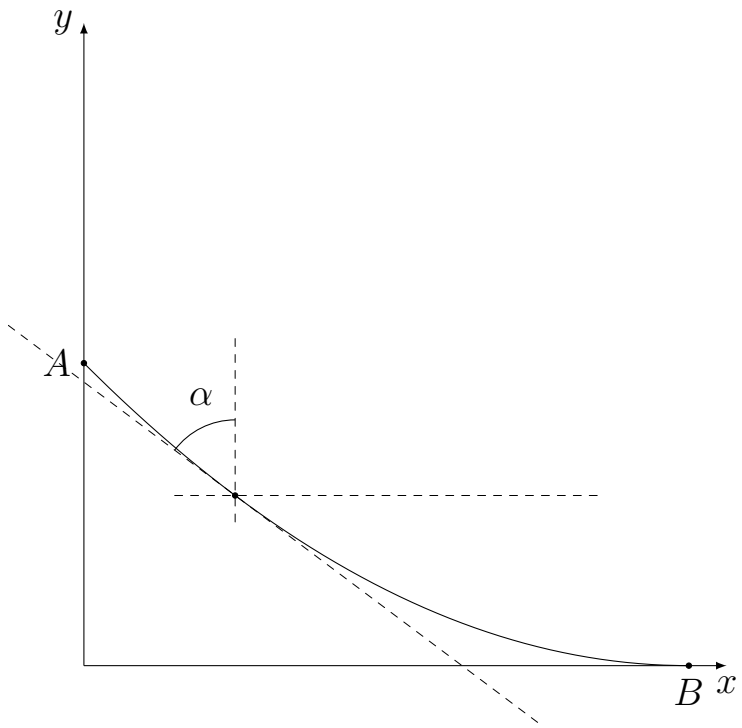
Để ý rằng $x > x_1$ nên $x - x_1 = \|\overrightarrow{PP'}\|$. Tương tự $x_2 - x = \|\overrightarrow{QQ'}\|$. Để tìm cực trị ta cho đạo hàm bằng 0 rồi tính đạo hàm cấp 2. Ta có

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\|\overrightarrow{PP'}\|}{v_1\|\overrightarrow{PR}\|} - \frac{\|\overrightarrow{QQ'}\|}{v_2\|\overrightarrow{RQ}\|} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha_1}{v_1} - \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = 0$$

Như vậy $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$. Đạo hàm cấp 2 tương ứng là

$$T''(x) = \frac{y_1^2}{v_1((x-x_1)^2+y_1^2)} + \frac{y_2^2}{v_2((x-x_2)^2+y_2^2)} > 0$$

Do đó x thỏa $T'(x) = 0$ ở trên là cực tiểu và định luật Snell-Descartes được chứng minh.



Hình 15.2. Đường cycloid

Đường cong Cycloid

Đáp án cho bài toán mà Johann Bernoulli đặt ra là đường cong Cycloid. Sau đây sẽ trình bày cách giải bài toán của Johann Bernoulli.

Phương của vận tốc tức thời tại một điểm khi một vật đi theo một quỹ đạo đường cong là tiếp tuyến với đường cong tại điểm đó. Khi đó góc α trong định luật Snell-Descartes sẽ có liên hệ với hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong. Nói rõ hơn, góc hợp bởi tiếp tuyến và trục Ox là $\alpha + \dfrac{\pi}{2}$ và hệ số góc của tiếp tuyến là $\tan\Big(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\Big) = \dfrac{dy}{dx}$ (hình 15.2).

Ta có $\tan\Big(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\Big) = -\cot\alpha$ và $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ nên

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = 1 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 \tag{15.6}$$

Giả sử tọa độ của A là (x_0, y_0). Khi một điểm di chuyển từ A tới B, gọi (x, y) là tọa độ của điểm đó trên đường cong. Theo định luật bảo toàn cơ năng thì

$$mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

với v là vận tốc tức thời tại điểm (x, y) và mgy là thế năng tại điểm đó. Như vậy ta có

$$v^2 = 2g(-y + y_0) \tag{15.7}$$

Theo định luật Snell-Descartes thì $\frac{v}{\sin\alpha}$ là một hằng số khi nằm trong cùng môi trường. Do đó tồn tại số r cố định sao cho $\frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 4gr$. Từ hai biểu thức của v^2 và $\frac{1}{\sin^2\alpha}$ ở trên ta có

$$\frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 2g(-y+y_0)\Big(1+\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2\Big) = 4gr \tag{15.8}$$

Suy ra

$$\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 = \frac{2r}{y_0-y} - 1 \tag{15.9}$$

Tới đây ta thấy rằng bậc của dy và dx ở vế trái là giống nhau, trong khi vế phải chỉ có y mà không có x. Do đó "bắt chước" cách đổi biến của đường tròn, đặt

$$\begin{cases} x = a\theta + b\cos\theta \\ y = c + d\sin\theta \end{cases}$$

với a, b, c, d là các số thực cần tìm, θ là góc hợp bởi Oy và đoạn thẳng nối tâm O và điểm trên đường cong (theo góc α). Lưu ý rằng khi thay $\theta = 0$ và $\theta = \pi/2$ vào hai phương trình trên ta phải thu được hai điểm trên hai trục tọa độ.

Lấy vi phân hai phương trình trên ta có

$$\begin{cases} dx = a - b\sin\theta\, d\theta \\ dy = d\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

Thay vào phương trình 15.9 ta được

$$\frac{d^2\cos^2\theta}{(a-b\sin\theta)^2} = \frac{2r}{y_0-c-d\sin\theta} - 1 = \frac{2r-y_0+c+d\sin\theta}{y_0-c-d\sin\theta}$$

Do $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$ nên ta muốn chọn a và b có thể rút gọn được cho tử số.

Trường hợp 1. $a = b$, ta thu được

$$\frac{d^2(1+\sin\theta)}{a^2(1-\sin\theta)} = \frac{(2r-y_0+c)+d\sin\theta}{(y_0-c)-d\sin\theta}$$

Ta sẽ muốn đồng nhất hệ số tự do và hệ số trước $\sin\theta$ để dễ tính toán sau này. Do đó một cách chọn đơn giản là $2r-y_0+c = d$ và $y_0-c = d$. Suy ra $r = d$. Thu gọn phương trình ta được

$$\frac{d^2(1+\sin\theta)}{a^2(1-\sin\theta)} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

Như vậy $a^2 = d^2$ nên $a = d$ hoặc $a = -d$. Ta xét trường hợp $a = d$, trường hợp $a = -d$ cũng cho kết quả tương tự (không thỏa mãn).

Ta có $a = b = d = r$ và $c = y_0 - d = y_0 - r$. Phương trình đường cong trong tọa độ cực sẽ là

$$\begin{cases} x = r(\theta + \cos\theta) \\ y = (y_0 - r) + r\sin\theta \end{cases}$$

Với $\theta = 0$ thì $(x, y) = (r, y_0 - r$. Với $\theta = \pi/2$ thì $(x, y) = (\pi r/2, y_0)$.

Tới đây chúng ta có thể thêm bớt một hằng số để "kéo" các tọa độ về trục.

Ta đưa tọa độ khi $\theta = 0$ về Oy thì $x' = x - r$. Tương tự tọa độ khi $\theta = \pi/2$ sẽ về Ox nên $y' = y - y_0$. Như vậy tọa độ (mới) cho hai trường hợp θ là $(0, -r)$ và $(\pi r/2 - 1, 0)$ nhưng vì r là số dương (bán kính) nên $(0, -r)$ nằm dưới trục Ox, không phù hợp với hình vẽ.

Trường hợp 2. $a = -b$, ta thu được

$$\frac{d^2(1 - \sin\theta)}{a^2(1 + \sin\theta)} = \frac{(2r - y_0 + c) + d\sin\theta}{(y_0 - c) - d\sin\theta}$$

Tương tự, để đồng nhất và rút gọn hệ số cho hợp với bên vế trái ta chọn $2r - y_0 + c = -d$ và $y_0 - c = -d$. Suy ra $d = -r$. Thu gọn phương trình ta được

$$\frac{d^2(1 - \sin\theta)}{a^2(1 + \sin\theta)} = \frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}$$

Như vậy $a^2 = d^2$ nên $a = d$ hoặc $a = -d$ Ta xét trường hợp $a = -d$.

Khi đó $a = -b = -d = r$ và $c = y_0 + d = y_0 - r$. Phương trình đường cong trong tọa độ cực sẽ là

$$\begin{cases} x = r(\theta - \cos\theta) \\ y = (y_0 - r) - r\sin\theta \end{cases}$$

Với $\theta = 0$ thì $(x, y) = (-r, y_0)$. Với $\theta = \pi/2$ thì $(x, y) = (r(\pi/2 - 1), y_0 - 2r)$.

Tới đây ta cũng thêm bớt một hằng số vào hoành độ và tung độ để "kéo" các tọa độ về trục.

Ta đưa tọa độ khi $\theta = 0$ về Oy thì $x' = x + r$. Tương tự ta đưa tọa độ khi $\theta = \pi/2$ về Ox thì $y' = y - y_0 + 2r$. Khi đó tọa độ (mới) là $(0, 2r)$ và $(\pi r/2, 0)$. Điều này phù hợp với yêu cầu bài toán và tương đương với phương trình trong tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r(\theta - \cos\theta) + r = r(1 + \theta - \cos\theta) \\ y = (y_0 - r) - r\sin\theta - (y_0 - 2r) = r(1 - \sin\theta) \end{cases} , 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad (15.10)$$

Đây chính là kết quả cần tìm. Thêm nữa vị trí ban đầu của vật là $(0, y_0)$ và tọa độ theo phương trình là $(0, 2r)$ nên suy ra $y_0 = 2r$.

Phương trình phụ thuộc thời gian

Trong phương trình đường cong có sự tham gia của bán kính r cố định và góc quét θ. Chúng ta cần mối liên hệ giữa các phương trình theo thời gian.

Nhắc lại, vận tốc tức thời tại một điểm có phương trùng với tiếp tuyến với đường cong tại điểm đó. Do đó $v = \dfrac{\sqrt{(dy)^2 + (dx)^2}}{dt}$ xác định vận tốc tức thời với quãng đường là $(dy)^2 + (dx)^2$ là bình phương khoảng cách trong mặt phẳng. Từ đây suy ra

$$v^2 = \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 = r^2\cos^2\theta\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 + r^2(1+\sin\theta)^2\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2$$
$$= 2r^2(1+\sin\theta)\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2$$

Từ bên trên và $y_0 = 2r$ ta có

$$v^2 = 2g(y_0 - y) = 2g(y_0 - r + r\sin\theta) = 2gr(1+\sin\theta)$$

Suy ra

$$2r^2(1+\sin\theta)\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 = 2gr(1+\sin\theta)$$

Hay

$$\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 = \frac{g}{r} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r}} = \text{const} \tag{15.11}$$

Như vậy $\theta = \sqrt{\dfrac{g}{r}}t = \omega t$. Ở đây t là thời gian tính từ lúc bắt đầu thả vật từ điểm A. Cuối cùng phương trình phụ thuộc thời gian của đường cong Cycloid là

$$\begin{cases} x = r(1 + \omega t - \cos\omega t) \\ y = r(1 - \sin\omega t) \end{cases} \tag{15.12}$$

Trong đó, r là bán kính cố định (bằng nửa độ cao ban đầu y_0 của vật), $\omega = \frac{g}{r}$ là tần số góc, y_0 là độ cao ban đầu của vật (tung độ điểm A).

Chương 16

Assembly, stack và heap

16.1 Lệnh assembly cơ bản

Các lệnh hợp ngữ xử lý trên các toán hạng. Địa chỉ của toán hạng cho biết vị trí của dữ liệu được xử lý trên bộ nhớ. Một số lệnh không yêu cầu toán hạng, một số lệnh khác lại yêu cầu 1, 2 hoặc 3 toán hạng.

Về cơ bản có 3 chế độ lập địa chỉ là:

- Địa chỉ tức thời (Immediate addressing);
- Địa chỉ thanh ghi (Register addressing);
- Địa chỉ vùng nhớ (Memory addressing).

Khi lệnh có 2 toán hạng, thường thì toán hạng đầu tiên là toán hạng đích, lưu giá trị trên thanh ghi hoặc ở 1 vị trí nào đó trên vùng nhớ, còn toán hạng thứ 2 là nguồn. Nguồn thường là các hằng số (chứa trong địa chỉ tức thời) hoặc địa chỉ (trong thanh ghi hoặc bộ nhớ). Giá trị của nguồn không thay đổi sau khi tính toán.

Nhóm lệnh truyền dữ liệu

- **mov [đích], [nguồn]**: truyền dữ liệu (word hoặc block) từ nguồn (thanh ghi hay bộ nhớ trong) tới đích;
- **load [đích], [nguồn]**: đọc dữ liệu từ bộ nhớ nguồn vào thanh ghi đích;
- **store [đích], [nguồn]**: lưu dữ liệu từ thanh ghi nguồn vào vùng nhớ ở địa chỉ đích;
- **push [nguồn]**: lưu dữ liệu từ thanh ghi vào stack (thường thấy khi gọi hàm);
- **pop**: đưa dữ liệu từ stack vào thanh ghi.

Một số lệnh và ý nghĩa:

Đích	Nguồn	Ví dụ	Ý nghĩa
Bộ nhớ	Thanh ghi	mov 100h, ax	Chuyển nội dung trong thanh ghi ax vào vị trí nhớ 100h
Thanh ghi	Bộ nhớ	mov eax, mem1	Chuyển nội dung trong vị trí nhớ mem1 vào thanh ghi eax
Thanh ghi	Thanh ghi	mov eax, ebx	Chuyển nội dung trong thanh ghi ebx vào thanh ghi eax
Thanh ghi	Hằng số	mov eax, 13h	chuyển giá trị hằng 13 ở hệ hexa vào thanh ghi eax

Nhóm lệnh tính toán số học

Các lệnh số học bao gồm phép tính cộng, trừ, nhân, chia và đảo dấu toán hạng. Trong đó toán hạng nguồn và đích có thể là các địa chỉ khác nhau nhưng phải chứa dữ liệu có cùng độ dài (ax thì tương ứng bx còn ebx không hợp lệ,.....).

Ví dụ 1. Ví dụ các lệnh cộng, trừ.

add ax, bx // ax ← ax + bx

sub cx, 15h // cx ← cx - [15h]

add ax, 15h // ax ← ax + [15h]

Các lệnh số học cơ bản:

- **add**: cộng;
- **addd**: cộng số có dấu chấm động, chính xác kép;
- **sub**: trừ;
- **subd**: trừ số có dấu chấm động, chính xác kép;
- **mul**: nhân;
- **div**: chia;
- **neg**: đảo dấu toán hạng;
- **inc**: tăng lên 1;
- **dec**: giảm đi 1.

Ví dụ 2. Để cộng 2 số 5h và 3h sau đó lưu thanh ghi cx ta có thể làm như sau:

mov ax, 5h // ax ← 5h

mov bx, 3h // bx ← 3h

add ax, bx // ax ← ax + bx

mov cx, ax // cx ← ax

Nhóm lệnh logic

Nhóm này gồm các phép tính logic not, and, or, xor và test.

- **not**: đảo tất cả bit trong toán hạng (0 thành 1 và 1 thành 0);
- **and/or/xor**: thực hiện phép and/or/xor trên từng cặp bit trong toán hạng nguồn và đích;
- **test**: giống and nhưng không làm thay đổi giá trị toán hạng đầu tiên (toán hạng đích).

Nhóm các lệnh điều kiện và lệnh nhảy

Nhóm lệnh điều kiện có chức năng kiểm tra điều kiện để quyết định thực hiện lệnh kế tiếp là lệnh nào, thông thường sẽ đi kèm lệnh nhảy (nhảy tới lệnh kế tiếp khi thỏa hoặc không thỏa điều kiện).

Có hai loại lệnh nhảy:

- **Nhảy không điều kiện**: thực hiện bởi lệnh **jmp**;
- **Nhảy có điều kiện**: thực hiện bởi lệnh **j⟨ điều kiện ⟩** phụ thuộc vào điều kiện được xét.

Lệnh **cmp**, là câu lệnh để thực hiện việc so sánh (compare) điều kiện.

Cú pháp là **cmp [đích] [nguồn]**, tương tự như các lệnh tính toán số học, nguồn có thể là hằng, thanh ghi, vùng nhớ, còn đích thì là thanh ghi hoặc vùng nhớ.

Thông thường, việc so sánh là để quyết định việc rẽ nhánh và nhảy đến một vị trí nào đó.

1. **Lệnh nhảy không điều kiện**. Lệnh **jmp** cho phép nhảy tới một nhãn với cú pháp là **jmp lable**

Ví dụ 3. Dòng lệnh cuối là chỉ thị quay lại vòng lặp mô tả bởi nhãn LE003.

```
mov ax, 8h
mov bx, 9h
mov cx, 0ffh
LE003:
    add ax, 01
    sub bx, 01
    add cx, ax
    jmp LE003
```

2. **Lệnh nhảy có điều kiện**. Khi một điều kiện nhảy thỏa mãn, luồng điều khiển sẽ được đưa đến câu lệnh cần thực thi. Có nhiều loại điều kiện nhảy, ví dụ:

- **je/jz**: jump equal/jump zero, nhảy khi bằng nhau/nhảy khi kết quả so sánh bằng 0;
- **jg/jnle**: jump greater/jump not less or equal, nhảy khi lớn hơn/nhảy khi không nhỏ hơn hoặc bằng.

16.2 Stack và Heap

Phần này sẽ sử dụng ngôn ngữ C/C++ và 1 số câu lệnh Assembly để giải thích nguyên lý của stack và heap.

Để đơn giản thì dưới đây bắt đầu với kiến trúc x86 (thanh ghi độ dài 32 bit và có tiền tố là e như eax, ebx, ...).

Stack

Stack là cấu trúc dữ liệu vào sau ra trước. Khi hàm thực thi, nó sẽ tạo ra vùng nhớ stack cho bản thân nó (kể cả hàm main). Vùng nhớ này chứa các tham số truyền vào (trừ tham chiếu) và các biến cục bộ. Ta xét chương trình sau viết trên C:

```
#include <stdio.h>
int m = 100;
double n = 8;
int square(int x)
{
    return x * x;
}
int cube(int x)
{
    return square(x) * x;
}
int main()
{
    int a = 4, b = 8;
    int c = square(a);
    int d = cube(b);
    return 0;
}
```

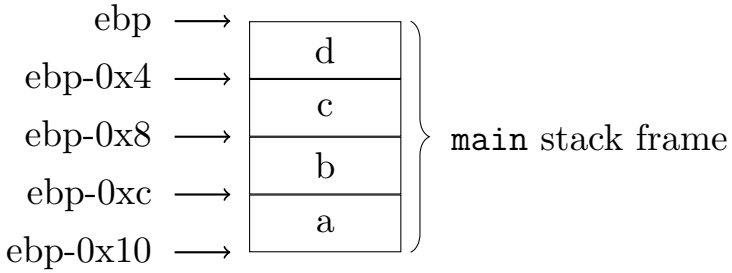
Chương trình được biên dịch thành executable file 32 bit bởi GCC phiên bản 11.4.0 bằng lệnh Linux:

```
gcc -m32 main.c -o main
```

Bước 1. Biến toàn cục. Đầu tiên, biến toàn cục `m` và `n` sẽ được lưu trong Data Segment.

Bước 2. Hàm `main`. Sau đó là Stack Segment. Các chương trình C/C++ sẽ được thực thi bắt đầu từ hàm `main`. Khi hàm `main` chạy, nó tạo ra vùng nhớ cho nó, đẩy các biến `a`, `b`, `c`, `d` vào stack ngược thứ tự khai báo (hình 16.1).

Hình 16.1 có thể được giải thích khi dùng objdump ra đoạn assembly dưới



Hình 16.1. Hàm `main`

đây.

```
000011c0 <main>:
    push   ebp
    mov    ebp,esp
    sub    esp,0x10
    call   1201 <__x86.get_pc_thunk.ax>
    add    eax,0x2e11
    mov    DWORD PTR [ebp-0x10],0x4
    mov    DWORD PTR [ebp-0xc],0x8
    push   DWORD PTR [ebp-0x10]
    call   118d <square>
    add    esp,0x4
    mov    DWORD PTR [ebp-0x8],eax
    push   DWORD PTR [ebp-0xc]
    call   11a2 <cube>
    add    esp,0x4
    mov    DWORD PTR [ebp-0x4],eax
    mov    eax,0x0
    leave
    ret
```

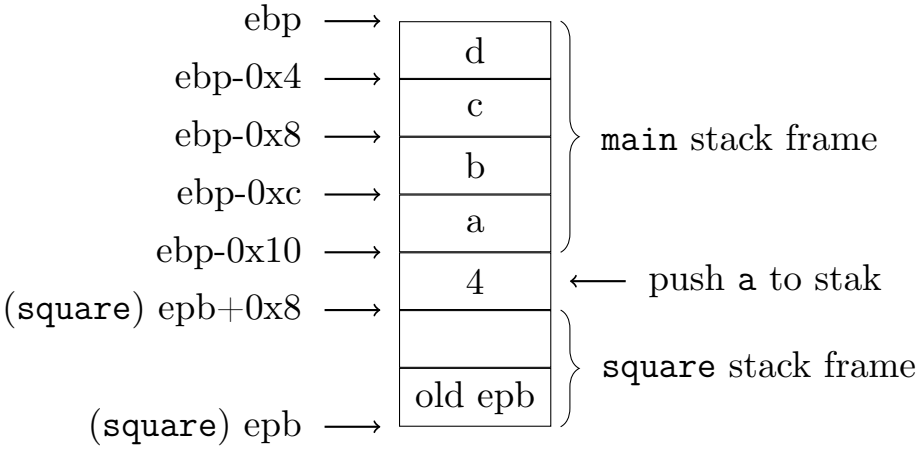
Biến `a` nằm ở vị trí 0x10 và biến `b` nằm ở vị trí 0xc. Vậy thì `a` nằm thấp hơn `b`. Điều này nghĩa là stack đi từ trên xuống.

Sau đó, giá trị 4 được chép qua biến `a`, giá trị 8 được chép qua biến `b`. Kế tiếp, trong hàm `main` gọi hàm `square`. Khi đó các tham số cần thiết cho hàm `square` sẽ được nạp vào stack (ở đây là biến `a` ở ebp-0x10) và hàm `square` sẽ được nạp vào stack 16.2.

Bước 3. Gọi hàm `square`. Hàm `square` có một tham số truyền vào là `a` ở địa chỉ ebp+0x8 (ebp mới của hàm `square`, không phải của `main`).

Ở đây, chương trình đưa giá trị 4 (ở ebp+0x8) vào thanh ghi eax và bình phương (lệnh `imult`). Kết quả trả về của hàm được gán trong thanh ghi eax.

```
0000118d <square>:
    push   ebp
```

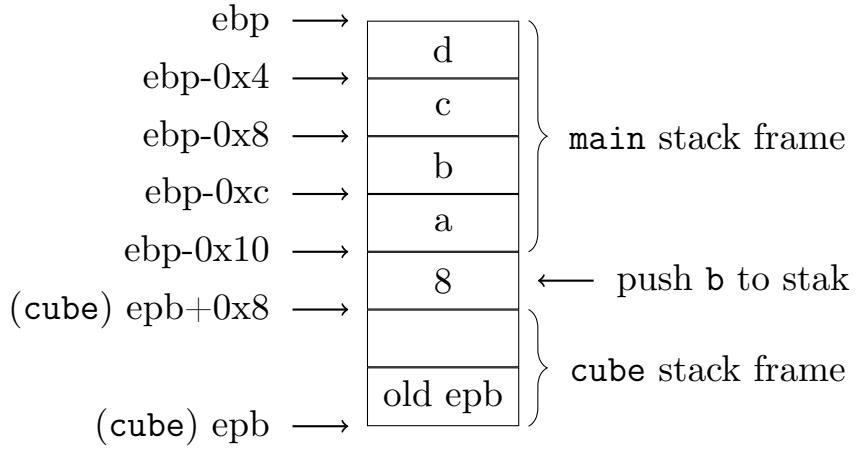


Hình 16.2. Gọi hàm `square`

```
mov     ebp,esp
call    1201 <__x86.get_pc_thunk.ax>
add     eax,0x2e47
mov     eax,DWORD PTR [ebp+0x8]
imul    eax,eax
pop     ebp
ret
```

Sau khi hàm `square` chạy xong, nó gán giá trị 16 vào biến `c` (từ thanh ghi eax vào địa chỉ ebp-0x8), lúc này trong stack trở lại như lúc chưa có hàm `square`.

Bước 4. Gọi hàm `cube`. Khi hàm `main` gọi hàm `cube`, nó thực hiện giống như cho hàm `square` ở trên, tức là tạo stack frame cho `cube` (hình 16.3).



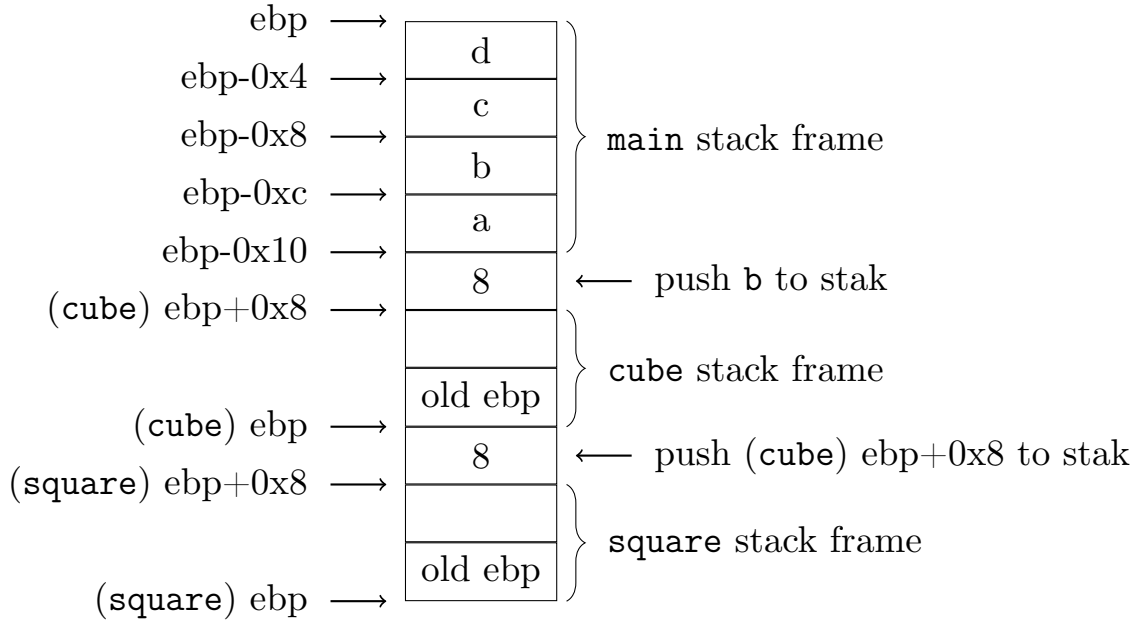
Hình 16.3. Hàm `main` gọi hàm `cube`

```
000011a2 <cube>:
    push    ebp
    mov     ebp,esp
    call    1201 <__x86.get_pc_thunk.ax>
```

```
add     eax,0x2e32
push    DWORD PTR [ebp+0x8]
call    118d <square>
add     esp,0x4
imul    eax,DWORD PTR [ebp+0x8]
leave
ret
```

Tiếp theo, bên trong hàm `cube` lại gọi hàm `square` nên hàm `cube` sau khi đẩy các tham số cho hàm `square` vào stack thì gọi hàm `square` (hình 16.4).

Sau khi hàm `square` thực hiện tính toán, giá trị trả về của nó được lưu trong eax. Sau đó hàm `cube` lấy kết quả ở eax (giá trị trả về của `square`) nhân với ebp+0x8 (tham số, ở đây là 8). Kết quả cuối cùng vẫn được lưu trữ ở eax để hàm `main` sử dụng.



Hình 16.4. Hàm `cube` gọi hàm `square`

Cứ mỗi lần gọi hàm, hàm được gọi sẽ được nạp vào stack, và khi số lượng hàm quá lớn (có thể do đệ quy quá nhiều) sẽ gây tràn stack và gây ra lỗi stack overflow (tràn stack).

Do tất cả biến cục bộ được lưu trữ trong stack, nên trong mỗi hàm chỉ có thể có một số lượng biến nhất định. Vì vậy độ dài mảng cấp phát được thường là khá ít. Từ đó, một loại vùng nhớ được sử dụng để khắc phục nhược điểm này là heap.

Phần VII

Quantum cryptography

Phần VII: Nội dung

Chương 17

Quantum computing

17.1 Qubit và toán tử quantum

Trên máy tính hiện nay, đơn vị xử lý cơ bản là bit (0 hoặc 1). Trong máy tính lượng tử, đơn vị tính toán là qubit (quantum bit).

Qubit

Mỗi qubit $|\psi\rangle$ được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của cơ sở gồm $|0\rangle = (1,0)$ và $|1\rangle = (0,1)$. Khi đó qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Ở đây $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (tập số phức).

Tích của n qubit là các tổ hợp $|0,0,\ldots,0\rangle$, $|0,0,\ldots,1\rangle$, ..., $|1,1,\ldots,1\rangle$. Ta cũng ký hiệu $|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$.

Ví dụ 1. Nếu $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ và $|\Psi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ thì

$$|\psi\rangle \otimes |\Psi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$$

Tiếp theo là **toán tử quantum** và tương ứng với nó là các cổng (gate) trên mạch.

Toán tử quantum tác động lên một qubit hoặc tích của nhiều qubit.

Qubit có dạng $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$. Ta có thể viết hệ số dưới dạng vector cột $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Khi đó, toán tử quantum sẽ là một ma trận 2×2 biến đổi vector trên thành vector mới $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ tương ứng với qubit $|\Psi\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$.

Nói cách khác, đặt toán tử quantum là ma trận $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ thì ta có

$$|\psi\rangle \to |\Psi\rangle = \mathcal{U}|\psi\rangle, \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Các toán tử quantum thường gặp

Định nghĩa 1. Toán tử đồng nhất

Toán tử đồng nhất identity giữ nguyên qubit đầu vào. Ma trận tương ứng là ma trận đơn vị $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 2. Toán tử NOT

Toán tử NOT có ma trận tương ứng là $\text{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó $\text{NOT}|\psi\rangle = b|0\rangle + a|1\rangle$ với $x \in \{0, 1\}$.

Khi qubit là $|0\rangle$ hoặc $|1\rangle$, tác dụng của toán tử NOT là phép XOR nên ta có $\text{NOT}|x\rangle = |x \oplus 1\rangle$.

Định nghĩa 3. Toán tử Hadamard

Ma trận của toán tử Hadamard là $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 2. Xét qubit $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, toán tử Hadamard tương ứng với phép nhân ma trận

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b) \end{pmatrix}$$

Ta chuyển cột kết quả về lại dạng tổ hợp tuyến tính thì cổng Hadamard hoạt động trên qubit $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ cho kết quả là

$$H|\psi\rangle = H(a|0\rangle + b|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)|1\rangle$$

Nếu $|\psi\rangle \equiv |0\rangle$ thì tương đương với $a = 1, b = 0$. Ta có $H|0\rangle = \dfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$.

Nếu $|\psi\rangle \equiv |1\rangle$ thì tương đương với $a = 0, b = 1$. Ta có $H|1\rangle = \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$.

Tổng quát ta nhận thấy, với $x \in \{0, 1\}$ thì $H|x\rangle = \dfrac{|0\rangle + (-1)^x|1\rangle}{\sqrt{2}}$.

Ta thấy rằng toán tử ngược của toán tử Hadamard là chính nó.

Tiếp theo là toán tử thường được dùng nhất khi tính toán trên tích của nhiều qubit: toán tử control.

Như đã xem xét ở trên, tích của n qubit sẽ có 2^n phần tử tương ứng các bộ $|0, 0, \ldots, 0, 0\rangle$, $|0, 0, \ldots, 0, 1\rangle$, ... Do đó toán tử control sẽ là ma trận kích thước $2^n \times 2^n$.

Định nghĩa 4. Toán tử control

Gọi $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ là toán tử tác động lên một qubit. Xét hai qubit là $|x\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ và $|y\rangle = c|0\rangle + d|1\rangle$. Ta có tích

$$|x\rangle \otimes |y\rangle = ac|00\rangle + ad|01\rangle + bc|10\rangle + bd|11\rangle$$

Khi đó toán tử control có dạng ma trận là

$$c\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Hay viết dưới dạng ma trận khối là $c\mathcal{U} = \begin{pmatrix} I & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{U} \end{pmatrix}$.

Ta cũng viết tích $|x\rangle \otimes |y\rangle$ dưới dạng vector cột (4 phần tử). Khi đó

$$\mathcal{U}(|x\rangle \otimes |y\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ c_{11} \cdot bc + c_{12} \cdot bd \\ c_{21} \cdot bc + c_{22} \cdot bd \end{pmatrix}$$

Hai phần tử đầu của vector kết quả không thay đổi, còn phần sau có "một

phần" là $\mathcal{U}|y\rangle$. Khi viết lại kết quả dưới dạng qubit thì

$$ac|00\rangle + ad|01\rangle + (c_{11} \cdot bc + c_{12} \cdot bd)|10\rangle + (c_{21} \cdot bc + c_{22} \cdot bd)|11\rangle$$

Ta có một số nhận xét sau đây.

Nếu $|x\rangle \equiv |0\rangle$, tức là $a = 1, b = 0$ thì tích trên tương ứng với $c|00\rangle + d|01\rangle + 0|10\rangle + 0|11\rangle = |0\rangle \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle$.

Nếu $|x\rangle \equiv |1\rangle$, tức là $a = 0, b = 1$ thì tích trên tương ứng với $0|00\rangle + 0|01\rangle + (c_{11}c + c_{12}d)|10\rangle + (c_{21}c + c_{22}d)|11\rangle = |1\rangle \otimes ((c_{11}c + c_{12}d)|0\rangle + (c_{21}c + c_{22}d)|1\rangle) = |1\rangle \otimes \mathcal{U}|y\rangle = |x\rangle \otimes \mathcal{U}|y\rangle$.

Tổng kết lại, với $x \in \{0, 1\}$ thì

- nếu $x = 0$ thì $|x\rangle \otimes |y\rangle \to |x\rangle \otimes |y\rangle$.
- nếu $x = 1$ thì $|x\rangle \otimes |y\rangle \to |x\rangle \otimes \mathcal{U}|y\rangle$.

Tùy vào x là 0 hay 1 mà toán tử quantum $\mathcal{U}$ sẽ bị bỏ qua hoặc xem xét. Ở đây qubit $|x\rangle$ đóng vai trò điều khiển nên đây được gọi là toán tử control.

Định nghĩa 5. Toán tử control CNOT (Control NOT)

Toán tử quantum CNOT có ma trận là

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \text{NOT} \end{pmatrix}$$

Qubit $|x\rangle$ với $x \in \{0, 1\}$ đóng vai trò control cho qubit $|y\rangle$. Khi $x \equiv 0$ thì y giữ nguyên, hay $|y \oplus 0\rangle = |y \oplus x\rangle$. Khi $x \equiv 1$ thì áp dụng cổng NOT bên trên, khi đó y biến đổi thành $y \oplus 1 = y \oplus x$.

Chương 18

Code-based cryptography

18.1 Introduction

Thông tin thường được biểu diễn với các ký tự của một bảng chữ cái (alphabet) nào đó, thông thường là ở dạng dãy nhị phân m phần tử (m-tuple).

Dãy nhị phân độ dài m sẽ đi qua một **encoder** thành dãy nhị phân độ dài n. Sau đó dãy độ dài n được truyền đi trên các kênh truyền dữ liệu.

Ở nơi nhận, dãy nhị phân độ dài n đi qua một **decoder** để trở thành dãy nhị phân độ dài m.

Việc truyền dữ liệu trên kênh truyền có thể dẫn đến các lỗi tín hiệu. Như vậy chúng ta cần cơ chế để xác định có lỗi xảy ra hay không và sửa chữa nó.

Định nghĩa 1. Block code

Code được gọi là (n, m)**-block code** nếu thông tin ban đầu có thể được chia thành các đoạn m bit và mỗi đoạn như vậy được encode thành một đoạn n bit.

Cụ thể hơn, (n, m)-block code sẽ có **hàm encode**

$$E : \mathbb{F}_2^m \to \mathbb{F}_2^n$$

và **hàm decode**

$$D : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$$

Ta nói mỗi phần tử trong ảnh (image) của ánh xạ E là **codeword**. Ánh xạ E cần là đơn ánh (one-to-one) vì chúng ta không muốn hai dãy m bit cùng encode ra một dãy n bit vì khi decode chúng ta không biết sẽ ra dãy nào.

Lưu ý rằng trường được sử dụng không nhất thiết là $\mathbb{F}_2$ nhưng việc sử dụng trường này giúp tối ưu tốc độ tính toán cũng như xử lý trên máy tính.

Nhắc lại, **khoảng cách Hamming** giữa hai vector $\boldsymbol{x}$ và $\boldsymbol{y}$ trong $\mathbb{F}_2^n$ là trọng số $\mathrm{wt}(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y})$. Ký hiệu $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{wt}(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y})$.

Định nghĩa 2. Độ dài nhỏ nhất

Trong code $\mathcal{C}$, **độ dài nhỏ nhất** là số d bằng với khoảng cách Hamming ngắn nhất của các cặp vector bất kỳ trong $\mathcal{C}$.

$$d = \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{C},\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}} d(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y})$$

Bài toán decode

Khi dãy n bit là vector $\boldsymbol{x}$ được truyền qua kênh truyền, không gì đảm bảo chúng ta sẽ nhận được chính xác $\boldsymbol{x}$, mà có thể là $\boldsymbol{y}$ nào đó.

Các codeword nằm trong một block code nào đó là tập con của $\mathbb{F}_2^n$, trong khi ở bên nhận có thể là một vector bất kỳ trong $\mathbb{F}_2^n$. Bài toán decode đặt ra câu hỏi, làm sao biết được vector $\boldsymbol{y}$ sẽ được decode thành vector nào trong block code.

Định nghĩa 3. Bài toán decode

Cho block code $\mathcal{C}$ độ dài n. Giả sử ở bên nhận là vector $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$. Bài toán decode là bài toán tìm vector $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$ sao cho $d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ nhỏ nhất.

Bài toán decode có thể được phát biểu dưới dạng tương đương

1. Tìm vector $\boldsymbol{c} \in \mathcal{C}$ sao cho $\mathrm{wt}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ đạt giá trị nhỏ nhất;
2. Tìm vector $\boldsymbol{e} \in \mathbb{F}_2^n$ sao cho $\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{e} \in \mathcal{C}$ và vector $\boldsymbol{e}$ có trọng số nhỏ nhất.

Định nghĩa 4. Mã tuyến tính (Linear code)

Block code $\mathcal{C}$ độ dài n được gọi là **tuyến tính** (hay **linear**) nếu với mọi $a, b \in \mathbb{F}_2$ và với mọi vector $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{C}$ thì vector $a \cdot \boldsymbol{x} + b \cdot \boldsymbol{y}$ cũng là vector thuộc $\mathcal{C}$.

Nhận xét 1

Mã tuyến tính là một không gian con của $\mathbb{F}_2^n$.

Nhắc lại đại số tuyến tính, mỗi không gian vector đều tồn tại một tập các vector mà mọi vector trong không gian đều được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector trong tập đó. Các vector đó được gọi là **cơ sở** của không gian vector.

Định nghĩa 5. Số chiều của mã tuyến tính

Số chiều mã tuyến tính $\mathcal{C}$ là số k bằng với số lượng vector trong cơ sở sinh ra mã tuyến tính. Mã tuyến tính độ dài n và số chiều k được gọi là (n, k)-code.

Như vậy để sinh ra toàn bộ các vector trong mã tuyến tính ta chỉ cần một tập hợp các vector độc lập tuyến tính trong không gian và dùng nó để xây dựng nên ma trận sinh.

Định nghĩa 6. Ma trận sinh (Generator Matrix)

Ma trận sinh của code $\mathcal{C}$ là ma trận $\boldsymbol{G}$ bao gồm các vector của tập sinh trong không gian vector.

Như vậy ma trận sinh của (n, k)-code có kích thước $k \times n$ (mỗi vector trong cơ sở là một hàng trong $\boldsymbol{G}$ nên có k hàng).

Nhận xét 2

Mọi codeword trong (n, k)-code $\mathcal{C}$ có thể được sinh ra nhờ ma trận sinh $\boldsymbol{G}$, nghĩa là

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G} : \boldsymbol{a} \in \mathbb{F}_2^k\}$$

Chú ý rằng $\boldsymbol{a}$ là vector hàng thuộc $\mathbb{F}_2^k$. Điều này tương đương việc lấy tất cả tổ hợp tuyến tính của các vector trong cơ sở (hay các hàng của $\boldsymbol{G}$).

Coder

Định nghĩa 7. Coder

Code là một ánh xạ $\varphi : \mathbb{F}_2^k \to \mathbb{F}_2^n$ cho (n, k)-code $\mathcal{C}$ là biến đổi tuyến tính theo quy tắc

$$\varphi_G(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \boldsymbol{G}$$

Trong không gian vector có thể có nhiều cơ sở, do đó đối với (n, k)-code cũng có nhiều ma trận sinh. Chúng ta cần ma trận sinh giúp dễ tính toán.

Định nghĩa 8. Ma trận sinh dạng chuẩn

Ma trận sinh $\boldsymbol{G}$ kích thước $k \times n$ được gọi là ở **dạng chuẩn** nếu nó có dạng

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{I}_k \| \boldsymbol{G}_0)$$

Trong đó $\boldsymbol{I}_k$ là ma trận đơn vị cấp k và $\boldsymbol{G}_0$ là ma trận kích thước $k \times (n-k)$.

Phần VIII

Post-quantum cryptography

Phần VIII: Nội dung

Chương 19

Lattice-based crypto

19.1 Introduction

Định nghĩa 1. Lattice

Xét các vector thuộc $\mathbb{R}^n$ độc lập tuyến tính $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$. **Lattice** là tập

$$L = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_d\boldsymbol{v}_d : a_i \in \mathbb{Z}\} \tag{19.1}$$

Tương tự với định nghĩa không gian vector, một **tập sinh** (hay **basis**) là bất cứ tập hợp các vector độc lập tuyến tính mà sinh ra L.

Hai tập sinh luôn có cùng số phần tử. Khi đó, số vector trong tập sinh được gọi là **số chiều** (hay **dimension**).

Giả sử $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ là một cơ sở của L. Tương tự, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_d\}$ là một cơ sở khác của L.

Ta có thể viết mỗi $\boldsymbol{w}_i$ là tổ hợp tuyến tính của các vector $\boldsymbol{v}$ như sau

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{12}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{1d}\boldsymbol{v}_d \\
\boldsymbol{w}_2 &= a_{21}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{2d}\boldsymbol{v}_d \\
&\vdots \\
\boldsymbol{w}_d &= a_{d1}\boldsymbol{v}_1 + a_{d2}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{dd}\boldsymbol{v}_d
\end{aligned}$$

Khi đó, nếu viết các vector $\boldsymbol{w}_i$ thành hàng của ma trận $\boldsymbol{W}$ và $\boldsymbol{v}_j$ thành hàng của ma trận $\boldsymbol{V}$ thì biểu diễn trên tương đương với

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{V}$$

Đặt

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

Do $\boldsymbol{W}$ và $\boldsymbol{V}$ là các cơ sở của L nên nếu các vector $\boldsymbol{w}_i$ có thể biểu diễn qua các vector $\boldsymbol{v}_j$ thì ngược lại, các vector $\boldsymbol{v}_j$ cũng có thể được biểu diễn qua các vector $\boldsymbol{w}_i$.

Suy ra ma trận $\boldsymbol{A}$ là ma trận khả nghịch. Do $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ theo định nghĩa lattice, định thức của $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Z}$.

Hơn nữa, vì

$$I = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \Rightarrow 1 = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \det(\boldsymbol{A}^{-1})$$

nên $\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$.

Định nghĩa 2. Fundamental domain

Cho lattice L có số chiều là d với cơ sở gồm các vector $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$. Ta gọi **fundamental domain** (hay **fundamental parallelepiped**) của L ứng với cơ sở trên là tập

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d) = \{t_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + t_d\boldsymbol{v}_d : 0 \leqslant t_i < 1\} \tag{19.2}$$

Trong mặt phẳng Oxy với hai vector $\boldsymbol{u}$ và $\boldsymbol{v}$ không cùng phương thì fundamental domain là hình bình hành tạo bởi hai vector đó.

Nhận xét 1

Gọi $L \subset \mathbb{R}^n$ là lattice với số chiều là n và gọi $\mathcal{F}$ là fundamental domain của L. Khi đó mọi vetor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ đều có thể viết dưới dạng

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{v}$$

với $\boldsymbol{t}$ duy nhất thuộc $\mathcal{F}$ và $\boldsymbol{v}$ duy nhất thuộc L.

Một cách tương đương, hợp của các fundamental domains

$$\mathcal{F} + \boldsymbol{v} = \{\boldsymbol{t} + \boldsymbol{v} : \boldsymbol{t} \in \mathcal{F}\}$$

với $\boldsymbol{v}$ là các vector trong L, sẽ cover hết $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Để chứng minh nhận xét trên, giả sử $\{\boldsymbol{v}_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ là cơ sở của L. Khi đó các $\boldsymbol{v}_i$ độc lập tuyến tính nên cũng là cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

Ta viết các vector $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{v}_i$ và tách hệ số trước mỗi vector thành phần nguyên và phần lẻ. Phần nguyên cho vector trong L và phần lẻ cho vector trong $\mathcal{F}$.

Để chứng minh tính duy nhất của tổ hợp, xét hai cách biểu diễn khác nhau của $\boldsymbol{w}$ và chứng minh hai cách đó là một. □

Định lí 1. Bất đẳng thức Hadamard

Cho lattice L, lấy cơ sở bất kỳ của L là các vector $\boldsymbol{v}_1$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ và gọi $\mathcal{F}$ là fundamental domain cho L. Khi đó

$$\det L = \mathrm{Vol}(\mathcal{F}) \leqslant \|\boldsymbol{v}_1\| \cdot \|\boldsymbol{v}_2\| \cdots \|\boldsymbol{v}_n\| \tag{19.3}$$

Cơ sở càng gần với trực giao thì bất đẳng thức Hadamard trên càng trở thành đẳng thức.

Short vectors trong lattice

Các bài toán liên quan tới lattice mà chúng ta cần quan tâm để xây dựng các thuật toán mã hóa lattice-based.

1. **Shortest Vector Problem** (`SVP`): Tìm vector khác không có độ dài ngắn nhất trong lattice L, nghĩa là tìm vector $\boldsymbol{v} \in L$ mà $\|v\|$ nhỏ nhất;
2. **Closest Vector Problem** (`CVP`): Cho trước vector $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ mà không nằm trong L, tìm vector $\boldsymbol{v} \in L$ gần với $\boldsymbol{w}$ nhất, nghĩa là tìm $\boldsymbol{v} \in L$ sao cho $\|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}\|$ nhỏ nhất.

Thuật toán Babai

Thuật toán này giúp tìm một cơ sở "đủ tốt" để giải `apprCVP`.

Định lí 2. Thuật toán Babai tìm Closest Vertex

Gọi $L \subset \mathbb{R}^n$ là lattice với cơ sở là $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_n$ và gọi $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ là vector bất kỳ.

Nếu các vector trong cơ sở trực giao nhau thì thuật toán Babai sẽ giải được `CVP`.

Nếu các vector trong cơ sở gần như trực giao thì thuật toán Babai sẽ giải được `apprCVP`.

Ngược lại, nếu các vector trong cơ sở không trực giao (nhiều) thì kết quả thuật toán trả về sẽ xa hơn vector gần với $\boldsymbol{w}$.

Algorithm 6 Babai's Closest Vertex Algorithm

Biểu diễn $\boldsymbol{w} = t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + t_n\boldsymbol{v}_n$ với $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.
Đặt $a_i = \lfloor t_i \rceil$ với $i = 1, \ldots, n$.
Trả về vector $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n$.

Mình có thể thấy rằng thuật toán Babai làm tròn hệ số để đưa trả về vector gần với $\boldsymbol{w}$.

19.2 Lattice reduction

Mục tiêu của việc giải các bài toán `SVP` hay `CVP` (hay các biến thể của chúng) là tìm vector ngắn trong lattice.

Đối với lattice 2 chiều chúng ta có thuật toán Gauss reduction rất hữu dụng.

Gaussian lattice reduction

Giả sử ta có $L \subset \mathbb{R}^2$ là lattice 2 chiều với cơ sở là $\boldsymbol{v}_1$ và $\boldsymbol{v}_2$.

Ta có thể đổi chỗ $\boldsymbol{v}_1$ và $\boldsymbol{v}_2$ nếu cần thiết để luôn đảm bảo $\|\boldsymbol{v}_1\| < \|\boldsymbol{v}_2\|$.

Để làm nhỏ $\boldsymbol{v}_2$ ta có thể trừ đi một bội số của $\boldsymbol{v}_1$. Nếu ta sử dụng cách giống như thuật toán trực giao Gram-Schmidt thì

$$\boldsymbol{v}_2^* = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1$$

Khi đó $\boldsymbol{v}_2^*$ sẽ trực giao với $\boldsymbol{v}_1$. Tuy nhiên vector này không nằm trong L vì hệ số $\dfrac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}$ có thể không phải số nguyên. Để khắc phục ta chỉ việc lấy phần nguyên của hệ số này. Nghĩa là ta thay $\boldsymbol{v}_2$ bằng vector

$$\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 \quad \text{với } m = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} \right\rceil$$

Nếu $\boldsymbol{v}_2$ vẫn lớn hơn $\boldsymbol{v}_1$ thì ta dừng thuật toán. Ngược lại ta đảo vị trí $\boldsymbol{v}_1$ và $\boldsymbol{v}_2$ rồi lặp lại bước trên. Thuật toán như sau

Thuật toán LLL

Khi số chiều lattice lớn hơn 2, chúng ta sử dụng thuật toán LLL.

Algorithm 7 Gaussian lattice reduction

Require: Lattice 2 chiều $L \subset \mathbb{R}^2$ với cơ sở $\boldsymbol{v}_1$ và $\boldsymbol{v}_2$
Ensure: Cơ sở mới $\boldsymbol{v}_1^*$ và $\boldsymbol{v}_2^*$ gần như trực giao nhau
  Nếu $\|\boldsymbol{v}_2\| < \|\boldsymbol{v}_1\|$ thì ta đổi chỗ $\boldsymbol{v}_1$ và $\boldsymbol{v}_2$.
  Tính $m = \lfloor \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 / \|\boldsymbol{v}_1\|^2 \rceil$.
  Nếu $m = 0$ thì trả về cơ sở gồm $\boldsymbol{v}_1$ và $\boldsymbol{v}_2$.
  Thay $\boldsymbol{v}_2$ bởi $\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1$.

19.3 Phương pháp Coppersmith

Phương pháp Coppersmith được dùng để tìm nghiệm nhỏ của đa thức trên modulo. Phần này tham khảo chính từ quyển [7].

Ý tưởng

Giả sử ta có phương trình $F(x) \equiv 0 \bmod M$. Với số X cố định cho trước, phương pháp Coppersmith cho phép tìm nghiệm x_0 nhỏ thỏa mãn $|x_0| \leqslant X$.

Ý tưởng của phương pháp này là thay vì tìm nghiệm x_0 của $F(x)$ trên modulo M, chúng ta sẽ mở rộng lên, tìm một hàm $G(x)$ nào đó mà có nghiệm x_0 trên $\mathbb{Z}$.

Đơn giản nhất là $G(x) = k \cdot F(x) + M \cdot g(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ và $\deg g(x) \leqslant \deg F(x)$. Rõ ràng khi modulo hai vế cho M thì $G(x_0) = F(x_0) = 0 \bmod M$.

Phương pháp này giúp tìm nghiệm của một đa thức bậc nhỏ modulo M. Do đó giả sử đặt:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$$

với $a_i \in \mathbb{Z}$.

Lúc này chúng ta sẽ tìm hàm $G(x)$ trên với hệ số nhỏ.

Giả sử $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_d x^d$ với $b_i \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $G(x) = (k \cdot a_0 + M \cdot b_0) + (k \cdot a_1 + M \cdot b_1)x + \cdots + (k \cdot a_d + M \cdot b_d)x^d$.

Ta mong muốn các hệ số $k \cdot a_0 + M \cdot b_0$, $k \cdot a_1 + M \cdot b_1$, $\cdots$, $k \cdot a_d + M \cdot b_d$ nhỏ so với M.

Do đó với số X cho trước, nếu ta xây lattice ($d + 2$ vector) sau:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\boldsymbol{v}_0 & \Leftarrow & M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\boldsymbol{v}_1 & \Leftarrow & 0 & MX & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{v}_d & \Leftarrow & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & MX^d \\
\boldsymbol{v}_{d+1} & \Leftarrow & a_0 & a_1 X & a_2 X^2 & \cdots & a_{d-1} X^{d-1} & a_d X^d
\end{array}$$

Khi đó hệ số của mỗi dòng từ $\boldsymbol{v}_0$ tới $\boldsymbol{v}_d$ là b_0 tới b_d. Còn hệ số của $\boldsymbol{v}_{d+1}$ là k.

Tuy nhiên chúng ta thường sẽ biến đổi để đa thức trở thành monic ($a_d = 1$). Khi đó chúng ta bỏ đi v_d và còn $d+1$ vector trong lattice.

Cải tiến thuật toán

Dạng đơn giản

Giả sử $k(x)$ có bậc là h. Đặt $k(x) = c_0 + c_1 x + \cdots c_h x^h$.

Khi đó

$$\begin{aligned} G(x) =& k(x) \cdot F(x) + M \cdot g(x) \\ =& (c_0 + c_1 x + \cdots c_h x^h) \cdot (a_0 + a_1 x + \cdots \\ &+ x^d) + M \cdot (b_0 + b_1 x + \cdots + b_d x^d) \\ =& c_0 \cdot F(x) + c_1 \cdot xF(x) + \cdots c_h \cdot x^h F(x) + M \cdot (b_0 + b_1 x + \cdots b_d x^d) \end{aligned}$$

Lúc này mỗi đại lượng $F(x)$, $xF(x)$, $\cdots$, $x^h F(x)$ sẽ khiến hệ số của $F(x)$ ban đầu tăng bậc. Nói cách khác hệ số a_i của x^i trong $F(x)$ sẽ là hệ số của x^{i+j} trong $x^j F(x)$.

Sách giáo khoa nói rằng nếu mình chọn $h = d-1$ thì phương pháp Coppersmith sẽ cho ra kết quả nếu X được chọn thỏa $X \approx M^{1/(2d-1)}$.

Tương tự, mình sẽ có các vector trong lattice như sau:

$$\begin{array}{rcccccccccc} \boldsymbol{v}_0 & \Leftarrow & M & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \boldsymbol{v}_1 & \Leftarrow & 0 & MX & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{v}_{d-1} & \Leftarrow & 0 & 0 & 0 & \cdots & MX^{d-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \boldsymbol{v}_d & \Leftarrow & a_0 & a_1 X & a_2 X^2 & \cdots & a_{d-1} X^{d-1} & X^d & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

Sau đó thêm các vector khi shift vào (tương ứng với $xF(x)$, $x^2 F(x)$, $\cdots$).

$$\begin{array}{rcccccccccc} \boldsymbol{v}_{d+1} & \Leftarrow & 0 & a_0 X & a_1 X^2 & a_2 X^3 & \cdots & a_{d-1} X^d & a_d X^{d+1} & 0 & 0 & \cdots \\ \boldsymbol{v}_{d+2} & \Leftarrow & 0 & 0 & a_0 X^2 & a_1 X^3 & \cdots & a_{d-2} X^d & a_{d-1} X^{d+1} & a_d X^{d+2} & 0 & \cdots \end{array}$$

Tuy nhiên vấn đề ở đây là bound của nghiệm bị thu hẹp lại. Ban nãy mình nói rằng nếu chọn $h = d-1$ thì nghiệm cho kết quả nếu $X \approx M^{1/(2d-1)}$. Ở đây $M = 10001$ nên $X \approx 4$. Trong khi ở bài viết trước thì $X = 10$. Do đó có thể thấy việc mở rộng này đôi khi kém hiệu quả tùy thuộc vào h.

Dạng nâng cao

Coppersmith đã đề xuất ý tưởng như sau:

Bổ đề 2. Coppersmith

Với $0 < \epsilon < \min\{0,18; 1/d\}$. Đặt $F(x)$ là đa thức monic bậc d có một hoặc nhiều nghiệm x_0 trên modulo M sao cho $|x_0| \leqslant \frac{1}{2}M^{1/d-\epsilon}$. Khi đó x_0 có thể tính với thời gian đa thức giới hạn bởi d, $1/\epsilon$ và $\log(M)$.

Để chứng minh bổ đề này thì Coppersmith đã xây dựng một hệ lattice để tính toán và cũng là cách xây dựng lattice sẽ đề cập tới đây.

Chúng ta biết rằng x_0 là nghiệm của đa thức $F(x) \equiv 0 \bmod M$. Do đó ta suy ra $F(x_0)^k \equiv 0 \bmod M^k$.

Từ nhận xét này, mình mở rộng phần cơ bản lên tìm nghiệm trong modulo M^{h-1} với h là một số được chọn trước.

Với $k(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{d-1}x^{d-1}$ biểu diễn việc shift thành $F(x)$, $xF(x)$, $x^2F(x)$, ..., $x^{d-1}F(x)$.

Ta xét h đa thức sau:

$$\begin{array}{rcl} M^{h-1}F(x)^0k(x) & \equiv & 0 \bmod M^{h-1} \\ M^{h-2}F(x)^1k(x) & \equiv & 0 \bmod M^{h-1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ M^0F(x)^{h-1}k(x) & \equiv & 0 \bmod M^{h-1} \end{array}$$

Với mỗi đa thức $M^{h-1-j}F(x)^j$ chúng ta có d lần shift tương ứng với từng hệ số của $k(x)$. Cụ thể là $M^{h-1-j}F(x)^j$, $M^{h-1-j}F(x)^j x$, $M^{h-1-j}F(x)^j x^2$, ..., $M^{h-1-j}F(x)^j x^{d-1}$.

Do đó có tất cả dh vector trong lattice. Số h thường được chọn sao cho $dh \approx \epsilon$. Và chặn nghiệm X có thể chọn là $\frac{1}{2}M^{1/d-\epsilon}$ theo như bổ đề.

Như vậy mình xây lattice như sau:

Bước 1. Với $M^{h-1}F(x)^0$ thì các vector sau lần lượt tương ứng với

$$M^{h-1}F(x)^0, M^{h-1}F(x)^0 x, \ldots, M^{h-1}F(x)^0 x^{d-1}.$$

Nói cách khác thì

$$\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{v}_0 & \Leftarrow & M^{h-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \boldsymbol{v}_1 & \Leftarrow & 0 & M^{h-1}X & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{v}_{d-1} & \Leftarrow & 0 & 0 & 0 & \cdots & M^{h-1}X^{d-1} & 0 & \cdots \end{array}$$

Bước 2. Với $M^{h-2}F(x)$ thì các vector sau lần lượt tương ứng với

$$M^{h-2}F(x)^1, M^{h-2}F(x)^1 x, \ldots, M^{h-2}F(x)^1 x^{d-1}$$

Nói cách khác thì

$$\begin{array}{cccccccccc}
\boldsymbol{v}_d & \Leftarrow & Ma_0 & Ma_1X & Ma_2X^2 & \cdots & Ma_{d-1}X^{d-1} & MX^d & \cdots & \cdots \\
\boldsymbol{v}_{d+1} & \Leftarrow & 0 & Ma_0X & Ma_1X^2 & \cdots & Ma_{d-2}X^{d-1} & Ma_{d-1}X^d & MX^{d+1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{v}_{2d-1} & \Leftarrow & 0 & 0 & 0 & \cdots & Ma_0X^{d-1} & Ma_1X^d & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Bước thứ j. Cứ như vậy với $M^{h-1-j}F(x)^j$.

Chạy LLL trên lattice trên sẽ cho kết quả 😜.

19.4 Các thuật toán mã hóa dựa trên lattice

Congruential public key cryptosystem

Phần này tham khảo trong [8].

Trong thuật toán này, ta chọn số nguyên tố q làm public parameter.

Sau đó chọn hai số f và g làm secret key. Hai số này phải thỏa mãn các điều kiện

$$f < \sqrt{q/2}, \quad \sqrt{q/4} < g < \sqrt{q/2}, \quad \gcd(f, qg) = 1$$

Tính $h = f^{-1}g \pmod q$. Khi đó public key là h.

Encryption. Để encrypt message m với số random r thỏa mãn

$$0 < m < \sqrt{q/4}, \quad 0 < r < \sqrt{q/2}$$

Ta tính $e = rh + m \pmod q$ là ciphertext với $0 < e < q$.

Decryption. Để decrypt ciphertext e ta tính

$$a = fe \pmod q, \quad b = f^{-1}a \pmod g$$

Lưu ý f^{-1} là nghịch đảo modulo g. Khi đó $b \equiv m$ là message ban đầu.

Chứng minh. Để chứng minh rằng số b sau khi tính toán bằng chính xác m ban đầu ta cần xem xét điều kiện của secret key và public key.

Đầu tiên ta có

$$a \equiv fe \equiv f(rh + m) = f(rf^{-1}g + m) = rg + fm \pmod q$$

Từ điều kiện của f, g, r và m ta có

$$rg + fm < \sqrt{\frac{q}{2}} \cdot \sqrt{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q}{2}} \cdot \sqrt{\frac{q}{4}} < q$$

Nói cách khác $rg + fm$ giữ nguyên giá trị trong phép modulo q, hay $a \equiv rg + fm$.

Suy ra $b = f^{-1}a = f^{-1}(rg + fm) = m \pmod{g}$ (giá trị a không thay đổi khi chuyển từ modulo q sang modulo g). Do $0 < m < \sqrt{q/4}$ và $\sqrt{q/4} < g < \sqrt{q/2}$ nên $m < g$. Nói cách khác b bằng đúng m ban đầu. □

Để tấn công hệ mật mã này ta xây dựng lattice. Để ý rằng $h = f^{-1}g \pmod{q}$, hay $fh + kq = g$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Ta thấy rằng $f \cdot (h, 1) + k \cdot (q, 0) = (g, f)$. Như vậy lattice gồm hai vector $(h, 1)$ và $(q, 0)$. Thuật toán tối giản Gauss sẽ hoạt động trong trường hợp này (số chiều bằng 2).

Tài liệu tham khảo

1 *Таранников, Ю. В.* Дискретная математика. Задачник : Учебное пособие для академического бакалавриата / Ю. В. Таранников. — Юрайт, 2016. — ISBN 9785991662833.

2 *Токарева, Н. Н.* Симметричная криптография. Краткий курс / Н. Н. Токарева. — Novosibirsk State University, 2012. — ISBN 978-5-4437-0067-0.

3 *Токарева, Н. Н.* Нелинейные булевы функции : бент функции и их обобщения / Н. Н. Токарева. — LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — ISBN 978-3-8433-0904-2.

4 *Judson, T. W.* Abstract Algebra. Theory and Applications / T. W. Judson. — 12.08.2012. — URL: `abstract.pugetsound.edu`.

5 *Euclid.* Euclid's Elements of Geometry / Euclid. — Revised and corrected. — Richard Fitzpatrick. — ISBN 978-0-6151-7984-1.

6 *John Casey, E.* The First Six Books of the Elements of Euclid / E. John Casey. — 2007.

7 *Galbraith, S. D.* Mathematics of Public Key Cryptography / S. D. Galbraith. — 2018.

8 *Hoffstein, J.* An Introduction to Mathematical Cryptography / J. Hoffstein, J. Pipher, J. H. Silverman. — 2014. — DOI: `10.1007/978-1-4939-1711-2`.

Phần IX

Các cuộc thi và bài tập trong sách

Phần IX: Nội dung

NSUCRYPTO 2020

Problem 1 (R1). 2020

Đề bài

Cho dãy S, cipher machine có thể thêm vào S hoặc xóa khỏi S dãy con với dạng 11, 101, 1001, 10...01. Machine cũng có thể xóa khỏi S hoặc thêm vào S một dãy liên tục các số 0.

Smith biểu diễn số 2020 dưới dạng nhị phân và sử dụng hai cipher machine để biến đổi. Máy đầu tiên trả về dạng nhị phân của số 1984, máy thứ hai trả về dạng nhị phân của số 2021.

Smith chắc chắn rằng một trong hai máy đã bị lỗi. Làm sao anh ấy biết được?

Giải

Ta viết các số 2020, 1984 và 2021 dưới dạng nhị phân.

Như vậy 2020 = 11111100100, 1984 = 11111000000 và 2021 = 11111100101.

Đặt 2020 = 11111$\underbrace{1001}_{A}$00 thì nếu ta xóa dãy A khỏi 2020 và thêm vào vị trí đó bốn chữ số 0 thì ta có 1984. Như vậy máy đầu tiên hoạt động bình thường.

Việc thêm vào hoặc xóa đi 11, 101, 1001, ... thì số lượng bit 1 tăng giảm đi một lượng chẵn còn thêm bớt 0 không ảnh hưởng. Do 2020 và 2021 có số lượng bit 1 khác tính chẵn lẻ nên không thể biến đổi từ 2020 thành 2021.

Như vậy máy thứ hai bị hỏng.

Problem 4 (R1). RGB

Đề bài

Trong một server có hai biến a và b. Khi server nhận query dạng "RED", "GREEN" hoặc "BLUE" thì giá trị của chúng sẽ thay đổi theo query nhận được.

Cụ thể hơn, cặp (a, b) biến thành $(a + 18b, 18a - b)$ nếu query là "RED", biến thành $(17a + 6b, -6a + 17b)$ nếu query là "GREEN" và biến thành $(-10a - 15b, 15a - 10b)$ nếu là "BLUE".

Khi a hoặc b trở thành bội của 324 thì nó được reset thành 0. Khi $(a, b) = (0, 0)$ thì server crash.

Ban đầu, (a, b) được khai báo là $(20, 20)$. Chứng minh rằng server sẽ không bao giờ crash dù có bao nhiêu query được gửi tới.

Giải

Phép biến đổi tương đương với phép nhân ma trận $(a, b) \to (a, b)\boldsymbol{A}$ với $\boldsymbol{A}$ là ma trận xác định bởi

1. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 18 & -1 \end{pmatrix}$ khi query là "RED";
2. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$ khi query là "GREEN";
3. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -10 & 15 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$ khi query là "BLUE".

Kết quả cuối là việc thực hiện liên tiếp các phép nhân có dạng

$$(a, b) \cdot \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{A}_2 \cdots \boldsymbol{A}_r$$

với $\boldsymbol{A}_i$ là một trong ba ma trận trên.

Đặt $\boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_r = B$ thì phép nhân tương đương với $(a, b) \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = (324, 324)$. Trong đó $X, Y, Z, T \in \mathbb{Z}$.

Điều này tương đương với $a \cdot X + b \cdot Z = 324$ và $a \cdot Y + b \cdot T = 324$. Suy ra $20(X + Z) = 324$ và $20(Y + T) = 324$. Nhưng điều này không thể xảy ra vì 324 không chia hết 20.

Như vậy server không bao giờ crash dù có thực hiện bao nhiêu query đi nữa.

Problem 1. Poly

Đề bài

Bob phát minh một thuật toán tên là `POLY`. Với x là plaintext thì ciphertext là $y = p(x)$, với $p(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.

Đồng nghiệp của Bob muốn kiểm tra thuật toán. Khi encrypt 20 thì Bob nhận được 7. Sau đó anh đồng nghiệp encrypt 15 thì nhận được 5. Anh ta kết luận rằng thuật toán đã bị cài đặt sai. Chuyện gì đã xảy ra?

Giải

Giả sử đa thức là

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Khi đó $p(20) = a_n 20^n + a_{n-1} 20^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 20 + a_0 = 7$.

Tương tự $p(15) = a_n 15^n + a_{n-1} 15^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 15 + a_0 = 5$.

Suy ra $p(20) - p(15) = 2$ mà $p(20) - p(15)$ chia hết cho $20 - 15 = 5$ nên vô lý vì 2 không chia hết cho 5. Như vậy thuật toán đã bị cài đặt sai.

NSUCRYPTO 2021

Problem 4 (R1). Elliptic curve points

Đề bài

Đặt $E/\mathbb{F}_p$ là đường cong elliptic với dạng Weiertrass. Đường cong này có phương trình $y^2 = x^3 + ax + b$, với $a, b \in \mathbb{F}_p$ và $4a^3 + 27a^2 \neq 0$. Các điểm affine trong E và điểm vô cực $\mathcal{O}$ tạo thành một nhóm Abel, đặt

$$E(\mathbb{F}_p) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2 : y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

Giả sử $b = 0$. Gọi $R \in E(\mathbb{F}_p)$ là điểm với order lẻ và $R \neq \mathcal{O}$. Xét $H = \langle R \rangle$ là subgroup sinh bởi R.

Giúp Alice chứng minh rằng nếu $(u, v) \in H$ thì u là số chính phương modulo p.

Giải

Gọi $Q = (x', y') \in H$. Do R có order lẻ nên Q cũng có order lẻ (order của phần tử trong subgroup chia hết order của subgroup đó).

Giả sử order của Q là n lẻ. Xét điểm $P = \dfrac{n+1}{2}Q$, do n lẻ nên dễ thấy $P \in H$. Đặt $P = (x, y)$.

Do $2P = (n + 1)Q = Q$ (do Q có order là n) nên theo công thức cộng hai điểm trên elliptic ta có

$$\begin{aligned} x' &= \left(\frac{3x^2 + a}{2y}\right) - 2x \\ &= \frac{9x^4 + 6x^2a + a^2 - 8x(x^3 + ax)}{(2y)^2} \\ &= \frac{x^4 - 2x^2a + a^2}{(2y)^2} \\ &= \left(\frac{x^2 - a}{2y}\right) \end{aligned}$$

Biểu thức cuối cho thấy rằng x' là số chính phương modulo p (đpcm).

Problem 9. 2021-bit key

Đề bài

Một generator dùng pseudo-random để sinh ra một dãy bit (0 hoặc 1) từng bước một. Để bắt đầu generator, một người phải trả 1 *nsucoin* và generator sẽ sinh ngẫu nhiên một bit (dãy bit độ dài bằng 1). Khi đó, với một dãy S được sinh có độ dài l, $l \geqslant 1$, một trong các động tác sau được thực hiện:

1. Một dãy ngẫu nhiên độ dài 4 được thêm vào S, khi đó dãy S' có độ dài $l+4$. Việc này tốn 2 *nsucoin*.
2. Một dãy ngẫu nhiên độ dài $2l$ được thêm vào S, khi đó dãy S' có độ dài $3l$. Việc này tốn 5 *nsucoin*.

Bob cần sinh độ dài chính xác 2021 bit. Số lượng *nsucoin* nhỏ nhất để thực hiện việc này là bao nhiêu?

Giải

Dễ thấy rằng khi $l > 2$ thì sử dụng động tác thứ hai khiến độ dài dãy tăng lên rất nhanh như lại tốn thêm coin.

Như vậy khi $l > 6$ mình sẽ chứng minh rằng động tác thứ hai hiệu quả hơn.

Chứng minh. Để ý rằng nếu mình sử dụng động tác thứ nhất ba lần liên tiếp, khi đó từ dãy có độ dài l mình thu được dãy mới độ dài $l+4+4+4 = l+12$ và việc này tốn 6 *nsucoin*.

Trong khi đó, nếu mình dùng động tác thứ hai một lần thì từ dãy độ dài l mình thu được dãy độ dài $3l$ và tốn 5 *nsucoin*.

Mình muốn $3l > l+12$ vì mình đã có $3l$ tương ứng 5 *nsucoin* và $l+12$ tương ứng 6 *nsucoin*. Như vậy $l > 6$.

Chiến thuật lúc này là mình sẽ dùng động tác thứ hai để triple độ dài bất cứ lúc nào có thể. Nói cách khác là khi đi ngược từ 2021 về 0 thì khi nào số chia hết cho 3, mình sẽ dùng động tác sau, không thì dùng động tác đầu.

Quá trình sẽ diễn ra theo bảng 19.1.

Từ 21 trở đi không thể áp dụng quy tắc trên nữa vì theo chứng minh trên chiến thuật chỉ hiệu quả với $l > 6$.

Mình khai triển $21 = 1+4+4+4+4+4$, thực hiện 4 phép trừ (động tác đầu) tốn $5 \cdot 2 = 10$ *nsucoin* và trừ 1 tốn 1 *nsucoin*.

Như vậy tổng số *nsucoin* nhỏ nhất cần là 47. □

$2021 - 4 = 2017$	2 *nsucoin*
$2017 - 4 = 2013$	2 *nsucoin*
$2013/3 = 671$	5 *nsucoin*
$671 - 4 = 667$	2 *nsucoin*
$667 - 4 = 663$	2 *nsucoin*
$663/3 = 221$	5 *nsucoin*
$221 - 4 = 217$	2 *nsucoin*
$217 - 4 = 213$	2 *nsucoin*
$213/3 = 71$	5 *nsucoin*
$71 - 4 = 67$	2 *nsucoin*
$67 - 4 = 63$	2 *nsucoin*
$63/3 = 21$	5 *nsucoin*

Bảng 19.1. Tính nsucoin

NSUCRYPTO 2022

Lời nói đầu

Thời kì đen tối ...

Đề thi năm 2022 khá lạ và phức tạp. Bảng điểm round 2 dành cho University student cũng ảo ma không kém.

Problem 5*. Super dependent S-box

Đề bài

Harry muốn tìm một super dependent S-box cho mã hóa mới. Anh ấy dùng một hoán vị liên kết chặt chẽ với mọi biến của nó và muốn ước lượng số các hoán vị như vậy.

Một hàm boolean vectorial $F(x) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}))$, với $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$, là một **hoán vị** trên $\mathbb{F}_2^n$ nếu nó là một ánh xạ one-to-one từ $\mathbb{F}_2^n$ tới $\mathbb{F}_2^n$.

Các hàm tọa độ $f_k(\boldsymbol{x})$ (là các hàm boolean từ $\mathbb{F}_2^n$ tới $\mathbb{F}_2$) được gọi là *essential depend* trên các biến x_j nếu tồn tại các giá trị $b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n \in \mathbb{F}_2$ sao cho

$$f_k(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, 0, b_{j+1}, \ldots, b_n) \neq f_k(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, 1, b_{j+1}, \ldots, b_n)$$

Nói cách khác, essential depend trên biến x_j nghĩa là trong dạng biểu diễn ANF (đa thức Zhegalkin) của hàm f có sự có mặt của biến x_j.

Ví dụ 1. Xét $n = 3$. Khi đó hàm boolean $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_3$ essential depend trên cả ba biến, nhưng hàm $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1$ chỉ essential depend trên x_1 và x_2.

Câu hỏi. Tìm số lượng hoán vị trên $\mathbb{F}_2^n$ mà các hàm tọa độ của nó đều essential depend trên cả n biến.

Q1. Tìm đáp án cho $n = 2, 3$.

Q2. Tìm đáp án cho n (special prize).

Giải

Q1 có thể được giải với SageMath. Tuy nhiên năm đó mình không dùng SageMath mà dùng Python thuần nên đáp án sai mất 😢. Đáp án cho Q1 với $n = 2$ là 0 (liệt kê tất cả hàm ra) và đáp án cho $n = 3$ là 24576.

Ở Q2 các team giải ra chứng minh được rằng, đáp án sẽ là một số chia hết cho $2^n \cdot n!$.

Problem 11. A long awaited event

Đề bài

Bob nhận được một thông điệp

L78V8LC7GBEYEE

về một sự kiện quan trọng từ Alice.

Alice sử dụng một bảng chữ cái 37 ký tự gồm chữ cái từ A tới Z, số từ 0 tới 9 và dấu space. Các ký tự được encode như sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S	T	U	V	W	X	Y	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
SPACE																	
36																	

Để mã hóa Alice sử dụng hàm f sao cho $f(x) = ax^2 + bx + c \pmod{37}$ với số a, b, c nào đó và hàm f thỏa tính chất

$$f(x - y) - 2f(x)f(y) + f(1 + xy) = 1 \pmod{37} \text{ với mọi số nguyên } x, y$$

Q. Hãy giải mã thông điệp Bob nhận được.

Giải

Sử dụng hàm f, ta có:

1. Nếu cho $y = 0$ thì $f(x) - 2f(x) \cdot f(0) + f(1) = 1 \pmod{37}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}_{37}$.

Điều này tương đương với $(1 - 2f(0)) \cdot f(x) = 1 - f(1) \pmod{37}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}_{37}$.

Đẳng thức trên đúng với mọi $x \in \mathbb{Z}_{37}$ khi và chỉ khi $1-2f(0) = 1-f(1) = 0$. Suy ra $f(0) = 19$ và $f(1) = 1$.

2. Cho $x = y = 1$ thì $f(2) = 1 - f(0) - 2 \cdot (f(1))^2 = 21 \pmod{37}$.

Với các cặp giá trị $(x, f(x))$ là (0, 19), (1, 1) và (2, 21) thì ta tìm lại được (bằng nội suy hoặc phép thế) đa thức $f(x) = 19x^2 + 19 \pmod{37}$.

Khi đó, với mỗi giá trị $f(x)$ ta có hai giá trị x thỏa mãn đẳng thức. Truy ngược ra đáp án khả thi cho ta thông điệp ban đầu.

Ciphertext		L	7	8	V	8	L	C	7	G	B	E	Y	E	E
Plain	TH 1	N	S	R	C	R	N	P	S	O	B	J	L	J	J
		13	18	17	2	17	13	15	18	14	1	9	11	9	9
	TH 2	Y	T	U	9	U	Y	W	T	X	SPC	2	0	2	2
		24	19	20	35	20	24	22	19	23	36	28	26	28	28

Bảng 19.2. Giải mã

Theo bảng 19.2 thì thông điệp là ”NSUCRYPTO 2022”.

NSUCRYPTO 2023

Problem 1. Affine cipher

Đây là bài 1 của round 2 và được giải bởi bạn Chương.

Đề bài

Ta xét bảng chữ cái A, ..., Z, α, β, γ có 29 chữ cái. Ta đánh số A, ..., Z từ 0 tới 25, và α, β, γ là 26, 27, 28.

Ta sử dụng cryptosystem mã hóa từng khối 2 ký tự, gọi là bigram. Với x và y là hai ký tự của bigram, thì plaintext sẽ là $P = 29x + y$.

Mã hóa sử dụng biến đổi affine (giống hệ mã affine) là $C = aP+b \pmod{841}$.

Khi phân tích một đoạn văn bản dài, người ta phát hiện ra rằng các bigram sau xuất hiện nhiều nhất "$\beta\gamma$", "UM" và "LC". Đồng thời, trong tiếng Anh thì các bigram "TH", "HE" và "IN" cũng xuất hiện nhiều nhất.

Q. Có thể giải mã "KEUDCR" mà không cần khóa hay không? Còn key thì sao?

Giải

Theo thống kê các bigram xuất hiện nhiều nhất trong ciphertext và trong plaintext sẽ khớp nhau. Do đó có thể thấy "TH" mã hóa thành "$\beta\gamma$" và "HE" mã hóa thành "LC". Như vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} 812 &= a \cdot 558 + b \pmod{841} \\ 321 &= a \cdot 207 + b \pmod{841} \end{aligned}$$

Giải hệ ta có $a = 15, b = 10$. Đây là key.

Từ đây chúng ta có thể giải mã thành **CRYPTO** là plaintext ban đầu. Bài này ăn trọn 4/4 điểm.

Problem 2. Simple ideas for primes

Đề bài

Chúng ta xem xét một số dãy số bao gồm các số nguyên tố.

- *Số Fermat*, $F_k = 2^{2^k} + 1$, với k bắt đầu từ 0. Ta có các số F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 là các số nguyên tố, còn F_5 thì không phải.
- *Số Mersenne*, $M_k = 2^k - 1$. Ta có M_2, M_3, M_5, M_7 là các số nguyên tố, trong khi M_{11} là hợp số. Các số nguyên tố Mersenne là các số dạng $2^k - 1$ với k là số nguyên tố.
- Dãy số $31, 331, 3\,331, 33\,331, 333\,331, 3\,333\,331, 33\,333\,331$ là các số nguyên tố được xây dựng theo quy tắc trên, nhưng số $333\,333\,331$ là hợp số chia hết cho 17.

Ta nói dãy Fermat trên có *sequence primality parameter* là 5, dãy Mersenne bằng 4, dãy cuối cùng bằng 7.

Q. Xây dựng một dãy bao gồm các số nguyên tố như vậy. Điều kiện quan trọng ở đây là các số hạng được xác định bởi chỉ số của dãy, không phụ thuộc vào các số trước nó.

Giải

Bắt đầu với dãy Euler

$$f(n) = n^2 + n + 41$$

Đây là dãy các số nguyên tố với $n = 0, 1, \ldots, 39$ và $f(40)$ là hợp số. Như vậy đây là dãy nguyên tố độ dài 40.

Và tất nhiên, dãy "ai cũng biết" thì chỉ được 2 điểm thôi 🥲.

Sau khi tham khảo những thí sinh khác thì có một số cách xây dựng nhằm cải tiến điều này, tham khảo từ [1].

Nếu ta chuyển dãy trên thành

$$g(n) = f(n - 40) = (n - 40)^2 + (n - 40) + 41 = n^2 - 79n + 1601$$

thì thu được dãy số nguyên tố với độ dài 80. Các nhà toán học thế kỉ 20 đã chứng minh được rằng, nếu $p(x)$ là một đa thức sinh ra dãy số nguyên tố với $0 \leqslant x \leqslant n$ thì đa thức $p(n - x)$ cũng vậy.

Trong bảng, dãy nguyên tố có độ dài lớn nhất là 56 được biểu diễn bởi đa thức

$$\frac{1}{4}\left(n^5 - 133n^4 + 6729n^3 - 158379n^2 + 1720294n - 6823316\right)$$

[1] `https://mathworld.wolfram.com/Prime-GeneratingPolynomial.html`

Dựa theo lời giải của team Himanshu Sheoran, Yo Iida và Pranshu Kumar chúng ta có thể sinh một dãy có độ dài bất kì.

Lời giải dựa trên bài blog của A. W. Walker[2]. Bài blog này phân tích về một bài báo năm 1977 bởi Chang và Lih với tiêu đề *Polynomial Representation of Primes* nhưng hiện tại không có bản online.

Bài báo này đưa ra một phương pháp xây dựng đa thức $F(n)$ bậc n mà với mọi $x \in [0, n]$ thì $F(n)$ đều là số nguyên tố.

Bài báo có thể được tóm gọn như sau. Xét đa thức

$$F(x) = 1 + \left| \sum_{n=0}^{M} \frac{a_n}{x-n} \prod_{j=0}^{M} (x-j) \right|$$

sẽ sinh ra các số nguyên tố với mọi $x \in [0, M]$ nếu và chỉ nếu a_n phân biệt và $(a_n \cdot M! + 1)$ là các số nguyên tố. Như vậy ta có một thuật toán đơn giản để bruteforce các đa thức trên.

Algorithm 8 Thuật toán sinh dãy nguyên tố độ dài M

Require: Độ dài dãy nguyên tố M
Ensure: Đa thức $F(x)$ cho kết quả là số nguyên tố với mọi $x \in [0, M]$
  coeffs = [ ] chứa các số hạng a_n
  $an \leftarrow 1$
  while Chưa đủ $M + 1$ số hạng trong coeffs **do**
    if $(an \cdot M! + 1)$ là số nguyên tố **then**
      kết nạp an vào dãy coeffs
    end if
    $an \leftarrow an + 1$
  end while

Problem 3. Mixed hashes

Đề bài

Alice và Bob trao đổi các thông điệp mã hóa. Họ dùng thuật toán mã hóa khối PRESENT với key 80-bit và ECB mode. Ở đây, thông tin được lưu dạng ảnh .ppm.

Header của file .ppm gồm 3 dòng theo dạng **P6\nX\nY\n255**. Trong đó X và Y là kích thước của ảnh theo chiều ngang và dọc.

Để đảm bảo an toàn, header sẽ được loại bỏ trước khi encrypt. Để có thể khôi phục header, hash của header sẽ được gửi đi thay vì header. Khi đó 3 phần

[2] `https://awwalker.com/2017/02/27/prime-generating-polynomials/`

của header sẽ được ngăn cách bởi dấu cách (space) thay vì newline như trên. Nghĩa là "P6 X Y 255".

Bob chuẩn bị 8 ảnh (trong file đính kèm) mà không có header. Bob encrypt 8 ảnh đó với cùng một key theo thuật toán PRESENT và ECB mode. Bob cũng gửi hash của 8 headers đi kèm. Tuy nhiên các hash đã bị trộn lẫn với nhau. Liệu chúng ta có thể khôi phục thông điệp mà Bob muốn gửi Alice?

Giải

Bài này là bài 3 ở round 1 và round 2. Trong thời gian 2 round mình đều giải ra (round 2 chi tiết hơn và trình bày đẹp hơn :v).

Đề cho một file mẫu là mikky.ppm. Khi phân tích file này mình thấy rằng, nếu gọi w và h là độ rộng và độ cao của ảnh (lấy từ header) thì độ dài file không có header là $3 \cdot w \cdot h$.

Sau khi encrypt bằng thuật toán mã hóa khối với ECB mode, độ dài sẽ là $3 \cdot w \cdot h + pd$, trong đó pd là padding. Theo thuật toán **PRESENT** thì $0 \leqslant pd \leqslant 8$.

Với dự đoán rằng $w \approx h$, mình lấy căn bậc hai của độ dài các filel đề cho, và đưa ra dự đoán $w, h \in [400, 600]$. Nếu sai thì mình tăng độ rộng khoảng này thôi.

Tiếp theo, bruteforce w và h trong khoảng này, cho tới khi hash "P6 x y 255" xuất hiện trong số các hash trên, và

$$0 \leqslant \text{len}(ciphertext) - 3 * w * h \leqslant 8$$

thì mình lấy w và h này. Thế là mình có header.

Do cả 8 file được encrypt bởi cùng một key **PRESENT**, và key có 80 bit tương ứng 10 bytes, hay 10 ký tự, nhìn đề mình nhận thấy có chuỗi **P6 X Y 255** là hợp lý. Như vậy key cho PRESENT là chuỗi **P6 X Y 255**.

Cuối cùng, mình giải mã lần lượt từng file với key trên, ghép header tương ứng vào, như vậy là mình giải mã được tất cả file rồi.

Vậy thông điệp gốc là "♡Loveyou". Bài này được 5/6 điểm vì không nộp code tính toán header, mất điểm vì chủ quan.

Problem 4*. Column functions

Đề bài

Alice muốn xây dựng mã đối xứng mạnh bằng việc giải một số bài toán khó.

Xét 2^n hàm vectorial one-to-one đôi một khác nhau, $G_i : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$, với $i = 1, \ldots, 2^n$. Sử dụng các hàm này, chúng ta xây dựng một ma trận binary đặc

biệt và xác định một số tính chất của nó.

Với $n = 2^m$, $m \geqslant 5$, ta định nghĩa ma trận M kích thước $2^n \times n2^n$ theo quy tắc sau. Hàm thứ i, $i = 1, \ldots, 2^n$, là ghép của các giá trị $G_i(0, 0, \ldots, 0, 0)$, $G_i(0, 0, \ldots, 0, 1)$, ..., $G_i(1, 1, \ldots, 1, 1)$. Các cột của M có thể được xem như các vector của $n2^n$ hàm boolean, mỗi hàm n biến. Ta gọi chúng là *column functions*.

Chứng minh hoặc phản bác giả thuyết sau cho ít nhất một giá trị $m \geqslant 5$: với mọi cách xây dựng ma trận như trên, tồn tại $2^{n/2}$ columns functions $f_1, \ldots, f_{2^{n/2}}$ sao cho tồn tại một hàm boolean nonzero $f : \mathbb{F}_2^{2^{n/2}} \to \mathbb{F}_2$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$
$$f(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{2^{n/2}}(\boldsymbol{x})) = 0;$$
- với mọi $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^{2^{n/2}}$, giá trị $f(\boldsymbol{y})$ có thể tính với không quá $2^{n/2}$ phép cộng và phép nhân modulo 2.

Ví dụ 2. Với $m = 1$ thì $n = 2$ và ta xây dựng ma trận 4×8. Xét các hàm boolean vectorial one-to-one G_1, G_2, G_3, G_4 từ $\mathbb{F}_2^n$ tới $\mathbb{F}_2^n$ xác định bởi các giá trị $(0, 1, 2, 3)$, $(0, 2, 1, 3)$, $(0, 3, 1, 2)$ và $(3, 2, 1, 0)$. Khi đó ma trận là

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta cần tìm $2^{n/2} = 2$ column functions. Gọi f_1 và f_2 là hàm bool ứng với cột đầu và cột thứ hai của ma trận, và $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$. Khi đó $f(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})) \equiv 0$ vì $f_1(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) = 0$ với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$.

Ta cũng thấy rằng có thể chọn f_1 và f_2 là cột 5 và 6 của ma trận. Khi đó, đặt $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ thì $f(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})) \equiv 0$ vì $f_1(\boldsymbol{x}) \neq f_2(\boldsymbol{x})$ với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$.

Trong cả hai trường hợp ta chỉ cần đúng một phép tính. Lưu ý rằng hàm f thỏa f_1 và f_2 được gọi là *algebraically dependent*.

Giải

Cách giải của mình không đúng hoàn toàn nên chỉ được 1/8. Dưới đây trình bày cách giải của đội Robin Jadoul, Jack Pope và Esrever Yu được 8/8 điểm.

Giả thuyết trong đề bài đúng với m lớn. Ý tưởng chính là chúng ta cố định các cột sẽ chọn, có một số lượng lũy thừa các hàm f (rất rất lớn) nhưng chỉ có số lượng đa thức các hàng (ít lớn hơn 🤣), do đó chúng ta có thể chọn hàm f triệt tiêu tất cả hàng.

Định lí 3

Cho ma trận binary M kích thước $2^n \times n2^n$. Với $n+1$ column functions bất kì, tồn tại một hàm nonzero $f : \mathbb{F}_2^{n+1} \to \mathbb{F}_2$ triệt tiêu trên các column functions và sử dụng nhiều nhất $2n+1$ toán tử cộng và nhân.

Chứng minh. Gọi $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ là các column functions. Đặt

$$S = \{(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{n+1}(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{F}_2^{n+1} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n\}$$

là tập hợp các bộ giá trị từ các column functions. Vì $|S| < |\mathbb{F}_2^{n+1}|$, ta có thể chọn vector $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{F}_2^{n+1} \backslash S$. Từ đây ta định nghĩa hàm f là

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1 \oplus (z_1 \oplus 1)) \cdot (x_2 \oplus (z_2 \oplus 1)) \cdots (x_{n+1} \oplus (z_{n+1} \oplus 1))$$

Lúc này, f cho output là 1 chỉ khi z là input (?), do đó với mọi $\boldsymbol{y} \in S$ thì $f(\boldsymbol{y}) = 0$.

Đối với số lượng phép tính, với mọi i, $z_i \oplus 1$ là hằng số nên ta không xét đến khi tính số lượng phép tính cho hàm f. Dựa trên vector $\boldsymbol{z}$, có tối đa $n+1$ phép cộng (tương ứng $x_i \oplus (z_i \oplus 1)$) và n phép nhân $n+1$ hạng tử với nhau. Vì vậy số phép tính tối đa là $2n+1$. □

Hệ quả 4. Giả thuyết trên đúng với mọi $m \geqslant 4$.

Chứng minh. Theo định lý trên ta có f[3]. Bây giờ ta chỉ cần chặn lại số lượng cột mà ta cần và số lượng phép tính.

Với số lượng cột, ta cần $n+1 \leqslant 2^{n/2}$. Với số lượng phép tính, ta cần $2n+1 \leqslant 2^{n/2}$. Kết hợp cả hai ta có $n \geqslant 9$, tương đương với $m \geqslant 4$. □

Bình luận

Về tổng thể cách giải của team kia hợp lý trừ phần mình đánh dấu, chưa hiểu lắm khi $\boldsymbol{z}$ là input nghĩa là sao.

Thêm nữa, chưa có cơ sở để nghĩ ra bài giải này. Có vẻ như Esrever đã rất căng não để giải ra 🥲.

UPDATE. Ý nghĩa của phần đánh dấu là: trong phép tính

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1 \oplus (z_1 \oplus 1)) \cdot (x_2 \oplus (z_2 \oplus 1)) \cdots (x_{n+1} \cdot (z_{n+1} \oplus 1))$$

Kết quả phép tính ra 1 khi vì chỉ khi tất cả hạng tử bằng 1. Nói cách khác $x_i \oplus (z_i \oplus 1) = 1$ với mọi $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

[3]Bài toán yêu cầu hàm f lấy $2^{n/2}$ input. Tuy nhiên chúng ta có thể thêm các dummy input miễn là số lượng cột không lớn hơn $n+1$ (mục tiêu ban đầu)

Điều này tương đương với $x_i = z_i$ với mọi $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Nhưng điều này vô lý vì khi đó $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{z}$ mà hai vector này nằm ở hai tập rời nhau.

Do đó kết quả hàm f luôn là 0. Ta có điều phải chứng minh.

Problem 5. Primes

Đây là bài 5 của round 2 và được giải bởi bạn Uyên.

Đề bài

Marcus chọn hai số nguyên tố lớn p và q rồi tính $n = p \cdot q$ và $m = p + q$. Sau đó số $n \cdot m$ được sử dụng trong cryptosystem.

Khi test Marcus thấy các số p và q cho tích $n \cdot m$ kết thúc bởi 2023. Điều đó khả thi không?

Giải

Do p và q là các số nguyên tố lớn nên chúng lẻ. Suy ra $m = p + q$ là số chẵn, nên tích $n \cdot m$ cũng là số chẵn.

Số chẵn kết thúc bởi 0, 2, 4, 6, 8 nên không thể kết thúc bởi 3. Do đó điều này không thể xảy ra.

Problem 6**. An aggregated signature

Bài này không biết làm 🥲.

Đề bài

Trong một tổ chức quốc tế lớn, gọi là **NSUCRYPTO association**, mọi người quyết định tổ chức một tờ báo thông tin (news journal) trong lĩnh vực mật mã. Tổ chức muốn rằng, tin tức chỉ được công bố khi đã được kiểm duyệt bởi một nhóm lớn các nhà mật mã. Vì vậy, 10 000 chuyên gia mật mã đã được mời tới làm biên tập cho tờ báo.

Quy định công bố như sau. Tin tức được công bố khi nó được ký bởi tất cả các thành viên biên tập. Tuy nhiên các nhà mật mã không rảnh để thu thập 10 000 chữ ký cá nhân (gặp mình thì mình cũng không muốn 🙂). Do đó mọi người muốn một chữ ký postquantum dùng chung mà không thể chia nhỏ ra các chữ ký cá nhân.

Yêu cầu là cần xây dựng mô hình chữ ký thỏa mãn các yêu cầu sau:

- kích thước chữ ký không quá lớn, có thể hơn vài kilobytes;
- kích thước public key (để kiểm tra chữ ký) là nhỏ. Kích thước của key nên là cố định (hoặc gần cố định) kể cả khi số lượng chuyên gia tăng lên, ví dụ 20 000;
- việc kiểm tra chữ ký tốn không quá 2 phút;
- chữ ký có thể chống lại các tấn công trên máy tính lượng tử.

Problem 7. A unique coding

Bài này khi nhìn đề thì "có vẻ" câu hỏi Q2 là trường hợp nhỏ hơn của Q1. Mình giải Q2 (không chắc đúng hoàn toàn) nên lời giải sau đây áp dụng cho cả Q1 và Q2.

Đề bài

Xét binary error-correcting code $\mathcal{C}$ với độ dài n. Code này chỉ đơn giản là tập con của $\mathbb{F}_2^n$ thôi và ta truyền một phần tử của code này qua các kênh truyền.

Khi đi qua các kênh truyền các bit có thể bị sai, dẫn tới bị đảo bit. Khi nhận được vector $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$, ta sẽ decode thành một phần tử thuộc $\mathcal{C}$ mà có khoảng cách gần $\boldsymbol{y}$ nhất, nói cách khác là Hamming weight ngắn nhất.

Xét cơ chế decode maximal-likelihood. Giả sử ta nhận được $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$, ta muốn xét các trường hợp lỗi xảy ra ít nhất, gọi là $d_{\boldsymbol{y}}$, nghĩa là

$$d_{\boldsymbol{y}} = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}} wt(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Tiếp theo, đặt $\mathcal{D}(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{C} : wt(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_{\boldsymbol{y}}\}$. Cuối cùng ta decode $\boldsymbol{y}$ thành phần tử $\boldsymbol{x}$ nào đó trong $\mathcal{D}(\boldsymbol{y})$.

Chúng ta quan tâm tới các trường hợp code $\mathcal{C}$ khiến $|\mathcal{D}(\boldsymbol{y})| = 1$ với mọi $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$. Nói cách khác khi nhận được $\boldsymbol{y}$ bất kì của $\mathbb{F}_2^n$ ta có thể decode thành một dạng duy nhất.

Q1. Code $\mathcal{C}$ như nào thì thỏa mãn tính chất này?

Q2. Code $\mathcal{C}$ như nào thỏa mãn tính chất này và là không gian tuyến tính con của $\mathbb{F}_2^n$?

Giải

Đầu tiên mình có nhận xét (khá rõ ràng) sau đây:

Nhận xét 2

Với mọi n, code $\mathcal{C} \equiv \mathbb{F}_2^n$ thỏa mãn tính chất trên.

Chúng ta có thể thấy rằng với mọi $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$ nhận được thì sẽ decode thành chính nó trong $\mathcal{C}$.

Tiếp theo, ta xét nửa trên của $\mathbb{F}_2^n$. Trong hệ thập phân thì đó là các số từ 0 tới $2^{n-1}-1$ và có dạng

$$\boldsymbol{x} = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

Nói cách khác, code $\mathcal{C}$ là tập hợp

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} = (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) : x_i \in \mathbb{F}_2\}$$

Code $\mathcal{C}$ này thỏa mãn tính chất trên và mình sẽ chứng minh ngay sau đây.

Chứng minh. Giả sử ta nhận được $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$. Ta có hai trường hợp:

- nếu $\boldsymbol{y} = (0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, hay nói cách khác biểu diễn thập phân của $\boldsymbol{y}$ là từ 0 tới $2^{n-1}-1$, thì $\boldsymbol{y}$ được decode thành chính nó trong $\mathcal{C}$. Khi này $d_{\boldsymbol{y}} = 0$ nhỏ nhất và không có vector nào khác cho Hamming weight bằng 0 trừ chính nó.
- nếu $\boldsymbol{y} = (1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, hay nói cách khác biểu diễn thập phân của $\boldsymbol{y}$ là từ 2^{n-1} tới 2^n-1, thì $\boldsymbol{y}$ được decode thành $\boldsymbol{x} = (0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ trong $\mathcal{C}$. Khi này $d_{\boldsymbol{y}} = 1$ nhỏ nhất vì khác mỗi bit đầu tiên và cũng không có vector nào khác cho Hamming weight bằng 1.

□

Tiếp theo, mình viết các vector trong $\mathcal{C}$ thành các hàng của 1 ma trận $2^{n-1} \times n$. Gọi A là ma trận hoán vị các cột của ma trận $2^{n-1} \times n$ đó. Khi đó A là ma trận có tính chất: trên mỗi hàng và trên mỗi cột có đúng một phần tử (bằng 1) và ma trận A khả nghịch. Ví dụ, với $n = 4$, ma trận để hoán vị cột 2 với cột 4 là $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Khi đó, nếu mình nhân ma trận $2^{n-1} \times n$ của code $\mathcal{C}$ với bất kì ma trận A nào như vậy thì code $\mathcal{C}'$ nhận được cũng thỏa mãn tính chất trên.

Ví dụ 3. Với $n = 4$ thì code $\mathcal{C}$ gồm các vector

$$\mathcal{C} = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111\}$$

Với ma trận A hoán vị cột 2 và 4 như trên ta có

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{C}'$$

Bây giờ mình sẽ chứng minh rằng với mọi ma trận A hoán vị các cột như vậy thì code $\mathcal{C}'$ cũng thỏa mãn tính chất.

Chứng minh. Đặt

$$\mathcal{C} = \{(0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_i \in \mathbb{F}_2\}$$

Gọi A là ma trận hoán vị cột kích thước $n \times n$. Khi đó ánh xạ

$$A : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n, \quad \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y} \cdot A$$

là song ánh do A là ma trận khả nghịch. Khi đó xét code

$$\mathcal{C}' = \{\boldsymbol{x} \cdot A : \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}\}$$

Mình vẫn có hai trường hợp.

Trường hợp 1. Với $\boldsymbol{y} = (0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ từ 0 tới $2^{n-1} - 1$ như trên. Xét $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} \cdot A$.

Khi đó, với $\boldsymbol{x} = (0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in \mathcal{C}$, ta có $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \cdot A \in \mathcal{C}'$. Từ đây suy ra

$$wt(\boldsymbol{x}' \oplus \boldsymbol{y}') = wt((\boldsymbol{x} \cdot A) \oplus (\boldsymbol{y} \cdot A)) = wt((\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) \cdot A) = wt(\mathbf{0} \cdot A) = 0$$

Ở đây $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}_2^n$.

Nói cách khác $d_{\boldsymbol{y}'} = 0$ và có duy nhất một vector $\boldsymbol{x}'$ được định nghĩa như trên thỏa mãn. Do đó $|\mathcal{D}(\boldsymbol{y}')| = 1$.

Trường hợp 2. Với $\boldsymbol{y} = (1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ từ 2^{n-1} tới $2^n - 1$ như trên. Ta cũng xét $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} \cdot A$.

Khi đó, với $\boldsymbol{x} = (0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in \mathcal{C}$, ta cũng có $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\cdot \in \mathcal{C}'$. Từ đây ta có

$$wt(\boldsymbol{x}' \oplus \boldsymbol{y}') = wt((\boldsymbol{x} \cdot A) \oplus (\boldsymbol{y} \cdot A)) = wt((\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}) \cdot A) = wt((1, 0, 0, \ldots, 0) \cdot A) = 1$$

Ở phép nhân vector $(1, 0, \ldots, 0)$ với ma trận A, vì ma trận A chỉ có duy nhất một cột có dạng $(1, 0, \ldots, 0)^T$ nên kết quả phép nhân là một vector có đúng một phần tử 1, còn lại là 0.

Nói cách khác $d_{\boldsymbol{y}'} = 1$ và có duy nhất một vector $\boldsymbol{x}'$ được định nghĩa như trên thỏa mãn. Do đó $|\mathcal{D}(\boldsymbol{y}')| = 1$.

Như vậy ta đã chứng minh xong. □

Hoàn toàn tương tự, khi code $\mathcal{C}$ là các vector bắt đầu với hai số 0 thì ta lần lượt xét $\boldsymbol{y}$ trong các khoảng $[0, 2^{n-2} - 1]$, $[2^{n-2}, 2^{n-1} - 1]$, $[2^{n-1}, 2^{n-1} + 2^{n-2} - 1]$, $[2^{n-1} + 2^{n-2} - 1, 2^n - 1]$. Nghĩa là

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} = (0, 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2} : x_i \in \mathbb{F}_2^n)\}$$

Khi đó ta xét các vector $\boldsymbol{y}$ có dạng:

- $\boldsymbol{y} = (0, 0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$
- $\boldsymbol{y} = (0, 1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$
- $\boldsymbol{y} = (1, 0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$
- $\boldsymbol{y} = (1, 1, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$

Theo quy nạp thì code C bắt đầu với i số 0 đều đúng, $0 \leqslant i \leqslant n$. Nghĩa là

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} = (0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-i}) : x_i \in \mathbb{F}_2\}$$

Sau đó chúng ta lại áp dụng phép nhân với ma trận hoán vị cột A như bên trên thì các code $\mathcal{C}'$ cũng thỏa mãn.

Vấn đề ở đây là, những code $\mathcal{C}$ như vậy là không gian vector sinh bởi i vector $(0 \leqslant i \leqslant n)$ trong các vector sau:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0) \\
\boldsymbol{v}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0) \\
\boldsymbol{v}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0, 0) \\
\cdots &= \cdots \\
\boldsymbol{v}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}$$

Số cách chọn i vector từ n vector là

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

cách. Nói cách khác có 2^n code $\mathcal{C}$ thỏa tính chất đề bài và là không gian tuyến tính của $\mathbb{F}_2^n$.

Ví dụ 4. Với $n = 3$ thì các code sau thỏa mãn tính chất

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{000\},\\
\mathcal{C}_2 &= \{000, 001\},\\
\mathcal{C}_3 &= \{000, 010\},\\
\mathcal{C}_4 &= \{000, 100\},\\
\mathcal{C}_5 &= \{000, 001, 010, 011\},\\
\mathcal{C}_6 &= \{000, 001, 100, 101\},\\
\mathcal{C}_7 &= \{000, 010, 100, 110\},\\
\mathcal{C}_8 &= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}
\end{aligned}$$

Bình luận

Đối với Q1 có thể thấy rằng bất cứ code nào chỉ chứa đúng một vector sẽ thỏa mãn điều kiện. Lý do là vì bất cứ $\boldsymbol{y}$ nào được gửi tới cũng sẽ decode ra vector đó.

Bài này mình được 6/12 điểm vì đưa ra cách xây dựng tốt, trình bày đẹp.

Problem 8. Algebraic cryptanalysis

Bài này là bài 7 ở round 1 và là bài 8 ở round 2. Bài này mình giải khá qua loa ở round 1 và được giải đầy đủ, rõ ràng hơn bởi người đồng đội vip pro Chương ở round 2.

Đề bài

Bob muốn xây dựng stream cipher **BOB-0.1**.

Bob sử dụng một binary key độ dài 8 là $K = (k_1, \ldots, k_8)$. Sau đó anh ấy sinh ra dãy nhị phân β theo quy tắc:

- $\beta_n = k_n$ khi $n = 1, 2, \ldots, 8$
- $\beta_n = \beta_{n-1} \oplus \beta_{n-8}$ khi $n \geqslant 9$

Sau đó Bob sinh dãy nhị phân γ dùng trong phép XOR với plaintext. Dãy γ được tạo bởi quy tắc $\gamma_n = \beta_n \cdot \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+7}$ với $n \geqslant 1$.

Alice chặn được 8 bit của γ sau khi để lỡ 1200 bit. Các bit đó là '00100001'. Liệu Alice có thể tìm lại được key K ban đầu không?

Giải

Độ dài K là 8 bit, nếu chúng ta brutefore $K = (k_1, \ldots, k_8)$ rồi sinh ra 1208 bit γ theo quy tắc trên và so sánh xem $\gamma_{1201}, \ldots, \gamma_{1208}$ nào khớp với 8 bit trên

thì ta có thể biết được K ban đầu là gì.

Và, bất ngờ chưa, có tới hai trường hợp K thỏa mãn :v :v

Bây giờ thì chúng ta cần xem xem tại sao lại có hai trường hợp thỏa mãn.

Cùng nhau khai triển $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_{n+8}$ theo $(\beta_{n-7}, \ldots, \beta_n)$ nào.

- $\beta_{n+1} = \beta_n \oplus \beta_{n-7}$
- $\beta_{n+2} = \beta_{n+1} \oplus \beta_{n-6} = \beta_n \oplus \beta_{n-7} \oplus \beta_{n-6}$
- $\beta_{n+3} = \beta_{n+2} \oplus \beta_{n-5} = \beta_n \oplus \beta_{n-7} \oplus \beta_{n-6} \oplus \beta_{n-5}$
- $\beta_{n+4} = \beta_{n+3} \oplus \beta_{n-4} = \beta_n \oplus \beta_{n-7} \oplus \beta_{n-6} \oplus \beta_{n-5} \oplus \beta_{n-4}$
- $\beta_{n+5} = \beta_{n+4} \oplus \beta_{n-3} = \beta_n \oplus \beta_{n-7} \oplus \beta_{n-6} \oplus \beta_{n-5} \oplus \beta_{n-4} \oplus \beta_{n-3}$
- $\beta_{n+6} = \beta_{n+5} \oplus \beta_{n-2} = \beta_n \oplus \beta_{n-7} \oplus \beta_{n-6} \oplus \beta_{n-5} \oplus \beta_{n-4} \oplus \beta_{n-3} \oplus \beta_{n-2}$
- $\beta_{n+7} = \beta_{n+6} \oplus \beta_{n-1} = \beta_n \oplus \beta_{n-7} \oplus \beta_{n-6} \oplus \beta_{n-5} \oplus \beta_{n-4} \oplus \beta_{n-3} \oplus \beta_{n-2} \oplus \beta_{n-1}$
- $\beta_{n+8} = \beta_{n+7} \oplus \beta_n = \beta_{n-7} \oplus \beta_{n-6} \oplus \beta_{n-5} \oplus \beta_{n-4} \oplus \beta_{n-3} \oplus \beta_{n-2} \oplus \beta_{n-1}$

Nếu viết ở dạng phép nhân ma trận modulo 2 ta có

$$\begin{pmatrix} \beta_{n+1} \\ \beta_{n+2} \\ \beta_{n+3} \\ \beta_{n+4} \\ \beta_{n+5} \\ \beta_{n+6} \\ \beta_{n+7} \\ \beta_{n+8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{n-7} \\ \beta_{n-6} \\ \beta_{n-5} \\ \beta_{n-4} \\ \beta_{n-3} \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Ma trận to to kia là ma trận khả nghịch. Do đó, nếu chúng ta có các $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_{n+8}$ thì chúng ta có thể tìm ngược lại $\beta_{n-7}, \ldots, \beta_n$. Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta có thể tìm lại $(\beta_1, \ldots, \beta_8) = K$.

Tiếp theo, cũng tương tự, chúng ta biểu diễn dãy γ theo β..

- $\gamma_{n+1} = \beta_{n+1} \cdot \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+8}$
- $\gamma_{n+2} = \beta_{n+2} \cdot \beta_{n+4} \oplus \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+8}$
- $\gamma_{n+3} = \beta_{n+3} \cdot \beta_{n+5} \oplus \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+8}$
- $\gamma_{n+4} = \beta_{n+4} \cdot \beta_{n+6} \oplus \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+8}$
- $\gamma_{n+5} = \beta_{n+5} \cdot \beta_{n+7} \oplus \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+4} \oplus \beta_{n+8}$
- $\gamma_{n+6} = \beta_{n+6} \cdot \beta_{n+8} \oplus \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+4} \oplus \beta_{n+5} \oplus \beta_{n+8}$
- $\gamma_{n+7} = \beta_{n+7} \cdot \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+7} \cdot \beta_{n+8} \oplus \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+4} \oplus \beta_{n+5} \oplus \beta_{n+6} \oplus \beta_{n+8}$
- $\gamma_{n+8} = \beta_{n+8} \cdot \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+8} \cdot \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+1} \oplus \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+4} \oplus \beta_{n+5} \oplus \beta_{n+6} \oplus \beta_{n+7}$

Trường hợp 1. $\beta_{n+1} = 0$. Khi đó từ γ_{1201} tới γ_{1208} tương đương với hệ phương

trình

$$
\begin{aligned}
0 &= \beta_{n+8} \\
0 &= \beta_{n+2} \cdot \beta_{n+4} \\
1 &= \beta_{n+3} \cdot \beta_{n+5} \oplus \beta_{n+2} \\
0 &= \beta_{n+4} \cdot \beta_{n+6} \oplus \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \\
0 &= \beta_{n+5} \cdot \beta_{n+7} \oplus \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \cdot \beta_{n+4} \\
0 &= \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+4} \oplus \beta_{n+5} \\
0 &= \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+4} \oplus \beta_{n+5} \oplus \beta_{n+6} \\
1 &= \beta_{n+2} \oplus \beta_{n+3} \oplus \beta_{n+4} \oplus \beta_{n+5} \oplus \beta_{n+6} \oplus \beta_{n+7}
\end{aligned}
$$

Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(\beta_i) = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$.

Trường hợp 2. $\beta_{n+1} = 1$. Tương tự hệ phương trình cũng có nghiệm duy nhất $(\beta_i) = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Như vậy ta có hai nghiệm thỏa mãn chuỗi 8 bit $\gamma_{1201}, \ldots, \gamma_{1208}$. Do không có điều kiện nào thêm, ta không thể xác định đâu là khóa trong hai trường hợp trên.

Bài này bạn Chương được 4/4 điểm. Good job nigga 😂.

Problem 9**. Finite-state machines

Bài này không biết làm!!!

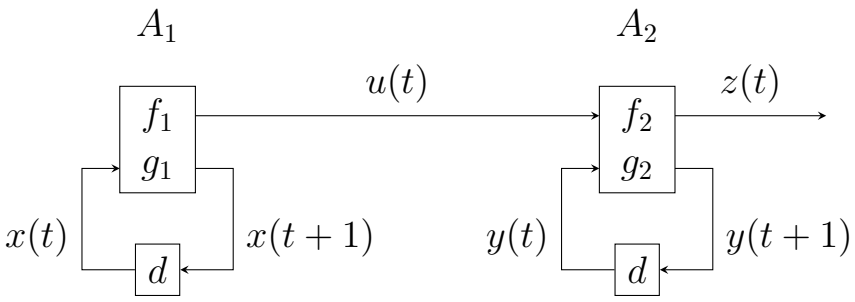
Đề bài

Alice muốn tạo một generator để sinh một dãy số với độ dài chu kỳ lớn nhất có thể. Vì cô ấy biết về finite-state machine, generator G sẽ được xây dựng bởi hai machine A_1 và A_2 sao cho:

- $A_1 = (\mathbb{F}_2^n, \mathbb{F}_2, g_1, f_1)$ với hàm state-transition (hàm chuyển trạng thái) $g_1 : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ và hàm output $f_1 : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$, $n \geqslant 1$;
- $A_2 = (\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2^m, \mathbb{F}_2, g_2, f_2)$ với hàm state-transition $g_2 : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2^m \to \mathbb{F}_2^n$ và hàm output $f_2 : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2^m \to \mathbb{F}_2$, $m \geqslant 1$.

Với mỗi $t = 1, 2, \ldots$, đặt

1. $x(t)$ và $y(t)$ là trạng thái của A_1 và A_2, $x(1)$ và $y(1)$ là các giá trị khởi tạo;
2. $x(t+1) = g_1(t)$ là trạng thái tiếp theo của A_1 và $u(t) = f_1(x(t))$ là output bit của A_1;
3. $y(t+1) = g_2(u(t), y(t))$ là trạng thái tiếp theo của A_2 và $z(t) = f_2(u(t), y(t))$ là output bit của A_2.



Dãy $z(1), z(2), z(3), \ldots$ là output của generator G. Dễ thấy rằng dãy sinh bởi G có chu kỳ nhỏ nhất không vượt quá 2^{n+m}.

Theo thí nghiệm Alice thấy rằng, dãy output của G sẽ có chu kỳ nhỏ nhất nhỏ hơn 2^{n+m} nếu Hamming weight của f_1 là chẵn. Hãy chứng minh hoặc phủ định nhận xét của Alice.

Giải

Note theo gợi ý của thầy Kolomeec, chưa hiểu hết.

Dễ thấy rằng nếu $z(t)$ có chu kỳ tối đa thì các máy trạng thái A_1 và A_2 phải có chu kỳ tối đa lần lượt là 2^n và 2^m.

Các giá trị của g_2 có thể chia ra hai phần là $g_2(0, \boldsymbol{x})$ và $g_2(1, \boldsymbol{x})$ với $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^m$. Trong đó 0 và 1 xác định từ f_1.

Nếu g_2 có chu kỳ cực đại thì trọng số phải là 2^m, nói cách khác là hàm cân bằng, suy ra $g_2(0, \boldsymbol{x})$ và $g_2(1, \boldsymbol{x})$ đều có số chẵn phần tử.

Điều này có nghĩa là g_2 sẽ sinh ra dãy có chu kỳ tạo thành hoán vị chẵn.

Tuy nhiên nếu g_2 có chu kỳ cực đại thì chu kỳ đó phải tạo thành hoán vị lẻ vì khi đó hoán vị

$$1 \to 2 \to \cdots \to t \to 1 = (1, 2)(1, 3) \cdots (1, t)$$

có $t - 1$ tranposition. Nói cách khác đây là hoán vị lẻ vì $t = 2^m$ chẵn.

Như vậy để chu trình đạt chu kỳ tối đa thì nó phải là hoán vị lẻ, mâu thuẫn với phân tích ở trên g_2 sẽ sinh ra dãy là hoán vị chẵn.

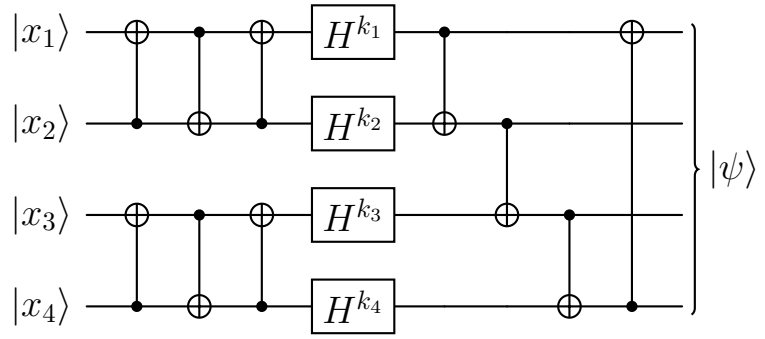
Trong cách giải này có hai chỗ mình không biết thầy lấy đâu ra: tại sao g_2 cân bằng thì cả $g_2(0, \boldsymbol{x})$ và $g_2(1, \boldsymbol{x})$ đều phải có số chẵn phần tử mà không phải là đều có số lẻ? Liên hệ giữa trọng số hàm bool và hoán vị chẵn/lẻ là gì?

Problem 10. Quantum encryption

Đây là bài 8 của round 1 và bài 10 của round 2. Bài này sai gần bước cuối mới cay 😭.

Đề bài

Bob tạo một thuật toán mã hóa encrypt 4 bit (x_1, x_2, x_3, x_4) bằng key cũng 4 bit (k_1, k_2, k_3, k_4) với mạch sau:



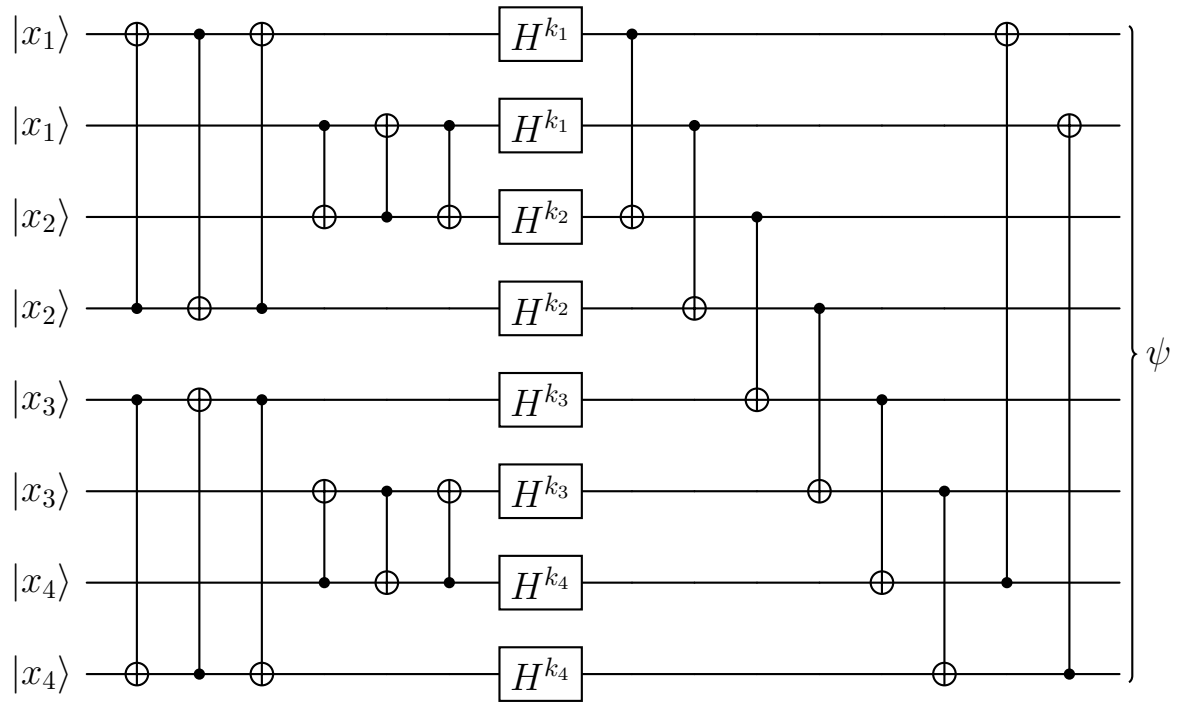
Plaintext 4 bit (x_1, x_2, x_3, x_4) được biểu diễn ở dạng 4-qubit "plainstate" $|x1, x2, x3, x4\rangle$. Quantum state này là input cho mạch ở dạng qubit đơn đi qua các cổng.

Ở đây hai loại cổng được sửa dụng là CNOT và Hadamard.

Ký hiệu H^b với $b \in \{0, 1\}$ có nghĩa là, nếu $b = 0$ thì cổng đồng nhất I được sử dụng (không thay đổi), còn nếu $b = 1$ thì cổng Hadamard sẽ được sử dụng.

Kết quả sau khi qua mạch là "cipherstate" $|\psi\rangle$.

Bob có nhiệm vụ tăng số qubit đầu vào lên nhằm giảm các sai số khi tính toán và truyền dữ liệu trên kênh quantum. Do đó Bob biến đổi thành mạch sau:

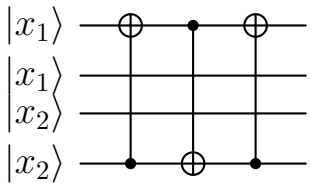


Alice nói rằng cô ấy có thể tìm lại được key nếu biết N amplitude của kết

quả $|\psi\rangle$. Do có 8 qubits ở kết quả nên số lượng amplitude tối đa là $2^8 = 256$, nói cách khác $N \leqslant 256$. Vậy Alice cần ít nhất bao nhiêu amplitude là đủ để tìm lại key?

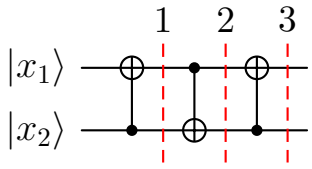
Giải

Đầu tiên xét 4 dây trên, 4 dây dưới tương tự.

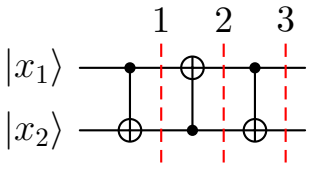


Chúng ta xét dây 1 và 4 của mạch (tương tự cho dây 2 và 3). Áp dụng cổng CNOT liên tiếp 3 lần ta có

$$|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \to |x_1 \oplus x_2\rangle \otimes |x_2\rangle \to |x_1 \oplus x_2\rangle \otimes |x_1\rangle \to |x_2\rangle \otimes |x_1\rangle$$



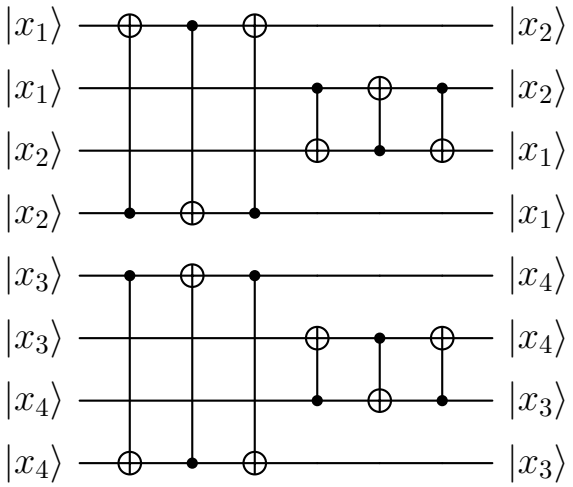
(a) Dây 1 và dây 4



(b) Dây 2 và dây 3

Nói cách khác là đảo bit 😆.

Tương tự cho các cặp dây (5, 8) và (6, 7). Do đó khi tới trước các cổng Hadamard thì thứ tự các qubit từ trên xuống dưới là hình 19.2.

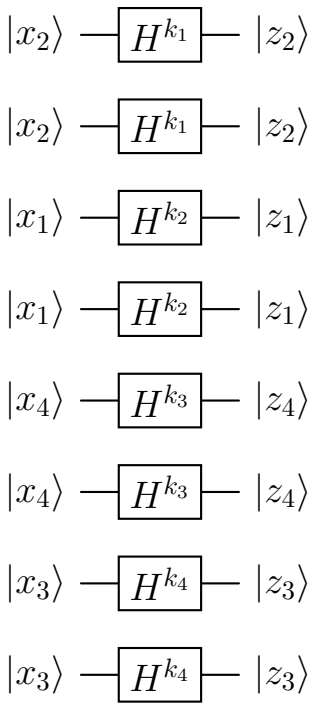


Hình 19.2. Qubits trước Hadamard

Mạch ở dây 1 và 2 đều có dạng $|x_2\rangle$ đi qua H^{k_1} nên sau khi qua cổng mình đặt $|z_2\rangle = H^{k_1}|x_2\rangle$.

Tương tự, $|z_1\rangle = H^{k_2}|x_1\rangle$ cho dây 3 và 4, $|z_4\rangle = H^{k_3}|x_4\rangle$ cho dây 5 và 6, $|z_3\rangle = H^{k_4}|x_3\rangle$ cho dây 7 và 8.

Mạch sau khi đi qua Hadamard có dạng 19.3



Hình 19.3. Qubits sau Hadamard

Ở đây chúng ta có một lưu ý nhỏ có thể giúp ích trong việc giới hạn số lượng amplitude theo đề bài. Nếu $k_1 = 0$ thì $|z_2\rangle = |x_2\rangle$. Nếu $k_1 = 1$ thì $|z_2\rangle = \dfrac{|0\rangle + (-1)^{x_2}|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Như vậy, hệ số trước $|0\rangle$ của $|z_2\rangle$ có thể là $0, 1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ đều không âm.

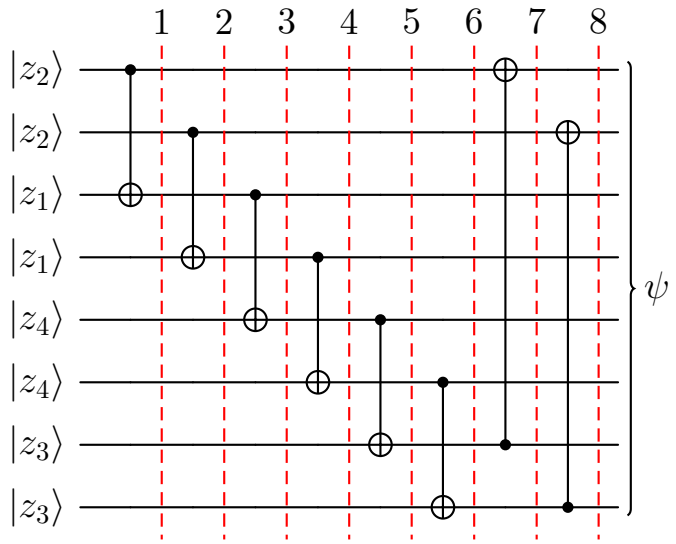
Bây giờ chúng ta quay lại toán tử CNOT. Ma trận tương ứng của toán tử CNOT là $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Kết quả sau khi thực hiện toán tử CNOT là hệ số trước $|00\rangle$ và $|01\rangle$ giữ nguyên, còn hệ số trước $|10\rangle$ và $|11\rangle$ đổi chỗ cho nhau.

Đối với 3 qubit, mình **dự đoán** tương tự.

Ở cổng CNOT đầu tiên, dây 1 control dây 3. Nếu mình chỉ xét 3 dây đầu thì tích các qubit gồm $|000\rangle$, $|001\rangle$, $|010\rangle$, $|011\rangle$, $|100\rangle$, $|101\rangle$, $|110\rangle$, $|111\rangle$.

Áp dụng "chiến thuật" tương tự, mình chỉ quan tâm vị trí 1 và 3. Nghĩa là hệ số của $|0x0\rangle$ và $|0x1\rangle$ giữ nguyên, còn hệ số trước $|1x0\rangle$ và $|1x1\rangle$ đổi chỗ cho nhau, với $x \in \{0, 1\}$. Nói cách khác, 8 hệ số trước amplitude chỉ thay đổi vị trí

chứ không nhiều hơn hay ít đi, hay tập hợp hệ số giữ nguyên.



Như vậy, giả sử $|z_2\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, $|z_1\rangle = c|0\rangle + |1\rangle$, $|z_4\rangle = e|0\rangle + f|1\rangle$, $|z_3\rangle = g|0\rangle + h|1\rangle$. Khi đó kết quả cipherstate là

$$|\psi\rangle = |z_2\rangle \otimes |z_2\rangle \otimes |z_1\rangle \otimes |z_1\rangle \otimes |z_4\rangle \otimes |z_4\rangle \otimes |z_3\rangle \otimes |z_3\rangle$$

Xét $|z_2\rangle \otimes |z_2\rangle = a^2|00\rangle + ab|01\rangle + ab|10\rangle + b^2|11\rangle$. Ở đây có 3 hệ số khác nhau là (a^2, ab, b^2). Với lưu ý bên trên $a \geqslant 0$ nên từ a^2 tính được a. Từ a, ta cần thêm ab để xác định b.

Như vậy mình cần $2^4 = 16$ hệ số để tìm lại các key ban đầu.

Bình luận

Thế éo nào mình lại nhầm khúc cuối mà lấy cả a^2, ab và b^2 nên kết quả ra $3^4 = 81$. Tất nhiên là **SAI BÉT** nên chỉ được 2/8 😭.

Problem 11. AntCipher

Bài này là bài số 2 ở round 1 và là bài số 11 ở round 2. Lúc thi round 1 mình không biết giải, còn ở round 2 thì mình đã giải theo cách như sau.

Đề bài

Đặt

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_9) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_9) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \neg x_9) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_9) \wedge$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_9 \vee \neg x_{10} \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_9 \vee x_{10} \vee \neg x_4) \wedge$$
$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_5) \wedge (x_9 \vee \neg x_{10} \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_6) \wedge (x_9 \vee x_{10} \vee \neg x_6) \wedge$$
$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_7) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_7 \vee \neg x_8)$$

Hàm f gồm 10 biến được viết dưới dạng CNF (conjunctive normal form). Thuật toán mã hóa dựa trên hàm f biến đổi hai bit plaintext (x_1, x_2) thành hai bit ciphertext (x_9, x_{10}) khi giá trị hàm $f = True$. Hàm f này có 10 biến $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ và 46 literals, là các hạng tử trong biểu diễn CNF của hàm. Ví dụ với dấu ngoặc thứ hai có 3 literals là $\neg x_1$, $\neg x_2$ và $\neg x_9$.

Q. Vì các giới hạn tính toán nên chúng ta chỉ có thể sử dụng tối đa 16 biến với 20 literals. Nhắc lại rằng hàm f ở trên có 10 biến và 46 literals. Hãy tìm cách biểu diễn tương đương của thuật toán mã hóa trên với giới hạn đã cho.

Giải

Khi mình code hàm để tính giá trị hàm f và xem xét những vector

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{10})$$

mà $f = True$, mình nhận thấy rằng:

- nếu $(x_1, x_2) = (0, 0)$ thì $(x_9, x_{10}) = (1, 0)$
- nếu $(x_1, x_2) = (0, 1)$ thì $(x_9, x_{10}) = (1, 1)$
- nếu $(x_1, x_2) = (1, 0)$ thì $(x_9, x_{10}) = (0, 0)$
- nếu $(x_1, x_2) = (1, 1)$ thì $(x_9, x_{10}) = (0, 1)$

Mình nhận ra rằng các biến $x_3, x_4, \ldots, x_7, x_8$ hoàn toàn không tác động lên việc mã hóa từ (x_1, x_2) thành (x_9, x_{10}) (ít nhất là ở những chỗ $f = True$:v).

Như vậy bài toán được rút gọn thành hàm boolean 4 biến x_1, x_2, x_9 và x_{10}. Ở đó $f(0010) = f(0111) = f(1000) = f(1101) = 1$. Các vector còn lại thì $f = 0$. Ở dưới là bảng chân trị 19.3.

Từ bảng chân trị trên, sử dụng phương pháp bìa Karnaugh mình rút gọn được thành

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_9, x_{10}) = &(\neg x_1 \vee \neg x_9) \wedge (x_1 \vee x_9) \wedge \\ &(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_{10}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_{10}) \wedge \\ &(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_{10}) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_{10}) \end{aligned}$$

CNF này có 4 biến và 16 literals, thỏa mãn yêu cầu đề bài và ăn trọn 6/6 điểm 😇.

x_1	x_2	x_9	x_{10}	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Bảng 19.3. Bảng chân trị hàm f

CryptoFox 2024

Olympiad mật mã và bảo mật thông tin CryptoFox 2024

Задача 1. дешифрование файла

Bài này cho file encrypt bằng thuật toán Kuznyechik 256 bit. Với password bị ẩn đi, khóa cho Kuznyechik được sinh bằng việc hash password bằng Streebog, sau đó các bit sau khi hash đi qua một hoán vị.

Do Streebog là hash 512 bit nên sau khi qua bảng hoán vị vẫn có 512 bit. Do đó khóa là 256 bit thấp sau khi hash.

Cả Streebog và Kuznyechik là các tiêu chuẩn mật mã nên không thể phá. Lỗi nằm ở bảng hoán vị.

Sau khi thử tạo key từ một số password (tiếng Nga), ta thấy rằng trong 256 bit của khóa chỉ có một số ít bit 1. Đặc biệt là các vị trí xuất hiện 1 là không nhiều. Do đó chúng ta có thể giảm không gian 256 bit xuống một tập nhỏ hơn.

Giả sử ta tạo các key Kuznyechik $K_1, K_2, \ldots$ từ việc hash các password $w_1, w_2, \ldots$, nghĩa là $K_i = H(w_i)$, đặt I_i là tập hợp các vị trí bit 1 xuất hiện.

Đặt $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots$ là tập các vị trí có thể là bit 1 khi hash một password bất kì. Tập này chứa không quá 10 phần tử.

Khi đó khóa Kuznyechik để mã hóa sẽ là khóa có bit 1 nằm ở các vị trí theo tập $J \subset I$. Thử tất cả tập con của I đến khi decrypt và decode thành công.

Khóa decrypt viết ở dạng hex là

`0000e0000000008000000000000000000000040000000000000040000000004`

Задача 2. Анализ GOST-CryptoFox

Phân tích GOST-CryptoFox

Đặt $V_n(2^m)$ là không gian vector n chiều trên trường $\mathbb{F}_{2^m}$, $\boxplus$ là phép cộng trên vành $\mathbb{Z}_{2^{32}}$ (modulo 2^{32}), $\oplus$ là phép cộng trên $V_n(2)$ (phép XOR).

Đặt $\psi : V_{32}(2) \to \mathbb{Z}_{2^{32}}$ là hàm biến đổi vector 32 bit thành số nguyên 32 bit.

Công thức của hàm ψ là

$$\psi(\beta) = \bar{\beta} = \sum_{i=1}^{32} \beta_i 2^{32-i}$$

với $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{32}) \in V_{32}(2)$ và $\bar{\beta} \in \mathbb{Z}_{2^{32}}$.

Trường $\mathbb{F}_{2^8}$ dùng đa thức tối giản $1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^8$ với nghiệm θ. Phần tử trên $\mathbb{F}_{2^8}$ được viết dưới dạng vector $V_8(2)$.

GOST-CryptoFox dùng 32 vòng, độ dài khối là 64 bit và độ dài khóa là 256 bit.

Ngoài ra, trong thuật toán sử dụng:

- các hoán vị $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ trên tập $\{1, 2, \ldots, 8\}$ để chỉ định khóa con cho từng vòng
- các hoán vị 8 bit s_1, s_2, s_3, s_4 là các S-box của thuật toán

Thuật toán sinh khóa con

Khóa đầu vào K có 256 bit.

- Khóa K đầu tiên được chia thành 8 đoạn 32 bit, $K = K_1 \| K_2 \| \ldots \| K_8$. Như vậy $K \in V_{256}(2)$, $K_i \in V_{32}(2)$ với $1 \leqslant i \leqslant 8$
- Ở các vòng 1–8, sử dụng hoán vị π_1 để chỉ định khóa con, cụ thể là ở vòng thứ i sẽ dùng khóa $k_i = K_{\pi_1(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant 8$
- Ở các vòng 9–16, sử dụng hoán vị π_2 để chỉ định khóa con, cụ thể là ở vòng thứ $i + 8$ sẽ dùng khóa con $k_{i+8} = K_{\pi_2(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant 8$
- Ở các vòng 17–24, sử dụng hoán vị π_3 để chỉ định khóa con, cụ thể là ở vòng thứ $i + 16$ sẽ dùng khóa con $k_{i+16} = K_{\pi_3(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant 8$
- Ở các vòng 25–32, sử dụng hoán vị π_4 để chỉ định khóa con, cụ thể là ở vòng thứ $i + 24$ sẽ dùng khóa con $k_{i+24} = K_{\pi_4(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant 8$

Khi đó các khóa con cho 32 vòng là $k_1, k_2, \ldots, k_{32}$.

Thuật toán mã hóa

GOST-CryptoFox 2024 dựa trên mô hình Feistel. Round function $f_k : V_{64}(2) \to V_{64}(2)$ với khóa $k \in V_{32}(2)$:

$$f_k : (\alpha_1, \alpha_2) \to (\alpha_2, \alpha_1 \oplus g_k(\alpha_2, k)), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in V_{32}(2)$$

với $g_k : V_{32}(2) \to V_{32}(2)$ xác định bởi

$$g_k : \alpha \to h(S(\psi^{-1}(\psi(\alpha) \boxplus \psi(k)))),$$

trong đó:

- h là ánh xạ tuyến tính trên $V_{32}(2)$ xác định bởi ma trận 4×4 là $\mathbf{H}$ trên $\mathbb{F}_{2^8}$,

$$h(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(4)}) = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(4)})\mathbf{H}, \quad \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(4)} \in \mathbb{F}_{2^8},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \theta & \theta \oplus 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta & \theta \oplus 1 & 1 \\ 1 & 1 & \theta & \theta \oplus 1 \\ \theta \oplus 1 & 1 & 1 & \theta \end{pmatrix},$$

- S-box $S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ gồm 4 S-box con theo quy tắc

$$S(\beta) = (s_1(\beta^{(1)}), \ldots, s_4(\beta^{(4)})), \quad \beta = (\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(4)}) \in V_4(2^8),$$

nghĩa là khi đó:

- hai vector 32 bit α và k sẽ được chuyển thành số nguyên 32 bit và cộng modulo 2^{32}, kết quả sau đó được chuyển lại thành vector 32 bit

$$\lambda = \psi^{-1}(\psi(\alpha) \boxplus \psi(k));$$

- vector 32 bit λ được chia thành 4 đoạn $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(4)}$ là các phần tử $\mathbb{F}_{2^8}$ và biểu diễn $\lambda = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(4)})$ là không gian 4 chiều $V_4(2^8)$. Sau đó tính $\beta = \lambda\mathbf{H}$;
- vector 32 bit β được chia thành 4 vector 8 bit là $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(4)}$. Sau đó mỗi vector $\beta^{(i)}$ đi qua S-box con s_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Bốn kết quả được ghép lại nhau thành $S(\beta)$.

Mã hóa là hàm $b_K : V_{64}(2) \to V_{64}(2)$ định nghĩa bởi phương trình:

$$b_K(\alpha) = g_{k_3 2} g_{k_3 1} \ldots g_{k_2} g_{k_1}(\alpha), \quad \alpha \in V_{64}(2)$$

Chương 20

Olympiad

20.1 Ôn thi ngày 20/11/2023

Toán tử tuyến tính

Toán tử tuyến tính là một ánh xạ

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Nếu A là một ma trận cỡ $m \times n$ thì đây là một ánh xạ tuyến tính với phép nhân ma trận với vector $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Ở đây $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ và $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

Định nghĩa 1. Hạt nhân

Hạt nhân của ánh xạ tuyến tính A là tập hợp nghiệm của hệ thuần nhất và được ký hiệu là $\ker(A)$. Nói cách khác

$$\ker(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \tag{20.1}$$

Định nghĩa 2. Ảnh

Ảnh của ánh xạ tuyến tính A là tập hợp tất cả giá trị có thể của phép nhân ma trận và được ký hiệu là $\mathrm{im}(A)$. Nói cách khác

$$\mathrm{im}(A) = \{A \cdot \boldsymbol{x} : \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \tag{20.2}$$

Tính chất đối với ánh xạ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{im}\, A) = n$.

Trị riêng và vector riêng

Định nghĩa 3. Trị riêng, vector riêng

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất biểu diễn bởi phép nhân

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$$

Giá trị λ khiến phương trình có nghiệm không tầm thường được gọi là **trị riêng** (eigenvalue) của ánh xạ tuyến tính.

Vector $\boldsymbol{x}$ là cơ sở của không gian vector nghiệm khi đó được gọi là **vector riêng** (eigenvector) ứng với trị riêng λ.

Lưu ý rằng có thể có nhiều vector riêng tương ứng với một trị riêng.

Để tìm trị riêng ta giải phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0$ và tìm tất cả nghiệm thực λ của phương trình.

Sau đó ta thế từng λ vào hệ $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ và tìm cơ sở của không gian nghiệm. Các vector trong cơ sở là vector riêng tương ứng với λ đó.

Một số tính chất của trị riêng và vector riêng (giả sử rằng đối với ma trận A cỡ $n \times n$ thì phương trình đặc trưng có đầy đủ n nghiệm thực).

1. $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$
2. $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Tính chất liên quan đến rank và trace:

1. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$
2. $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$

Bài tập

Bài 1. Cho vector cột $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Đặt $A = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}^T$. Tìm spa A.

Các cột của A có dạng $\boldsymbol{v} \cdot v_1$, $\boldsymbol{v} \cdot v_2$, ..., $\boldsymbol{v} \cdot v_n$. Như vậy các cột đều tỉ lệ với cột đầu nên $\operatorname{rank} A = 1$.

Suy ra $\dim \ker A = n - 1$ và do đó $\lambda = 0$ là nghiệm bậc $n - 1$ trong phương trình đặc trưng.

Như vậy phương trình đặc trưng còn một nghiệm $\lambda \neq 0$.

Do $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}^T)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$.

Đặt $\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{x} = \alpha$ thì $\alpha\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{x}$. Suy ra $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ và do đó $\alpha = \lambda = \|\boldsymbol{v}\|^2$.

Vậy spa $A = \{\|\boldsymbol{v}\|^2, 0, 0, \ldots, 0\}$.

Bài 3. Cho ma trận $A_{3\times3}$. Biết rằng $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^{-1} = 0$ và $\det A = 1$. Chứng minh rằng $A^3 = I$.

Phương trình đặc trưng có dạng $P_3(\lambda) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$.

Theo tính chất trên thì $a_2 = \sum \lambda = \operatorname{tr} A = 0$.

Do λ là trị riêng nên $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Do A khả nghịch nên $\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}$.

Nghĩa là $\dfrac{1}{\lambda}$ là trị riêng của ma trận A^{-1}. Suy ra $\dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_3} = \operatorname{tr} A^{-1} = 0$.

Từ đó suy ra $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0$.

Cuối cùng $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$.

Vậy phương trình đặc trưng là $P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 1$. Theo định lý Cayley-Hamilton thì $P_3(A) = -A^3 + I = 0$, hay $A^3 = I$.

Bài 4. Cho ma trận $A_{n\times n}$, $A_{ij} \geqslant 0$. Giả sử ma trận có đủ n trị riêng thực. Chứng minh rằng $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k \geqslant 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Ta thấy rằng với $k = 1$ thì $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{tr}(A) \geqslant 0$.

Vì λ_i là thỏa phương trình $A\boldsymbol{x} = \lambda_i\boldsymbol{x}$ nên nhân hai vế cho A ta có $A \cdot A\boldsymbol{x} = A \cdot \lambda_i\boldsymbol{x}$. Tương đương với $A^2\boldsymbol{x} = \lambda_i(A\boldsymbol{x}) = \lambda_i^2\boldsymbol{x}$.

Nói cách khác, λ_i^2 là trị riêng của ma trận A^2. Thực hiện tương tự ta có λ_i^k là trị riêng của ma trận A^k.

Do đó $\lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k = \operatorname{tr}(A^k) \geqslant 0$.

Bài 5. Cho ma trận A khả nghịch. X là ma trận sao cho $AX + XA = 0$. Chứng minh rằng $\operatorname{tr} X = 0$.

Nhân bên trái hai vế cho A^{-1} ta có $X + A^{-1}XA = 0$. Ta biết rằng $A^{-1}XA$ là ma trận tương đương ma trận X nên $\operatorname{tr}(A^{-1}XA) = \operatorname{tr} X$.

Suy ra $\operatorname{tr} X + \operatorname{tr} X = \operatorname{tr} 0 = 0$. Từ đây có $\operatorname{tr} X = 0$.

20.2 RUDN Olympiad 2023

Lần đầu tiên mình được tham dự thi toán đồng đội theo hình thức MathBoy (trận chiến toán).

Trong cách thi này, mỗi đội có 3 vị trí: người thuyết trình (докладчик), người phản biện (оппонент) và người giám sát (наблюдатель).

Ở mỗi vòng sẽ có 3 đội thi với nhau. Mỗi đội sẽ có 1 vị trí tương ứng với 3 vị trí trên. Sau đây là ví dụ

Ở mỗi vòng, đội đóng vai trò người thuyết trình lên bảng ghi bài giải trong thời gian cho phép và thuyết trình về bài giải của đội mình. Đội phản biện có nhiệm vụ phản biện bài thuyết trình đó. Đội giám sát, dựa trên bài thuyết trình cũng như phản biện mà ghi chép lại các lỗi, chỗ khó hiểu, ... và trình lên cho giám khảo.

	Đội 1	Đội 2	Đội 3
Vòng 1	О	Д	Н
Vòng 2	Н	О	Д
Vòng 3	Д	Н	О

Ngoài ra, đội thuyết trình trước đó phải trình bài giải viết tay cho giám khảo chấm trước khi lên thuyết trình.

Ở đây có rất nhiều câu chuyện hack não đã xảy ra. Lúc mình thi vòng 1, câu hỏi quá khó nên đội thuyết trình chỉ viết được một ít. Đồng nghĩa việc đội phản biện cũng như đội giám sát ... thất nghiệp, không có gì để nói.

Đối với vòng 2, trận chiến cân bằng hơn, đội mình làm việc giám sát. Dựa trên bài giải của đội thuyết trình, chúng mình thấy những trường hợp chưa được xét tới và có thể bị sai, do đó cả ba đội đều có điểm (đội thuyết trình có nhiều điểm nhất vì các bạn giải hơn 1 nửa rồi).

Đối với vòng 3, đội mình thuyết trình. Đội mình clear bài đó nên giành điểm tuyệt đối cho phần thuyết trình. Tuy nhiên các bạn phản biện cũng không vừa, vẫn cố gắng bắt một số lỗi do trình bày quá cô đọng. Kết quả là đội mình (thuyết trình) full điểm cho vòng 3, đội phản biện được 3 điểm.

Chương 21

Intro to Math-Crypto

Quyển **An Introduction to Mathematical Cryptography** của Hoffstein [8] (lấy source từ 1 repo khá cũ đã đóng bụi của mình).

Lúc viết repo kia mình viết lời giải bằng tiếng Anh. Bây giờ chép lại qua đây lười dịch ra tiếng Việt :D

Chapter 2. Discrete Logarithms and Diffie–Hellman

2.3. Let g be a primitive root of $\mathbb{F}_p$.

(a) Suppose that $x = a$ and $x = b$ are both integer solutions to the congruence $g^x \equiv h \pmod{p}$. Prove that $a \equiv b \pmod{p-1}$. Explain why this implies that the map (2.1) on page 64 is well-defined

(b) Prove that $\log_g(h_1 h_2) = \log_g(h_1) + \log_g(h_2)$ for all $h_1, h_2 \in \mathbb{F}_p^*$

(c) Prove that $\log_g(h^n) = n \log_g(h)$ for all $h \in \mathbb{F}_p^*$ and $n \in \mathbb{Z}$

Chứng minh. Các tính chất cơ bản của hàm Euler.

(a) Cả a and b là nghiệm của đồng dư $g^x \equiv h \pmod{p}$ nên $g^a \equiv h \pmod{p}$ và $g^b \equiv h \pmod{p}$.
Suy ra ta có $g^{-b} \equiv h^{-1} \pmod{p}$. Nhân kết quả với đồng dư đầu $g^a g^{-b} \equiv hh^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$, hay $g^{a-b} \equiv 1 \pmod{p}$.
Do g là primitive root of $\mathbb{F}_p$ tên ta có $\phi(p)|(a-b)$, tương đương với $(p-1)|(a-b)$.
Như vậy $a - b \equiv 0 \pmod{p-1}$ hay $a \equiv b \pmod{p-1}$ (đpcm).

(b) Giả sử $h_1 \equiv g^{x_1} \pmod{p}$ và $h_2 \equiv g^{x_2} \pmod{p}$.
Suy ra $x_1 = \log_g h_1$ và $x_2 = \log_g h_2$ (1).
Do $h_1 h_2 \equiv g^{x_1 + x_2} \pmod{p}$ nên $x_1 + x_2 = \log_g(h_1 h_2)$ (2).
Từ (1) và (2), $\log_g h_1 + \log_g h_2 = \log_g(h_1 h_2)$.

(c) tương tự (b).

□

2.5. Let p be an odd prime and let g be a primitive root modulo p. Prove that a has a square root modulo p if and only if its discrete logarithm $\log_g(a)$ modulo $p-1$ is even.

Chứng minh. Ta có $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Điều kiện đủ. Nếu a là số chính phương modulo p thì tồn tại số b sao cho $b \equiv a^2 \pmod{p}$.

Suy ra $\log_g a = \log_g(b^2) = 2\log_g b \pmod{p-1}$, như vậy $\log_g a$ chẵn.

Điều kiện cần. Nếu $\log_g a$ modulo $p-1$ chẵn.

Điều này xảy ra khi $\log_g a = 2\log_g b \pmod{p-1}$ với số $b \in \mathbb{F}_p$ nào đó.

Suy ra $\log_g a = \log_g(b^2) \pmod{p-1}$, hay $a \equiv b^2 \pmod{p-1}$.

Như vậy a có căn bậc hai modulo $p-1$. □

2.10. The exercise describes a public key cryptosystem that requires Bob and Alice to exchange several messages. We illustrate the system with an example.

Bob and Alice fix a publicly known prime $p = 32611$, and all of other numbers used are private. Alice takes her message $m = 11111$, chooses a random exponent $a = 3589$, and sends the number $u = m^a \pmod{p} = 15950$ to Bob. Bob chooses a random exponent $b = 4037$ and sends $v = u^b \pmod{p} = 15422$ back to Alice. Alice then computes $w = v^{15619} \equiv 27257 \pmod{32611}$ and sends $w = 27257$ to Bob. Finally, Bob computes $w^{31883} \pmod{32611}$ and recovers the value 11111 of Alice's message.

(a) Explain why this algorithm works. In particular, Alice uses the numbers $a = 3589$ and 15619 as exponents. How are they related? Similarly, how are Bob's exponents $b = 4037$ and 31883 related?

(b) Formulate a general version of this cryptosystem, i.e., using variables, and show how it works in general.

(c) What is the disadvantage of this cryptosystem over Elgamal? (*Hint.* How many times must Alice and Bob exchange data?)

(d) Are there any advantages of this cryptosystem over Elgamal? In particular, can Eve break it if she can solve the discrete logarithm problem? Can Eve break it if she can solve the Diffie-Hellman problem?

Chứng minh. (a) We have $3589 \cdot 15619 \equiv 4073 \cdot 31883 \equiv 1 \pmod{p-1}$

(b) Alice chooses a and a' satisfy that $aa' \equiv 1 \pmod{p-1}$

Bob chooses b and b' satisfy that $bb' \equiv 1 \pmod{p-1}$

From this, we have $aa' = k(p-1)+1$ and $bb' = l(p-1)+1$

$\Rightarrow v \equiv u^b \equiv (m^a)^b \equiv m^{ab} \pmod{p}$

$\Rightarrow w \equiv v^{a'} \equiv (m^{ab})^{a'} \equiv m^{aa'b} \pmod{p}$

$\Rightarrow w^{b'} \equiv m^{aa'bb'} \equiv m^{[k(p-1)+1]x[l(p-1)+1]} \equiv m^{D(p-1)+1} \equiv m \pmod{p}$ □

2.11. The group S_3 consists of the following six distinct elements

$$e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$$

where e is the identity element and multiplication is performed using the rules

$$\sigma^3 = e, \quad \tau^2 = e, \quad \tau\sigma = \sigma^2\tau$$

Compute the following values in the group S_3:

(a) $\tau\sigma^2$ (b) $\tau(\sigma\tau)$ (c) $(\sigma\tau)(\sigma\tau)$ (d) $(\sigma\tau)(\sigma^2\tau)$

Is S_3 a commutative group?

Chứng minh. (a) $\tau\sigma^2 = \tau\sigma\sigma = \sigma^2\tau\sigma = \sigma\sigma^2\tau = \sigma^3\tau = e\tau = \tau$

(b) $\tau(\sigma\tau) = (\tau\sigma)\tau = \sigma^2\tau\tau = \sigma^2\tau^2 = \sigma^2 e = \sigma^2$

(c) $(\sigma\tau)(\sigma\tau) = \sigma(\tau\sigma)\tau = \sigma(\sigma^2\tau)\tau = \sigma^3\tau^2 = ee = e$

(d) $(\sigma\tau)(\sigma^2\tau) = (\sigma\tau)(\tau\sigma) = \sigma\tau^2\sigma = \sigma e\sigma = \sigma^2$

S_3 is not a commutative group because:

$\sigma\tau = \sigma\tau$ but $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ (2 distinct elements in S_3) □

2.12. Let G be a group, let $d \geq 1$ be an integer, and define a subset of G by

$$G[d] = \{g \in G : g^d = e\}$$

(a) Prove that if g is in $G[d]$, then g^{-1} is in $G[d]$
(b) Suppose that G is commutative. Prove that is g_1 and g_2 are in $G[d]$, then their product $g_1 \star g_2$ is in $G[d]$
(c) Deduce that if G is commutative, then $G[d]$ is a group.
(d) Show by an example that is G is not a commutative group, then $G[d]$ need not be a group. (*Hint.* Use Exercise 2.11.)

Chứng minh. (a) Because $g \star g^{-1} = e \Rightarrow g \star e \star g^{-1} = e \Rightarrow g \star g \star g^{-1} \star g^{-1} = e \Rightarrow g^2 \star (g^{-1})^2 = e$.

Do more $d-2$ times and we get $g^d \star (g^{-1})^d = e \Rightarrow e \star (g^{-1})^2 = e \Rightarrow (g^{-1})^2 = e \Rightarrow g^{-1} \in G[d]$.

(b) We have $g_1^d = e$ and $g_2^d = e$. Because G is commutative, $g_1^d \star g_2^d = (g_1 \star g_2)^d \Rightarrow (g_1 \star g_2)^d = e \star e = e \Rightarrow g_1 \star g_2 \in G[d]$.

(c) From (b), we have $\forall g_1, g_2 \in G[d]$, then $g_1 \star g_2 \in G[d]$.

We easily see that $e \in G[d]$, so it is identity element of $G[d] \Rightarrow$ identity law.

From (a) we have inverse law.

With $a, b, c \in G[d]$, which means $a^d = b^d = c^d = e$, then $b^d c^d = (bc)^d$ and

$$a^d \star (b^d \star c^d) = a^d \star (bc)^d = (a \star b \star c)^d = (a \star b)^d \star c^d = (a^d \star b^d) \star c^d$$

$\Rightarrow$ associative law.

So, $G[d]$ is a group.

(d) Using exercise 2.11, $S_3[2] = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2, \tau, e\}$. Because $(\sigma\tau)\tau = \sigma\tau^2 = \sigma \notin S_3[2]$, $S_3[2]$ is not a group. □

2.13. Let G and H be groups. A function $\phi : G \to H$ is called a (*group*) *homomorphism* if it satisfies

$$\phi(g_1 \star g_2) = \phi(g_1) \star \phi(g_2) \text{ for all } g_1, g_2 \in G$$

(Note that the product $g_1 \star g_2$ uses the group law in the group G, while the product $\phi(g_1) \star \phi(g_2)$ uses the group law in the group H.)

(a) Let e_G be the identity element of G, let e_H be identity element of H, and the $g \in G$. Prove that

$$\phi(e_G) = e_H \qquad \text{and} \qquad \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$$

(b) Let G be a commutative group. Prove that the map $\phi : G \to G$ defined by $\phi(g) = g^2$ is a homomorphism. Give an example of a noncommutative group for which this map is not a homomorphism.

(c) Same question as (b) for the map $\phi(g) = g^{-1}$

Chứng minh. (a) $\forall g \in G$: $g = g \star e = e \star g \Rightarrow \phi(g) = \phi(g \star e_G) = \phi(e_G \star g) \Rightarrow \phi(g) = \phi(g) \star \phi(e_G) = \phi(e_G) \star \phi(g)$.

Because $\phi(g) \in H$, $\phi(e_G)$ is identity element of $H \Leftrightarrow \phi(e_G) = e_H$

In group G, $g \star g^{-1} = e_G \Rightarrow \phi(g \star g^{-1}) = \phi(e_G) \Rightarrow \phi(g) \star \phi(g^{-1}) = \phi(e_G) \Rightarrow \phi(g) \star \phi(g^{-1}) = e_H \Rightarrow \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$

(b) $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^2$. For all $g_1, g_2 \in G$, $\phi(g_1 \star g_2) = (g_1 \star g_2)^2 = g_1^2 \star g_2^2$ (because G is commutative).

And we have $g_1^2 \star g_2^2 = \phi(g_1) \star \phi(g_2)$, which means $\phi(g_1 \star g_2) = \phi(g_1) \star \phi(g_2)$ $\Rightarrow G$ is homomorphism.

Now we consider group in Exercise 2.11 and the map $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^2$, then $\phi(e) = e^2 = e$, $\phi(\sigma) = \sigma^2$, $\phi(\tau) = \tau^2 = e$, $\phi(\sigma\tau) = (\sigma\tau)^2 = e$

We have $\phi(\sigma\tau) = e \neq \sigma^2 = \phi(\sigma)\phi(\tau)$. Therefore, G is not homomorphism.

(c) $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^{-1}$. For all $g_1, g_2 \in G$, $g_1 g_1^{-1} = e$, $g_2 g_2^{-1} = e \Rightarrow g_1 g_1^{-1} g_2 g_2^{-1} = e$, but G is commutative $\Rightarrow (g_1 g_2)(g_1^{-1} g_2^{-1}) = e \Rightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} = (g_1 g_2)^{-1} \Rightarrow \phi(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1} = \phi(g_1)\phi(g_2) \Rightarrow G$ is homomorphism.

Now we consider group in Exercise 2.11 and the map $\phi : G \to G$, $\phi(g) = g^{-1}$. We have

$$\sigma\sigma^2 = e = \sigma^2\sigma = e, \quad \tau^2 = e, \quad (\sigma\tau)^2 = e, \quad (\sigma^2\tau)^2 = e$$

$\Rightarrow \phi(\sigma\tau) = \sigma\tau$ and $\phi(\sigma) = \sigma^2$, $\phi(\tau) = \tau \Rightarrow \phi(\sigma\tau) = \sigma\tau \neq \sigma^2\tau = \phi(\sigma)\phi(\tau)$ $\Rightarrow G$ is not homomorphism. □

2.14. Prove that each of the following maps is a group homomophism.

(a) The map $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ that sends $a \in Z$ to $a \bmod N$ in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

For all $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= (ab) \pmod N \\ &= (a \bmod N)(b \bmod N) \pmod N \\ &= \phi(a)\phi(b)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ homomorphism.

(b) The map $\phi : \mathbb{R}^* \to GL_2(\mathbb{R})$ defined by $\phi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$.

For all $a, b \in \mathbb{R}^*$, $\phi(ab) = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & (ab)^{-1} \end{pmatrix}$

And we have

$$\phi(a)\phi(b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & a^{-1}b^{-1} \end{pmatrix}$$

It is clear that $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, so $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \Rightarrow$ homomorphism.

(c) The discrete logarithm map $\log_g : \mathbb{F}_p^* \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, where g is a primitive root modulo p.

We choose map $\phi(a) = x$ satisfying $g^x \equiv a \pmod p$.

Then for all $a, b \in \mathbb{F}_p^*$, $\phi(a) = x$ (or $g^x \equiv a \pmod p$) and $\phi(b) = y$ (or $g^y \equiv b \pmod p$).

$\Rightarrow \phi(a)\phi(b) = x + y$ because $x, y \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, whose rule of group is addition modulo $p - 1$.

And we have $g^{x+y} \equiv ab \pmod p \Rightarrow \phi(ab) = x + y \Rightarrow \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) \Rightarrow$ homomorphism.

2.15.

(a) Prove that $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ is a group.

If A and B is 2 matrices in $GL_2(\mathbb{F}_p)$, then AB also in $GL_2(\mathbb{F}_p)$ (because derminant will be modulo 2).

Identity element is $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ because $AE = EA = A$ for all matrix $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$.

For all $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$, because $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ has inverse in $GL_2(\mathbb{F}_p)$.

For all $A, B, C \in GL_2(\mathbb{F}_p)$, we have $(AB)C = A(BC)$ (associative law for matrix multiplication).

Therefore, $GL_2(\mathbb{F}_p)$ is a group.

(b) Show that $GL_2(\mathbb{F}_p)$ is a noncommutative group for every prime p.

Suppose we have $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $A, B \in GL_2(\mathbb{F}_p)$.

Top left element of product AB is $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) \pmod p$.

Top left element of product BA is $(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) \pmod p$.

If we choose $a_{12} \not\equiv b_{21}^{-1}a_{21}b_{21} \pmod p$, then $AB \neq BA$, which means noncommutative.

(c) Describe $GL_2(\mathbb{F}_p)$ completely. That is, list its elements and describe the multiplication table.

Firstly we list all elements, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplication table:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	A_3	A_5	A_1	A_6	A_2	A_4
A_2	A_4	A_6	A_2	A_5	A_1	A_3
A_3	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_4	A_2	A_1	A_4	A_3	A_6	A_5
A_5	A_6	A_4	A_5	A_2	A_3	A_1
A_6	A_5	A_3	A_6	A_1	A_4	A_2

(d) How many elements are there in the group $GL_2(\mathbb{F}_p)$?

First row $\boldsymbol{u}_1$ is any vector but $(0, 0)$. We have $p^2 - 1$ ways.

Second row $\boldsymbol{u}_2$ is any vector but multiple of first vector. We have $p^2 - p$ ways (remove $0 \cdot \boldsymbol{u}_1$ to $(p-1) \cdot \boldsymbol{u}_1$).

$\Rightarrow$ There are $(p^2 - 1)(p^2 - p)$ elements.

(e) How many elements are there in the group $GL_n(\mathbb{F}_p)$?

Similar to (d), we need first row $\boldsymbol{u}_1$ is any vector but $(0, 0)$. We have $p^n - 1$ ways.

Second vector $\boldsymbol{u}_2$ is any vector but a multiple of first row. We have $p^n - p$ ways.

Third vector $\boldsymbol{u}_3$ is any vector but a linear combination of $\boldsymbol{u}_1$ and $\boldsymbol{u}_2$. The number of $a_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{u}_2$ is the number of pair (a_1, a_2) and there is p^2 posibilities $(a_1, a_2 \in \mathbb{F}_p)$. So third vector has $p^n - p^2$ ways.

In general, n-th vector is any vector but a linear combination of u_1, u_2, ..., u_{n-1}, so there is $p^n - p^{n-1}$ ways.

$\Rightarrow$ There are $(p^n - 1)(p^n - p)...(p^n - p^{n-1})$ elements.

2.18. Solve each of the following simultaneous systems of congruences (or explain why no solutions exists).

(a) $x \equiv 3 \pmod 7$ and $x \equiv 4 \pmod 9$

We have $N = 7 \times 9 = 63$, $T_1 = 63/7 = 9$, $T_1^{-1} \bmod 7 = 4$, $T_2 = 63/9 = 7$, $T_2^{-1} \bmod 9 = 4$

$\Rightarrow x \equiv 3 \times 9 \times 4 + 4 \times 7 \times 4 \equiv 220 \equiv 31 \pmod{63}$

(b) $x \equiv 137 \pmod{423}$ and $x \equiv 87 \pmod{191}$

We have $N = 423 \times 191 = 90793$, $T_1 = N/423 = 191$, $T_1^{-1} \bmod 423 = 392$, $T_2 = N/191 = 423$, $T_2^{-1} \bmod 191 = 14$

$\Rightarrow x \equiv 137 \times 191 \times 392 + 87 \times 423 \times 14 \equiv 27209 \pmod N$

(c) Cannot calculate because $gcd(451, 697) = 41 \neq 1$.

(d) $x \equiv 5 \pmod 9$, $x \equiv 6 \pmod{10}$ and $x \equiv 7 \pmod{11}$

We have $N = 9 \times 10 \times 11 = 990$, $T_1 = N/9 = 110$, $T_1^{-1} \bmod 9 = 5$, $T_2 = N/10 = 99$, $T_2^{-1} \bmod 10 = 9$, $T_3 = N/11 = 90$, $T_3^{-1} \bmod 11 = 6$

$\Rightarrow x \equiv 5 \times 110 \times 5 + 6 \times 99 \times 9 + 7 \times 90 \times 6 \equiv 986 \pmod N$

(e) $x \equiv 37 \pmod{43}$, $x \equiv 22 \pmod{49}$ and $x \equiv 18 \pmod{71}$

We have $N = 43 \times 49 \times 71 = 149597$, $T_1 = N/43 = 3479$, $T_1^{-1} \bmod 43 = 32$, $T_2 = N/49 = 3053$, $T_2^{-1} \bmod 49 = 36$, $T_3 = N/71 = 2107$, $T_3^{-1} \bmod 71 = 37$

$\Rightarrow x \equiv 37 \times 3479 \times 32 + 22 \times 3053 \times 36 + 18 \times 2107 \times 37 \equiv 11733 \pmod N$

2.19. Solve the 1700-year-old Chinese remainder problem from the *Sun Tzu Suan Ching* stated on page 84.

$x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 5$ and $x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 23 \pmod{105}$

2.21.

(a) Let a, b, c be positive integers and suppose that

$$a \mid c, \quad b \mid c, \quad \text{and} \quad gcd(a, b) = 1$$

Prove that $ab \mid c$

Because $a \mid c \Leftrightarrow c = ka$, $(k \in \mathbb{Z})$ and $b \mid c \Leftrightarrow c = lb$ $(l \in \mathbb{Z}) \Rightarrow ka = lb$.

However $gcd(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid l \Leftrightarrow l = ma, m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow c = lb = lma \Rightarrow ab \mid c$.

(b) Let $x = c$ and $x = c'$ be two solutions to the system of simultaneous congruences in the Chinese remainder theorem. Prove that

$$c \equiv c' \pmod{m_1 m_2 ... m_k}$$

If $c \equiv c' (\equiv a_i) \pmod{m)_i}$, then $c \equiv c' \pmod{m_1 m_2 ... m_k}$.

2.23. Find square roots modulo the following composite moduli

(a) 215

(b) 2654

(c) 1712, 2477, 3187, 1002

(d) $(\pm 1 \cdot 317 \cdot 1 \pm 1 \cdot 124 \cdot 3 \pm 10 \cdot 28 \cdot 10) \pmod{868}$

2.24. Let p be an odd prime, let a be an integer that is not divisible by p, and let b is a square root of a modulo p. This exercise investigates the square root of a modulo powers of p

(a) Prove that for some choise of k, the number $b + kp$ is a square root of a modulo p^2, i.e., $(b + kp)^2 \equiv a \pmod{p^2}$

(b) The number $b = 537$ is a square root of $a = 476$ modulo the prime $p = 1291$. Use the idea in (a) to compute a square root of 476 modulo p^2

(c) Suppose that b is a square root of a modulo p^n. Prove that for some choice of j, the number $b + jp^n$ is a square root of a modulo p^{n+1}

(d) Explain why (c) implies the following statements: If p is an odd prime and if a has a square root modulo p, then a has a square root modulo p^n for every power of p. Is this true if $p = 2$?

(e) Use the method in (c) to compute the square root of 3 modulo 13^3, given that $9^2 \equiv 3 \pmod{13}$

Chứng minh. (a) Let $f(b_n) = b_n^2 - a \pmod{p^n}$, with $b_1 = b \Rightarrow f(b_1) = b^2 - a \equiv 0 \pmod{p}$
We need to find b_2, $f(b_2) = b_2^2 - a \equiv 0 \pmod{p^2}$
Which means, $f(b_1 + kp) = (b_1 + kp)^2 - a = b_1^2 + 2b_1kp + (kp)^2 - a \equiv 0 \pmod{p^2}$
$\Leftrightarrow 2b_1k \equiv -(b_1^2 - a)/p \pmod{p^2}$ (because $b_1^2 - a \equiv 0 \pmod{p}$)
And because $2b_1 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, then exist k satisfying the equation

(b) $k = -(b^2 - a)/p \times (2b)^-1 \pmod{p^2}$

(c) We prove by induction that for each $n \geq 1$, there is a $b_n \in \mathbb{Z}$ such that

$$\begin{aligned} f(b_n) = b_n^2 - a &\equiv 0 \pmod{p^n} \\ b_n &= b \pmod{p^n} \end{aligned}$$

The case $n = 1$ is trivial, using $b_1 = b$. If the inductive hypothesis holds for n, which means:

$$\begin{aligned} f(b_n) = b_n^2 - a &\equiv 0 \pmod{p^n} \\ b_n &= b \pmod{p^n} \end{aligned}$$

With b_{n+1}, $f(b_{n+1}) = b_{n+1}^2 - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$. We write $b_{n+1} = b_n + p^n t_n$
$\Rightarrow f(b_{n+1}) = b_n^2 + 2b_n p^n t_n + p^{2n} t_n^2 - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$
$\Rightarrow b_n^2 + 2b_n p^n t_n - a \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$ (because $2n \geq n + 1$)

$\Rightarrow 2b_n t_n \equiv -(b_n^2 - a)/p^n \pmod{p^{n+1}}$ (from (2)).

Therefore, exists solution for t_n because we assumed that $2b_n \equiv 0 \pmod{p^n}$

$\Rightarrow f(b_{n+1}) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$, and $b_{n+1} \equiv b_n \pmod{p^n}$

This proof is used for $b + jp^n$ modulo p^n, not for p^{n+1}

(d) Using induction we get that. If $p = 2$, then any integers is right □

2.31. Let R and S be rings. A functions $\phi : R \to S$ is called a (*ring*) *homomorphism* if it satisfies

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$$

and

$$\phi(a \star b) = \phi(a) \star \phi(b)$$

for all $a, b \in R$.

(a) Let 0_R, 0_S, 1_R and 1_S denote the additive and multiplicative identities of R and S, respectively. Prove that

$$\phi(0_R) = 0_S,\ \phi(1_R) = 1_S,\ \phi(-a) = -\phi(a),\ \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$$

where the last equality holds for those $a \in R$ that have a multiplicative inverse.

(b) Let p be a prime, and let R be a ring with the property that $pa = 0$ for every $a \in R$. (Here pa means to add a to itself p times.) Prove that the map

$$\phi : R \to R, \quad \phi(a) = a^p$$

is a ring homomorphism. It is called the *Frobenius homomorphism.*

Chứng minh. With $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ and $\phi(a \star b) = \phi(a) \star \phi(b)$ for all $a, b \in R$.

(a) In $R, \forall a \in R : a + 0_R = 0_R + a = a \Rightarrow \phi(a) = \phi(a + 0_R) = \phi(0_R + a) \Rightarrow \phi(a) = \phi(a) + \phi(0_R) = \phi(0_R) + \phi(a)$.

Let $\phi(a) = b \in S$. Hence $b = b + \phi(0_R) = \phi(0_R) + b \Rightarrow \phi(0_R) = 0_S$

In $R, \forall a \in R$, $a \star 1_R = 1_R \star a = a \Rightarrow \phi(a \star 1_R) = \phi(1_R \star a) = \phi(a) \Rightarrow \phi(a) \star \phi(1_R) = \phi(1_R) \star \phi(a) = \phi(a) \Rightarrow \phi(1_R) = 1_S$.

With $\phi(-a) = -\phi(a)$, we have in $R, a + (-a) = (-a) + a = 0_R \Rightarrow \phi(a + (-a)) = \phi((-a) + a) = \phi(0_R) \Rightarrow \phi(a) + \phi(-a) = \phi(-a) + \phi(a) = \phi(0_R) = 0_S \Rightarrow \phi(-a) = -\phi(a)$.

With $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$, we have in $R, a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = 1_R \Rightarrow \phi(a \star a^{-1}) = \phi(a^{-1} \star a) = \phi(1_R) \Rightarrow \phi(a) \star \phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1}) \star \phi(a) = \phi(1_R) = 1_S \Rightarrow \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$.

(b) $\phi : R \to R, \quad \phi(a) = a^p \Rightarrow \phi(a + b) = (a + b)^p = \sum_{i=0} p \binom{p}{i} a^i b^{p-1}$.

And we have $p \mid \binom{p}{i} = \dfrac{p!}{(p-i)!i!}$ (because p is prime) $\Rightarrow 1 \leqslant i \leqslant p-1$: $\binom{p}{i} = 0$ (because $pa = 0$)

$\Rightarrow \phi(a+b) = a^p + b^p = \phi(a) + \phi(b)$ (1)

$\Rightarrow \phi(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \phi(a)\phi(b)$ (2)

From (1) and (2) $\Rightarrow$ ring homomorphism. □

2.32. Prove Proposition 2.41

We have $a_1 \equiv a_2 \pmod{m} \Rightarrow m \mid (a_1 - a_2)$

$\Rightarrow \exists k \in R : a_1 - a_2 = k \star m$

Similarly, $\exists l \in R : b_1 - b_2 = l \star m$

$\Rightarrow a_1 - a_2 + b_1 - b_2 = (k+l) \star m$

$\Leftrightarrow m \mid (a_1 + b_1 - (a_2 + b_2))$

$\Leftrightarrow a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \equiv m$

Similarly for $a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2 \pmod{m}$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 + k \star m \\ b_1 = b_2 + k \star m \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1 \star b_1 = (a_2 + k \star m)(b_2 + k \star m) = a_2 \star b_2 + a_2 \star l \star m + k \star b_2 \star m + k \star l \star m^2$

$\Rightarrow m \mid (a_1 \star b_1 - a_2 \star b_2)$

$\Rightarrow a_1 \star b_1 \equiv a_2 \star b_2 \pmod{m}$

2.33. Prove Proposition 2.43

According to Exercise 2.32, if we have

$$\begin{cases} a' \in \bar{a} \Leftrightarrow a' \equiv a \pmod{m} \\ b' \in \bar{b} \Leftrightarrow b' \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' + b' \equiv a + b \pmod{m} \\ a' \star b' \equiv a \star b \pmod{m} \end{cases}$$

$\Rightarrow a' + b' \in \overline{a+b}$ and $a' \star b' \in \overline{a \star b}$. Hence the set is **closed**

We have $m \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow \forall a \in R, \overline{a} + \overline{m} = \overline{a+m} = \overline{a} = \overline{m+a} = \overline{m} + \overline{a}$

$\Rightarrow$ **identity element** is $\overline{m}$

Also, because R is ring, $m + (-x) \in R, x \in R$

$\forall a \in R, \overline{a} + \overline{m-a} = \overline{a+m-a} = \overline{m} = \overline{m-a} + \overline{a}$

$\Rightarrow \overline{m-a}$ is additive inverse of a

Easily see that $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} + \overline{b+c} = \overline{a+b+c} = \overline{a+b} + \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ **associative**

$\forall a, b \in R, \overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b} + \overline{a} \Rightarrow$ **commutative**

We have $a \star 1 \equiv a \pmod{m} \forall a \in R$

$\Rightarrow \overline{a} \star \overline{1} = \overline{a \star 1} = \overline{a} = \overline{1 \star a} = \overline{1} \star \overline{a}$

$\Rightarrow$ **multiplicative identity** is $\overline{1}$

$\forall a, b, c \in R, a(bc) = (ab)c \pmod{m}$

$\Rightarrow \overline{a} \star (\overline{b} \star \overline{c}) = \overline{a} \star \overline{bc} = \overline{abc} = \overline{ab} \star \overline{c} = (\overline{a} \star \overline{b}) \star \overline{c} \Rightarrow$ **associative**

And $\overline{a} \star \overline{b} = \overline{a \star b} = \overline{b \star a} = \overline{b} \star \overline{a} \Rightarrow$ **commutative**

With $\overline{a} \star (\overline{b} + \overline{b}) = \overline{a} \star \overline{b+c} = \overline{a(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \overline{a} \star \overline{b} + \overline{a} \star \overline{c} \Rightarrow$ **distribute**

Hence, $R/(m)$ is a ring

2.34. Let $\mathbb{F}$ be a field and let **a** and **b** be nonzero polynomials in $\mathbb{F}[x]$

(a) Prove that $deg(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = deg(\mathbf{a}) + deg(\mathbf{b})$

Let $a = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, with $a_i \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow deg(\mathbf{a}) = n$
Let $b = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, with $a_i \in \mathbb{F}[x] \Rightarrow deg(b) = m$

$\Rightarrow deg(a \cdot b) = m + n = deg(a) + deg(b)$

(b) Prove that **a** has a multiplicative inverse in $\mathbb{F}[x]$ if and only if ∋ is in $\mathbb{F}$, i.e., if and only if ∋ is a constant polynomial
With $\mathbf{a} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
Suppose that **a** has multiplicative inverse in $\mathbb{F}[x]$ $\mathbf{b} = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

$$\Rightarrow \mathbf{ab} = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} = 1$$

Which means $a_0 b_0 = 1$, other coefficients is 0, so **a** is constant polynomial

(c) Prove that every nonzero element of $\mathbb{F}[x]$ can be factored into a product of irreducible polynomials. (*Hint.* Use (a), (b) and induction on the degree of the polynomial.)

(d) Let R be ring ing $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Give an example to show tha (a) is false for some polynomials **a** and **b** in $R[x]$
$a = 2x^2 + 3x + 1$, $b = 3x + 2$
$\Rightarrow ab = x^2 + 3x + 2$
$deg(ab) = 2 < 3 = deg(a) + deg(b)$

2.35, 2.36. Programming on Sagemath

2.37. Prove that the polynomial $x^3 + x + 1$ is irreducible in $\mathbb{F}_2[x]$

If $f(x) = x^3 + x + 1$ has any factor rather than 1 and itself, it must have degree less than 3. So we have $0, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x$ but $f(x)$ is not divided by any of them. Hence irreducible

2.38. Programming on Sagemath

2.39. The field $\mathbb{F}_7[x]/(x^2+1)$ is a field with 49 elements, which for the moment we donote by $\mathbb{F}_{49}$

Using example **2.58**, every element in $\mathbb{F}_7[x]/(x^2+1)$ has form $f(x) = a+bx$, so in $\mathbb{F}_{49}$ it has form $a+bi$ (here $i^2 = -1$)

(a) Is $2+5x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? No because $(2+5x)^8 = 1$

(b) Is $2+x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? Yes

(c) Is $1+x$ is a primitive root in $\mathbb{F}_{49}$? No because $(1+x)^{24} = 1$

2.41. Let $\mathbb{F}$ is a finite field.

(a) Prove that there is an integer $m \geq 1$ such that if we add 1 to itself m times,

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ ones}}$$

then we get 0. Note that here 1 and 0 are the multiplicative and additive identity elements of the field $\mathbb{F}$.
Because 1 is element of $\mathbb{F}$, then $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ times}}$ always is an element of $\mathbb{F}$. And $\mathbb{F}$ is finite field, so there is $m \geq 1$ such that $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ times}}$ equals to 0 (1, 1+1, 1+1+1, ... cannot all be different)

(b) Let m be the smallest positive integer with the property described in (a). Prove that m is prime. This prime is called the *characteristic of the field* $\mathbb{F}$
Suppose that m can be factor, so $m = pq$ $(1 < p, q < m) \Rightarrow \underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ times}} = 0$

$$\overbrace{\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{p \text{ times}} + \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{p \text{ times}} + \cdots + \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{p \text{ times}}}^{q \text{ times}}$$

Because $\mathbb{F}$ is a finite field, $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p \text{ times}} = a \in \mathbb{F}$
$\Rightarrow q \cdot a = 0$ ($q > 1$ and a cannot be 0 because m is the smallest number that satisfies $1+1+\cdots+1 = 0$
$\Rightarrow$ contraction $\Rightarrow \mathbb{F}$ cannot be a field.
So m is a prime

Chapter 3

3.4. *Euler's phi function* $\phi(N)$ is the function defined by

$$\phi(N) = |\{0 \leq k < N : \gcd(k, N) = 1\}|$$

$\phi(p) = p - 1$.

Consider the set $\{ai_1, ai_2, \ldots, ai_{\phi(N)}\}$ is the set of numbers which are co-prime with N, which means $\gcd(ai_j, N) = 1$. We prove that those elements are distinct.

Suppose that there are aj and ak, satisfying $aj \equiv ak \pmod{N}$

Because $\gcd(a, N) = 1 \Rightarrow j \equiv k \pmod{N}$. So every element is distinct.

Moreover, if $ai_j \equiv j_k \pmod{N}$, which means $j_k \neq 0$, so the set

$$\{ai_1, \ldots, ai_{\phi(N)}\}$$

is a permutation of the set $\{i_1, \ldots, i_{\phi(N)}\}$. So we have

$$ai_1 \times ai_2 \times \cdots \times ai_{\phi(N)} \equiv i_1 \times i_2 \times \cdots \times i_{\phi(N)} \pmod{N}$$

Therefore $a^{\phi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$

3.5. Properties of Euler's phi function If p and q are distinct primes, how is $\phi(pq)$ related to $\phi(p)$ and $\phi(q)$?
We consider numbers from 1 to pq, there are pq elements

Notice that $iq = jq$ if and only if $i = q$ and $j = p$ because p and q are distinct primes
Next, we subtract the number of divisors having factor p, there are q elements $(1 \times p, 2 \times p, \cdots, q \times p)$
Next, we subtract the number of divisors having factor q, there are p elements $(1 \times q, 2 \times q, \cdots, p \times q)$
Here we get $pq - p - q$ elements, but remember that we have subtracted element pq twice, so we need to add 1
$\Rightarrow \phi(pq) = pq - p - q + 1 = (p - 1)(q - 1) = \phi(p)\phi(q)$ If p is prime, what is the value of $\phi(p^2)$? How about $\phi(p^j)$?
From 1 to p^j there are p^j elements, we subtract the number of divisors having factor p, those are $\{1p, 2p, \cdots, p^{j-1}p\} \Rightarrow p^{j-1}$ numbers
$\Rightarrow \phi(p^j) = p^j - p^{j-1}$ We write numbers from 1 to mn as matrix m rows and n columns

$$\begin{array}{cccc}
0m+1 & 1m+1 & \cdots & (n-1)m+1 \\
0m+2 & 1m+2 & \cdots & (n-1)m+2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0m+m-1 & 1m+m-1 & \cdots & (n-1)m+m-1 \\
0m+m & 1m+m & \cdots & (n-1)m+m
\end{array}$$

With number r that satisfies $\gcd(r, m) = 1$, we get $gcd(km + r, r) = 1$ ($k = \overline{0, n-1}$). Here $km + r$ is all numbers on r-th row, which means there are $\phi(m)$ rows, whose elements coprime with m
On those $\phi(m)$ rows, each row has $\phi(n)$ elements that coprime with n. Hence $\phi(m)\phi(n) = \phi(mn)$ From (b) we get $\phi(p_i) = p_i - 1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \phi(N) &= \phi(p_1)\phi(p_2)\cdots\phi(p_r)\\ &= (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)\\ &= N\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\end{aligned}$$

3.6. Let N, c, and e be positive integers satisfying the conditions $\gcd(N, c) = 1$ and $\gcd(e, \phi(N)) = 1$ Explain how to solve the congruence

$$x^e \equiv c \pmod{N}$$

assuming that you know the value of $\phi(N)$
Because of $\gcd(e, \phi(N)) = 1$, we can find an integers d satisfying that $ed \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ (using Extended Euclidean Algorithm)
$\Rightarrow ed = k\phi(N) + 1$ with $k \in \mathbb{Z}$
And because of $\gcd(N, c) = 1 \Rightarrow \gcd(N, x) = 1$, and

$$c^d = \left(x^e\right)^d = x^{ed} = x^{k\phi(N)+1} = (x^k)^{\phi(N)}x$$

and we have known that $(x^k)^{\phi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$ from Exercise 3.4. Therefore we get

$$c^d \equiv x \pmod{N}$$

, we finish finding solution

3.11. Alice chooses two large primes p and q and she publishes $N = pq$. It is assumed that N is hard to factor. Alice also chooses three random numbers g, r_1, and r_2 modulo N and computes

$$g_1 \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod{N} \qquad \text{and} \qquad g_2 \equiv g^{r_2(q-1)} \pmod{N}$$

Her public key is the triple (N, g_1, g_2) and her private key is the pair of primes (p, q).

Now Bob wants to send the message m to Alice, where m is a number modulo N. He chooses two random integers s_1 and s_2 modulo N and computes

$$c_1 \equiv mg_1^{s_1} \pmod{N} \qquad \text{and} \qquad c_2 \equiv mg_2^{s_2} \pmod{N}$$

Bob sends the ciphertext (c_1, c_2) to Alice.

Decryption is extreamly fast and essy. Alice uses the Chinese remainder theorem to solve the pair of congruences

$$x \equiv c_2 \pmod{p} \qquad \text{and} \qquad x \equiv c_2 \pmod{q}$$

Prove that Alice's solution x is equal to Bob's plaintext m
First we have $c_1 \equiv m g_1^{s_1} \pmod{N} \equiv m g_1^{s_1} \pmod{p} \equiv m \pmod{p}$
(because $g_1^{s_1} = (g_1^{s_1 r_1})^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$)
Similarly, we have $c_2 \equiv m \pmod{q}$
The solution of congurences is

$$x \equiv c_1 q q' + c_2 p p' \pmod{N}$$

with $pp' + qq' = 1$
$\Rightarrow x \equiv mpp' + mqq' \equiv m(pp' + qq') \equiv m \pmod{N}$

We have

$$g_1 \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod{N} \equiv g^{r_1(p-1)} \pmod{p} \equiv 1 \pmod{p}$$

$\Rightarrow p = \gcd(g_1 - 1, N)$. Similarly, $q = \gcd(g_2 - 1, N)$

From here we have recovered private keys

3.13. Find x, y such that: $xe_1 + ye_2 = 1 = gcd(e_1, e_2)$
$\Rightarrow m = c_1^x c_2^y = m^{e_1 x + e_2 y} = m \pmod{N}$

3.14. Because 3, 11 and 17 are primes number, $a \equiv a^3 \pmod{3}$, $a \equiv a^{11} \pmod{11}$, $a \equiv a^{17} \pmod{17}$. We have system congruence

$$\begin{aligned} a &\equiv a^3 \pmod{3} \\ a &\equiv a^{11} \pmod{11} \\ a &\equiv a^{17} \pmod{17} \end{aligned}$$

Consider that $a^3 \equiv a \pmod{3}$, $a^{3^2} \equiv a^3 \equiv a \pmod{3}$, $\cdots$, $a^{3^i} \equiv a \pmod{3}$. And $561 = 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3^1$, $a^{561} \equiv a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a \equiv a^9 \equiv a \pmod{3}$.

Similarly, $a^{561} \equiv a \pmod{11}$, $a^{561} \equiv a \pmod{17}$. From system congruence:

$$\begin{aligned} a^{561} &\equiv a \pmod{3} \\ a^{561} &\equiv a \pmod{11} \\ a^{561} &\equiv a \pmod{17} \end{aligned}$$

Using CRT, $a^{561} = (187 \cdot 1 \cdot a + 51 \cdot 8 \cdot a + 33 \cdot 16 \cdot a) \pmod{561} = a \pmod{561}$
Suppose that n is even ($n \geq 4$), we have

$$(n-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} = -1 \pmod{n}$$

, but $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ for all a, which is contrary. So n must be odd. Suppose that $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ (p_i is odd prime). Because $a^{p^{e-1}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^e}$ and

$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, we have $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^e}$.
$\Rightarrow p^{e-1}(p-1) \mid (n-1) \Rightarrow p^{e-1} \mid (n-1)$, but $p^{e-1} \mid n$, which is contrary if $e \geq 2$. Hence e must be 1.

So $n = p_1 p_2 \cdots p_r$

3.37.

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1$

$\Rightarrow \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$

If a is quadratic residue, then $a \equiv b^2 \pmod{p}$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (b^2)^{\frac{p-1}{2}} = b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

If $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

Let g be generator modulo p, then $a \equiv g^m \pmod{p}$

If m is even $\Rightarrow a \equiv g^{2k} \pmod{p} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

If m is odd $\Rightarrow a = g^{2k+1} \pmod{p} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{(2k+1)\frac{p-1}{2}} \equiv g^{p-1} g^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod{p}$, because $p-1$ is smallest number that $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

From (a) and (b) $\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$, if $p = 4k+1 \Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$
If $p = 4k+3 \Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{p}$

3.38. Prove that the three parts of the quadratic reciprocity theorem are equivalent to the following three concise formulas, where p and q are odd primes

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

With $p \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = 1 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$

Similarly with $p \equiv 3 \pmod{4}$ $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

First we need a lemma (**Gauss lemma**): suppose p is an odd prime, and $a \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, p) = 1$. Consider the set

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}a$$

If s of those residues are greater than $\frac{p}{2}$, then $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s$

Proof of lemma: Among smallest residues of

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}a$$

, suppose that

$$u_1, u_2, \cdots, u_s$$

are residues greater than $\frac{p}{2}$, and

$$v_1, v_2, \cdots, v_t$$

are residues smaller than $\frac{p}{2}$

Because $\gcd(ja, p) = 1 \forall j, 1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}$, all $u_i, v_j \neq 0 \Leftrightarrow u_i, v_j \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$. We will prove that, the set

$$\{p - u_1, p - u_2, \cdots, p - u_s, v_1, v_2, \cdots, v_t\}$$

is a permutation of $\{1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}\}$

It is clear that there are no 2 numbers u_i or 2 numbers v_j simultaneously congruent modulo p. Because if $ma \equiv na \pmod p$ and $\gcd(a, p) = 1$, then $m \equiv n \pmod p \Rightarrow$ contrast with $m, n \leq \frac{p-1}{2}$

Similarly, we see that there are no numbers $p - u_i$ congruent with v_j, so

$$\Rightarrow (p - u_1)(p - u_2) \cdots (p - u_s)v_1v_2 \cdots v_t \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

On the other hand,

$$u_1, u_2, \cdots, u_s, v_1, v_2, \cdots, v_t$$

are smallest residues of

$$a, 2a, 3a, \cdots, \frac{p-1}{2}$$

, so

$$\Rightarrow u_1u_2 \cdots u_sv_1v_2 \cdots v_t \equiv a^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

So $(-1)^s a^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$

And because $\gcd(p, \left(\frac{p-1}{2}\right)!) = 1 \Rightarrow (-1)^s a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^s \pmod p$ and $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^s \pmod p$

Return to problem: using theorem above, we need to find the number of residues, which are greater than $\frac{p}{2}$ among $1 \cdot 2, 2 \cdot 2, \cdots, \frac{p-1}{2} \cdot 2$. Therefore we only need to know which numbers are greater than $\frac{p}{2}$

$\Rightarrow$ there are $s = \frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right] \Rightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right]}$

With $p \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$, we have

$$\frac{p-1}{2} - \left[\frac{p}{4}\right] \equiv \frac{p^2-1}{8} \pmod 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$

We need a lemma: Suppose p is an odd prime, a is odd and $\gcd(a,p) = 1$, then $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{T(a,p)}$, with

$$T(a,p) = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ja}{p}\right]$$

Proof of lemma: consider smallest residues of a, $2a$, $3a$, $\cdots$, $\frac{p-1}{2}\cdot a$. As Gauss's lemma, u_1, u_2, $\cdots$, u_s, v_1, v_2, $\cdots$, v_t are residues greater and less than $\frac{p}{2}$ respectively. According to Euclidean divisor:

$$ja = p\left[\frac{ja}{p}\right] + \text{remainder}$$

, remainder is u_i or v_j. We have such $\frac{p-1}{2}$ equations and add them together

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} ja = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} p\left[\frac{ja}{p}\right] + \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{j=1}^{t} v_j$$

As we pointed out in Gauss's lemma, the set $p-u_1$, $p-u_2$, $\cdots$, $p-u_s$, v_1, v_2, $\cdots$, v_t is a permutation of the set 1, 2, $\cdots$, $\frac{p-1}{2}$

$$\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = \sum_{i=1}^{s}(p-u_i) + \sum_{j=1}^{t} v_t = ps - \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{j=1}^{t} v_t$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} ja - \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} p\left[\frac{ja}{p}\right] - ps + 2\sum_{i=1}^{s} u_i$$

From formula of $T(a,p)$, $(a-1)\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j = pT(a,p) - ps + 2\sum_{i=1}^{s} u_i$

Because a, p are odd, $T(a,p) \equiv s \pmod 2$. From Gauss's lemma we finish.

Return to problem: Consider pairs (x,y), where $1 \le x \le \frac{p-1}{2}$ and $1 \le y \le \frac{q-1}{2}$, there are $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ pairs. We divide those pairs into 2 groups, depending on the magnitude of px and qy.

Because p, q are two different primes, $px \neq qy$, $\forall(x,y)$

We consider pairs with $qx > py$. With every fixed element of x ($1 \le x \le \frac{p-1}{2}$), exist $\left[\frac{qx}{p}\right]$ elements y satisfying $1 \le y \le \frac{qx}{p}$. Therefore, there are $\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right]$ pairs.

When $qx < py$, similarly, there are $\sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right]$ pairs. Because there are $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ pairs, we have equation

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$$

From definition of $T(p,q)$, we have result

$$(-1)^{T(p,q)+T(q,p)} = (-1)^{\frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}}$$

3.39 Let p be a prime satisfying $p \equiv 3 \pmod 4$.

Let a be a quadratic residue modulo p. Prove that the number

$$b \equiv a^{\frac{p+1}{4}} \pmod p$$

has the property that $b^2 \equiv a \pmod p$. (*Hint.* Write $\frac{p+1}{2}$ as $1 + \frac{p-1}{2}$ and use Exercise 3.37.) This gives an easy way to take square roots modulo p for primes that are congruent to 3 modulo 4.

Chứng minh. Using Exercise 3.37, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ because a is quadratic residue modulo p. Therefore

$$b^2 \equiv a^{\frac{p+1}{2}} \equiv a^{1+\frac{p-1}{2}} \equiv a \cdot a^{\frac{p-1}{2}} \equiv a \cdot 1 \equiv 1 \pmod p$$

□

3.40. Let p be and odd prime, let $g \in \mathbb{F}_p^*$ be a primitive root, and let $h \in \mathbb{F}_p^*$. Write $p - 1 = 2^s m$ with m odd and $s \geq 1$, and write the binary expansion of $\log_g(h)$ as

$$log_g(h) = \epsilon_0 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3 + \cdots \quad \text{with} \quad \epsilon_0, \epsilon_1, \cdots \in \{0, 1\}$$

Give an algorithm that generalizes Example 3.69 and allows you to rapidly compute $\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{s-1}$, thereby proving that the first s bits of the discrete logarithm are insecure.

3.41 Let p be a prime satisfying $p \equiv 1 \pmod 3$. We say that a is a *cubic residue modulo* p if $p \nmid a$ and there is an integer c satisfying $a \equiv c^3 \pmod p$.

Let a and b be cubic residues modulo p. Prove that ab is a cubic residue modulo p.

Chứng minh. $a \equiv x^3 \pmod p$, $y \equiv y^3 \pmod p$. Therefore

$$ab \equiv x^3 y^3 = (xy)^3 \pmod p$$

Algorithm 9 Algorithm to find s least significant bits of x in $g^x \equiv h \pmod p$

Require: g, h, p $(p-1 = 2^s m)$
Ensure: s least significant bits of $x : g^x \equiv h \pmod p$
Array $\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{s-1}$
for $i = 0, \ldots, s-1$ **do**
if h is quadratic residue **then** $\epsilon_i = 0$, $h = \sqrt{h} \pmod p$
else if $\epsilon_i = 1$ **then** $h = \sqrt{g^{-1}h} \pmod p$
end if
end for

, which is cubic residue Give an example to show that (unlike the case with quadratic residues) it is possible for none of a, b and ab to the a cubic residue modulo p

Let g be primitive root modulo p. Choose $a \equiv g^{3k+1} \pmod p$, $b \equiv g^{3k'+1} \pmod p$. Hence $ab \equiv g^{(3k+1)+(3k'+1)} \equiv g^{3(k+k')+2} \pmod p$, which is not cubic residue Let g be a primitive root modulo p. Prove that a is a cubic residue modulo p if and only if $3 \mid \log_g(a)$, where $\log_g(a)$ is the discrete logarithm of a to the base g.

Proof of sufficient condition: If a is a cubic residue modulo p, $3 \mid \log_g(a)$. Suppose $a \equiv c^3 \pmod 3$ and $c \equiv g^u = \pmod p$. Hence $a = g^3 u \pmod p \Rightarrow 3 \mid \log_g(a)$

Proof of necessary condition: If $3 \mid \log_g(a)$, a is a cubic residue modulo p. This is obviously. Suppose instead that $p \equiv 2 \pmod 3$. Prove that for every integer a there is an integerr c satisfying $a \equiv c^3 \pmod p$. In other words, if $p \equiv 2 \pmod 3$, show that every number is a cube modulo p.

Return to problem: Because $p \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow \gcd(p-1, 3) = 1$. Which means that exist element d such that $3d \equiv 1 \pmod{p-1}$. Hence, equation $x^3 \equiv a \pmod p$ has solution $a^d = x \pmod p$. So every number is a cube modulo p.

□

Chapter 4

4.1. $d = 561517$, $N = 661643$ $sig = 206484$

4.2. S and S"

4.3. $p = 212081$, $q = 128311$
$\Rightarrow d = 18408628619 \Rightarrow S = D^d \pmod N = 22054770669$

4.4. With $c = m^{e_B} \pmod{N_B}$ and $s = Hash(m)^{d_A} \pmod{N_A}$
$\Rightarrow c^{d_B} = m^{e_B \cdot d_B} \pmod{N_B} = m$ and $s^{e_A} = Hash(m)^{d_A \cdot e_A} \pmod{N_A} =$

$Hash(m)$. Hence this method works

4.5. $A = g^a \pmod p = 2065$ $S_1 = g^k \pmod p = 3534$
$S_2 = (D - a \cdot S_1)K^{-1} \pmod{p-1} = 5888$
$\Rightarrow$ signature is $(S_1, S_2) = (3534, 5888)$

4.6. $A^{S_1} \cdot S_1^{S_2} \equiv g^D \pmod p$
$\Rightarrow (S_1^{"}, S_2^{"})$ is valid signature.

4.8. $S_1 = S_1' = g^k \pmod p$, from here Eve can know at first glance that the same random element k is used $S_2 = (D - aS_1)k^{-1} \pmod{p-1}$, $S_2' = (D' - aS_1')k^{-1} \pmod{p-1}$
$\Rightarrow S_2 - S_2' \equiv (D - D')k^{-1} \pmod{p-1}$ (as $aS_1 = aS_2$)
$\Rightarrow k = (D - D')(S_2 - S_2')^{-1} \pmod{p-1}$
Here we get $D - aS_1 = S_2 k \pmod{p-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = (D - S_2 k)S_1 - 1 \pmod{p-1} \\ a = (D' - S_2' k)S_1^{-1} \pmod{p-1} \end{cases}$$

4.9. $p \equiv 1 \pmod q$, $1 \le a \le q-1$, $A = g^a \pmod p$, $S_1 = (g^k \bmod p) \bmod q$, $S_2 = (D + aS_1)k^{-1} \pmod q$

Verify: $V_1 = D \cdot S_2^{-1} \pmod q$, $V_2 = S_1 S_2^{-1} \pmod q$. We need to prove that $(g^{V_1} \cdot A^{V_2} \bmod p) \bmod q = S_1$

Here we have

$$\begin{aligned} g^{V_1} \cdot A^{V_2} &\equiv g^{D \cdot S_2^{-1}} \cdot g^{aS_1 S_2^{-1}} \pmod p \\ &\equiv g^{(D + aS_1)S_2^{-1}} \pmod p \\ &\equiv g^k \pmod p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g^{V_1} A^{V_2} \bmod p) \bmod q = S_1$$

4.10. $(p, q, g) = (22531, 751, 4488)$. Public key $A = 22476$

Not valid Not valid

4.11. $A = g^a \pmod p$. $A = 31377$, $g = 21947$, $p = 103687 \Rightarrow a = 602$

$S_1 = (g^k \bmod p) \bmod q = 439$

$S_2 = (D + aS_1)k^{-1} \pmod q = 1259$

Chapter 7. Lattices and Cryptography

7.43. $t = \dfrac{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2}$ và $\boldsymbol{b}_2^* = \boldsymbol{b}_2 - t\boldsymbol{b}_1$ nên suy ra

$$\boldsymbol{b}_2^* \cdot \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{b}_2 - t\boldsymbol{b}_1) = \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 - t\|\boldsymbol{b}_1\|^2 = \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 - \frac{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_1\|^2} \cdot \|\boldsymbol{b}_1\|^2 = 0$$

Do đó $\boldsymbol{b}_2^* \perp \boldsymbol{b}_1$ và $\boldsymbol{b}_2^*$ là hình chiếu của $\boldsymbol{b}_2$ lên orthogonal complement của $\boldsymbol{b}_1$.

7.44. $\|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + t^2\boldsymbol{b}^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + t^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - 2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \geqslant 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Cho $\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b} = 0$ ta có $t = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}$.

Từ đó ta có $(\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - t\|\boldsymbol{b}\|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\cdot\|\boldsymbol{b}\|^2 = 0.$

Vì vậy $\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b}$ là hình chiếu của $\boldsymbol{a}$ lên orthogonal complement của b (tương tự 7.43).

7.45. Thuật toán Gauss's lattice reduction.

Algorithm 10 Gauss's latice reduction algorithm

```
while True do
    if ‖v2‖ < ‖v1‖ then
        swap v1 and v2
        m ← ⌊v1 · v2/‖v1‖²⌉
    end if
    if m = 0 then
        return (v1, v2)
    end if
    Replace v2 with v2 − m v1
end while
```

$\boldsymbol{v}_1 = (14, -47)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-362, -131)$, 6 steps.

$\boldsymbol{v}_1 = (14, -47)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-362, -131)$, 6 steps.

$\boldsymbol{v}_1 = (147, 330)$, $\boldsymbol{v}_2 = (690, -207)$, 7 steps.

7.46. Do $W^\perp$ là orthogonal complement của W trong V nên nếu $\boldsymbol{z} \in W^\perp$ thì $\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y} = 0$, với mọi $\boldsymbol{y} \in W$.

Với hai vector $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in W^\perp$ ta có $\boldsymbol{z}_1\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}_2\cdot\boldsymbol{y} = 0$, với mọi $\boldsymbol{y} \in W$.

Như vậy $(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2)\cdot\boldsymbol{y} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 \in W^\perp$.

Ta lại có $\alpha\boldsymbol{z}_1\cdot\boldsymbol{y} = \alpha\cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha\boldsymbol{z}_1 \in W^\perp$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tới đây ta có hai cách giải.

Cách 1. Ta có $W \cup W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$. Nếu $\boldsymbol{u}$ thuộc cả hai tập W và $W^\perp$ thì $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Ký hiệu $U = W + W^\perp$, ta chứng minh $W = V$.

Ta có thể chọn một cơ sở trực chuẩn (orthonormal basis) trong U và mở rộng nó thành cơ sở trực chuẩn trong V.

Khi đó, nếu $U \neq V$ thì có một phần tử $\boldsymbol{e}$ trong cơ sở của V vuông góc với U. Do U chứa W và $\boldsymbol{e}$ vuông góc với U nên $\boldsymbol{e} \in W^\perp$.

The latter is a subspace of W, therefore e is in W, which is contrary.

Cách 2. Đặt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k\}$ là cơ sở trực chuẩn của không gian con W. Với mỗi $\boldsymbol{v} \in V$, đặt

$$P(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_j$$

Khi đó với mọi $\boldsymbol{v} \in V$ thì $\boldsymbol{v} = \underbrace{P(\boldsymbol{v})}_{\in W} + \underbrace{(\boldsymbol{v} - P(\boldsymbol{v}))}_{\in W^\perp}$.

Ở đây $\boldsymbol{v} - P(\boldsymbol{v}) \in W^\perp$ là vì nếu $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ thì

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v} - P(\boldsymbol{v})) \cdot e_j &= \left(\boldsymbol{v} - \sum_{l=1}^{k} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_l) \cdot \boldsymbol{e}_l\right) \cdot \boldsymbol{e}_j \\ &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_j = 0\end{aligned}$$

Do $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k\}$ là cơ sở của W, điều này cho ta $\boldsymbol{v} - P(\boldsymbol{v}) \in W^\perp$.

Như vậy $\|\boldsymbol{v}\|^2 = (a\boldsymbol{w} + b\boldsymbol{w}')^2 = a^2\boldsymbol{w}^2 + 2ab\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}' + b^2\boldsymbol{w}'^2 = a^2\|\boldsymbol{w}\|^2 + 0 + b^2\|\boldsymbol{w}'\|^2 = a^2\|\boldsymbol{w}\|^2 + b^2|\boldsymbol{w}'\|^2$.

Phần X

Những điều nhỏ xíu

Phần X: Nội dung

Chương 22

Đạo hàm một số hàm nhiều biến

Hàm số cho giá trị là số vô hướng

Giả sử ta có vector hàng $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ và hàm số f có biến là vector $\boldsymbol{x}$. Nói cách khác là $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Khi đó đạo hàm riêng của hàm f theo vector $\boldsymbol{x}$ cũng là một vector (nếu $\boldsymbol{x}$ là vector hàng thì đạo hàm riêng cũng là vector hàng và ngược lại) và được ký hiệu

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ví dụ, đối với hàm tuyến tính

$$f(\boldsymbol{x}) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^T$$

thì ta thấy rằng $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$. Khi đó

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n) = \boldsymbol{a}$$

Ta thấy rằng $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}^T$. Do đó

$$\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}^T) = \nabla(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}^T) = \boldsymbol{a}$$

Đạo hàm riêng cấp hai được cho bởi ma trận được gọi là ma trận Hessian.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Theo tính chất của đạo hàm riêng cấp hai có thể thấy ma trận trên là ma trận đối xứng.

Nếu đầu vào là một ma trận, hay $f : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{X})$ thì ta làm tương tự

Giả sử

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Khi đó đạo hàm của hàm f theo ma trận $\boldsymbol{X}$ là

$$\nabla f(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_{11}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{12}} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{1m}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{21}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{22}} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2m}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{n1}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{n2}} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{nm}} \end{pmatrix}$$

Như vậy đạo hàm theo ma trận cũng là ma trận cùng cỡ với ma trận đầu vào.

Hàm số cho giá trị là vector

Xét hàm vector

$$F(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x}))$$

với $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ và các hàm $f_i(\boldsymbol{x})$ là hàm từ $\mathbb{R}^n$ tới $\mathbb{R}$. Khi đó hàm vector F là hàm từ $\mathbb{R}^n$ tới $\mathbb{R}^m$.

Nếu f_i là các hàm tuyến tính như trên thì hàm F là một ánh xạ tuyến tính, hay tương đương với phép nhân ma trận $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$. Ở đây $\boldsymbol{x}$ là vector hàng,

còn $\boldsymbol{A}$ là ma trận $n \times m$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ở đây, $f(\boldsymbol{x}) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$. Nếu đặt $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ thì ma trận $\boldsymbol{A}$ có các cột là $\boldsymbol{a}_i^T$. Nói cách khác

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T & \boldsymbol{a}_2^T & \cdots & \boldsymbol{a}_m^T \end{pmatrix}$$

Nếu ta xét từng cột của ma trận $\boldsymbol{A}$ thì hoàn toàn giống trường hợp trên. Giả sử với cột đầu tiên (ứng với f_1) ta có

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_1^T$$

Đạo hàm của f_1 theo vector $\boldsymbol{x}$ là

$$\nabla f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a_1}$$

Xếp các hàm f_i từ trên xuống dưới, ta có được đạo hàm của hàm F theo vector x là

$$\nabla F(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{x}) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^T \tag{22.1}$$

Hàm bậc hai

Trong Machine Learning chúng ta sẽ gặp dạng toán sử dụng Linear Regression. Khi đó hàm regression là một hàm theo vector $\boldsymbol{w}$ có dạng

$$f(\boldsymbol{w}) = f(w_0, w_1, \ldots, w_n) = w_0 + w_1x_1 + \ldots + w_nx_n$$

Chương 23

Đại số nâng cao

23.1 Đa thức nội suy Lagrange

Trong đại số, công thức nội suy Lagrange cho phép chúng ta tìm được một đa thức $f(x)$ trên trường $\mathbb{F}$ bất kì khi biết được một số cặp $(x_i, f(x_i))$ nhất định $(x_i, f(x_i) \in \mathbb{F})$.

Để tìm đa thức $f(x)$ có bậc n ta cần ít nhất $n+1$ cặp $(x_i, f(x_i) = y_i)$, với $1 \leqslant i \leqslant n+1$ và $x_i \neq x_j$ với mọi $i \neq j$.

Khi đó, ta có **công thức nội suy Lagrange** như sau:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(y_i \cdot \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Ví dụ 1. Giả sử chúng ta có hàm $f(x) = x^2 + x + 1$. Khi đó $f(1) = 3, f(-1) = 1, f(0) = 1$.

Từ ba cặp $(x_i, f(x_i))$ trên mình sẽ tìm ngược lại $f(x)$ ban đầu.

Theo công thức thì

$$\begin{aligned} f(x) =& y_1 \cdot \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x - x1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \\ &+ y_3 \cdot \frac{(x - x1)(x - x_2)}{(x_3 - x1)(x_3 - x_2)} \end{aligned}$$

Thay số vào thì ta có

$$f(x) = 3 \cdot \frac{(x - (-1))(x - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} + 1 \cdot \frac{(x - 1)(x - 0)}{(-1 - 1)(-1 - 0)} + 1 \cdot \frac{(x - 1)(x - (-1))}{(0 - 1)(0 - (-1))}$$

Thu gọn lại ta có $f(x) = x^2 + x + 1$ (đúng với hàm cần tìm).