

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ VĂN DŨNG

**FITEFT: CÔNG CỤ ĐỂ KHỚP CÁC THAM SỐ CỦA LÝ
THUYẾT MÔ HÌNH CHUẨN HIỆU DỤNG TỪ CÁC
KẾT QUẢ ĐO TIẾT DIỆN TÁN XẠ CỦA HẠT HIGGS
BOSON TẠI MÁY GIA TỐC LHC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ

TP. Hồ Chí Minh - 2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ VĂN DŨNG

**FITEFT: CÔNG CỤ ĐỂ KHỚP CÁC THAM SỐ CỦA LÝ
THUYẾT MÔ HÌNH CHUẨN HIỆU DỤNG TỪ CÁC
KẾT QUẢ ĐO TIẾT DIỆN TÁN XẠ CỦA HẠT HIGGS
BOSON TẠI MÁY GIA TỐC LHC**

Ngành: Vật lý lý thuyết và Vật lý toán
Mã số ngành: 8440103

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. LÊ ĐỨC NINH

TP. Hồ Chí Minh - 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan luận văn thạc sĩ ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý toán, với đề tài "Fiteft: công cụ để khớp các tham số của lý thuyết mô hình chuẩn hiệu dụng từ các kết quả đo tiết diện tán xạ của hạt Higgs boson tại máy gia tốc LHC" là công trình khoa học do tôi thực hiện dưới sự hướng dẫn của TS. Lê Đức Ninh.

Những kết quả nghiên cứu của luận văn là hoàn toàn trung thực và chính xác.

Học viên cao học
(Ký tên, ghi họ tên)

Lê Văn Dũng

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin cảm ơn gia đình đã luôn ủng hộ và hỗ trợ quá trình học tập của tôi. Tôi xin cảm ơn TS. Lê Đức Ninh đã tận tình hướng dẫn và động viên tôi trong suốt quá trình làm nghiên cứu vật lý. Tôi xin cảm ơn bạn bè đã luôn đồng hành cùng tôi.

Mục lục

Lời cam đoan	3
Lời cảm ơn	4
Danh mục hình vẽ	8
Danh mục các bảng số liệu	11
Trang thông tin luận văn tiếng Việt	13
Trang thông tin luận văn tiếng Anh	15
1 MỞ ĐẦU	17
1.1 Giới thiệu	17
1.2 Mục đích nghiên cứu	18
1.3 Đối tượng nghiên cứu	19
1.4 Các phương pháp nghiên cứu	19
1.5 Sự khác biệt giữa Fiteft và Lilith-2	20
2 TỔNG QUAN	21
2.1 Mô hình chuẩn (SM)	21
2.1.1 SM Lagrangian	21
2.1.2 Bất biến cục bộ Abelian và non-Abelian	21
2.1.3 Fermion Lagrangian	23
2.1.4 Gauge Lagrangian	26
2.1.5 Higgs Lagrangian	26
2.1.6 Yukawa Lagrangian	30
2.2 Mô hình chuẩn hiệu dụng (SMEFT)	31
2.3 Làm quen với kết quả từ thực nghiệm	35

2.4	SMEFT và tham số hóa tuyến tính	40
3	PHƯƠNG PHÁP LIKELIHOOD ĐỂ TÌM KHOẢNG TIN CẬY	45
3.1	Hàm log-likelihood	45
3.1.1	Hàm log-likelihood âm 1 chiều cho phân bố Gaussian	45
3.1.2	Hàm log-likelihood cho phân bố Gaussian nhiều biến	49
3.1.3	Sử dụng hàm log-likelihood nhiều chiều để khớp dữ liệu SMEFT thông qua phương pháp cực tiểu bình phương	51
3.2	Kết quả đo và hàm likelihood trong Fiteft	56
3.3	Xác định khoảng tin cậy bằng profile likelihood	59
3.4	Lựa chọn tham số khớp dữ liệu và thành lập ma trận đối cơ sở	60
4	FITEFT	74
4.1	Cấu trúc dữ liệu	74
4.1.1	observable.csv	75
4.1.2	correlation.csv	76
4.1.3	parametrization.csv	77
4.2	Đối tượng fiteft	79
4.2.1	Khởi tạo đối tượng fiteft	79
4.2.2	Thay đổi tính chất của hàm likelihood	79
4.2.3	Các giá trị có thể truy cập	80
4.3	Các hàm tính toán của đối tượng fiteft	82
4.3.1	fiteft.likelihood	82
4.3.2	fiteft.l	85
4.3.3	fiteft.dl	86
4.3.4	fiteft.l_profile	89
4.3.5	fiteft.dl_profile	91
4.4	Ví dụ	94
4.4.1	profiling	98
4.4.2	Tìm khoảng tin cậy	102
5	KẾT QUẢ KHỚP DỮ LIỆU CỦA FITEFT	107
5.1	ATLAS-CONF-2020-053	107
5.2	ATLAS-CONF-2021-053	111
5.3	ATLAS HIGG-2022-17	113
6	KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	118

A	Phụ lục	122
A.1	Đạo hàm của hàm likelihood	122
A.2	Phân tách tích ma trận	123
A.3	Phép toán ma trận cơ bản	124

Danh sách hình vẽ

2.1	Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết: c_{bH} lên kênh phân rã $H \rightarrow b\bar{b}$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.	33
2.2	Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết, từ trái qua phải: c_{HG} lên kênh $gg \rightarrow H$, c_{HW} lên kênh $qq \rightarrow Hqq$, c_{HWB} lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$ hoặc $H \rightarrow Z\gamma$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.	34
2.3	Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết, từ trái qua phải: $c_{Hu}, c_{Hq}^{(1)}, c_{Hd}, c_{Hq}^{(3)}$ lên kênh $qq \rightarrow Z^*H \rightarrow H\ell\ell$ và $c_{Hl,11}^{(1)}, c_{Hl,22}^{(1)}, c_{Hl,33}^{(1)}$ lên kênh $qq \rightarrow Z^*H \rightarrow H\ell\ell$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.	34
2.4	Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết, từ trái qua phải: c_{tB}, c_{tW} lên kênh $qq \rightarrow t\bar{t}H$ và c_{tB}, c_{tW} lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.	34
2.5	Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết, từ trái qua phải: c_G lên kênh $gg \rightarrow t\bar{t}H$ và tham số c_W lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.	35
2.6	Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết: các toán tử trong nhóm f^4 lên kênh $qq \rightarrow t\bar{t}H$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.	35
3.1	Các điểm gieo của phân bố Gaussian với trị trung bình là 1 và độ lệch chuẩn là 1. Đường nét liền là hàm mật độ phân bố của điểm x , đường kẻ dọc là các điểm gieo theo trục x	48
3.2	Đường nét liền: hàm log-likelihood xây dựng từ các điểm gieo từ phân bố. Đường nét đứt: hàm likelihood được tính từ hai giá trị $\Delta_\mu^\pm, \hat{\mu}$	49

3.3	Trái: hình vẽ thể hiện giá trị của hàm log-likelihood với các tham số ở (3.32), đường con kín là đường đồng mức của hàm log-likelihood, đường màu xanh là cây là đường thể hiện điểm cực tiểu của hàm log-likelihood theo phương x , đường màu cam là đường thể hiện điểm cực tiểu của hàm log-likelihood theo phương y . Giữa: giá trị của profile likelihood theo biến x . Phải: giá trị của profile likelihood theo biến y .	53
3.4	Trái: hình vẽ thể hiện giá trị của hàm log-likelihood với các tham số ở (3.34), đường con kín là đường đồng mức của hàm log-likelihood, đường màu xanh là cây là đường thể hiện điểm cực tiểu của hàm log-likelihood theo phương x , đường màu cam là đường thể hiện điểm cực tiểu của hàm log-likelihood theo phương y . Giữa: giá trị của profile likelihood theo biến x . Phải: giá trị của profile likelihood theo biến y . Chúng ta có thể thấy được tham số x xuất hiện hai điểm cực tiểu bằng nhau, và chúng ta điểm với giá trị dương để báo cáo.	54
3.5	Trên: sức ảnh hưởng $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ của tham số c_1, c_2 lên tiên đoán \mathbf{y}_c . Dưới: profile likelihood đối với tham số c_1 tương ứng với các hình ở phía trên.	62
3.6	Trên: sức ảnh hưởng $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ của tham số c_1, c_2 lên tiên đoán \mathbf{y}_c . Dưới: profile likelihood đối với tham số c_1 tương ứng với các hình ở phía trên.	63
3.7	Sự ảnh hưởng đã được chuẩn hóa của các tham số trong các nhóm tham số lên các bin, lần lượt là nhóm 2,3,4,5,6,7,8,1. Ở hình cuối cùng, ta có <code>cHbox</code> trùng với <code>ceH</code>	67
3.8	Hình vẽ hàm likelihood cho mô hình giả tưởng, chúng ta thấy là hàm like lihood chỉ có thể được khớp đối với những hướng khác với hướng $(1\sqrt{2}, -1\sqrt{2})$	73
4.1	Ví dụ về file dữ liệu <code>observable.csv</code> , ví dụ này là 10 kết quả đo đầu tiên của thí nghiệm ATLAS-2021-053[2].	74
4.2	Ví dụ về file dữ liệu <code>corelation.csv</code> , ví dụ này là kết quả của 10 hàng, 5 cột đầu tiên của thí nghiệm ATLAS-2020-053.	77
5.1	Giá trị profile likelihood của các tham số trong cơ sở c' cho thí nghiệm ATLAS-CONF-2020-053 [1].	110
5.2	Giá trị profile likelihood của các tham số trong cơ sở c' cho thí nghiệm ATLAS-CONF-2021-053 [2]. Chúng tôi đã nội suy đường profile like-likelihood thông qua các khoảng tin cậy $\pm 95\%, \pm 68\%$ và best-fit bằng một hàm nội suy <code>scipy.interpolate.UnivariateSpline</code> cubic-spline chạy qua 5 điểm.	112

5.3	Giá trị profile likelihood của các tham số trong cơ sở c' cho thí nghiệm HIGG-2022-17 [8] với cách tham số hóa tuyến tính cho tiên đoán lý thuyết.	114
5.4	Giá trị profile likelihood của các tham số trong cơ sở c' cho thí nghiệm HIGG-2022-17 [8] với cách tham số hóa phi tuyến cho tiên đoán lý thuyết	116

Danh sách bảng

2.1	Các số lượng tử isospin T_3 , hypercharge Y , và điện tích Q của các hạt fermion trong mô hình chuẩn.	25
2.2	Phân loại, tên gọi của tham số c_i và các toán tử bậc 6 ảnh hưởng đến thí nghiệm Higgs trong cơ sở Warsaw, tham khảo từ bài báo [8] và [3].	32
2.3	Các bin của quá trình VBF + VH(hadron) ở quá trình 1.2, mỗi miền nằm trong vùng biên màu vàng tương đương với một vùng trong không gian pha [26]. Phần trống ở cột m_{jj} được hiểu là không tồn tại vì m_{jj} chỉ tồn tại khi $N_{\text{jet}} > 1$	38
2.4	Các bin của quá trình ggF ở quá trình 1.2, mỗi miền nằm trong vùng biên màu vàng tương đương với một vùng trong không gian pha [26]. Phần trống ở cột m_{jj} được hiểu là không tồn tại vì m_{jj} chỉ tồn tại khi $N_{\text{jet}} > 1$	38
2.5	Các bin của quá trình VH ở quá trình 1.2, mỗi miền nằm trong vùng biên màu vàng tương đương với một vùng trong không gian pha [26].	39
2.6	Các bin của quá trình ttH ở quá trình 1.2, mỗi miền nằm trong vùng biên màu vàng tương đương với một vùng trong không gian pha [26]. Giai đoạn 1.2 không phân biệt các bin theo số jet.	39
3.1	Ví dụ về các đại lượng vật lý của bài báo HIGG-2022-17 [8].	57
3.2	Ma trận $\mathbf{V}_{\text{SMEFT}}$ của thí nghiệm ATLAS-CONF-2020-053 [1], chúng tôi chỉ hiện thành phần trên đường chéo.	61
3.3	Ma trận \mathbf{A} thể hiện sự ảnh hưởng lên các bin của các tham số của bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1].	64
3.4	Ma trận $\tilde{\mathbf{A}}$ thể hiện sự ảnh hưởng sau khi được "chuẩn hóa" lên các bin của các tham số của bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1].	65
3.5	Ma trận thể hiện sự tương đồng về đóng góp lên các bin của các tham số của bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1], giá trị 1 là tương đồng hoàn toàn, giá trị 0 là không tương đồng.	66

3.6	Ma trận thể hiện sự tương đồng về đóng góp lên các bin của các tham số của bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1] sau khi đã bỏ đi các tham số nhóm 1 và 2, giá trị 1 là tương đồng hoàn toàn, giá trị 0 là không tương đồng.	68
3.7	Ma trận \mathbf{M}^\top đại diện cho những vector riêng đã chuyển vị (nằm ngang) của những nhóm vector đã chọn cho thí nghiệm ATLAS-CONF-2020-053 [1].	70
3.8	Ma trận chiếu $\overline{\mathbf{M}}_{\lambda>0.2}$ cho bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [2]. Bảng phía trên là kết quả của luận văn này, bảng phía dưới là kết quả lấy từ bài báo [1].	71
4.1	Những đặc trưng hiện tại được hỗ trợ trong Fiteft ở cột một, tên của những đặc trưng đó để điền vào cột signature trong file <code>observable.csv</code> ở cột thứ hai, những giá trị tiên đoán cần được cung cấp thêm bởi người dùng ở cột thứ ba.	76
4.2	Ví dụ về file dữ liệu <code>parametrization.csv</code> , ví dụ này đại diện cho sự ảnh hưởng tuyến tính của các tham số SMEFT đối với các kênh sinh và phân rã của hạt Higgs đối với thí nghiệm ATLAS-2020-053 [2]. Ở trong bảng này có sự góp mặt của hệ số của 34 tham số SMEFT. . .	78
5.1	Kết quả khớp dữ liệu cho kết quả của bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1] đối với các tham số trong hệ cơ sở \mathbf{c}' với tham số hóa tuyến tính cho tiên đoán lý thuyết, best fit là cực tiểu của profile likelihood, left (right) là cận trái (phải) của khoảng tin cậy 68%.	109
5.2	Kết quả khớp dữ liệu cho kết quả của bài báo ATLAS-CONF-2021-053 [2] đối với các tham số trong hệ cơ sở \mathbf{c}' với tham số hóa tuyến tính cho tiên đoán lý thuyết, best fit là cực tiểu của profile likelihood, left (right) là cận trái (phải) của khoảng tin cậy 68%.	111
5.3	Kết quả khớp dữ liệu cho kết quả của bài báo HIGG-2022-17 [8] đối với các tham số trong hệ cơ sở \mathbf{c}' với tham số hóa tuyến tính cho tiên đoán lý thuyết, best fit là cực tiểu của profile likelihood, left (right) là cận trái (phải) của khoảng tin cậy 68%.	115
5.4	Kết quả khớp dữ liệu cho kết quả của bài báo HIGG-2022-17 [8] đối với các tham số trong hệ cơ sở \mathbf{c}' với tham số hóa phi tuyến cho tiên đoán lý thuyết, best fit là cực tiểu của profile likelihood, left (right) là cận trái (phải) của khoảng tin cậy 68%.	117

TRANG THÔNG TIN LUẬN VĂN

Tên đề tài luận văn: Fiteft: công cụ để khớp các tham số của lý thuyết mô hình chuẩn hiệu dụng từ các kết quả đo tiết diện tán xạ của hạt Higgs boson tại máy gia tốc LHC

Ngành: Vật lý lý thuyết và Vật lý toán

Mã số ngành: 8440103

Họ tên học viên cao học: Lê Văn Dũng

Khóa đào tạo: 32

Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học quốc gia TP Hồ Chí Minh.

Người hướng dẫn khoa học: TS. Lê Đức Ninh

1. TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN VĂN:

Luận văn thạc sĩ được chia thành 5 chương.

- Chương 1 tóm tắt về đề tài nghiên cứu, câu hỏi nghiên cứu, mục đích, ý nghĩa khoa học và kết quả mong đợi của đề tài.
- Chương 2 giới thiệu mô hình chuẩn của vật lý hạt cơ bản, mô hình chuẩn hiệu dụng, phân tích kết quả của các công trình nghiên cứu, thí nghiệm mới nhất về hạt Higgs ở các thí nghiệm ATLAS và CMS. Sau đó chúng tôi giới thiệu về công cụ nghiên cứu là hàm likelihood, cách để sử dụng hàm log-likelihood kết hợp kết quả thực nghiệm và lý thuyết về mô hình chuẩn hiệu dụng.
- Chương 3 đi sâu về cách sử dụng hàm log-likelihood để khớp dữ liệu của mô hình chuẩn hiệu dụng. Chúng tôi phân tích đánh giá những điều đáng lưu ý, khó khăn trong việc khớp dữ liệu.
- Chương 4 giới thiệu về công cụ Fiteft, cấu trúc dữ liệu, cách sử dụng và ví dụ về cách sử dụng Fiteft để dẫn lại những kết quả của thực nghiệm.
- Chương 5 trình bày những kết luận rút ra từ nghiên cứu, đánh giá kết quả, kiến nghị cho những kết quả nghiên cứu tiếp theo.

2. NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN VĂN:

- Xây dựng một công cụ mới để phục vụ cho việc khớp dữ liệu từ thực nghiệm.

- Xây dựng một cách mới thông qua dạng file csv về việc xây dựng và trình bày cấu trúc dữ liệu.
- Kết quả khớp dữ liệu mới, cung cấp một kết quả độc lập để so sánh với kết quả thực nghiệm.

3. CÁC ỨNG DỤNG

Fiteft có thể được dùng để so sánh với nhiều kết quả thực nghiệm hơn, không chỉ tóm gọn trong thí nghiệm đo đạc về hạt Higgs, cũng như kết quả của ATLAS. Fiteft có thể được áp dụng cho các mô hình vật lý mới với dạng gần đúng tham số hóa tuyến tính.

4. VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ

Luận văn chưa giải quyết toán tử bậc hai trong việc tham số hóa tiên đoán thực nghiệm. Luận văn chưa giải quyết được vấn đề liên quan đến ma trận tương quan lý thuyết cũng như việc tự động hóa quá trình xây dựng ma trận tương quan lý thuyết.

**TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG
DẪN**

(Ký tên, họ tên)

HỌC VIÊN CAO HỌC

(Ký tên, họ tên)

**XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO
HIỆU TRƯỞNG**

THESIS INFORMATION

Thesis name: FITEFT: a tool for fitting standard model effective field theory parameters using Higgs boson cross-section measurements at the LHC

Speciality: Theoretical and Mathematical Physics

Code: 8440103

Name of Master Student: Le Van Dung

Academic year: 2022-2024

At: Vietnam National University Ho Chi Minh city - University of Science, Vietnam

Supervisor: Dr. Le Duc Ninh.

1. SUMMARY

This Masters' thesis is divided into 5 chapters:

- Chapter 1: Introduces research topic, research question, goal, scientific meaning and expected results of the thesis.
- Chapter 2: Introduces the SM and SMEFT, analyze the results of the latest research studies and experiments. Then we introduce the research tool as the likelihood function, and how to use the log-likelihood function to find confidence intervals of the SMEFT parameters.
- Chapter 3: Delves deeper into the use of the log-likelihood function to fit SMEFT parameters using experimental results. We analyze and evaluate notable aspects and challenges in data fitting, in particular finding combinations of parameters which are fitable.
- Chapter 4: Introduces the Fiteft tool, its data structure, usage, and providing examples of how to use Fiteft to recapitulate experimental results.
- Chapter 5: Presents conclusions drawn from the research, evaluation of results, and recommendations for further research.

2. NOVELTY OF THESIS:

- Develop a new tool to fit SMEFT parameters using Higgs STXS measurements.
- Develop a new approach to constructing and presenting data structures via csv data files.

- Provide new results which can be used to compare and cross-check with experimental results.

3. APPLICATIONS

Fiteft can be utilized to compare with more experimental results beyond those summarized in the Higgs boson measurement experiment as well as the findings from ATLAS. It can be applied to new physics models with linear parameterization approximations.

4. PERSPECTIVE

The thesis has not addressed the inclusion of second-order terms in the parameterization of theoretical predictions. It has not tackled the issues related to the theoretical correlation matrix or automated process of constructing the theoretical correlation matrix.

SUPERVISOR

Master STUDENT

**CERTIFICATION
UNIVERSITY OF SCIENCE
PRESIDENT**

Chương 1

MỞ ĐẦU

1.1 Giới thiệu

Việc phát hiện ra hạt Higgs là một cột mốc lớn trong sự hiểu biết của chúng ta về hạt cơ bản và sự tương tác giữa chúng, và chúng được mô tả một cách rất chính xác bởi mô hình chuẩn (SM).

Cho đến nay, từ các kết quả đo đạc về sự hình thành và phân rã của hạt Higgs boson thông qua tán xạ proton-proton tại máy gia tốc LHC, các kết quả nghiên cứu từ thí nghiệm ATLAS [1, 2] cho thấy sự phù hợp rất tốt giữa các tiên đoán của mô hình chuẩn và kết quả đo. Tuy nhiên, sai số của các phép đo còn khá lớn nên những đóng góp nhỏ từ Vật lý mới vẫn có thể bị ẩn trong những sai số đó.

Có nhiều cách để mô tả Vật lý mới. Trong đó, mô hình chuẩn hiệu dụng (SMEFT) [3, 4] là một công cụ phổ biến nhất hiện nay, được các thí nghiệm lớn như ATLAS và CMS sử dụng để tham số hóa các hiệu ứng Vật lý mới.

SMEFT là một công cụ mạnh trong việc khám phá các hiện tượng vật lý mới vượt ra ngoài phạm vi dự đoán của SM một cách có hệ thống thông qua khớp (fit) các tham số của SMEFT với các kết quả đo được.

Hiện tại thì kết quả của việc sử dụng SMEFT để khớp tham số lý thuyết với dữ liệu đã được thực hiện ở trong hai bài báo kể trên và các công cụ [5–7] cũng đã được phát triển để phục vụ nghiên cứu. Điều mà các nhà vật lý quan tâm nhất là **khoảng tin cậy** của các tham số SMEFT. Các khoảng tin cậy này có thể được tính từ hàm thống kê **likelihood**.

Các bài báo của ATLAS và CMS cung cấp các kết quả về khoảng tin cậy cho một số tham số quan trọng và thường chỉ cho một vài cách tham số hóa SMEFT phổ biến.

Các kết quả này được tính từ một hàm **likelihood** phức tạp, phụ thuộc vào nhiều dữ liệu đo và các kết quả của mô hình chuẩn. Hàm likelihood này là một chương trình máy tính phức tạp và không được công bố. Chúng tôi gọi đây là hàm likelihood chính xác.

Rất may là ngoài các kết quả về khoảng tin cậy, các bài báo của ATLAS và CMS còn công bố các kết quả tiết diện tán xạ cho từng vùng của không gian xung lượng (STXS). Dựa vào kết quả này, chúng ta có thể xây dựng một hàm likelihood mới, và từ hàm likelihood này có thể thu được các khoảng tin cậy cho các tham số SMEFT. Chúng tôi gọi đây là hàm likelihood gần đúng. Các khoảng tin cậy này không hoàn toàn giống với các kết quả chính xác thu được từ hàm likelihood chính xác, nhưng cũng không sai lệch nhiều. Hàm likelihood gần đúng có thể được áp dụng cho nhiều cách tham số hóa Vật lý mới khác nhau (không chỉ giới hạn cho SMEFT), từ đó thu được các khoảng tin cậy cho nhiều mô hình Vật lý mới mà ATLAS và CMS không có điều kiện để fit.

Và đó là lý do chúng tôi viết phần mềm Fiteft, mục đích là để cung cấp một công cụ để tính những khoảng tin cậy một cách tốt trong một khoảng thời gian ngắn dựa vào hàm likelihood gần đúng. Trong luận văn này, tôi sẽ giới thiệu về mô hình SMEFT và giới thiệu về công cụ Fiteft, một công cụ được viết trên ngôn ngữ Python, sử dụng các thư viện phục vụ tính toán phổ biến, mạnh mẽ như numpy và pandas. Sau đó Fiteft sẽ được sử dụng để tính lại các kết quả của ba bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1], ATLAS-CONF-2021-053 [2], HIGG-2022-17 [8] và đánh giá mức độ tương quan giữa các kết quả.

1.2 Mục đích nghiên cứu

Cung cấp công cụ để tính những khoảng tin cậy một cách khớp nhất so với kết quả của các thí nghiệm hạt cơ bản trong một khoảng thời gian ngắn trên những máy tính phổ thông. Công cụ này cũng có thể được sử dụng để kết hợp các kết quả đo đạc của các thí nghiệm khác nhau một cách nhanh chóng, hoặc người dùng có thể sử dụng công cụ này để phát triển và kiểm tra mô hình vật lý mới của riêng họ.

SMEFT có 2499 toán tử hermitian [9] và mỗi toán tử đi kèm với một tham số tự do (gọi là hệ số Wilson). Mức độ đóng góp của các toán tử (tham số) lên hàm likelihood là không đồng nhất. Chúng tôi giới thiệu về cách tìm ra các tham số (hay tổ hợp tuyến tính của chúng) cho đóng góp lớn nhất. Ngoài ra, chúng tôi cung cấp phương pháp để xử lý những đại lượng phi tuyến tính xuất hiện trong quá trình khớp dữ liệu.

1.3 Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu là hàm likelihood gần đúng (thực ra hàm $L(\mathbf{c})$ mới là hàm likelihood, nhưng để tiện lợi chúng tôi gọi hàm $-2 \ln L$ là hàm likelihood cho đơn giản)

$$\mathcal{L}(\mathbf{c}) = -2 \ln L(\mathbf{c}) = [\mathbf{y}_{\text{exp}} - \mathbf{y}_{\text{SMEFT}}(\mathbf{c})]^T \mathbf{V}^{-1} [\mathbf{y}_{\text{exp}} - \mathbf{y}_{\text{SMEFT}}(\mathbf{c})], \quad (1.1)$$

với \mathbf{y}_{exp} là một vector gồm các giá trị kỳ vọng của đại lượng vật lý được xác định từ thực nghiệm, $\mathbf{y}_{\text{SMEFT}}$ là vector gồm các giá trị kỳ vọng được dự đoán bởi SMEFT (hay một mô hình Vật lý mới nào đó) với sự phụ thuộc vào một vector \mathbf{c} bao gồm các hệ số c_i (chính là các hệ số Wilson trong lý thuyết hiệu dụng SMEFT). \mathbf{V} là ma trận covariance phụ thuộc vào các sai số của \mathbf{y}_{exp} và \mathbf{y}_{SM} (xuất hiện bên trong $\mathbf{y}_{\text{SMEFT}}$). Đại lượng vật lý đo được có thể là tiết diện tán xạ $y = \sigma(i \rightarrow H) \times \text{BR}(H \rightarrow f)$, trong đó $\sigma(i \rightarrow H)$ là tiết diện tán xạ cho quá trình sinh hạt Higgs $i \rightarrow H$, $\text{BR}(H \rightarrow f)$ là tỷ lệ phân nhánh cho quá trình rã $H \rightarrow f$.

1.4 Các phương pháp nghiên cứu

Lagrange tương tác của SMEFT trong hệ cơ sở WARSAW được viết như sau [3]:

$$\mathcal{L}_{\text{SMEFT}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{\Lambda^2} \sum_i^{\text{Nop.}} c_i O_i^{(6)}, \quad (1.2)$$

ở đây ta có $c_i^{(6)}$ là các hệ số thực, $O_i^{(6)}$ là các toán tử bậc 6 theo thứ nguyên khối lượng, Λ là hệ số có thứ nguyên là khối lượng, nó tương trưng cho khối lượng của một hạt truyền tương tác ở một mức năng lượng cao hơn rất nhiều so với mức năng lượng hiện tại của SM. Trong luận văn này, chúng ta chỉ xét những toán tử bậc 6 và bỏ qua đóng góp của toán tử bậc 8 trở lên vì đóng góp của chúng nhỏ hơn $1/\Lambda^2$ so với các toán tử bậc 6, và độ nhạy hiện tại của các thí nghiệm còn rất thấp để có thể đo được ảnh hưởng của các toán tử bậc cao hơn 6. Từ Lagrangian trên, ta có thể tham số hóa tiết diện tán xạ của bin thứ i trong SMEFT như sau:

$$\sigma_{\text{SMEFT}}^i(\mathbf{c}) = \sigma_{\text{SM}}^i \left[1 + \sum_j^{\text{Nop.}} A_{ij} c_j + \sum_{j,k}^{\text{Nop.}} B_{ijk} c_j c_k \right], \quad (1.3)$$

trong đó thừa số $1/\Lambda^2$ đã được ẩn vào các hệ số c_j . Từ phương trình trên, ta thế lại vào hàm likelihood (1.1) thì chúng ta sẽ thu được hàm likelihood với giá trị là một hàm theo rất nhiều tham số c_j , và nhiệm vụ của luận văn này là tính cực tiểu của hàm likelihood và từ đó tính các khoảng tin cậy của các tham số c_j .

1.5 Sự khác biệt giữa Fiteft và Lilith-2

Fiteft đóng vai trò giải quyết những vấn đề mới xuất hiện khi lượng tham số khớp dữ liệu trở nên quá lớn. Chúng tôi so sánh Fiteft với những cải tiến mới nhất của chương trình Lilith-2 ở luận văn [10]. Với Fiteft, chúng tôi có thể giải quyết được vấn đề khớp dữ liệu cho các tham số SMEFT cho các kết quả thí nghiệm như là thời gian tính toán lớn, phương pháp tính toán phù hợp hơn. Chúng tôi tập trung vào việc khớp một lượng lớn tham số của mô hình SMEFT với tham số hóa tuyến tính, trong khi Lilith-2 chỉ có thể khớp một cách chính xác lượng tham số bé hơn hoặc bằng 2. Để khớp một lượng lớn tham số như vậy, chúng tôi tính ma trận thông tin Fisher, từ đó thành lập ma trận để chuyển đổi từ cơ sở với lượng tham số lớn sang cơ sở với một lượng tham số nhỏ hơn. Một vài tham số sẽ bị suy biến trong ảnh hưởng (đạo hàm) của chúng lên hàm likelihood, đồng thời ảnh hưởng của chúng quá nhỏ lên hàm likelihood, ma trận thông tin Fisher giúp chúng ta xác định được những tổ hợp tuyến tính nào của các tham số là có ảnh hưởng lớn nhất lên hàm likelihood. Để xác định khoảng tin cậy của tham số, chúng tôi sử dụng phương pháp profile likelihood, mang lại kết quả đáng tin cậy hơn so với việc đặt các tham số trở ngại bằng không. Chúng tôi sử dụng một dạng dữ liệu khác là `csv`, thay vì `xml`, với cấu trúc dữ liệu này, người dùng sẽ được tự do hơn trong việc nhập dữ liệu dạng bảng. Tất cả công thức sử dụng của Fiteft được vector và ma trận hóa hoàn toàn, tận dụng tối đa sức mạnh của ma trận, điều này dẫn đến sự cải thiện đáng kể về tốc độ khi tận dụng các thư viện như `numpy`, `pandas`.

Chương 2

TỔNG QUAN

2.1 Mô hình chuẩn (SM)

2.1.1 SM Lagrangian

Nền tảng của SM là lý thuyết trường và các nhóm đối xứng. Các quy tắc này được tóm gọn lại trong hàm mật độ Lagrange (Lagrangian). Lý thuyết trường cho cung cấp các toán tử trường, xây dựng từ trường vô hướng spin-0, trường Dirac spin-1/2, trường vector spin-1. Các toán tử trường, cũng như đạo hàm của chúng được kết hợp để tạo thành các số hạng bất biến Lorentz. Các nhóm đối xứng có vai trò sinh ra tương tác giữa các trường với nhau. Lagrangian của SM có bốn phần chính:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \quad (2.1)$$

$\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ mang thông tin về số hạng động lượng của các trường fermion, và tương tác giữa chúng với các trường gauge boson thông qua cơ chế Yang-Mills. $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ mang thông tin về số hạng động lượng của các trường gauge boson cũng như các số hạng tương tác giữa các trường gauge boson với nhau. $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}$ mang thông tin về số hạng động lượng của trường vô hướng Higgs và số hạng tương tác của trường Higgs với các trường gauge boson, sau khi đối xứng bị phá vỡ bởi cơ chế Higgs thì số hạng tương tác của trường Higgs với các trường gauge boson sẽ sinh ra khối lượng cho các trường gauge boson, số hạng tương tác giữa ba và bốn trường Higgs. $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ mang thông tin về số hạng khối lượng của các trường fermion thông qua tương tác Yukawa của trường fermion với trường Higgs sau khi đối xứng bị phá vỡ.

2.1.2 Bất biến cục bộ Abelian và non-Abelian

Theo lý thuyết Yang-Mills, Lagrangian có thể được áp đặt tính chất bất biến đối với phép biến đổi chuẩn cục bộ, và từ sự bất biến chuẩn cục bộ đó sẽ sinh ra tương tác

giữa các trường tại các điểm khác nhau trong không thời gian bốn chiều. Phép biến đổi chuẩn cục bộ

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\sum_i \alpha^i(x)t^i} \psi(x), \quad (2.2)$$

với $i \in 1, \dots, N$, N là số vi tử của nhóm đối xứng, hệ số $a^i(x)$ là pha bất kỳ phụ thuộc vào tọa độ, t^i là các vi tử của nhóm Lie tương ứng với nhóm đối xứng đang xét. Lagrangian cơ bản nhất là của trường tự do, chỉ chứa số hạng động lượng và số hạng khối lượng, ví dụ là Lagrangian của trường Dirac

$$\mathcal{L}_{\text{free}} \sim \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x). \quad (2.3)$$

Ở đây ta có $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0$ là ký hiệu liên hợp Dirac. Số hạng khối lượng của Lagrangian thì bất biến gauge cục bộ $U(1)$, với vi tử $t = 1$, nhưng số hạng đạo hàm thì không. Để thỏa mãn điều kiện bất biến thì toán tử chứa đạo hàm cần được thay thế bởi đạo hàm hiệp biến

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x)t, \quad (2.4)$$

ở đây g là tham số tự do đại diện cho độ mạnh tương tác, $A_\mu(x)$ là trường vector mới, với phép biến đổi gauge tương ứng

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.5)$$

Dưới phép biến đổi gauge, đạo hàm hiệp biến có biến đổi như sau

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &= [\partial_\mu + igA_\mu(x)t] \psi(x) \\ &\rightarrow \left\{ \partial_\mu + ig \left[A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x)t \right] \right\} \left[e^{-i\alpha(x)t} \psi(x) \right] \\ &= e^{-i\alpha(x)t} [\partial_\mu + igA_\mu(x)t] \psi(x) \\ &= e^{-i\alpha(x)t} D_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dễ dàng thấy được số hạng $\bar{\psi}(x) \gamma^\mu D_\mu \psi(x)$ lúc này sẽ bất biến gauge cục bộ, và kết quả là xuất hiện một trường vector mới A_μ đóng vai trò là hạt truyền tương tác của trường $\psi(x)$. Trường vector mới này cần số hạng động lượng bất biến đối với phép biến đổi gauge, số hạng này được gọi là tensor độ mạnh trường $F_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(F)^{\mu\nu}, \\ F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Lý thuyết Yang-Mills kể trên là dành cho nhóm đối xứng Abelian, ở đó chỉ có một vi tử. Trong trường hợp các vi tử của nhóm không giao hoán với nhau, chúng ta cần thêm giao hoán tử vào trong biến đổi của trường vector và tensor độ mạnh trường

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + igA_\mu(x)t, \\ A_\mu^i(x) &\rightarrow A_\mu^i(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^i(x) + f^{ijk}A_\mu^j\alpha^k, \\ F_{\mu\nu}^i &= \partial_\nu A_\mu^i - \partial_\mu A_\nu^i + gf^{ijk}A_\mu^jA_\nu^k, \end{aligned} \quad (2.8)$$

với

$$[t_i, t_j] = f^{ijk}t_k. \quad (2.9)$$

f^{ijk} là hằng số cấu trúc của đại số của nhóm đối xứng.

2.1.3 Fermion Lagrangian

Lagrangian sau khi áp đặt một nhóm đối xứng cục bộ có dạng như sau

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)i\not{D}_\mu\psi(x) - \sum_i \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i(F^i)^{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

Với $\not{D}_\mu = \gamma^\mu D_\mu$, và γ^μ là các ma trận Dirac. Lagrangian của mô hình chuẩn tuân theo đối xứng $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Với ký $U(1)_Y$ là ký hiệu là nhóm đối xứng của các ma trận unitary một chiều với Y là hypercharge của trường fermion hoặc Higgs, $SU(2)_L$ là nhóm đối xứng của các ma trận special unitary hai chiều cho các trường fermion phân cực trái, L viết tắt của left, $SU(3)_c$ là nhóm đối xứng của các ma trận special unitary ba chiều với c là colorcharge của trường quark.

Các hạt fermion phân cực trái được phân loại theo vector riêng của vi tử T^3 với

$$T^i = \frac{\sigma^i}{2} \quad (2.11)$$

và σ^i là các ma trận Pauli. T^3 sẽ có hai vector riêng

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

lần lượt tương đương với hai trị riêng là $1/2$ và $-1/2$. Thành phần thứ nhất của vector đại diện cho trường fermion với weak isospin (trị riêng) là $1/2$ và thành phần

thứ hai của vector đại diện cho trường fermion với weak isospin $-1/2$. Một lưỡng tuyến $SU(2)$ có thể được biểu diễn như sau

$$\Psi = \alpha(x)|+\rangle + \beta(x)|-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Trong SM, các hạt fermion phân cực trái được sắp xếp thành các lưỡng tuyến $SU(2)_L$ với ba thế hệ

$$\begin{aligned} \Psi_L^i &\equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_R^L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\sigma L} \\ \sigma_L \end{pmatrix}, \\ Q_L^i &\equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

với $i \in \{1, 2, 3\}$ là chỉ số thế hệ fermion. Các fermion phân cực trái, phải được định nghĩa lần lượt

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi, \quad (2.15)$$

với $P_L = (1 - \gamma^5)/2$, $P_R = (1 + \gamma^5)/2$ là các toán tử chiếu. Dưới tác động của vi tử nhóm $U(1)_Y$, các lưỡng tuyến $S(2)_L$ sẽ có trị riêng là hằng số bất kỳ, gọi là hypercharge Y . Các hạt nằm trong cùng một lưỡng tuyến sẽ có cùng hypercharge Y .

Các trường fermion phân cực phải không chịu ảnh hưởng bởi phép biến đổi $SU(2)_L$, tương đương các vector phân cực phải sẽ có trị riêng bằng 0 dưới sự tác động của vi tử trong biểu diễn một chiều của $SU(2)_L$. Từ đó các trường fermion phân cực phải được phân loại theo các đơn tuyến $U(1)_Y$, ngoại trừ neutrino không có phân cực phải

$$\begin{aligned} e_R^i &\equiv e_R, \mu_R, \sigma_R \\ u_R^i &\equiv u_R, c_R, t_R \\ d_R^i &\equiv d_R, s_R, b_R, \end{aligned} \quad (2.16)$$

với $i \in \{1, 2, 3\}$ là chỉ số thế hệ fermion. Nhóm $U(1)$ có vi tử là 1 nên trị riêng của nhóm này là một con số bất kỳ, được ký hiệu là hypercharge Y . Hypercharge của các trường được xác định dựa qua công thức Gell-Mann–Nishijima:

$$Q = T^3 + Y \quad (2.17)$$

Fermion	Q	T^3	Y
$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	0	1/2	-1/2
e_R^L, μ_R^L, τ_R^L	-1	-1/2	-1/2
u_L, c_L, t_L	2/3	1/2	1/6
d_L, s_L, b_L	-1/3	-1/2	1/6
e_R^R, μ_R^R, τ_R^R	-1	0	-1
d_R, s_R, b_R	-1/3	0	-1/3

Bảng 2.1: Các số lượng tử isospin T_3 , hypercharge Y , và điện tích Q của các hạt fermion trong mô hình chuẩn.

với Q là điện tích của các trường, từ đây ta xác định được hypercharge của các hạt như ở bảng 2.1.

Lagrangian đầy đủ khi có mặt của nhóm đối xứng $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ có dạng

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW} = & \sum_{i=1}^3 \bar{\Psi}_L^i(x) i \not{D}_\mu \Psi_L^i(x) + \bar{Q}_L^i(x) i \not{D}_\mu Q_L^i(x) \\ & + \bar{e}_R^i(x) i \not{D}_\mu e_R^i(x) + \bar{u}_R^i(x) i \not{D}_\mu u_R^i(x) + \bar{d}_R^i(x) i \not{D}_\mu d_R^i(x), \end{aligned} \quad (2.18)$$

với các đạo hàm hiệp biến

$$\begin{aligned} D_\mu(L) &= \partial_\mu + ig_w \sum_i W_\mu^i T^i + ig_b B_\mu Y, \\ D_\mu(R) &= \partial_\mu + ig_b B_\mu Y. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nhóm đối xứng còn lại là $SU(3)_c$ chỉ tác động lên một số lượng tử màu của các trường quark, không chịu ảnh hưởng bởi nhóm đối xứng $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Mỗi trường quark ở các thế hệ đều có thể được xếp thành tam tuyến như sau

$$q_f = q_f^r |r\rangle + q_f^g |g\rangle + q_f^b |b\rangle = \begin{pmatrix} q_f^r \\ q_f^g \\ q_f^b \end{pmatrix}, \quad \bar{q}_f = \begin{pmatrix} \bar{q}_f^r & \bar{q}_f^g & \bar{q}_f^b \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

ta có $f \in \{u, d, c, s, t, b\}$ là ký hiệu của các trường quark trong SM, $|r\rangle, |g\rangle, |b\rangle$ là các vector cơ sở trong không gian color ba chiều. Hàm mật độ Lagrange đối xứng $SU(3)_c$ khi này có dạng

$$\mathcal{L} \supset \sum_f \bar{q}_f^i \not{D}_\mu q_f^i - \sum_{a=1}^8 \frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (2.21)$$

với đạo hàm hiệp biến và tensor độ mạnh trường gluon được định nghĩa lần lượt:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{i=1}^8 G_\mu^i \frac{\lambda^i}{2}, \quad (2.22)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + f^{ijk} G_\mu^j G_\nu^k. \quad (2.23)$$

Ta có λ^a là vi tử của nhóm $SU(3)$, các ma trận Gell-Mann, G_μ^a là các trường vector gluon, g_s là hệ số tương tác mạnh. Các ma trận Gell-Mann thỏa hệ thức

$$[\lambda^a, \lambda^b] = if^{abc} \lambda^c, \quad (2.24)$$

với f^{abc} là hằng số cấu trúc của đại số $su(3)$. Từ đây xuất hiện tương tác giữa các trường gluon với nhau.

2.1.4 Gauge Lagrangian

Sau khi đạo hàm hiệp biến được giới thiệu vào trong Lagrangian để đảm bảo bất biến cục bộ, các trường gauge boson xuất hiện dưới dạng tương tác giữa chúng với trường fermion. Số hạng động lượng của trường gauge thỏa bất biến cục bộ có thể được thêm vào một cách đơn giản dưới dạng tensor độ mạnh trường:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu}_i \right) - \left(\sum_{a=1}^8 \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu}_a \right), \quad (2.25)$$

với

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ W_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g_w \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Từ Lagrangian này, chúng ta có thể suy ra được hàm truyền của các trường gauge boson cũng như số hạng tự tương tác của trường W và gluon.

2.1.5 Higgs Lagrangian

Lagrangian ban đầu không có số hạng khối lượng của trường fermion cũng như trường gauge, chẳng hạn như số hạng sau

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{1}{2} m \bar{\psi} \psi = \frac{1}{2} m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (2.27)$$

vì số hạng này không bất biến gauge cục bộ bởi vì spinor phân cực trái biến đổi khác với spinor phân cực phải đối với biến đổi $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Để số hạng khối lượng

xuất hiện, trường gauge cần phải tương tác với trường vô hướng phức ϕ , dưới dạng lưỡng tuyến $SU(2)_L$ với hypercharge Y là $1/2$ tương tự như lưỡng tuyến lepton phân cực trái. Lưỡng tuyến vô hướng có dạng

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Lagrangian của lưỡng tuyến vô hướng này bây giờ có dạng:

$$\mathcal{L} \supset (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi + V(\Phi), \quad (2.29)$$

với số hạng thế năng của trường vô hướng được định nghĩa

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + 1/2 \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (2.30)$$

Thông qua cơ chế phá vỡ đối xứng Higgs, các trường gauge thông qua số hạng chứa đạo hàm hiệp biến của lưỡng tuyến vô hướng sẽ xuất hiện số hạng khối lượng.

Đối xứng bị phá vỡ khi thế Higgs đạt giá trị cực tiểu. Thế năng Higgs đạt cực tiểu khi

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial (\Phi^\dagger \Phi)} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\mu^2 + \lambda \Phi^\dagger \Phi &= 0 \\ \Rightarrow \Phi^\dagger \Phi &= \frac{\mu^2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Sử dụng điều kiện này, chúng ta có thể chọn một giá trị bất kỳ của trường như sau

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (2.32)$$

Ở đây $1/\sqrt{2}$ là hằng số chuẩn hóa. Tại điểm cực tiểu này trường vô hướng có thể được khai triển như sau

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1(x) + i\phi_2(x) \\ i\phi_3(x) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

với $h(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)$ là các trường vô hướng thực. Tiếp tục đặt lưỡng tuyến Higgs sau

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Lagrangian khi đối xứng chưa bị phá vỡ thì vẫn có đối xứng $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, sau khi đối xứng bị phá vỡ thì các trường W_μ^i, B_μ hấp thụ các Goldstone boson $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)$ và có thêm số hạng khối lượng.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\supset (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi \\
&= (\partial_\mu h(x)) \partial^\mu h(x) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}^\top \begin{vmatrix} g_w W_\mu^3 - g_b \frac{B_\mu}{2} & g_w W_\mu^1 - i g_w W_\mu^2 \\ g_w W_\mu^1 + i g_w W_\mu^2 & -g_b \frac{B_\mu}{2} - g_w W_\mu^3 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \\
&= (\partial_\mu h(x)) \partial^\mu h(x) + \frac{1}{8} g_w^2 (h(x) + v)^2 (W^{1\mu} + i W^{2\mu})(W^{1\mu} - i W^{2\mu}) \\
&\quad + \frac{1}{8} (h(x) + v)^2 (W^{3\mu} \quad B^\mu) \begin{pmatrix} g_b^2 & -g_b g_w \\ -g_b g_w & g_w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Ta có số hạng đầu tiên là số hạng động năng của trường Higgs, số hạng thứ hai là tương tác và khối lượng của boson tích điện và số hạng thứ ba là tương tác và khối lượng của boson trung hòa. Bằng cách đặt

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2), \tag{2.36}$$

chúng ta có khối lượng và tương tác của W_μ^\pm boson với trường Higgs

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} g_w^2 (h(x) + v)^2 W_\mu^+ W^{\mu-} &= \frac{1}{4} g_w^2 h(x) h(x) W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} g_w^2 v h(x) W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{4} g_w^2 v^2 W_\mu^+ W^{\mu-} \\
&= \frac{m_w^2}{v^2} h(x) h(x) W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{m_w^2}{v} h(x) W_\mu^+ W^{\mu-} + m_w^2 W_\mu^+ W^{\mu-}. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Khối lượng của hạt W^\pm được đặt là $m_w = g_w v/2$.

Số hạng thứ ba của phương trình (2.35) có dạng ma trận khối lượng kẹp giữa hai lưỡng tuyến, để thấy được các trường vật lý, chúng ta cần phải chéo hóa ma trận khối lượng bằng cách chiếu vector tạo bởi $W^{3\mu}$ và B^μ lên vector riêng chuẩn hóa của ma trận khối lượng. Số hạng này có thể được viết lại dưới dạng

$$\frac{1}{8} (h(x) + v)^2 (W^{3\mu} \quad B^\mu) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

, với M là ma trận khối lượng. Vector riêng chuẩn hóa của ma trận M là

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{g_b^2 + g_w^2}} \begin{pmatrix} g_w \\ g_b \end{pmatrix}, e^2 = \frac{1}{\sqrt{g_b^2 + g_w^2}} \begin{pmatrix} -g_b \\ g_w \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

với trị riêng lần lượt là

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = g_b^2 + g_w^2. \quad (2.40)$$

Xếp các vector riêng thành một ma trận, ta có

$$E = (e^1 \ e^2) = \frac{1}{\sqrt{g_b^2 + g_w^2}} \begin{pmatrix} g_w & -g_b \\ g_b & g_w \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Vì ma trận M là ma trận positive semi-definite, nên ma trận được xây dựng từ vector riêng có tính chất

$$E^\top = E^{-1}. \quad (2.42)$$

Phương trình (2.38) sau khi ma trận khối lượng được chéo hóa có dạng

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(h(x) + v)^2 (W^{3\mu} \quad B^\mu) E \cdot E^\top \cdot M \cdot E \cdot E^\top \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}(h(x) + v)^2 \begin{pmatrix} A_\mu & Z_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ở đây ta có A_μ là trường gauge không khối lượng tương đương với vector trường điện từ và Z_μ là trường gauge boson mới. A_μ, Z_μ được định nghĩa thông qua phép quay sau

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = E^\top \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_b^2 + g_w^2}} \begin{pmatrix} g_w & -g_b \\ g_b & g_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Sau khi đối xứng bị phá vỡ, các trường gauge boson xuất hiện số hạng khối lượng cũng như tương tác của chúng đối với Higgs boson ở phương trình (2.37), (2.43).

2.1.6 Yukawa Lagrangian

Sau khi đối xứng bị phá vỡ thì số hạng khối lượng của fermion có thể được tạo ra bằng cách tương tác với lưỡng tuyến vô hướng $\Phi(x)$ thông qua tương tác Yukawa. Ví dụ cho tương tác Yukawa của lepton

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{lepton Yukawa}} &= \lambda_{e^i} \bar{\Psi}_L^i \cdot \Phi e_R^i + \text{h.c.} \\
&= \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} \bar{e}_L^i (v + h(x)) e_R^i + \text{h.c.} \\
&= \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} (P_L e^i)^\dagger \gamma_0 (v + h(x)) P_R e^i + \text{h.c.} \\
&= \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} e^{i\dagger} P_L^\dagger \gamma_0 (v + h(x)) P_R e^i + \text{h.c.} \\
&= \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} e^{i\dagger} \gamma_0 (v + h(x)) P_R e^i + \text{h.c.} \\
&= \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} e^{i\dagger} \gamma_0 (v + h(x)) P_R e^i + \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} e^{i\dagger} P_R \gamma_0 (v + h(x)) e \\
&= \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} e^{i\dagger} \gamma_0 (v + h(x)) P_R e^i + \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} e^{i\dagger} \gamma_0 (v + h(x)) P_L e^i \\
&= \frac{\lambda_{e^i}}{\sqrt{2}} \bar{e}^i (v + h(x)) e^i.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

h.c. là viết tắt của liên hợp Hermit. Nếu viết Lagrangian đầy đủ cho các hạt mô hình chuẩn, ta có

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{i=1}^3 \lambda_{e^i} \bar{\Psi}_L^i \cdot \Phi e_R^i + \lambda_{u^i} \bar{Q}_L^i \cdot \tilde{\Phi} u_R^i + \lambda_{d^i} \bar{Q}_L^i \cdot \Phi d_R^i + \text{h.c.} , \tag{2.46}$$

với

$$\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \cdot \Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + h(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

Ta có khối lượng của các hạt fermion là

$$m_{e^i} = \frac{\lambda_{e^i} v}{\sqrt{2}}, m_{u^i} = \frac{\lambda_{u^i} v}{\sqrt{2}}, m_{d^i} = \frac{\lambda_{d^i} v}{\sqrt{2}} \tag{2.48}$$

với $\lambda_{e^i}, \lambda_{u^i}, \lambda_{d^i}$ là tham số tự do, dẫn đến việc khối lượng của các hạt fermion cần được xác định chính xác bởi thực nghiệm.

2.2 Mô hình chuẩn hiệu dụng (SMEFT)

SMEFT là sự kết hợp giữa lý thuyết hiệu dụng và mô hình chuẩn, ở đó Lagrangian được xây dựng bằng cách kết hợp các trường có trong mô hình chuẩn. Các số hạng tương tác trong SMEFT có thể mang thứ nguyên bất kỳ lớn hơn bốn (không tính hằng số tương tác), điều này không xuất hiện ở SM do điều kiện tái chuẩn hóa giới hạn thứ nguyên của các toán tử từ bốn trở xuống. Các số hạng tương tác trong SMEFT sẽ được xây dựng từ các toán tử trong SM đi cùng với một hằng số tương tác và các số hạng đó phải thỏa mãn nhóm đối xứng $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Ở mức năng lượng thấp thì SMEFT phải giống SM, nghĩa là hằng số tương tác phải có giá trị rất nhỏ. Số hạng với thứ nguyên bậc bốn sẽ là các số hạng trong SM, số hạng với thứ nguyên bậc năm vi phạm bảo toàn số lepton [11], số hạng với thứ nguyên bậc sáu vi phạm bảo toàn số lepton và baryon [11]. Số hạng bậc năm và sáu không ảnh hưởng tới quá trình liên quan tới hạt Higgs nên sẽ không được bàn luận trong luận văn này. Các quá trình mà chúng ta đang xét chỉ bị ảnh hưởng bởi số hạng bậc sáu, tám nên chúng tôi chỉ xét tới số hạng bậc sáu trong luận văn này vì đóng góp số hạng lớn nhất.

$$\mathcal{L}_{\text{SMEFT}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \sum_i^{\text{N}_{\text{op.}}} c_i O_i^{(6)}. \quad (2.49)$$

Các toán tử ảnh hưởng tới tiên đoán của SMEFT liên quan đến hạt Higgs được liệt kê ở bảng 2.2 theo bài báo [8], với định nghĩa chi tiết hơn ở bài báo [12]. Các toán tử SMEFT đã được áp đặt đối xứng toàn cục (global) $U(2)_q, U(2)_u, U(2)_d$, ở đó các hạt quark ở hai thế hệ đầu được xem như độc lập với thế hệ thứ ba, các thế hệ lepton hoàn toàn độc lập với nhau [8]. Các toán tử SMEFT là sự kết hợp của những toán tử trường và các ma trận sau trong SM:

- Φ : Trường tuyến $SU(2)_L$ của trường vô hướng.
- $\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi$.
- l^p, q^p : Trường tuyến lepton, quark phân cực trái, kèm theo chỉ số thế hệ p, r, s, t , không được liệt kê nếu không cần thiết.
- e^p, ν^p, u^p, d^p : Là các đơn tuyến fermion phân cực phải, kèm theo chỉ số thế hệ p (hoặc r, s, t), không được liệt kê nếu không cần thiết.
- $\overleftrightarrow{D}_\mu, \overleftrightarrow{D}_\mu^I$: Đạo hàm hiệp biến, định nghĩa $\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu \Phi = \Phi^\dagger (iD_\mu \Phi) - (iD_\mu \Phi)^\dagger \Phi$, $\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_\mu^I \Phi = \Phi^\dagger \sigma^I (iD_\mu \Phi) - (iD_\mu \Phi)^\dagger \sigma^I \Phi$, với I là chỉ số ma trận Pauli.

- $X \in \{B_{\mu\nu}, W_{\mu\nu}^i, G_{\mu\nu}^a\}$: Các tensor cường độ trường.
- Q : Lưỡng tuyến quark nặng (top quark, bottom quark) phân cực trái. t, b lần lượt là đơn tuyến phân cực phải của top quark, bottom quark.

Loại	Tên tham số	Toán tử	Loại	Tên tham số	Toán tử
Φ^6	c_H	$(\Phi^\dagger \Phi)^3$	X^3	c_G	$f^{abc} G_{\mu}^{av} G_{\nu}^{bp} G_{\rho}^{c\mu}$
$\Phi^4 D^2$	$c_{H\Box}$	$(\Phi^\dagger \Phi) \Box (\Phi^\dagger \Phi)$		c_W	$\epsilon^{IJK} W_{\mu}^{Iv} W_{\nu}^{Jp} W_{\rho}^{K\mu}$
	c_{HDD}	$(\Phi^\dagger D^{\mu} \Phi)^* (\Phi^\dagger D_{\mu} \Phi)$	f^4	$c_{Qq}^{(1,1)}$	$(\bar{Q} \gamma_{\mu} Q) (\bar{q} \gamma^{\mu} q)$
$\Phi^2 X^2$	c_{HG}	$\Phi^\dagger \Phi G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu}$		$c_{Qq}^{(1,8)}$	$(\bar{Q} \lambda^a \gamma_{\mu} Q) (\bar{q} \lambda^a \gamma^{\mu} q)$
	c_{HB}	$\Phi^\dagger \Phi B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$		$c_{Qq}^{(3,1)}$	$(\bar{Q} \sigma^i \gamma_{\mu} Q) (\bar{q} \sigma^i \gamma^{\mu} q)$
	c_{HW}	$\Phi^\dagger \Phi W_{\mu\nu}^I W^{I\mu\nu}$		$c_{Qq}^{(3,8)}$	$(\bar{Q} \sigma^i \lambda^a \gamma_{\mu} Q) (\bar{q} \sigma^i \lambda^a \gamma^{\mu} q)$
	c_{HWB}	$\Phi^\dagger \sigma^I \Phi W_{\mu\nu}^I B^{\mu\nu}$		$c_{qq}^{(3,1)}$	$(\bar{q} \sigma^i \gamma_{\mu} q) (\bar{q} \sigma^i \gamma^{\mu} q)$
$\Phi^2 f^2 D$	$c_{Hl,11}^{(1)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{l}_1 \gamma^{\mu} l_1)$		$c_{tu}^{(1)}$	$(\bar{t} \gamma_{\mu} t) (\bar{u} \gamma^{\mu} u)$
	$c_{Hl,22}^{(1)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{l}_2 \gamma^{\mu} l_2)$		$c_{tu}^{(8)}$	$(\bar{t} \lambda^a \gamma_{\mu} t) (\bar{u} \lambda^a \gamma^{\mu} u)$
	$c_{Hl,33}^{(1)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{l}_3 \gamma^{\mu} l_3)$		$c_{td}^{(1)}$	$(\bar{t} \gamma_{\mu} t) (\bar{d} \gamma^{\mu} d)$
	$c_{Hl,11}^{(3)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu}^I \Phi) (\bar{l}_1 \sigma^I \gamma^{\mu} l_1)$		$c_{td}^{(8)}$	$(\bar{t} \lambda^a \gamma_{\mu} t) (\bar{d} \lambda^a \gamma^{\mu} d)$
	$c_{Hl,22}^{(3)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu}^I \Phi) (\bar{l}_2 \sigma^I \gamma^{\mu} l_2)$		$c_{Qu}^{(1)}$	$(\bar{Q} \gamma_{\mu} Q) (\bar{u} \gamma^{\mu} u)$
	$c_{Hl,33}^{(3)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu}^I \Phi) (\bar{l}_3 \sigma^I \gamma^{\mu} l_3)$		$c_{Qu}^{(8)}$	$(\bar{Q} \lambda^a \gamma_{\mu} Q) (\bar{u} \lambda^a \gamma^{\mu} u)$
	$c_{He,11}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{e}_1 \gamma^{\mu} e_1)$		$c_{Qd}^{(1)}$	$(\bar{Q} \gamma_{\mu} Q) (\bar{d} \gamma^{\mu} d)$
	$c_{He,22}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{e}_2 \gamma^{\mu} e_2)$		$c_{Qd}^{(8)}$	$(\bar{Q} \lambda^a \gamma_{\mu} Q) (\bar{d} \lambda^a \gamma^{\mu} d)$
	$c_{He,33}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{e}_3 \gamma^{\mu} e_3)$		$c_{tq}^{(1)}$	$(\bar{q} \gamma_{\mu} q) (\bar{t} \gamma^{\mu} t)$
	$c_{Hq}^{(1)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{q} \gamma^{\mu} q)$		$c_{tq}^{(8)}$	$(\bar{q} \lambda^a \gamma_{\mu} q) (\bar{t} \lambda^a \gamma^{\mu} t)$
	$c_{Hq}^{(3)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu}^I \Phi) (\bar{q} \sigma^I \gamma^{\mu} q)$	$\Phi^3 f^2$	$c_{ll,1221}$	$(\bar{l}_1 \gamma_{\mu} l_2) (\bar{l}_2 \gamma^{\mu} l_1)$
	c_{Hu}	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{u}_p \gamma^{\mu} u_r)$		$c_{eH,22}$	$(\Phi^\dagger \Phi) (\bar{l}_2 e_2 \Phi)$
	c_{Hd}	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{d}_p \gamma^{\mu} d_r)$		$c_{eH,33}$	$(\Phi^\dagger \Phi) (\bar{l}_3 e_3 \Phi)$
	$c_{HQ}^{(1)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{Q} \gamma^{\mu} Q)$		c_{uH}	$(\Phi^\dagger \Phi) (\bar{q} Y_u^\dagger u \tilde{\Phi})$
	$c_{HQ}^{(3)}$	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu}^I \Phi) (\bar{Q} \sigma^I \gamma^{\mu} Q)$		c_{tH}	$(\Phi^\dagger \Phi) (\bar{Q} \tilde{\Phi} t)$
	c_{Ht}	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{t} \gamma^{\mu} t)$		c_{bH}	$(\Phi^\dagger \Phi) (\bar{Q} \Phi b)$
	c_{Hb}	$(\Phi^\dagger i \overleftrightarrow{D}_{\mu} \Phi) (\bar{b} \gamma^{\mu} b)$	$\Phi X f^2$	c_{tG}	$(\bar{Q} \sigma^{\mu\nu} T^A t) \tilde{\Phi} G_{\mu\nu}^A$
				c_{tW}	$(\bar{Q} \sigma^{\mu\nu} t) \tau^I \tilde{\Phi} W_{\mu\nu}^I$
				c_{tB}	$(\bar{Q} \sigma^{\mu\nu} t) \tilde{\Phi} B_{\mu\nu}$

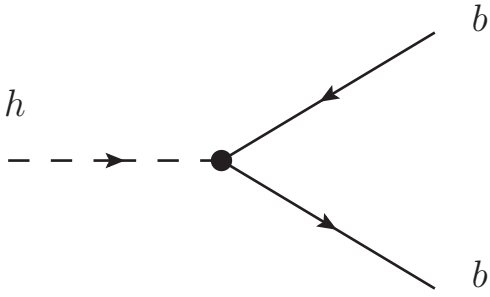
Bảng 2.2: Phân loại, tên gọi của tham số c_i và các toán tử bậc 6 ảnh hưởng đến thí nghiệm Higgs trong cơ sở Warsaw, tham khảo từ bài báo [8] và [3].

Các toán tử SMEFT được chia thành các nhóm [3], xem bảng 2.2:

Φ^6 và $\Phi^4 D^2$: Chứa các toán tử tự tương tác của hạt Higgs cũng như hiệu chỉnh

tương tác giữa trường Higgs với các gauge boson thông qua đạo hàm hiệp biến. Số hạng $(\Phi^\dagger \Phi) \square (\Phi^\dagger \Phi)$ và $(\Phi^\dagger D_\mu \Phi)(\Phi^\dagger D^\mu \Phi)$ ảnh hưởng trực tiếp lên thế năng Higgs cũng như trung bình chân không [13]: $h(x) \rightarrow (1 + c_{H\square} - \frac{1}{4}c_{HDD})h(x)$.

$\Phi^3 f^2$: Chứa các toán tử hiệu chỉnh tương tác 3 Higgs-2 fermion, 2 Higgs-2 fermion, 1 Higgs-2 fermion. Và số hạng 1 Higgs-2 fermion có ảnh hưởng lớn nhất do chứa bình phương của trị trung bình chân không v^2 . Hình 2.1 là ví dụ về tham số có ảnh hưởng lớn nhất trong nhóm: c_{bH} lên kênh phân rã $H \rightarrow b\bar{b}$.

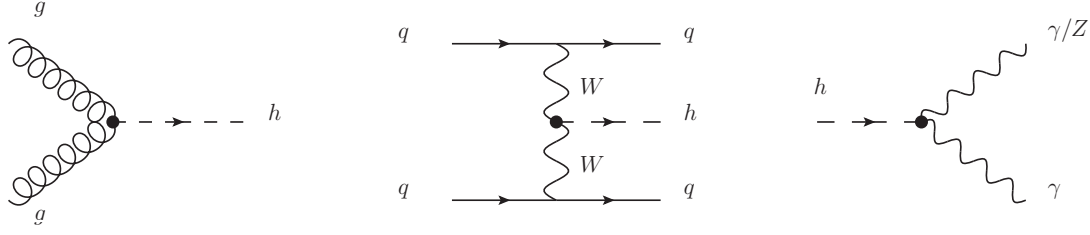


Hình 2.1: Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết: c_{bH} lên kênh phân rã $H \rightarrow b\bar{b}$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.

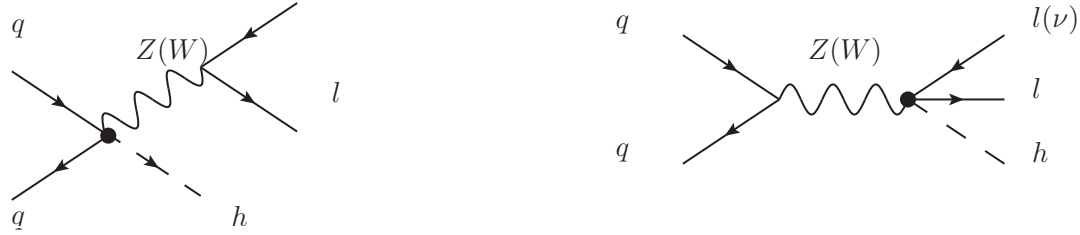
$\Phi^2 X^2$: Chứa số hạng tương tác giữa trường gauge với Higgs boson. Ảnh hưởng lớn nhất của toán tử này là hiệu chỉnh tương tác giữa ba trường gauge boson bởi vì toán tử này có chứa bình phương của trị trung bình chân không v^2 . Hình 2.2 là ví dụ về tham số có ảnh hưởng lớn lên tiên đoán của các bin STXS, lần lượt từ trái sang phải là c_{HG} lên kênh $gg \rightarrow H$, c_{HW} lên kênh $qq \rightarrow Hqq$, c_{HWB} lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$ hoặc $H \rightarrow Z\gamma$.

$\Phi^2 f^2 D$: Chứa các toán tử tương tác giữa trường Higgs, fermion và gauge boson, đáng kể là các số hạng tương tác 1 Higgs-2 fermion-1 gauge boson, 0 Higgs-2 fermion-1 gauge boson, 1 Higgs-2 fermion-0 gauge boson. Hình 2.3 là ví dụ về tham số có ảnh hưởng lớn lên tiên đoán của các bin STXS, lần lượt là c_{Hu} , $c_{Hq}^{(1)}$, c_{Hd} , $c_{Hq}^{(3)}$ lên kênh $qq \rightarrow Z^*H \rightarrow H\ell\ell$ và $c_{Hl,11}^{(1)}$, $c_{Hl,22}^{(1)}$, $c_{Hl,33}^{(1)}$ lên kênh $qq \rightarrow Z^*H \rightarrow H\ell\ell$.

$\Phi X f^2$: Chứa các toán tử tương tác giữa fermion và gauge boson và trường Higgs.

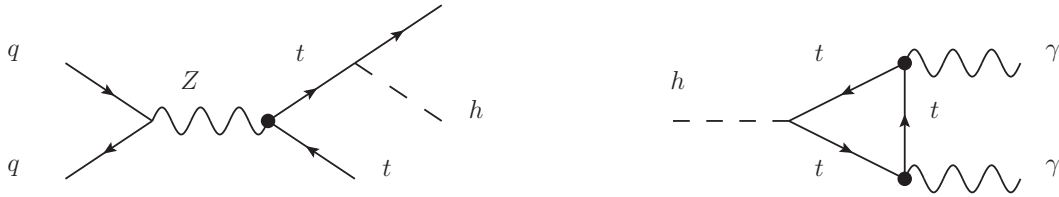


Hình 2.2: Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết, từ trái qua phải: c_{HG} lên kênh $gg \rightarrow H$, c_{HW} lên kênh $qq \rightarrow Hqq$, c_{HWB} lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$ hoặc $H \rightarrow Z\gamma$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.



Hình 2.3: Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết, từ trái qua phải: c_{Hu} , $c_{Hq}^{(1)}$, c_{Hd} , $c_{Hq}^{(3)}$ lên kênh $qq \rightarrow Z^*H \rightarrow H\ell\ell$ và $c_{Hl,11}^{(1)}$, $c_{Hl,22}^{(1)}$, $c_{Hl,33}^{(1)}$ lên kênh $qq \rightarrow Z^*H \rightarrow H\ell\ell$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.

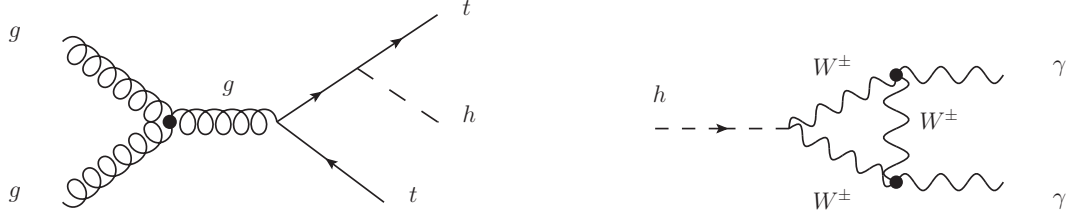
Và hiệu chỉnh tương tác 2 fermion - gauge boson có ảnh hưởng lớn nhất do có chứa trị trung bình chân không v . Hình 2.4 là ví dụ về tham số có ảnh hưởng lớn lên tiên đoán của các bin STXS, lần lượt là tham số c_{tB} , c_{tW} lên kênh $qq \rightarrow ttH$ và c_{tB} , c_{tW} lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$ thông qua hiệu chỉnh tương tác $tt\gamma$.



Hình 2.4: Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết, từ trái qua phải: c_{tB} , c_{tW} lên kênh $qq \rightarrow ttH$ và c_{tB} , c_{tW} lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.

X^3 : Chứa số hạng tương tác giữa các trường gauge boson. Số hạng chứa ba trường gauge W boson sẽ ảnh hưởng gián tiếp lên kênh phân rã $H \rightarrow \gamma\gamma$ thông qua hiệu chỉnh hệ số tương tác của giản đồ một vòng. Hình 2.5 là ví dụ về tham số có ảnh

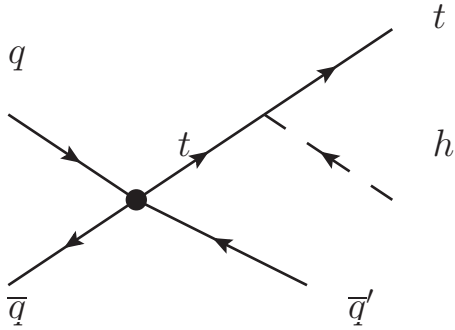
hưởng lớn lên tiên đoán của các bin STXS, lần lượt là tham số c_W lên kênh $gg \rightarrow ttH$ và tham số c_G lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$.



Hình 2.5: Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết, từ trái qua phải: c_G lên kênh $gg \rightarrow ttH$ và tham số c_W lên kênh $H \rightarrow \gamma\gamma$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.

f^4 : Chứa số hạng tương tác bốn fermion. Ảnh hưởng nhiều tới quá trình ttH và tH . Hình 2.6 là ví dụ về tham số có ảnh hưởng lớn lên tiên đoán của các bin STXS, phần lớn các tham số trong nhóm này đều có ảnh hưởng lên kênh $qq \rightarrow ttH$ hoặc kênh $qq \rightarrow tHb$.

Ảnh hưởng của các tham số lên các tiên đoán của lý thuyết được tham khảo từ hình



Hình 2.6: Giản đồ Feynman của ảnh hưởng của toán tử - đại diện bởi tên tham số - SMEFT lên tiên đoán lý thuyết: các toán tử trong nhóm f^4 lên kênh $qq \rightarrow ttH$. Chấm đen là đại diện cho đỉnh tương tác hiệu dụng.

bổ sung 02 của bài báo [8]. Trong luận văn này, chúng tôi không đi sâu vào việc bàn luận về bộ cơ sở đầy đủ của toán tử bậc sáu.

2.3 Làm quen với kết quả từ thực nghiệm

Sau khi đo được hạt Higgs vào năm 2012, thì việc nghiên cứu về hạt Higgs càng được quan tâm. Và thế là mẫu tiết diện tán xạ đơn giản hóa (Simplified template cross

sections - STXS) đã được đề xuất, nó cho phép các nhà vật lý tập trung vào các khía cạnh quan trọng nhất của các va chạm hạt mà không bị lạc trong các chi tiết không cần thiết. Ban đầu kết quả đo đặc của hạt Higgs được chia theo STXS ở stage 0 [14, 15]. Các kênh sinh hạt Higgs ở stage 0 là gluon fusion (ggF hoặc ggH), vector boson fusion (VBF), vector boson + Higgs (VH, $V \in Z, W^\pm$), top+anti-top+Higgs (ttH), top+Higgs (tH). Sau khi có lượng dữ liệu lớn hơn, các thí nghiệm chuyển sang sử dụng STXS stage 1 với cách chia không gian pha chi tiết hơn. Tiếp sau đó, STXS stage 1.1 được đưa ra để xử lý những vấn đề xuất hiện ở cách chia bin stage 1 [16]. Hiện tại STXS stage 1.2 đã được áp dụng ở vài công bố mới nhất của ATLAS và CMS từ năm 2022 trở đi [17–25] và được tổng hợp lại ở [8]. Các kênh sinh hạt chính hiện tại được sử dụng ở STXS stage 1 là [14]

- ggH: $gg \rightarrow H$.
- VBF + VH(hadron): $qq \rightarrow Hqq, qq \rightarrow Z^*H \rightarrow qqH, gg \rightarrow Z^*H \rightarrow qqH, gg \rightarrow W^{\pm*}H \rightarrow qq'H$.
- VH(lepton): $qq \rightarrow Z^*H \rightarrow \ell\ell H, qq \rightarrow W^{\pm*}H \rightarrow \ell\nu_\ell H, gg \rightarrow Z^*H \rightarrow \ell\ell H$.
- ttH: $gg \rightarrow ttH, qq \rightarrow ttH$.
- tH: $gg \rightarrow tHq, qq \rightarrow tHq$, với q là một quark bất kỳ khác ngoài top quark.
- bbH: $gg \rightarrow bbH$. Do đóng góp của kênh này rất nhỏ và sẽ được gộp chung với các bin khác, nếu được nhắc tới, hoặc không được báo cáo.

Các kênh phân rã chính của hạt Higgs được sử dụng ở stage 1 là: $H \rightarrow ff, VV, Z\gamma, \gamma\gamma$, với $V \in \{Z, W^\pm\}$ là hạt vector boson, $f \in \{\mu, \tau, b\}$ là các hạt fermion, γ là hạt photon. f được hiểu là f và \bar{f} . Chúng được đại diện bởi tỉ lệ phân rã (BR-branching fraction):

$$BR_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_H}, \quad i \in H \rightarrow \{ff, VV, Z\gamma, \gamma\gamma\}, \quad (2.50)$$

ở đây ta có Γ_i là ký hiệu là độ rộng phân rã của kênh i , và Γ_H là độ rộng phân rã toàn phần của hạt Higgs. Đại lượng vật lý đo được có thể là tiết diện tán xạ $y = \sigma(i \rightarrow H)_k \times BR(H \rightarrow f)$, trong đó $\sigma(i \rightarrow H)_k$ là tiết diện tán xạ cho quá trình sinh hạt Higgs $i \rightarrow H$ tương ứng với không gian pha k của các hạt trạng thái cuối, $BR(H \rightarrow f)$ là tỉ lệ phân nhánh cho quá trình rã $H \rightarrow f$, với f là một trong những kênh phân nhánh của hạt Higgs. Kết quả thí nghiệm về Higgs có thể được báo cáo dưới bất kỳ sự kết hợp nào của: tiết diện tán xạ của kênh sinh i tích phân trên không gian pha k của hạt trạng thái cuối, và kênh phân rã f . Phổ biến nhất là tích

của chúng

$$\sigma(i \rightarrow H)_k \times \text{BR}(H \rightarrow f), \quad (2.51)$$

hoặc là đại lượng tương tự được chuẩn hóa với giá trị tiên đoán SM, gọi là độ mạnh tín hiệu(signal strength)

$$\frac{\sigma(i \rightarrow H)_k \times \text{BR}(H \rightarrow f)}{\sigma(i \rightarrow H)_k^{\text{SM}} \times \text{BR}(H \rightarrow f)^{\text{SM}}}. \quad (2.52)$$

Để thuận tiện hơn cho việc tính toán, chúng tôi sẽ phân loại các kết quả thí nghiệm theo hai yếu tố là kênh sinh và kênh phân rã. Nghĩa là chỉ số i và k sẽ tạo thành một hệ cơ sở cho kênh sinh và chỉ số f sẽ tạo thành một hệ cơ sở cho kênh phân rã, cụ thể hơn mỗi kênh sinh sẽ tương ứng với một mảng bất kỳ trong bảng 2.3,2.4,2.5,2.6. Ví dụ

$$(\sigma_i \times \text{BR}_j) \rightarrow \begin{cases} (\sigma_{\text{gg} \rightarrow \text{ZH}, > 2\text{jet}, 250 < p_T^Y < \infty} \times \text{BR}_{ff}) \\ (\sigma_{\text{qq} \rightarrow \text{Hqq}, 0\text{jet}, 0 < p_T^H < \infty} \times \text{BR}_{ZZ}) \\ \dots \end{cases} \quad (2.53)$$



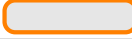



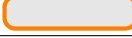


Việc chia các bin được thể hiện chi tiết hơn ở các bảng 2.3 cho VBF+VH(had) bin, bảng 2.4 cho ggF bin, bảng 2.5 cho VH(lep) bin, bảng 2.6 cho ttH bin. Đây là điều xuất chia bin cho STXS stage 1.2, theo trang web [26]. Các thí nghiệm thông thường sẽ gộp kết quả đo của các bin với không gian nhỏ thành một bin với không gian pha lớn hơn khi họ không có đủ dữ liệu cho những bin nhỏ đó.

$p_T^H \rightarrow$		0	200	∞
Njet	m_{jj}			
0				
1				
2	0			
	60			
	120			
	350			
	700			
	1000			
	1500			
	∞			


Bảng 2.3: Các bin của quá trình VBF + VH(hadron) ở quá trình 1.2, mỗi miền nằm trong vùng biên màu vàng tương đương với một vùng trong không gian pha [26]. Phần trống ở cột m_{jj} được hiểu là không tồn tại vì m_{jj} chỉ tồn tại khi $N_{\text{jet}} > 1$.

$p_T^H \rightarrow$		0	10	60	120	200	300	450	600	∞
Njet	m_{jj}									
0										
1										
2	0									
	350									
	700									
	1000									
	1500									
	∞									

Bảng 2.4: Các bin của quá trình ggF ở quá trình 1.2, mỗi miền nằm trong vùng biên màu vàng tương đương với một vùng trong không gian pha [26]. Phần trống ở cột m_{jj} được hiểu là không tồn tại vì m_{jj} chỉ tồn tại khi $N_{\text{jet}} > 1$.

$p_T^V \rightarrow$		0	75	150	250	400	∞
	Njet						
$q\bar{q}' \rightarrow WH$	0						
	1						
	$2 - \infty$						
$q\bar{q} \rightarrow ZH$	0						
	1						
	$2 - \infty$						
$gg \rightarrow ZH$	0						
	1						
	$2 - \infty$						

Bảng 2.5: Các bin của quá trình VH ở quá trình 1.2, mỗi miền nằm trong vùng biên màu vàng tương đương với một vùng trong không gian pha [26].

$p_T^H \rightarrow$	0	60	120	200	300	400	∞
ttH							

Bảng 2.6: Các bin của quá trình ttH ở quá trình 1.2, mỗi miền nằm trong vùng biên màu vàng tương đương với một vùng trong không gian pha [26]. Giai đoạn 1.2 không phân biệt các bin theo số jet.

2.4 SMEFT và tham số hóa tuyến tính

Từ phần này trở đi, các phép toán ma trận được sử dụng được giải thích ở phụ lục A.3. Các ma trận, vector tham gia vào các bước tính toán phải thỏa hình dạng liệt kê ở phụ lục A.3. Các phép toán đạo hàm theo một ma trận, vector nên tham khảo phụ lục A.1. Lagrange tương tác của SMEFT trong hệ cơ sở WARSAW được viết như sau [3]:

$$\mathcal{L}_{\text{SMEFT}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{\Lambda^2} \sum_i^{\text{Nop.}} c_i O_i^{(6)}, \quad (2.54)$$

ở đây ta có $c_i^{(6)}$ là các hệ số thực, $O_i^{(6)}$ là các toán tử bậc 6 theo thứ nguyên khối lượng, Λ là hệ số có thứ nguyên là khối lượng, nó tượng trưng cho khối lượng của một hạt truyền tương tác ở một mức năng lượng cao hơn rất nhiều so với mức năng lượng hiện tại của SM. Trong luận văn này, chúng ta chỉ xét những toán tử bậc 6 và bỏ qua đóng góp của toán tử bậc 8 trở lên vì đóng góp chúng nhỏ hơn hơn $1/\Lambda^2$ so với các toán tử bậc 6, và độ nhạy hiện tại của các thí nghiệm còn rất thấp để có thể đo được ảnh hưởng của các toán tử bậc cao hơn 6. Từ Lagrangian trên, ta có thể tham số hóa tiết diện tán xạ của bin i trong SMEFT như sau:

$$\sigma_{\text{SMEFT}}^i(\mathbf{c}) = \sigma_{\text{SM}}^i \left[1 + \sum_j^{\text{Nop.}} A_{ij}^{\text{prod.}} c_j + \sum_{j,k}^{\text{Nop.}} B_{ijk}^{\text{prod.}} c_j c_k \right], \quad (2.55)$$

trong đó thừa số $1/\Lambda^2$ đã được ẩn vào các hệ số c_j , $A_{ij}^{\text{prod.}}$ đại diện cho sức ảnh hưởng của số hạng giao thoa của tham số c_j lên bin thứ i của tiên đoán lý thuyết của tiết diện tán xạ và số hạng này tỉ lệ tuyến tính với tham số c_i . $B_{ijk}^{\text{prod.}}$ là ảnh hưởng của số hạng thuần vật lý mới của hai tham số c_j, c_k lên tiên đoán lý thuyết của tiết diện tán xạ của bin i , số hạng này tỉ lệ với tích hai tham số c_j, c_k . Ở luận văn này, chúng tôi chỉ xét số hạng giao thoa $A_{ij}^{\text{prod.}}$, những số hạng này có định nghĩa

$$A_{ij}^{\text{prod.}} = 2 \int^{\text{bin}_i} d\text{IRe}[O^{\text{SM}} O_j^{(6)}] / \sigma_{\text{SM}}^{\text{bin}_i}. \quad (2.56)$$

Đồng thời, ta cũng có một biểu thức tương tự cho tiên đoán lý thuyết cho độ rộng phân rã đối với bin i của hạt Higgs trong SMEFT:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{SMEFT}}^i(\mathbf{c}) &= \Gamma_{\text{SM}}^i \left[1 + \sum_j^{\text{Nop.}} A_{ij}^{\text{decay}} c_j + \sum_{j,k}^{\text{Nop.}} B_{ijk}^{\text{decay}} c_j c_k \right], \\ \Gamma_{\text{SMEFT}}^{\text{H}}(\mathbf{c}) &= \sum_i \Gamma_{\text{SMEFT}}^i(\mathbf{c}) = \Gamma_{\text{SM}}^{\text{H}} \left[1 + \sum_i \frac{\Gamma_{\text{SM}}^i}{\Gamma_{\text{SM}}^{\text{H}}} \sum_j^{\text{Nop.}} A_{ij}^{\text{decay}} c_j + \frac{\Gamma_{\text{SM}}^i}{\Gamma_{\text{SM}}^{\text{H}}} \sum_{j,k}^{\text{Nop.}} B_{ijk}^{\text{decay}} c_j c_k \right]\end{aligned}\quad (2.57)$$

Từ các biểu thức trên, chúng tôi sẽ biểu diễn tiên đoán lý thuyết của các đại lượng vật lý dưới dạng tổng quát như sau, bỏ qua số hạng bậc hai:

$$\begin{aligned}\sigma_i^{\text{SMEFT}}(\mathbf{c}) &= \sigma_i^{\text{SM}}(1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}})^\top \cdot \mathbf{c}), \\ \Gamma_i^{\text{SMEFT}}(\mathbf{c}) &= \Gamma_i^{\text{SM}}(1 + (\mathbf{a}_i^{\text{decay}})^\top \cdot \mathbf{c}), \\ \Gamma_{\text{H}}^{\text{SMEFT}}(\mathbf{c}) &= \Gamma_{\text{H}}^{\text{SM}}(1 + (\mathbf{a}_{\text{H}}^{\text{decay}})^\top \cdot \mathbf{c}).\end{aligned}\quad (2.58)$$

Ở đây vector $\mathbf{a}_i^{\text{prod.}}$ ($\mathbf{a}_i^{\text{decay}}$) là vector tham số tuyến tính của kênh sinh (phân rã) i của hạt Higgs, $\mathbf{a}_{\text{H}}^{\text{decay}}$ là vector tham số tuyến tính của độ rộng phân rã toàn phần của hạt Higgs. Bổ sung cuối cùng của tham số hóa tuyến tính là hệ số acceptance. Mỗi bin phân rã sẽ bị ảnh hưởng của hệ số acceptance, mà hệ số acceptance sẽ phụ thuộc vào một vài tham số SMEFT nhất định. Khi này độ rộng phân rã của kênh i phải được biến đổi

$$\Gamma_j^{\text{SMEFT}} \rightarrow \Gamma_j^{\text{SMEFT}} \times [1 + (\mathbf{a}_{i+j}^{\text{acc}})^\top \cdot \mathbf{c}], \quad (2.59)$$

với $\mathbf{a}_{i+j}^{\text{acc}}$ là vector chứa các hệ số tương ứng với vector các tham số \mathbf{c} của acceptance của từng bin đo đạc, và giá acceptance chỉ phụ thuộc vào một vài kênh sinh i và phân rã j của bin đang xét. Cần chú ý $i + j$ là một chỉ số riêng biệt cần được cung cấp bởi người dùng. Hiện tại thì chỉ có kênh phân rã ($\forall \sigma_i, \text{H} \rightarrow \text{ZZ}^* \rightarrow 4\ell$), ($\text{ggF}, \text{H} \rightarrow \text{WW}^* \rightarrow \ell\nu\ell\nu$), ($\text{qq} \rightarrow \text{Hqq}, \text{H} \rightarrow \text{WW}^* \rightarrow \ell\nu\ell\nu$) bị ảnh hưởng bởi hệ số acceptance [8]. Bài báo [18] sử dụng acceptance phụ thuộc phi tuyến vào các tham số SMEFT, Fiteft đã áp dụng cách tham số hóa này là một trường hợp đặc biệt $\Gamma_j \rightarrow \Gamma_j \times f(\mathbf{c})$. Vì các nghiên cứu gần đây ưu tiên sử dụng tham số hóa tuyến tính cho acceptance nên chúng tôi sẽ không đi sâu vào trường hợp đặc biệt này.

Bây giờ từ một đại lượng vật lý đặc trưng bất kỳ được khớp giá trị bởi thực nghiệm chúng ta có thể dẫn ra tiên đoán của đại lượng vật lý trong SMEFT thông qua giá trị của đại lượng đó trong SM và các hệ số tham số hóa tuyến tính trong SMEFT.

Chúng tôi ví dụ một vài cách tham số hóa tiên đoán các đại lượng vật lý trong SMEFT sau đây, với SMEFT ký hiệu là E. Đại lượng phổ biến nhất là độ mạnh tín hiệu (signal strength-SS)

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_i \text{BR}_j}{\sigma_i^{\text{SM}} \text{BR}_j^{\text{SM}}} &\rightarrow \frac{\sigma_i^{\text{E}} \text{BR}_j^{\text{E}}}{\sigma_i^{\text{SM}} \text{BR}_j^{\text{SM}}} = \frac{\sigma_i^{\text{E}}}{\sigma_i^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_j^{\text{E}}}{\Gamma_H^{\text{E}}} \frac{\Gamma_H^{\text{SM}}}{\Gamma_j^{\text{SM}}} \\
&= \frac{\sigma_i^{\text{E}}}{\sigma_i^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_j^{\text{E}}}{\Gamma_j^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_H^{\text{SM}}}{\Gamma_H^{\text{E}}} \\
&= [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] [1 + (\mathbf{a}_j^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] [(1 + \mathbf{a}_{i+j}^{\text{acc}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] / [1 + (\mathbf{a}_H^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] \\
&= \begin{cases} [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}} + \mathbf{a}_j^{\text{decay}} + \mathbf{a}_{i+j}^{\text{acc}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] / [1 + (\mathbf{a}_H^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] \\ [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}} + \mathbf{a}_j^{\text{decay}} + \mathbf{a}_{i+j}^{\text{acc}} - \mathbf{a}_H^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}]. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Từ đó có thể dẫn ra một cách đơn giản:

$$\begin{aligned}
\sigma_i \text{BR}_j &\rightarrow \sigma_i^{\text{E}} \text{BR}_j^{\text{E}} = \sigma_i^{\text{SM}} \text{BR}_j^{\text{SM}} \frac{\sigma_i^{\text{E}}}{\sigma_i^{\text{SM}}} \frac{\text{BR}_j^{\text{E}}}{\text{BR}_j^{\text{SM}}} \\
&= \sigma_i^{\text{SM}} \text{BR}_j^{\text{SM}} \times \begin{cases} [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}} + \mathbf{a}_j^{\text{decay}} + \mathbf{a}_{i+j}^{\text{acc}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] / [1 + (\mathbf{a}_H^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] \\ [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}} + \mathbf{a}_j^{\text{decay}} + \mathbf{a}_{i+j}^{\text{acc}} - \mathbf{a}_H^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}]. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Và cũng có loại kết quả khác biệt ở cách kết hợp của σ và BR ở bài báo[2]

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_i \text{BR}_Z}{\text{BR}_Z^{\text{SM}}} &\rightarrow \frac{\sigma_i^{\text{E}} \text{BR}_Z^{\text{E}}}{\text{BR}_Z^{\text{SM}}} = \sigma_i^{\text{SM}} \frac{\sigma_i^{\text{E}}}{\sigma_i^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_Z^{\text{E}}}{\Gamma_H^{\text{E}}} \frac{\Gamma_H^{\text{SM}}}{\Gamma_Z^{\text{SM}}} \\
&= \sigma_i^{\text{SM}} \frac{\sigma_i^{\text{E}}}{\sigma_i^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_Z^{\text{E}}}{\Gamma_Z^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_H^{\text{SM}}}{\Gamma_H^{\text{E}}} \\
&= \sigma_i^{\text{SM}} [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] [1 + (\mathbf{a}_Z^{\text{decay}} + \mathbf{a}_{i+j}^{\text{acc}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] / [1 + (\mathbf{a}_H^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] \\
&= \sigma_i^{\text{SM}} \times \begin{cases} [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}} + \mathbf{a}_Z^{\text{decay}} + \mathbf{a}_Z^{\text{acc}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] / [1 + (\mathbf{a}_H^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}] \\ [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{prod.}} + \mathbf{a}_Z^{\text{decay}} + \mathbf{a}_Z^{\text{acc}} - \mathbf{a}_H^{\text{decay}})^{\top} \cdot \mathbf{c}]. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\text{BR}_i}{\text{BR}_Z} &\rightarrow \frac{\text{BR}_i^E}{\text{BR}_Z^E} = \frac{\Gamma_i^E \Gamma_H^E}{\Gamma_H^E \Gamma_Z^E} = \frac{\Gamma_i^E}{\Gamma_Z^E} \\
&= \frac{\Gamma_i^E}{\Gamma_i^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_i^{\text{SM}}}{\Gamma_H^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_H^{\text{SM}}}{\Gamma_Z^{\text{SM}}} \frac{\Gamma_Z^{\text{SM}}}{\Gamma_Z^E} \\
&= \frac{\text{BR}_i^{\text{SM}}}{\text{BR}_Z^{\text{SM}}} \times \begin{cases} [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{decay}} + \mathbf{a}_i^{\text{acc}})^\top \cdot \mathbf{c}] / [1 + (\mathbf{a}_Z^{\text{decay}} + \mathbf{a}_Z^{\text{acc}})^\top \cdot \mathbf{c}] \\ [1 + (\mathbf{a}_i^{\text{decay}} - \mathbf{a}_Z^{\text{decay}} + \mathbf{a}_i^{\text{acc}} - \mathbf{a}_Z^{\text{acc}})^\top \cdot \mathbf{c}] \end{cases} .
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4\ell$ là Z để cho ngắn gọn. Ở dòng cuối cùng của các ví dụ (2.60), (2.62), chúng tôi đã lấy khai triển Taylor của tử số theo vector tham số \mathbf{c} và bỏ đi toán tử bậc hai của \mathbf{c} . Chúng ta có thể khai triển Taylor tương tự cho phép chia để có được biểu diễn hoàn toàn tuyến tính hóa của tiên đoán đại lượng vật lý trong SMEFT. Nhưng theo kết quả của bài báo gần nhất [8] thì việc làm này sẽ khiến việc khớp dữ liệu mất đi tính chính xác vì giá trị của mẫu số liên quan đến ảnh hưởng của SMEFT lên phân rã của hạt Higgs khá là lớn, nên mẫu số có thể chạy đến giá trị 0 dẫn đến việc khiến tiên đoán của SMEFT bị phân kỳ, và lưu ý quan trọng này sẽ bị bỏ qua nếu chúng ta gần đúng giá trị của mẫu số. Việc giữ nguyên mẫu số sẽ ràng buộc các của tham số không được phép trở nên quá lớn, khiến hàm likelihood trở nên bất đối xứng và khiến hàm likelihood không giải tích nữa. Nếu tham số lớn ra ngoài vùng này thì đóng góp của toán tử bậc 8 là không nhỏ, và việc bỏ qua toán tử bậc 8 sẽ không còn đúng. Chúng tôi cung cấp cả hai lựa chọn trong Fiteft cho việc gần đúng mẫu số hoặc là giữ nguyên mẫu số.

Từ các ví dụ (2.60), (2.61), (2.62), (2.63), chúng tôi sẽ tổng quát hóa tiên đoán của các đại lượng vật lý như sau:

$$\mathbf{y}^{\text{SMEFT}}(\mathbf{c}) = \begin{cases} \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{N} \cdot \mathbf{c}) / (1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}) & (2.64) \\ \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + (\mathbf{N} - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{c}), & (2.65) \end{cases}$$

với \mathbf{N} là viết tắt của ma trận hệ số nằm trên tử số (numerator)

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1^{\text{N.}} + \mathbf{a}_1^{\text{acc}})^\top \\ (\mathbf{a}_2^{\text{N.}} + \mathbf{a}_2^{\text{acc}})^\top \\ \dots \\ (\mathbf{a}_N^{\text{N.}} + \mathbf{a}_N^{\text{acc}})^\top \end{pmatrix}, \tag{2.66}$$

với a_i^N sẽ tùy thuộc vào đặc trưng của đại lượng vật lý, lần lượt là $a_i^{\text{prod.}}$ cho phương trình (2.60), (2.61), (2.62), a_i^{decay} cho phương trình (2.63). Tương tự a_i^{acc} lần lượt là a_{i+j}^{acc} cho phương trình (2.60), (2.61), a_Z^{acc} cho phương trình (2.62), $a_{i-Z}^{\text{acc}} = a_i^{\text{acc}} - a_Z^{\text{acc}}$ cho phương trình (2.62). \mathbf{D} là viết tắt của ma trận hệ số nằm dưới mẫu số (denominator)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1^D)^\top \\ (\mathbf{a}_2^D)^\top \\ \dots \\ (\mathbf{a}_N^D)^\top \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

với a_i^N sẽ tùy thuộc vào đặc trưng của đại lượng vật lý, lần lượt là a_i^{decay} cho phương trình (2.60), (2.61), (2.62), a_Z^{decay} cho phương trình (2.63).

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP LIKELIHOOD ĐỂ TÌM KHOẢNG TIN CẬY

3.1 Hàm log-likelihood

3.1.1 Hàm log-likelihood âm 1 chiều cho phân bố Gaussian

Hàm likelihood là một hàm vô hướng phụ thuộc vào một vài tham số θ của một phân bố xác suất nào đó khi áp dụng cho một kết quả đo x nhất định, ký hiệu là:

$$\mathcal{L}_\alpha(\theta|x), \quad (3.1)$$

với α là một phân bố xác suất bất kỳ. Giá trị của hàm likelihood là giá trị của hàm phân bố xác suất α tương ứng $f_\alpha(x|\theta)$ tại điểm x với các tham số đặc trưng θ :

$$\mathcal{L}_\alpha(\theta|x) = f_\alpha(x|\theta). \quad (3.2)$$

Giả sử ta có thí nghiệm đo được các biến độc lập x_i tuân theo một hàm phân bố mật độ nào đó chưa biết. Để xác định tính chất của hàm phân bố này, chúng ta sẽ sử dụng hàm likelihood. Đầu tiên cần phải xác định hàm phân bố để xác định hàm likelihood, việc chọn hàm likelihood tùy thuộc vào lượng dữ liệu, độ đối xứng, biến dạng của các điểm dữ liệu. Nếu chúng ta có một lượng dữ liệu đủ lớn, thì phân bố sẽ hội tụ về phân bố chuẩn. Chúng ta luôn có thể coi là các điểm dữ liệu tuân theo phân bố Gaussian với trung bình và độ lệch chuẩn lần lượt là μ_0, σ_0 . Sau khi chọn được loại phân bố cho các giá trị đo đạc, chúng ta có thể bắt đầu ước lượng các tham số đặc trưng của phân bố đó bằng cách sử dụng hàm likelihood. Ở trong luận văn này, chúng ta sẽ giả sử các điểm dữ liệu tuân theo phân bố chuẩn. Nhiệm vụ của chúng ta là xác định tham số μ_0, σ_0 ban đầu thông qua những điểm đo đạc x_i . Công cụ để xác định hai tham số trên chính là hàm likelihood phụ thuộc vào hai biến μ, σ với giá trị

cho trước là các điểm đo đạc x_i

$$\begin{aligned} L(\sigma, \mu | x_1, \dots, x_i) &= f(x_1, \dots, x_N | \sigma, \mu) = \prod_{i=1}^N f(x_i | \sigma, \mu) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\sum_i \frac{-(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ở đây chúng ta đã giả sử các biến ngẫu nhiên tuân theo phân bố chuẩn với trị trung bình μ và độ lệch chuẩn σ . Để thuận lợi hơn cho việc tính toán, thì chúng ta sẽ lấy log của hàm likelihood trên và nhân cho -2:

$$\mathcal{L}(\sigma, \mu) = -2 \ln[L(\sigma, \mu | x_1, \dots, x_i)] = -2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) + \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}. \quad (3.4)$$

Hàm này được gọi là hàm log-likelihood(âm). Giá trị tham số tại điểm cực tiểu của hàm số này sẽ được sử dụng để ước lượng giá trị tham số thực μ_0, σ_0 (chúng ta không bao giờ biết chính xác được tham số này). Hàm log-likelihood đạt cực tiểu khi đạo hàm của hàm số bằng không:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\sigma, \mu)}{\partial \mu} &= 0 \Leftrightarrow \mu = \hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\sigma, \mu = \hat{\mu})}{\partial \sigma} &= 0 \Leftrightarrow \sigma^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Đại lượng $\mathcal{L}(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ được gọi là cực tiểu của log-likelihood, hoặc nếu sử dụng $L(\hat{\mu})$ thì sẽ được gọi là cực đại likelihood - Maximum likelihood. $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ được gọi là ước lượng cực đại likelihood (MLE-maximum likelihood estimator), tương đương với ước lượng cực tiểu của log-likelihood(âm). MLE chỉ là ước lượng của giá trị thực nên ta cần phải xác định độ tốt của ước lượng đó, và công cụ để xác định độ tốt của MLE là khoảng tin cậy (confident interval - CI). Thông thường kết quả sai số của MLE sẽ được báo cáo lại là khoảng tin cậy 68% của tham số đó. Kết quả cuối cùng thông thường được báo lại dưới dạng:

$$\mu = \hat{\mu}_{-\Delta_{\mu}^-(68\%)}^{+\Delta_{\mu}^+(68\%)}, \quad (3.6)$$

với

$$\mathcal{L}(\hat{\sigma}, \mu = \hat{\mu} \pm \Delta_{\mu}^{\pm}(68\%)) - \mathcal{L}(\hat{\sigma}, \hat{\mu}) = 1. \quad (3.7)$$

Vì khoảng tin cậy chỉ phụ thuộc chỉ phụ thuộc và hiệu số giữa cực tiểu log-likelihood và giá trị đang xét, để tiện lợi, chúng ta sẽ đặt hiệu số đó như sau:

$$\Delta\mathcal{L}(\mu) \equiv \mathcal{L}(\hat{\sigma}, \mu) - \mathcal{L}(\hat{\sigma}, \hat{\mu}). \quad (3.8)$$

Với một hàm likelihood đơn giản như phương trình (3.4), chúng ta có thể khai triển hàm likelihood xung quanh điểm cực tiểu của nó tới bậc hai theo μ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu) &= \mathcal{L}(\hat{\sigma}, \hat{\mu}) + \frac{\partial \mathcal{L}(\sigma, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{\sigma=\hat{\sigma}, \mu=\hat{\mu}} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\sigma, \mu)}{\partial \mu^2} (\mu - \hat{\mu})^2 \\ &= \mathcal{L}(\hat{\sigma}, \hat{\mu}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2} (\mu - \hat{\mu})^2 \\ \Rightarrow \Delta\mathcal{L}(\mu) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2} (\mu - \hat{\mu})^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Với định nghĩa của $\Delta\mathcal{L}(\mu)$, ta có:

$$\Delta_{\hat{\mu}}^{\pm} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (3.10)$$

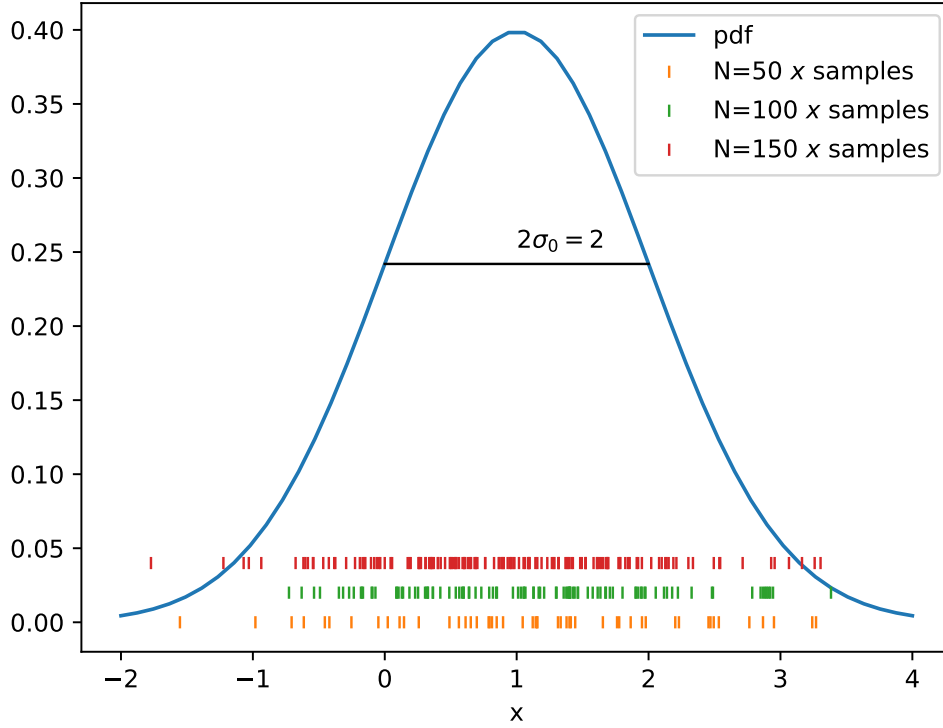
Từ kết quả này chúng ta thấy được với càng nhiều dữ liệu thì sai số của MLE sẽ giảm dần theo căn bậc hai của lượng dữ liệu.

Sau đây sẽ là một ví dụ về xác định khoảng tin cậy. Chúng ta bắt đầu bằng việc gieo $N = \{50, 100, 150\}$ điểm x được phân bố dựa theo hàm phân bố mật độ Gaussian với trị trung bình và độ lệch chuẩn lần lượt là $\mu_0 = 1, \sigma_0 = 1$, các điểm gieo được biểu diễn ở hình 3.1. Từ những điểm gieo trên, ta có thể tính được :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0 &= 1.14, & \hat{\sigma}_0 &= 1.27, \\ \hat{\mu}_1 &= 1.12, & \hat{\sigma}_1 &= 0.93, \\ \hat{\mu}_2 &= 0.93, & \hat{\sigma}_2 &= 0.94. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Theo công thức (3.4),(3.8), ta vẽ được hàm $\Delta\mathcal{L}(\mu)$, tương đương đường nét liền ở hình 3.2, ta có thể dễ dàng xác định khoảng tin cậy 68% là điểm giao nhau của đường $y = 1$ với hàm log-likelihood:

$$\begin{aligned} \Delta_{\hat{\mu}_0}^{\pm} &= 0.16, & \rightarrow \mu_0 &= 1.14_{-0.16}^{+0.16}, \\ \Delta_{\hat{\mu}_1}^{\pm} &= 0.096, & \rightarrow \mu_1 &= 1.12_{-0.096}^{+0.096}, \\ \Delta_{\hat{\mu}_2}^{\pm} &= 0.079, & \rightarrow \mu_2 &= 0.93_{-0.079}^{+0.079}. \end{aligned} \quad (3.12)$$



Hình 3.1: Các điểm gieo của phân bố Gaussian với trị trung bình là 1 và độ lệch chuẩn là 1. Đường nét liền là hàm mật độ phân bố của điểm x , đường kẻ dọc là các điểm gieo theo trục x .

Từ công thức giải tích 3.10, chúng ta cũng có thể tính được:

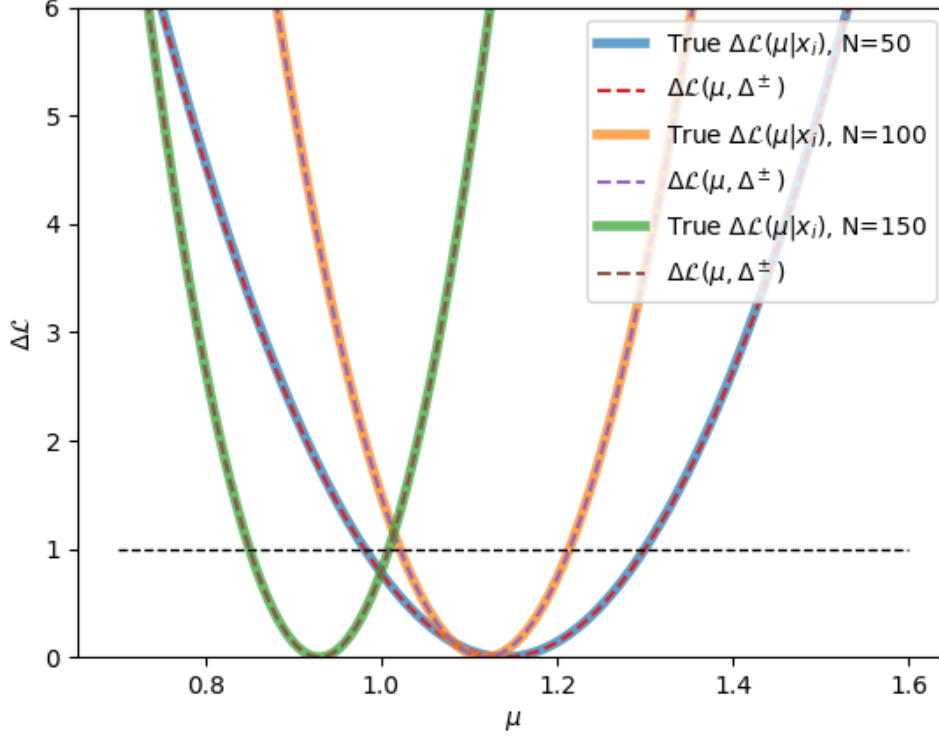
$$\begin{aligned}\Delta_{\hat{\mu}_0}^{\pm} &= \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{50}} = 0.16, \\ \Delta_{\hat{\mu}_1}^{\pm} &= \frac{\hat{\sigma}_1}{\sqrt{100}} = 0.096, \\ \Delta_{\hat{\mu}_2}^{\pm} &= \frac{\hat{\sigma}_2}{\sqrt{150}} = 0.079.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Ta thấy được kết quả giải tích khớp hoàn toàn với kết quả của việc vẽ hình. Từ kết quả của khoảng tin cậy $\Delta_{\hat{\mu}_i}$ và MLE $\hat{\mu}_i$, ta có thể xây dựng lại được hàm log-likelihood theo công thức:

$$\mathcal{L}(\mu_i | \hat{\mu}_i, \Delta_{\hat{\mu}_i}^{\pm}) = \frac{(\mu_i - \hat{\mu}_i)^2}{\Delta_{\hat{\mu}_i}^2},\tag{3.14}$$

kết quả được vẽ là đường nét đứt ở hình 3.2, chúng ta có thể thấy được: chỉ cần biết thông tin về khoảng tin cậy, loại likelihood và trị trung bình, độ lệch chuẩn của đo

đặc, chúng ta có thể suy ra được hàm likelihood được cung cấp bởi thực nghiệm một cách khá chính xác (ở ví dụ này là trùng khớp hoàn toàn).



Hình 3.2: Đường nét liền: hàm log-likelihood xây dựng từ các điểm gieo từ phân bố. Đường nét đứt: hàm likelihood được tính từ hai giá trị $\Delta_{\mu}^{\pm}, \hat{\mu}$.

3.1.2 Hàm log-likelihood cho phân bố Gaussian nhiều biến

Hàm likelihood có thể được sử dụng để kết hợp các kết quả đo đạc khác nhau. Các trường hợp cần sự kết hợp kết quả là nhiều thí nghiệm đo cùng một đại lượng chung, một thí nghiệm ảnh hưởng tới kết quả của nhiều đại lượng, hoặc phức tạp hơn là nhiều thí nghiệm ảnh hưởng cùng lúc tới nhiều đại lượng vật lý. Kết quả của các thí nghiệm hạt cơ bản sẽ thuộc vào trường hợp cuối. Hàm likelihood được xác định bởi hàm phân bố chung (pdf-probability density function) $f(\mathbf{x})$ nhất định, ở đây chúng tôi sử dụng pdf Gaussian nhiều biến:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}|\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\mathbf{V}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\top} \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right], \quad (3.15)$$

với \mathbf{x} là vector chứa các điểm dữ liệu đo được, $\boldsymbol{\mu}$ là giá trị tham số của phân bố, \mathbf{V} là ma trận hiệp phương sai chứa các giá trị phương sai của phân bố, $|\mathbf{V}|$ là định thức

của ma trận hiệp phương sai, N là số chiều của vector \mathbf{x} . Lý do chúng ta sử dụng hàm phân bố nhiều biến Gaussian vì hàm này đơn giản để giải tích và không có nhiều hàm nhiều biến của các phân bố khác. Hàm likelihood của N phép đo có dạng sau:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{V}|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \right], \quad (3.16)$$

tương tự ta cũng có hàm log-likelihood:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = -2 \ln \left[\frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{V}|^{1/2}} \right] + \sum_{i=1}^N [(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})]. \quad (3.17)$$

Chúng ta sẽ sử dụng MLE $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{V}}$ để ước lượng giá trị của các vector tham số thực $\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_0$ của phân bố Gaussian nhiều chiều. Hàm log-likelihood đạt cực đại khi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})}{\partial \boldsymbol{\mu}^\top} = 0 &\Leftrightarrow \sum_i^N (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) = 0 \\ &\Rightarrow \hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tương tự như trường hợp một chiều, $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ là một giá trị độc lập. Giá trị $\hat{\mathbf{V}}$ có thể được dẫn ra thông qua một vài bước tính toán phức tạp như sau [27]:

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{N} \sum_i^N (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^\top. \quad (3.19)$$

Ma trận này là một ma trận đối xứng dương xác định (positive semi-definite), và nó có thể được biểu diễn một ma trận khác gọi là ma trận tương quan, cũng là một ma trận đối xứng như sau:

$$\boldsymbol{\rho} = \hat{\mathbf{V}} / (\sqrt{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\top}). \quad (3.20)$$

Độ tốt của ước lượng $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ được đặc trưng bởi một ma trận gọi là ma trận hiệp phương sai của MLE. Ma trận hiệp phương sai $\mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}$ của MLE $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ sẽ được gần đúng cho bất kỳ loại phân bố nào bởi công thức:

$$(V_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}^{-1})_{ij} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \Big|_{\boldsymbol{\mu}=\hat{\boldsymbol{\mu}}} \right). \quad (3.21)$$

Ở đây chúng ta có khoảng tin cậy 68% của $\hat{\mu}_i$ là $\Delta_{\hat{\mu}_i}^\pm = \sigma_{\hat{\mu}_i} = \sqrt{(V_{\hat{\boldsymbol{\mu}}})_{ii}}$. Đối với hàm log-likelihood là hàm nhiều biến Gaussian thì ta có phương trình (3.21) là giá trị

chính xác của ma trận hiệp phương sai, và có giá trị tổng quát

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\hat{\mu}}^{-1} &= \sum_i^N (\hat{\mathbf{V}}^{-1}) \\ \Leftrightarrow \mathbf{V}_{\hat{\mu}} &= \frac{\mathbf{V}}{N}.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Chúng ta có thể thấy được như trường hợp một chiều, sai số của MLE $\sim \sqrt{V}_{\hat{\mu}}$ cũng sẽ giảm đi tỉ lệ với căn bậc hai của lượng dữ liệu. Từ ma trận này, chúng ta suy ra được ma trận khác quan trọng hơn là tương quan của sai số của MLE:

$$\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mu}} = \mathbf{V}_{\hat{\mu}} / \sqrt{\Delta_{\hat{\mu}} \cdot \Delta_{\hat{\mu}}^{\top}} = \boldsymbol{\rho}.\tag{3.23}$$

Tất cả thông tin của hàm likelihood sau khi khớp dữ liệu sẽ được báo cáo lại dưới dạng ước lượng cực tiểu, sai số đi cùng với một ma trận tương quan:

$$\hat{\mu}_i, \Delta_{\hat{\mu}_i}^+, \Delta_{\hat{\mu}_i}^- \quad \text{và} \quad \boldsymbol{\rho}.\tag{3.24}$$

Nếu một thí nghiệm cung cấp các thông tin trên thì chúng ta có thể xây dựng lại hàm likelihood của một thí nghiệm mà không cần biết thông tin đầy đủ về dữ liệu như sau

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu} | \hat{\mu}, \mathbf{V}_{\hat{\mu}}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}_{\hat{\mu}} | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = (\boldsymbol{\mu} - \hat{\mu})^{\top} \cdot \mathbf{V}_{\hat{\mu}}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\mu} - \hat{\mu}),\tag{3.25}$$

với

$$\mathbf{V}_{\hat{\mu}} = \boldsymbol{\rho} \circ \Delta_{\hat{\mu}} \cdot \Delta_{\hat{\mu}}^{\top}.\tag{3.26}$$

Ở đây ta có \circ là ký hiệu của tích từng phần tử, hoặc toán tử Hadamard. Hàm likelihood này chỉ đúng trong trường hợp các bin đo đặc đều tuân theo phân bố nhiều chiều Gaussian, nhưng kết quả của thực nghiệm thường báo cáo kết quả với sai số Δ bất đối xứng nên chúng ta rất khó có thể xây dựng lại được hàm likelihood một cách chính xác. Tuy nhiên đây vẫn là một phương pháp đơn giản và đáng tin cậy.

3.1.3 Sử dụng hàm log-likelihood nhiều chiều để khớp dữ liệu SMEFT thông qua phương pháp cực tiểu bình phương

Nếu $\boldsymbol{\mu}$ là một vector phụ thuộc vào các tham số khác: $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ thì chúng ta có thể tìm khoảng tin cậy và giá trị khớp tốt nhất (best-fit) $\hat{\mathbf{x}}, \Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$ thông qua việc định nghĩa lại log-likelihood như sau:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) | \hat{\mu}, \mathbf{V}_{\hat{\mu}}).\tag{3.27}$$

Hàm số này cũng được gọi là hàm log-likelihood, ban đầu là hàm log-likelihood của biến $\boldsymbol{\mu}$, sau khi tham số hóa tuyến tính $\boldsymbol{\mu}$ theo \mathbf{x} trở thành là hàm log-likelihood của biến \mathbf{x} . Trong trường hợp tham số hóa không phải tuyến tính thì hàm likelihood trên bản chất không còn là hàm likelihood của biến \mathbf{x} nữa. Tuy không cùng bản chất nhưng hàm log-likelihood này lại có cùng một chức năng là xác định khẳng tin cậy. Từ định nghĩa mới của hàm log-likelihood này, ta có thể xác định giá trị khớp tốt nhất của biến \mathbf{x} (best-fit), tương tự như MLE thông qua phương trình

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}), \quad (3.28)$$

$$\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{x}}} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top}, \quad (3.29)$$

ở đây ta có $\hat{\mathbf{x}}$ được gọi là ước lượng cực tiểu bình phương (Least-square estimator-LSE) của hàm log-likelihood. Phương trình tính $\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{x}}}$ (3.29) chỉ đúng khi sự phụ thuộc $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ là tuyến tính, vì định nghĩa của ma trận hiệp phương sai chỉ tồn tại cho hàm phân bố nhiều chiều Gaussian, giá trị gần đúng của nó sẽ cung cấp cho chúng ta thông tin của hàm phân bố. Để xác định khoảng tin cậy của LSE một cách chính xác hơn, chúng ta có thể là vẽ một đường đồng mức phụ thuộc vào \mathbf{x} , sao cho:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}) = 1. \quad (3.30)$$

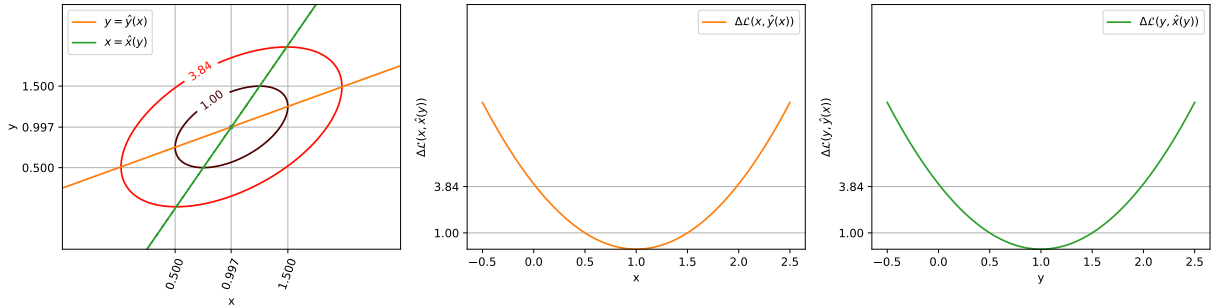
Giá trị sai số $\Delta_{\hat{x}_i}^\pm$ của \hat{x}_i sẽ là điểm trên đường đồng mức trong không gian tham số sao cho đường liên đó tiếp tuyến với đường $\mathcal{L} = x_i$, hoặc nói cách khác đạo hàm của các biến khác x_i tại điểm này là bằng 0:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x})}{\partial x_{j \neq i}} \right|_{x_i = \hat{x}_i + \Delta_{\hat{x}_i}^\pm, \bar{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i(x_i)} = 0. \quad (3.31)$$

Ở đây ta có $\bar{\mathbf{x}}_i(x_i)$ là vector chứa các tham số không chứa x_i , ước lượng cực tiểu của tham số này $\hat{\mathbf{x}}_i(x_i)$ vector này phụ thuộc vào x_i . Phương pháp này được gọi là phương pháp profile-likelihood cho tham số x_i , ở đó chúng ta tìm cực tiểu cho các tham số còn lại với tham số x_i được giữ cố định. Phương pháp profile sẽ trả lại điểm tiếp tuyến giữa đường đồng mức và trục x_i đang xét.

Chúng tôi vẽ ví dụ hàm likelihood ở hình 3.3 với các tham số như sau:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}} &= \Delta_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}^{\pm} \cdot \Delta_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}^{\pm\top} \circ \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.125 \\ 0.125 & 0.25 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$



Hình 3.3: Trái: hình vẽ thể hiện giá trị của hàm log-likelihood với các tham số ở (3.32), đường con kín là đường đồng mức của hàm log-likelihood, đường màu xanh là cây là đường thể hiện điểm cực tiểu của hàm log-likelihood theo phương x , đường màu cam là đường thể hiện điểm cực tiểu của hàm log-likelihood theo phương y . Giữa: giá trị của profile likelihood theo biến x . Phải: giá trị của profile likelihood theo biến y .

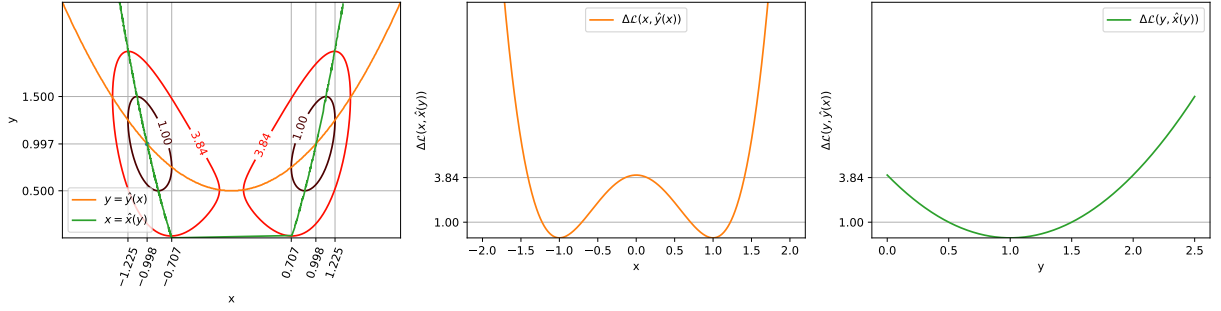
Từ hình vẽ 3.3, chúng ta suy ra được:

$$\hat{\mathbf{x}} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{\hat{\mathbf{x}}}^{\pm} \approx \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_{\hat{\mathbf{x}}} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \right]^{-1} = \mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}. \quad (3.33)$$

Từ thông tin về $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ và thông tin về việc tham số hóa của $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$, chúng ta có thể xác định được khoảng tin cậy của $\hat{\mathbf{x}}$.

Để khảo sát độ ảnh hưởng của cách tham số hóa lên hàm log-likelihood, chúng tôi sẽ ví dụ cho trường hợp tham số hóa không tuyến tính và hàm likelihood sẽ được vẽ ở hình 3.4. Chúng ta vẫn sử dụng các dữ kiện ban đầu như trên, với điều thay đổi duy nhất là ở việc tham số hóa:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$



Hình 3.4: Trái: hình vẽ thể hiện giá trị của hàm log-likelihood với các tham số ở (3.34), đường con kín là đường đồng mức của hàm log-likelihood, đường màu xanh là cây là đường thể hiện điểm cực tiểu của hàm log-likelihood theo phương x , đường màu cam là đường thể hiện điểm cực tiểu của hàm log-likelihood theo phương y . Giữa: giá trị của profile likelihood theo biến x . Phải: giá trị của profile likelihood theo biến y . Chúng ta có thể thấy được tham số x xuất hiện hai điểm cực tiểu bằng nhau, và chúng ta điểm với giá trị dương để báo cáo.

Từ hình 3.4, chúng ta suy ra được

$$\begin{aligned} \hat{y} &\approx 1, \quad \Delta_{\hat{y}}^{\pm} \approx 0.5, \\ \begin{cases} \hat{x} \approx 1, & \Delta_{\hat{x}}^{+} \approx 0.2, \Delta_{\hat{x}}^{-} = 0.3 \\ \hat{x} \approx -1, & \Delta_{\hat{x}}^{+} \approx 0.3, \Delta_{\hat{x}}^{-} = 0.2 \end{cases}, \text{ hoặc } |\hat{x}| = 1, \quad \Delta_{|\hat{x}|}^{+} = 0.2, \Delta_{|\hat{x}|}^{-} = 0.3. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Vì hình này có hai điểm cực tiểu theo biến x nên chúng ta sẽ chọn một điểm để báo cáo, và việc chọn điểm sẽ tùy vào tính chất vật lý, toán học của tham số đó. Để tiện lợi thì chúng ta sẽ chọn điểm khớp có giá trị dương. Bây giờ ma trận hiệp phương sai

có giá trị là:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{x}}} &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{V})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^\top} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \right]^{-1} \\
&= \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{x}^\top} \right)^\top \cdot \mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}^{-1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{x}^\top} \right]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^\top \right]^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 21.333 & -5.3333333 \\ -5.3333333 & 5.3333333 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0.0625 & 0.0625 \\ 0.0625 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta_{\hat{x}}^\pm)^2 & \rho_{xy} \Delta_{\hat{x}}^\pm \Delta_{\hat{y}}^\pm \\ \rho_{xy} \Delta_{\hat{x}}^\pm \Delta_{\hat{y}}^\pm & (\Delta_{\hat{y}}^\pm)^2 \end{pmatrix} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Ta thấy được từ sự phi tuyến của tham số hóa, dẫn đến ma trận hiệp phương sai trở nên phụ thuộc vào biến \mathbf{x} điều này không hề tồn tại trong hàm log-likelihood bình thường. Từ phương trình trên, ta cũng có thể dễ dàng suy ra được

$$\Delta_{\hat{x}}^\pm = 0.25, \quad \Delta_{\hat{y}}^\pm = 0.5. \tag{3.37}$$

Sai số thông qua cách này sẽ khác với sai số thông qua việc vẽ hình, nhưng mà cách làm này chỉ đúng khi mà tham số hóa của $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ là tuyến tính. Thông thường chúng ta sử dụng phương pháp vẽ đồ thị, từ đó dẫn đến việc giá trị khoảng tin cậy trở nên bất đối xứng. Đại lượng quan trọng hơn mà chúng ta có thể suy ra được là ma trận tương quan:

$$\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Trong luận văn này thì giá trị tham số khớp dữ liệu sử dụng là tiết diện tán xạ của các bin đo đạc \mathbf{y} , và tiết diện tán xạ sẽ được tham số hóa bởi các tham số SMEFT \mathbf{c} . Đồng thời các thí nghiệm sẽ cung cấp cho chúng ta giá trị khớp tốt nhất $\hat{\mathbf{y}}$, khoảng tin cậy $\Delta_{\hat{\mathbf{y}}}^\pm$ và ma trận tương quan $\boldsymbol{\rho}$. Hàm likelihood sử dụng trong luận văn này có dạng

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}_{\mathbf{c}}) = (\mathbf{y}_{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}_{\hat{\mathbf{y}}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{y}}), \tag{3.39}$$

với $\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{y}}}$ là ma trận hiệp phương sai (covariance):

$$\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{y}}} = \boldsymbol{\rho} \circ \Delta_{\hat{\mathbf{y}}} \cdot \Delta_{\hat{\mathbf{y}}}^\top. \tag{3.40}$$

3.2 Kết quả đo và hàm likelihood trong Fiteft

Với lượng dữ liệu càng ngày càng lớn, thì các thí nghiệm ở LHC hiện tại đã có thể truy cập tới những vùng không gian pha một cách chi tiết hơn, ví dụ như vùng không gian pha của xung lượng ngang của các jet đi ra p_j^T , khối lượng bất biến của hai chùm jet ở trạng thái cuối m_{jj} . Kết quả đo của các thí nghiệm tại thời điểm hiện tại sẽ được báo cáo tuân theo mẫu kết quả tiết diện tán xạ- Simplified template cross-sections (STXS) ở stage 1.2. Kết quả đo sẽ được chúng tôi xếp thành một vector gồm các vector như sau

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}, \Delta_{\mathbf{y}}^+, \Delta_{\mathbf{y}}^-, \mathbf{y}_{\text{SM}} &= \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta_0^+ \\ \Delta_1^+ \\ \dots \\ \Delta_N^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta_0^- \\ \Delta_1^- \\ \dots \\ \Delta_N^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1^{\text{SM}} \\ y_2^{\text{SM}} \\ \dots \\ y_N^{\text{SM}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{central}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-0} \\ \text{central}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-1} \\ \dots \\ \text{central}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-N} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +\text{total}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-0} \\ +\text{total}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-1} \\ \dots \\ +\text{total}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-N} \end{pmatrix}, \\
&\quad \begin{pmatrix} -\text{total}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-0} \\ -\text{total}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-1} \\ \dots \\ -\text{total}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-N} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{central_SM}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-0} \\ \text{central_SM}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-1} \\ \dots \\ \text{central_SM}_{[\text{prod.}, \text{decay}]-N} \end{pmatrix}. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Với y_i là các đại lượng vật lý được cung cấp bởi các thí nghiệm, Δ_i^\pm là sai số, hoặc nói cách khác là khoảng tin cậy 68% của đại lượng đó. Ví dụ như từ thí nghiệm ATLAS HIGG-2022-17, ta có đại lượng vật lý đo được như trên được chúng tôi trình bày như ở bảng 3.1, vì $y_i^{\text{SM}} = 1$ nên chúng tôi không liệt kê giá trị đó.

Hàm likelihood có dạng

$$\mathcal{L}(\mathbf{c}) = \mathcal{L}(\mathbf{y}_{\mathbf{c}}) = (\mathbf{y}_{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{y}}), \quad (3.42)$$

production	decay	acceptance	signature	central	+total	-total
gg->H,0-jet,pTH<10GeV	H->gaga	none	CS*BR/(CS_SM*BR_SM)	0.66	0.27	-0.26
gg->H,0-jet,10<=pTH<200GeV	H->gaga	none	CS*BR/(CS_SM*BR_SM)	1.24	0.18	-0.17
gg->H,1-jet,pTH<60GeV	H->gaga	none	CS*BR/(CS_SM*BR_SM)	1.16	0.39	-0.38
gg->H,1-jet,60<=pTH<120GeV	H->gaga	none	CS*BR/(CS_SM*BR_SM)	1.14	0.40	-0.36
gg->H,1-jet,120<=pTH<200GeV	H->gaga	none	CS*BR/(CS_SM*BR_SM)	0.93	0.57	-0.53

Bảng 3.1: Ví dụ về các đại lượng vật lý của bài báo HIGG-2022-17 [8].

ở đây ta có \mathbf{y}_c là tiên đoán trong SMEFT của các bin, xếp thành vector,

$$\mathbf{y}_c = \begin{cases} \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \frac{1 + \mathbf{N} \cdot \mathbf{c}}{1 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}} \\ \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}). \end{cases} \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

Trường hợp thứ hai của pt (3.44) chính là khai triển Taylor của trường hợp thứ nhất (3.43), mà trong đó chúng ta đã đặt lại biến như sau $\mathbf{N} - \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}$ và bỏ qua toán tử bậc 2 của \mathbf{c} . \mathbf{N} và \mathbf{D} là hai ma trận tham số hóa lần lượt ở tử số và mẫu số của phương trình (2.64) và (2.65), tùy vào định nghĩa của thí nghiệm, ở bài báo [8] sử dụng dạng thứ nhất, và ở bài báo [1, 2] sử dụng dạng thứ 2. Việc tham số hóa như ở dạng thứ nhất sẽ khiến kết quả khớp của log-likelihood trở nên bất đối xứng, và vì khi \mathbf{c} lớn thì gần đúng tuyến tính ở tử số và mẫu số sẽ trở nên không còn chính xác, dẫn đến việc lấy khai triển Taylor thêm một lần nữa trở nên không hợp lý. Dạng thứ hai lại có lợi thế là phương trình đơn giản hơn và dễ dàng hơn trong việc tính toán giải tích. \mathbf{V} là ma trận covariance

$$\mathbf{V} = \rho \circ \Delta_{\mathbf{y}} \cdot \Delta_{\mathbf{y}}^T, \quad (3.45)$$

trong đó

$$\Delta_{\mathbf{y}} = \begin{cases} (\Delta_{\mathbf{y}}^+ + \Delta_{\mathbf{y}}^-)/2, & \text{Gaussian} \\ \sqrt{\frac{2\Delta^+ \circ \Delta^-}{\Delta^+ + \Delta^-} + \frac{2\Delta^+ - \Delta^-}{\Delta^+ + \Delta^-} \circ (\mathbf{y}_{\mathbf{c}} - \mathbf{y}_{\text{SM}})}, & \text{variable Gaussian 0} \\ \sqrt{\Delta^+ \circ \Delta^- + (\Delta^+ - \Delta^-) \circ (\mathbf{y}_{\mathbf{c}} - \mathbf{y}_{\text{SM}})}, & \text{variable Gaussian 1} \end{cases} \quad (3.46)$$

$$(3.47)$$

$$(3.48)$$

lưu ý là phép chia và lấy căn bậc 2 ở đây có tác dụng lên từng phần tử của vector, nghĩa là $(\mathbf{A}/\mathbf{B})_{ij} = A_{ij}/B_{ij}$.

Hàm likelihood (3.42) có nghiệm cực tiểu giải tích với $\mathbf{y}_{\mathbf{c}}$ ở (3.44) và $\Delta_{\mathbf{y}}$ ở (3.46), các trường hợp còn lại sẽ không có nghiệm giải tích và chúng ta sẽ buộc phải tìm cực tiểu bằng phương pháp tính số. Để tìm cực tiểu cho trường hợp vừa nói trên, chúng ta sẽ lấy đạo hàm của hàm likelihood và tìm tham số cho trường hợp đạo hàm bằng không. Ta có đạo hàm bậc một của hàm likelihood theo vector \mathbf{c} , chi tiết ở phụ lục A.1

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}^\top} = 2(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{y}_{\text{SM}} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}). \quad (3.49)$$

Phương trình trên bằng 0 khi:

$$\mathbf{c} = - \left[(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \circ \mathbf{y}_{\text{SM}}) \right]^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} - \hat{\mathbf{y}}). \quad (3.50)$$

Kết quả (3.50) đã được dẫn ra ở chương 7.2 của cuốn sách [28], nhưng ở đây chúng tôi đã có một chút thay đổi về cách biểu diễn. Để có được kết quả giải tích này thì ma trận $(\mathbf{A} \circ \mathbf{y}_{\text{SM}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})$ buộc phải khả nghịch, và khi làm việc với lượng tham số lớn như vậy thì khả năng để chúng ta có kết quả khả tích là khá thấp. Và với kết quả trên, chúng ta đã có ước lượng likelihood cực tiểu cho trường hợp đơn giản nhất, đặt kết quả (3.50) là $\hat{\mathbf{c}}$:

$$\min_{\mathbf{c}} [\mathcal{L}(\mathbf{c})] = \mathcal{L}(\hat{\mathbf{c}}), \quad (3.51)$$

và ký hiệu $\min_{\mathbf{c}}$ là ký hiệu cực tiểu toàn cục đối với vector \mathbf{c} . Sai số, hoặc ma trận hiệp phương sai của ước lượng cực tiểu có thể được gần đúng bằng cách lấy đạo hàm

bậc hai của hàm log-likelihood:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c} \partial \mathbf{c}^\top} = 2(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}). \quad (3.52)$$

Ma trận này còn được gọi là ma trận Hessian của các tham số SMEFT:

$$\mathbf{H}_{\text{SMEFT}} = \mathbf{V}_{\text{SMEFT}}^{-1} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c} \partial \mathbf{c}^\top} = 2(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}). \quad (3.53)$$

3.3 Xác định khoảng tin cậy bằng profile likelihood

Khoảng tin cậy của tham $c_i \in \mathbf{c}$ được xác định bằng phương pháp profile likelihood, chúng ta sẽ gọi $\bar{\mathbf{c}}_i$ là vector \mathbf{c} bỏ đi thành phần c_i , các giá trị của $\bar{\mathbf{c}}_i$ được gọi là tham số trở ngại (nuisance parameters). Khoảng tin cậy của biến c_i là giá trị mà ở đó:

$$\min_{\bar{\mathbf{c}}_i} [\mathcal{L}(c_i, \bar{\mathbf{c}}_i)] - \mathcal{L}(\hat{\mathbf{c}}) = 1, \quad (3.54)$$

với $\hat{\mathbf{c}}$ là MLE, hàm $\min_{\bar{\mathbf{c}}_i} [\mathcal{L}(c_i, \bar{\mathbf{c}}_i)]$ được gọi là profile likelihood của tham số c_i việc này tương đương với việc tìm cực tiểu của hàm likelihood khi tham số c_i được giữ cố định ở một giá trị bất kì (profile over all nuisance parameters). Hiển nhiên ta có:

$$\min_{\bar{\mathbf{c}}_i} [\mathcal{L}(\hat{c}_i, \bar{\mathbf{c}}_i)] = \mathcal{L}(\hat{\mathbf{c}}). \quad (3.55)$$

Các bước tính profile likelihood là xác định giá trị của tham số c_i rồi bắt đầu tính cực tiểu đối với các tham số còn lại. Chúng ta sẽ tính profile likelihood cho trường hợp đơn giản nhất cho hàm likelihood (3.42), với $\mathbf{y}_{\mathbf{c}}$ ở (3.44) và $\Delta_{\mathbf{y}}$ ở (3.46)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{c}) &= (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}) - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}) - \hat{\mathbf{y}}) \\ &= (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{a}_i c_i + \bar{\mathbf{A}}_i \cdot \bar{\mathbf{c}}_i) - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{a}_i c_i + \bar{\mathbf{A}}_i \cdot \bar{\mathbf{c}}_i) - \hat{\mathbf{y}}) \\ &= (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \bar{\mathbf{A}}_i \cdot \bar{\mathbf{c}}_i + \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{a}_i c_i) - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \bar{\mathbf{A}}_i \cdot \bar{\mathbf{c}}_i + \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{a}_i c_i) - \hat{\mathbf{y}}), \end{aligned} \quad (3.56)$$

ở đây ta đã dùng $\bar{\mathbf{A}}_i$ là ma trận \mathbf{A} bỏ đi cột thứ i của ma trận \mathbf{A} , \mathbf{a}_i là vector cột thứ i của ma trận \mathbf{A} . Các bước tách ma trận chi tiết ở phụ lục A.2 Lặp lại các bước tính đạo hàm ở phần trước, ta có đạo hàm của hàm likelihood theo $\bar{\mathbf{c}}_i$ như sau:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{c})}{\partial \bar{\mathbf{c}}_i^\top} = (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \bar{\mathbf{A}}_i \cdot \bar{\mathbf{c}}_i + \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{a}_i c_i) - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \bar{\mathbf{A}}_i), \quad (3.57)$$

cho phương trình trên bằng 0, thì chúng ta có được giá trị của tham số trở ngại trong profile likelihood như sau:

$$\hat{\bar{\mathbf{c}}}_i = - [(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \bar{\mathbf{A}}_i)^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\bar{\mathbf{A}}_i \circ \mathbf{y}_{\text{SM}})]^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \bar{\mathbf{A}}_i)^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot [\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{a}_i c_i) - \hat{\mathbf{y}}]. \quad (3.58)$$

Chúng ta có thể thấy $\hat{\mathbf{c}}_i$ là một hàm phụ thuộc vào c_i , vì vậy mỗi một lần tính profile likelihood cho một biến nào đó với một giá trị bất kỳ thì chúng ta phải cực tiểu hóa hàm likelihood đối với các biến còn lại một lần và giá trị của các sai số trở ngại sẽ khác nhau với mỗi giá trị c_i chúng ta chọn. Trong trường hợp tham số hóa không tuyến tính, sẽ không có lời giải giải tích như (3.58), khi đó chúng ta phải sử dụng phương pháp tính số để tìm cực tiểu $\min(\bar{\mathbf{c}}_i)$.

3.4 Lựa chọn tham số khớp dữ liệu và thành lập ma trận đối cơ sở

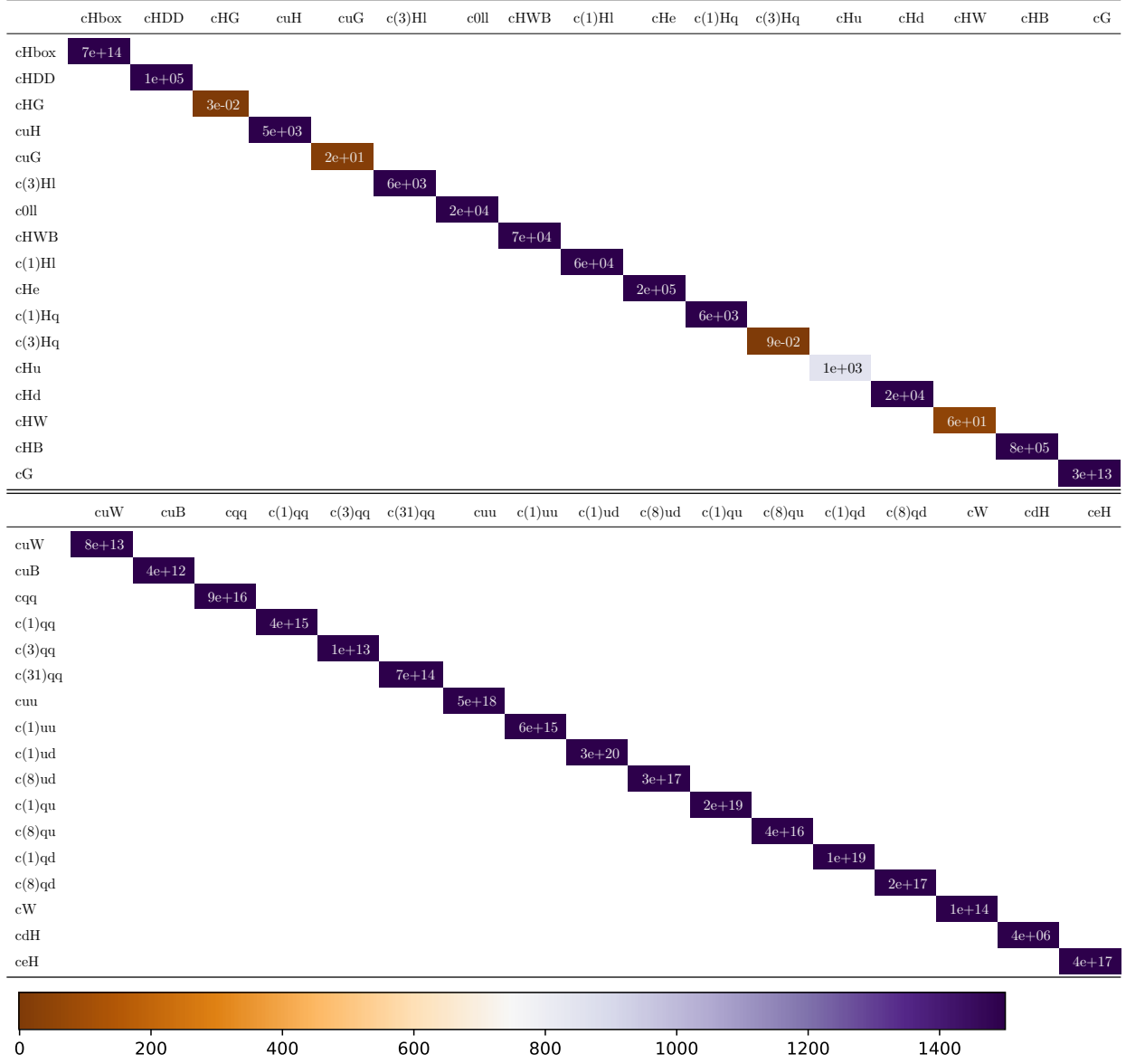
Từ phương trình tính ma trận hiệp phương sai (3.53), chúng ta đã có thể xác định được khoảng tin cậy của các sai số \mathbf{c} chính là các thành phần trên đường chéo của ma trận $\mathbf{V}_{\text{SMEFT}}$. Ma trận này được chúng tôi tính bằng công thức (3.53), với ma trận $\mathbf{A}, \mathbf{y}_{\text{SM}}, \Delta^\pm, \rho_{\text{expected}}$ của thí nghiệm ATLAS-CONF-2020-053 [1]. Thành phần trên đường chéo của ma trận được liệt kê ở bảng 3.2, Δ^\pm đã được lấy trung bình cộng để tính \mathbf{V}^{-1} . Chúng ta có thể thấy vài thành phần trên đường chéo mang giá trị lớn, 10^{15} , thực ra đây là giới hạn của dữ liệu float, nghĩa là chúng ta không thể khớp dữ liệu đối với vector \mathbf{c} , vì phương sai của một vài giá trị quá lớn: $V(c_i) > 10^{15}$. Cũng từ ma trận này, chúng ta có thể nhận thấy được: $\text{cHG}, \text{c}(3)\text{Hq}$ là các tham số với phương sai bé hơn 1, chúng có thể được sử dụng để khớp dữ liệu một cách độc lập. Vì không thể khớp dữ liệu với lượng tham số lớn như vậy, chúng ta chỉ có thể khớp tổ hợp tuyến tính của các tham số [1].

Hình dạng của ảnh hưởng của các tham số lên các bin sẽ có sự tương đồng nhất định, và nếu chúng có sự tương đồng lớn thì chúng ta không thể phân biệt được chúng với nhau trong quá trình khớp dữ liệu. Để làm rõ hơn độ quan trọng của hình dạng ảnh hưởng, chúng tôi có một ví dụ giả định như sau:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{y}} \pm \Delta_{\mathbf{y}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{c}} &= \begin{pmatrix} 1 + A_{11}c_1 + A_{12}c_2 \\ 1 + A_{21}c_1 + A_{22}c_2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\rho} = I_{2 \times 2} \\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1)_1 & (\mathbf{a}_2)_1 \\ (\mathbf{a}_1)_2 & (\mathbf{a}_2)_2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{cases} .$$

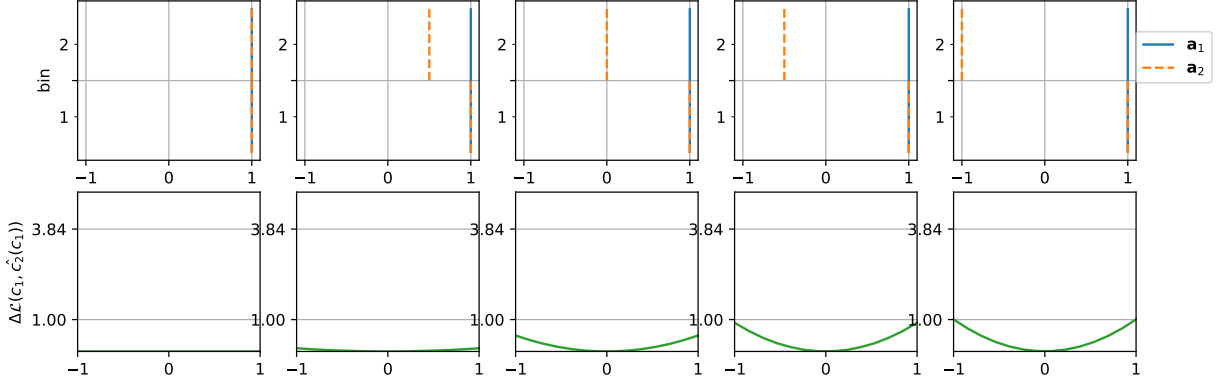
Từ điều kiện ban đầu này, chúng tôi vẽ profile likelihood ở hình 3.5, 3.6 với các giá trị vector ảnh hưởng $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ khác nhau. Từ hình 3.5 chúng ta thấy được:

- Hình 1: c_1 và c_2 có hình dạng ảnh hưởng giống nhau với biên độ giống nhau. Thông qua hình vẽ profile likelihood có thể suy ra: không thể khớp dữ liệu được.



Bảng 3.2: Ma trận $\mathbf{V}_{\text{SMEFT}}$ của thí nghiệm ATLAS-CONF-2020-053 [1], chúng tôi chỉ hiện thành phần trên đường chéo.

- Hình 2,3,4,4: c_1 và c_2 từ trái qua phải có độ tương đồng về hình dạng ảnh hưởng giảm dần. Thông qua hình vẽ profile likelihood: độ tương đồng của hình dạng sức ảnh hưởng của c_2 càng cao so với hình dạng sức ảnh hưởng của c_1 càng cao thì độ tốt của việc khớp dữ liệu càng giảm.



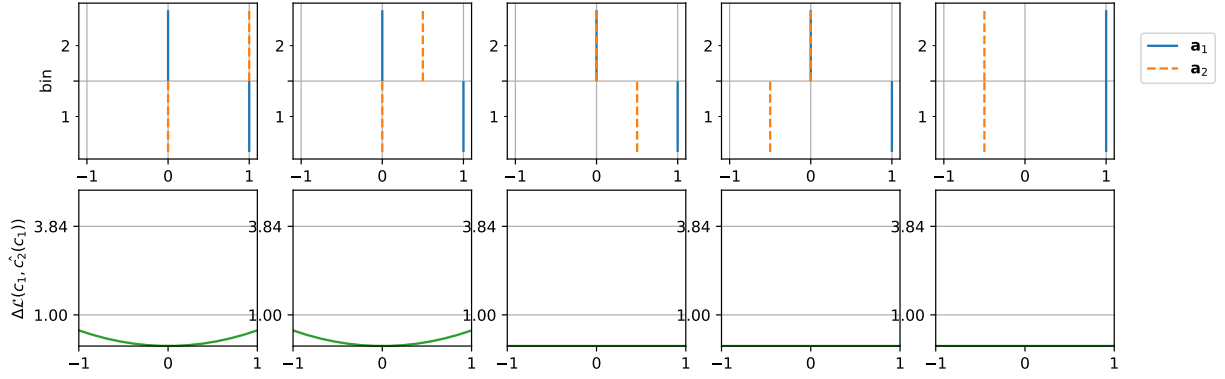
Hình 3.5: Trên: sức ảnh hưởng ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$) của tham số c_1, c_2 lên tiên đoán \mathbf{y}_c . Dưới: profile likelihood đối với tham số c_1 tương ứng với các hình ở phía trên.

Từ hình 3.6 chúng ta thấy được:

- Hình 1,2: c_1 và c_2 ảnh hưởng lên hai bin khác nhau, hình dạng ảnh hưởng khác nhau, biên độ khác nhau. Thông qua hình vẽ profile likelihood: có thể khớp dữ liệu tốt, c_2 không làm ảnh hưởng tới việc khớp dữ liệu của c_1 .
- Hình 3,4: c_1 và c_2 ảnh hưởng lên cùng bin với hình dạng ảnh hưởng giống nhau với biên độ khác nhau. Thông qua hình vẽ profile likelihood: không thể khớp dữ liệu.
- Hình 5: c_1 và c_2 ảnh hưởng lên cùng hai bin với hình dạng giống nhau và sức ảnh hưởng khác nhau. Thông qua hình vẽ profile likelihood: không thể khớp dữ liệu.

Từ những nhận xét trên chúng ta có thể nhận thấy được độ quan trọng của hình dạng ảnh hưởng của các tham số đóng vai trò rất quan trọng trong việc khớp dữ liệu. Từ đây chúng tôi đưa ra một cách để nhóm các tham số có hình dạng giống nhau vào chung một nhóm. Chúng tôi sẽ sử dụng ma trận tham số \mathbf{A} được vẽ ví dụ ở bảng 3.3. Từ bảng này, chúng tôi "chuẩn hóa" ma trận \mathbf{A} và đặt tên là $\tilde{\mathbf{A}}$ bằng cách lấy đóng góp của tham số bất kỳ cho từng bin và chia cho tổng trị tuyệt đối của tham số đó lên tất cả các bin, đồng nghĩa với:

$$\tilde{A}_{\text{bin}_i, c_j} = \frac{A_{\text{bin}_i, c_j}}{\sum_{\text{bin}_i} |A_{\text{bin}_i, c_j}|}. \quad (3.59)$$



Hình 3.6: Trên: sức ảnh hưởng ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$) của tham số c_1, c_2 lên tiên đoán \mathbf{y}_c . Dưới: profile likelihood đối với tham số c_1 tương ứng với các hình ở phía trên.

Ma trận $\tilde{\mathbf{A}}$ được vẽ ở hình 3.4. Sau đó, chúng tôi vẽ ma trận tương đồng hình dạng đóng góp \mathbf{S} góp giữa các tham số như sau:

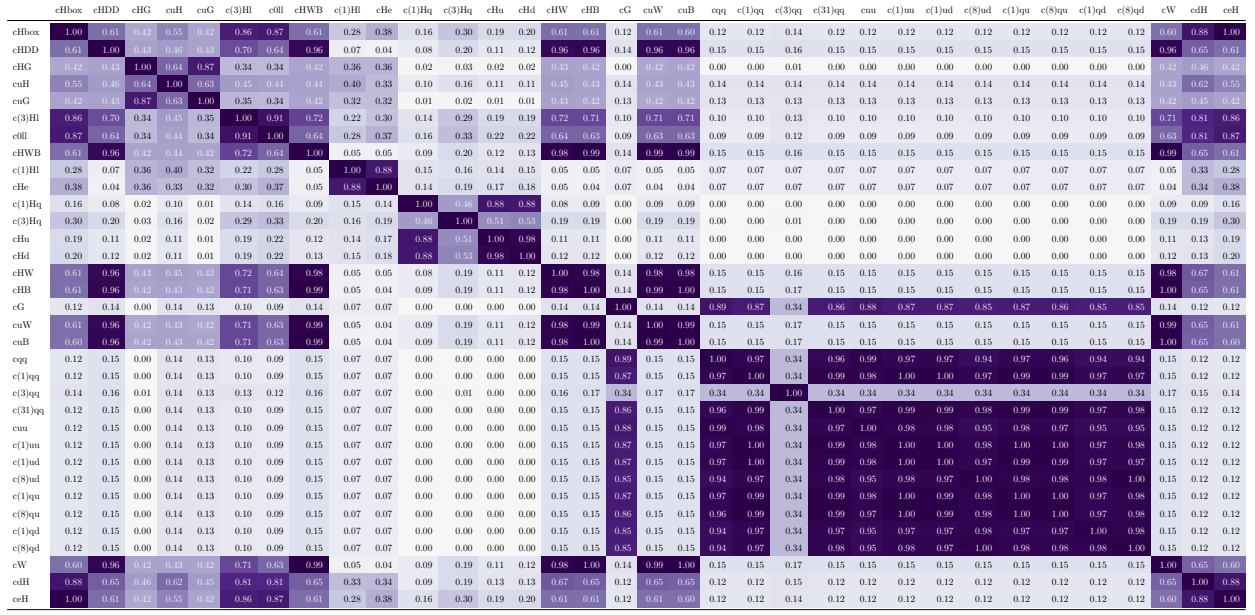
$$S_{ij} = 1 - \min_{\pm} \left[\sum_k \left| \tilde{A}_{ki} \pm \tilde{A}_{kj} \right| \right] / 2. \quad (3.60)$$

Mục đích của phương trình trên giống như việc lấy tích phân của thành phần giao thoa giữa hai hàm số, với khoảng tích phân là trên toàn bộ các bin, giá trị hàm số là giá trị của đóng góp của tham số tại bin đó. Do chúng tôi đang so sánh hình dạng nên không quan trọng là đóng góp âm hay dương, lớn hay bé, chúng tôi sẽ lấy trường hợp mà giá trị tương đồng cao nhất. Ma trận thể hiện sự tương đồng được vẽ ví dụ tại bảng 3.5.

Từ bảng 3.5, ta nhận có thể nhận thấy một cách dễ dàng những tham số có sự tương đồng cao (> 0.9), từ đó ta rút ra được những điều sau đây:

- Nhóm 1, từ cột **CHbox**: tham số **CHbox**, **cdH**, **ceH** có sự tương đồng cao nên sẽ được xếp thành một nhóm.
- Nhóm 2, từ cột **CHDD**: tham số **CHDD**, **CHWB**, **CHW**, **CHB**, **cuW**, **cuB**, **cW** có sự tương đồng cao nên sẽ được xếp thành một nhóm.
- Nhóm 3, từ cột **cG**: tham số **cG**, **cqq**, **c(1)qq**, **c(31)qq**, **cuu**, **c(1)uu**, **c(1)ud**, **c(8)ud**, **c(1)qu**, **c(8)qu**, **c(1)qd**, **c(8)qd** có sự tương đồng cao nên sẽ được xếp thành một nhóm.

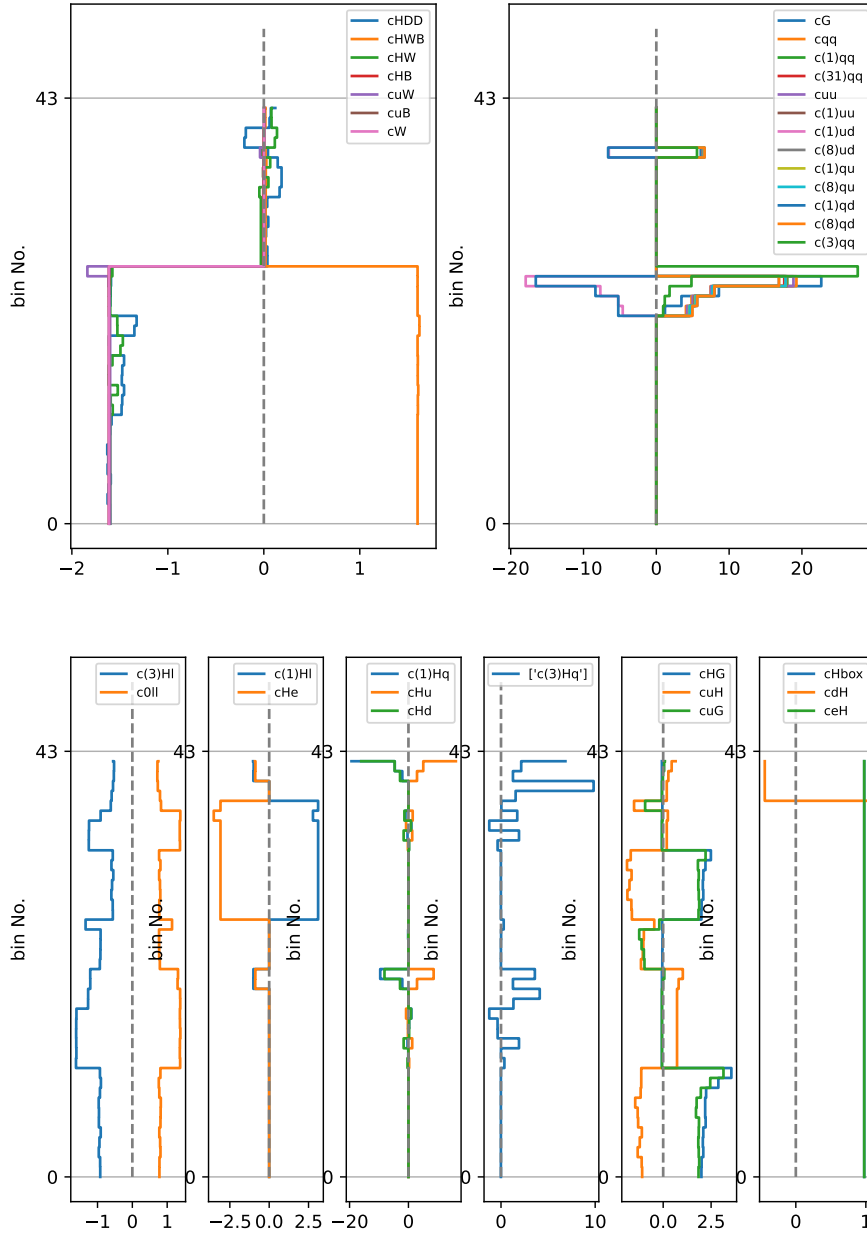
Bỏ đi các tham số vừa kể trên, chúng ta có bảng 3.6. Từ bảng này, ta nhận có thể nhận thấy những tham số có sự tương đồng khá cao (> 0.5), từ đó ta rút ra được những điều sau đây



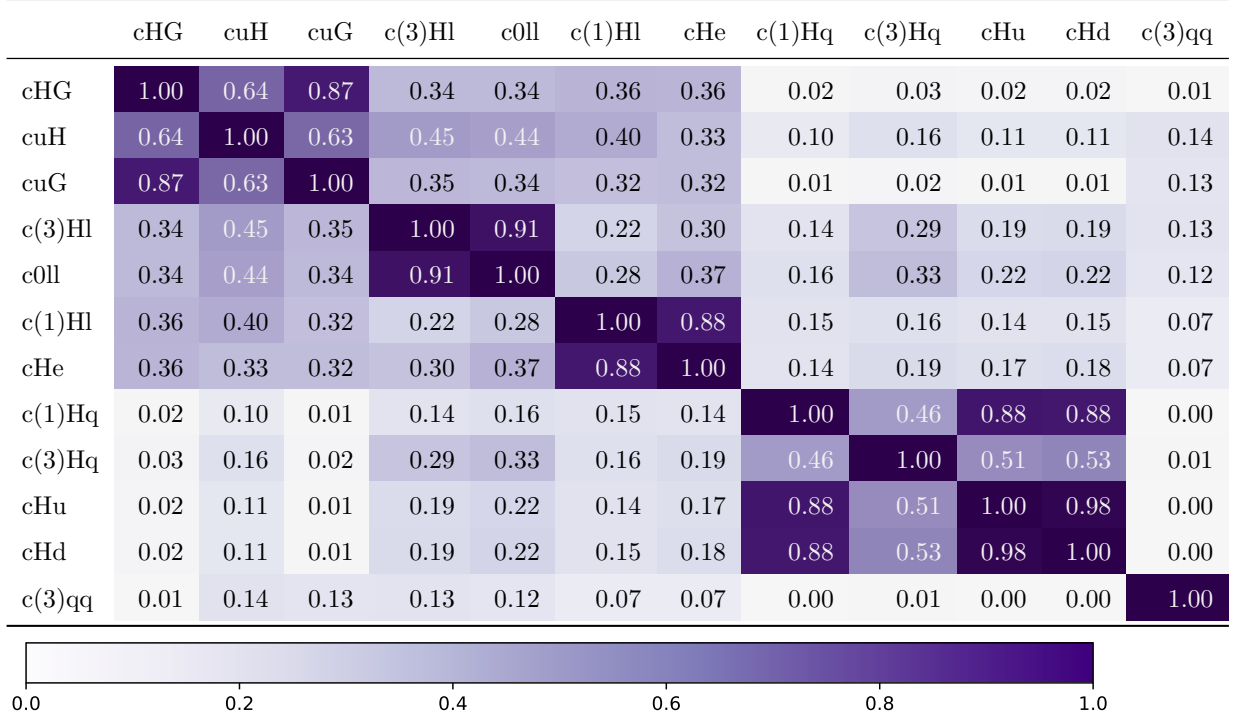
Bảng 3.5: Ma trận thể hiện sự tương đồng về đóng góp lên các bin của các tham số của bài báo ATLAS-CO NF-2020-053 [1], giá trị 1 là tương đồng hoàn toàn, giá trị 0 là không tương đồng.

- Nhóm 4, từ cột c(3)Hl:tham số c(3)Hl,c0l1 có tương đồng cao nên sẽ được xếp thành một nhóm.
- Nhóm 5, từ cột c(1)Hl:tham số c(1)Hl,cHe có sự tương đồng cao nên sẽ được xếp thành một nhóm.
- Nhóm 6, từ cột c(1)Hq:tham số c(1)Hq,cHu,cHd có sự tương đồng cao nên sẽ được xếp thành một nhóm.
- Nhóm 7, từ cột c(3)Hq:tham số c(3)Hq có thể được khớp một cách độc lập.
- Nhóm 8, từ cột cHG:tham số cHG,cuH,cuG có sự tương đồng cao nên sẽ được xếp thành một nhóm.
- Từ cột c(3)qq: có thể được khớp độc lập xếp thành một nhóm riêng, nhưng sau đó chúng ta sẽ thấy trị riêng ứng với tham số này rất nhỏ nên nó sẽ bỏ chung vào nhóm 3.

Từ các lựa chọn trên, chúng ta có thể vẽ sự ảnh hưởng đã "chuẩn hóa" của các tham số lên các bin, cụ thể hơn là 43 bin từ thí nghiệm ATLAS-CO NF-2020-053 [1] ở hình 3.7. Dễ dàng thấy được những tham số chúng ta chọn hình dạng của sức ảnh hưởng



Hình 3.7: Sự ảnh hưởng đã được chuẩn hóa của các tham số trong các nhóm tham số lên các bin, lần lượt là nhóm 2,3,4,5,6,7,8,1. Ở hình cuối cùng, ta có **CHbox** trùng với **ceH**.



Bảng 3.6: Ma thể hiện sự tương đồng về đóng góp lên các bin của các tham số của bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1] sau khi đã bỏ đi các tham số nhóm 1 và 2, giá trị 1 là tương đồng hoàn toàn, giá trị 0 là không tương đồng.

khá là tương đồng. Chính vì các vector này có cùng hình dạng, chúng ta không thể phân biệt được chi khớp dữ liệu, và chúng ta phải chọn một trong những vector đó, hoặc lấy tổ hợp tuyến tính của những vector đó để làm sao cho hình dạng của ảnh hưởng của tổ hợp tuyến tính đó có sức ảnh hưởng lớn nhất lên hàm likelihood. Vì vậy chúng ta phải tiếp tục khảo sát các vector của ma trận thông tin Fisher. Ma trận thông tin Fisher là đạo hàm bậc hai của một vài tham số nhất định tại cực tiểu của hàm log-likelihood:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{c})}{\partial [\mathbf{c}]_i \partial [\mathbf{c}]_i^\top} \Big|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}} = \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}_{[\mathbf{c}]_i}^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}_{[\mathbf{c}]_i}, \quad (3.61)$$

với $[\mathbf{c}]_i$ là vector gồm những tham số trong cùng một nhóm vừa nhắc tới phía trên, từ đó chúng ta có thể tính các vector riêng của ma trận ở phương trình (3.61). Tiếp

theo chúng ta xếp các khối vector thành một ma trận \mathbf{M} , có dạng như sau:

$$\mathbf{M}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{[1]}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{[2]}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{[n]}^\top \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

với $\mathbf{E}_{[i]}^\top$ gồm các vector riêng thuộc nhóm i nằm ngang được xếp thành một ma trận vuông

$$\mathbf{E}_i^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{[i]_1}^\top \\ \dots \\ \mathbf{e}_{[i]_n}^\top \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Do ma trận hiệp phương sai luôn là ma trận "positive semi-definite" thế nên các nhóm vector riêng sẽ tạo thành một hệ cơ sở trực giao

$$\mathbf{E}_i^\top \cdot \mathbf{E}_i = \mathbf{I}(n, n). \quad (3.64)$$

Từ đó ta cũng suy ra được tính chất cho ma trận \mathbf{M}

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^\top = \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I}. \quad (3.65)$$

Ma trận \mathbf{M}^\top được vẽ như ở bảng 3.7. Trị riêng của một vector i , đặt là λ sẽ đại diện cho ảnh hưởng của vector tham số đó lên hàm log-likelihood xung quanh điểm cực tiểu. Sai số của vector i sẽ tỉ lệ với $\frac{1}{\lambda}$. Chúng ta thấy được một điều là tham số $c(3)_{qq}$ có trị riêng rất nhỏ (sai số lớn) nên không thể được ràng buộc một cách độc lập, vì ảnh hưởng của tham số này tuy khác biệt về hình dạng (theo như phân tích về tương đồng hình dạng), nó lại có giá trị rất nhỏ. Thế nên chúng tôi sẽ bỏ tham số này vào nhóm 2. Mỗi vector riêng \mathbf{e}_i sẽ có trị riêng là λ_i và sai số của vector riêng đó là $1/\lambda_i$ (chỉ đúng cho tham số hóa tuyến tính) [1]. Và từ đây ta có thể định nghĩa tham số hóa \mathbf{y}_c cho cơ sở c'_i

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{c'} &= \mathbf{y}_c(\mathbf{c}') = \mathbf{y}_{SM} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{y}_{SM} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{y}_{SM} \circ (1 + \mathbf{A}' \cdot \mathbf{c}'), \end{aligned} \quad (3.66)$$

eigen value	chDD	chWB	chW	chB	cuW	cuB	cW	cG	cqq	c(1)qq	c(3)qq	cuu	c(1)uu	c(1)ud	c(8)ud	c(1)qu	c(8)qu	c(1)qd	c(8)qd	c(3)Hd	c(0)	c(1)Hl	chL	c(1)Hq	chH	chD	c(3)Hq	chG	cuH	cuG	chBsu	chH	ceH	c(3)qq		
129677.078634	0.00	-0.47	0.27	0.81	0.02	0.04	0.02																													
13.003369	-0.00	-0.25	-0.05	0.17	0.01	0.01	0.01																													
0.981195	-0.11	-0.84	0.13	-0.91	-0.02	-0.05	-0.02																													
0.054650	-0.02	-0.00	0.00	-0.03	1.00	-0.01	0.00																													
0.010700	0.96	-0.09	0.01	-0.05	0.02	-0.14	-0.05																													
0.001546	-0.14	0.03	-0.01	0.08	-0.01	-0.91	-0.37																													
0.000008	-0.00	0.00	0.00	-0.00	-0.00	-0.38	0.95																													
6.762219								-0.25	-0.05	-0.34	-0.80	-0.03	-0.35	0.00	-0.05	-0.02	-0.23	0.00	-0.05																	
0.017777								0.96	0.04	-0.02	-0.26	0.01	-0.04	0.00	-0.04	-0.00	-0.04	0.00	-0.04																	
0.000077								-0.12	0.38	0.72	-0.35	0.16	0.15	-0.01	-0.29	-0.01	0.09	0.02	-0.25																	
0.000010								-0.00	-0.00	-0.11	-0.15	0.03	-0.19	0.01	0.08	0.03	0.96	0.05	0.02																	
0.000000								-0.03	-0.16	0.04	-0.39	-0.06	0.75	0.00	0.38	0.05	0.05	-0.03	0.37																	
0.000000								-0.02	0.55	-0.32	0.04	0.28	0.15	-0.04	0.49	0.19	-0.05	0.17	-0.44																	
-0.000000								-0.01	0.15	-0.30	0.02	0.17	0.22	-0.02	-0.61	-0.18	0.06	-0.12	0.38																	
0.000000								-0.01	0.15	-0.30	0.02	0.17	0.22	-0.02	-0.61	-0.18	0.06	-0.12	0.38																	
0.000000								-0.00	-0.01	-0.12	0.02	0.78	0.02	-0.03	0.09	0.21	-0.05	0.13	0.01																	
0.000000								-0.00	-0.01	-0.12	0.02	0.78	0.02	-0.03	0.09	0.21	-0.05	0.13	0.01																	
-0.000000								0.00	0.00	0.03	0.00	-0.12	0.00	0.53	-0.01	-0.32	-0.02	0.77	0.09																	
0.000000								-0.00	-0.01	-0.02	0.01	0.18	-0.00	0.96	-0.02	0.01	-0.00	-0.20	0.02																	
15.181859																					0.87	-0.49														
0.070425																					0.49	0.57														
0.413915																							0.78	-0.02												
0.024741																							0.62	0.78												
14.405506																								0.39	-0.88	0.27										
0.039998																								-0.92	-0.37	0.15										
0.001130																								0.04	0.20	0.95										
443.970072																											1.00									
158579.005868																												1.00	-0.00	0.04						
8.788640																											-0.04	0.08	1.00							
0.069788																											0.00	1.00	-0.08							
1.942174																														0.81	0.51	0.04				
0.100921																														0.51	-0.81	0.02				
-0.000000																														-0.04	0.00	1.00				
0.313685																																	1.00			1.00

Bảng 3.7: Ma trận \mathbf{M}^\top đại diện cho những vector riêng đã chuyển vị (nằm ngang) của những nhóm vector đã chọn cho thí nghiệm ALTAS-CONF-2020-053 [1].

ở đây chúng ta đã đặt $\mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}'$ và $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{A}'$. Tham số hóa tuyến tính có thể tiếp tục được tách thành hai thành phần đóng góp:

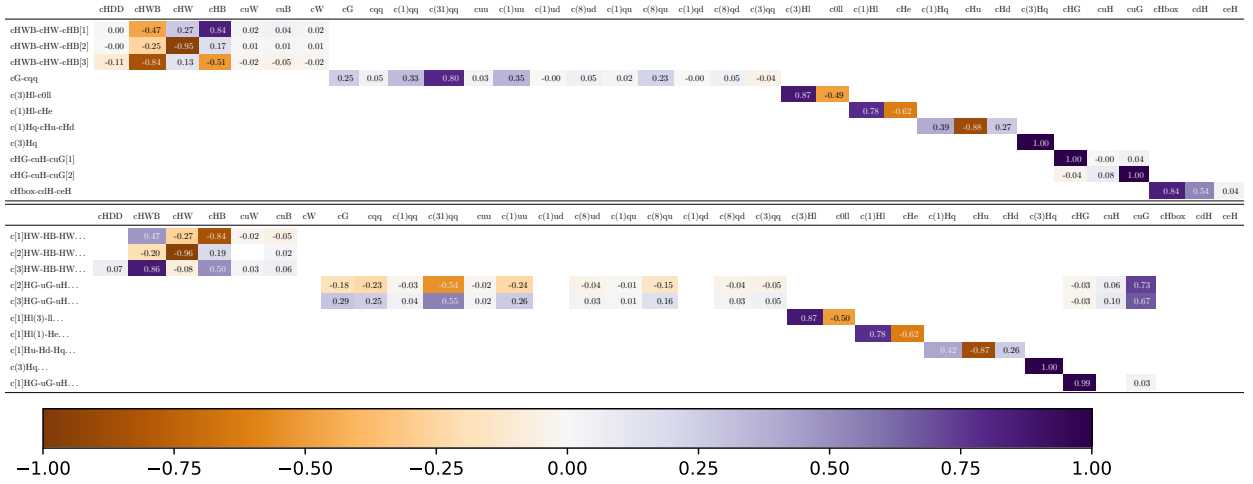
$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{\mathbf{c}'} &= \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} \mathbf{c}') \\
&= \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{M}_{\lambda > a}} \cdot \overline{\mathbf{c}'_{\lambda > a}} + \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{M}_{\lambda < a}} \cdot \overline{\mathbf{c}'_{\lambda < a}}).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Ở đây $\overline{\mathbf{c}'_{\lambda > a}}, (\overline{\mathbf{c}'_{\lambda < a}})$ là những thành phần của vector \mathbf{c}' chứa những tham số với λ_i lớn hơn (bé hơn) một giá trị a nhất định, $\overline{\mathbf{M}_{\lambda > a}}, (\overline{\mathbf{M}_{\lambda < a}})$ là những cột của ma trận \mathbf{M} nhân với $\overline{\mathbf{c}'_{\lambda > a}}, (\overline{\mathbf{c}'_{\lambda < a}})$. Hoặc cách khác, chúng ta đã sử dụng mối quan hệ

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}') = \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{M}_{\lambda > a}} \cdot \overline{\mathbf{c}'_{\lambda > a}} + \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{M}_{\lambda < a}} \cdot \overline{\mathbf{c}'_{\lambda < a}}. \tag{3.68}$$

Từ đây chúng ta sẽ có tiêu chuẩn là sai số của các tham số không được vượt quá $\mathcal{O}(1)$, vậy nên chúng tôi chỉ giữ những vector có trị riêng đủ lớn, không có một cách cụ thể để chọn giới hạn, ở đây chúng tôi chọn $\lambda_i > a = 0.2$. Các vector riêng được chọn sẽ được liệt kê ở bảng 3.8 và so sánh với kết quả tương tự của bài báo [1], bảng này sẽ được gọi là ma trận chiếu $\overline{\mathbf{M}_{\lambda > a}}^\top$, viết tắt cho việc giữ lại những cột vector trong trận đối cơ sở, sao cho $\lambda_i > a$. Từ đó hàm likelihood cho những vector mới sẽ trở thành dạng như sau:

$$\mathbf{y}'_{\mathbf{c}} = \begin{cases} \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \frac{1 + \mathbf{N} \cdot \overline{\mathbf{M}_{\lambda > a}} \cdot \overline{\mathbf{c}'_{\lambda > a}}}{1 + \mathbf{D} \cdot \overline{\mathbf{M}_{\lambda > a}} \cdot \overline{\mathbf{c}'_{\lambda > a}}} & (3.69) \\ \mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{M}_{\lambda > a}} \cdot \overline{\mathbf{c}'_{\lambda > a}}). & (3.70) \end{cases}$$



Bảng 3.8: Ma trận chiều $\overline{\mathbf{M}}_{\lambda>0.2}$ cho bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [2]. Bảng phía trên là kết quả của luận văn này, bảng phía dưới là kết quả lấy từ bài báo [1].

Lưu ý là kết quả của trường tham số hóa tuyến tính sẽ được áp dụng cho trường hợp phi tuyến.

Để làm rõ hơn cho việc chọn hệ cơ sở mới, chúng tôi sẽ giả sử một thí nghiệm với kết quả như sau:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{y}} \pm \Delta_{\mathbf{y}} &= (1) \pm (0.5) \\ \mathbf{y}_{\mathbf{c}} &= 1 + c_1 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\rho} = (1) \\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{cases},$$

và ma trận hiệp phương sai của tham số SMEFT sẽ có dạng

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \Delta^\top \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \Delta = 0.5^2 \\ \mathbf{V}_{\text{SMEFT}}^{-1} &= \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$\mathbf{V}_{\text{SMEFT}}^{-1}$ có hai hàm riêng và trị riêng

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, & \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 = 0, & \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.72)$$

tiếp tục xếp các vector dọc thành một ma trận ta có ma trận \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

Chia ma trận \mathbf{M} thành hai phần theo trị riêng với giá trị cắt bỏ là $a = 1$, ta được:

$$\overline{\mathbf{M}_{\lambda>1}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{M}_{\lambda<1}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

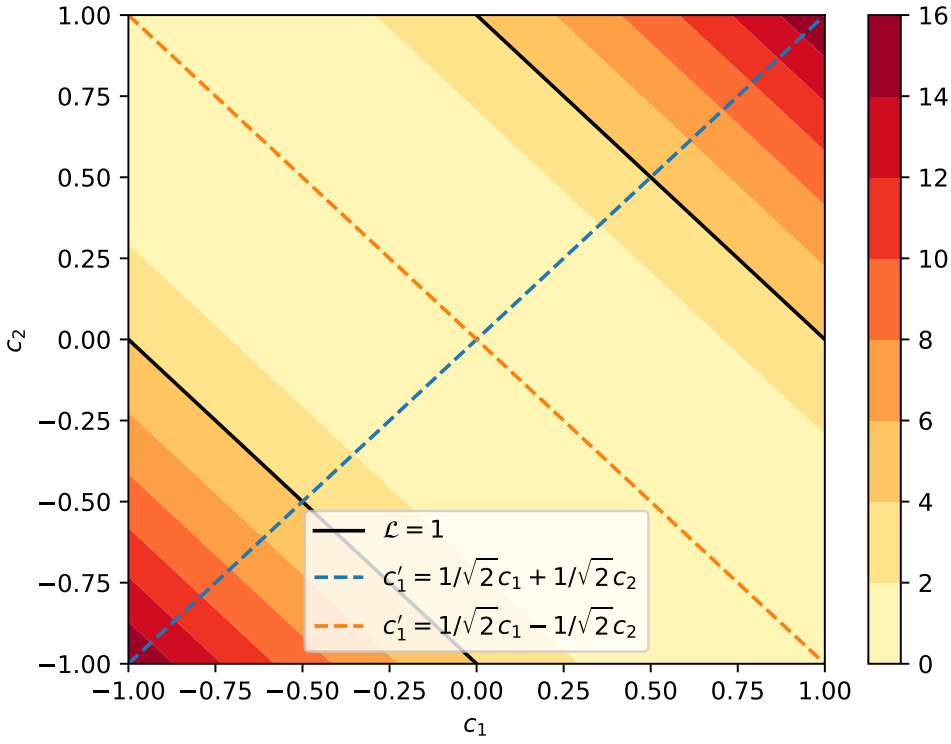
Từ đó suy ra được tham số hóa cho cơ sở \mathbf{c}'

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_{\mathbf{c}} &= 1 + \mathbf{A} \overline{\mathbf{M}_{\lambda>1}} \cdot \overline{\mathbf{c}'_{\lambda>1}} \\ &= 1 + c'_1, \end{aligned} \quad (3.75)$$

với $c'_1 = c_1 + c_2$. Hàm likelihood được vẽ ở hình 3.8. Chúng ta thấy được từ hình này:

$$\begin{aligned} c'_1 &= 1/\sqrt{2}c_1 + 1/\sqrt{2}c_2 = 0 \pm 1 \\ c'_2 &= 1/\sqrt{2}c_1 - 1/\sqrt{2}c_2 = 0 \pm \infty. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Điều này nói rằng chúng ta không thể khớp dữ liệu cho hai tham số chỉ với một kết quả đo đạc, và kết quả khớp dữ liệu chỉ có thể là một giá trị tổ hợp tuyến tính phù hợp của các tham số ban đầu. Và sẽ có **rất nhiều cách để chọn cơ sở khớp dữ liệu mới**



Hình 3.8: Hình vẽ hàm likelihood cho mô hình giả tưởng , chúng ta thấy là hàm like lihood chỉ có thể được khớp đối với những hướng khác với hướng $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Chương 4

FITEFT

Fieft (**fit effective field theory**) sử dụng ngôn ngữ lập trình được viết hoàn toàn bằng Python với mục đích là để tính hàm likelihood gần đúng. Yêu cầu để chạy được công cụ này là:

- Python 3.X
- numpy
- pandas

Đi cùng với các thư viện bắt buộc như trên, một thư viện khác có thể được sử dụng để hỗ trợ trong việc cực tiểu hóa:

- scipy

4.1 Cấu trúc dữ liệu

column

index

production	decay	acceptance	signature	central	+total	total	+stat	-stat	+syst	-syst	central SM	+total SM	-total SM
gg->H,0jet,pTH<10GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	5.90	1.50	-1.30	1.30	-1.20	0.70	-0.60	6.60	0.90	-0.90
gg->H,0jet,10<=pTH<200GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	23.60	3.10	-2.80	2.50	-2.40	1.80	-1.50	20.60	1.60	-1.60
gg->H,1jet,pTH<60GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	3.70	1.80	-1.80	1.40	-1.40	1.20	-1.20	6.50	0.90	-0.90
gg->H,1jet,60<=pTH<120GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	4.80	1.30	-1.20	1.10	-1.10	0.60	-0.50	4.50	0.60	-0.60
gg->H,1jet,120<=pTH<200GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	0.50	0.30	-0.29	0.27	-0.26	0.15	-0.13	0.75	0.13	-0.13
gg->H,>=2jet,mjj<350GeV,pTH<60GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	0.60	1.30	-1.20	1.20	-1.10	0.50	-0.50	1.17	0.27	-0.27
gg->H,>=2jet,mjj<350GeV,60<=pTH<120GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	0.40	1.00	-1.00	0.80	-0.80	0.50	-0.50	1.80	0.40	-0.40
gg->H,>=2jet,mjj<350GeV,120<=pTH<200GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	0.50	0.40	-0.40	0.40	-0.30	0.20	-0.20	0.94	0.21	-0.21
gg->H,>=2jet,350<=mjj<700GeV,pTH<200GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	1.70	0.70	-0.60	0.60	-0.60	0.30	-0.30	0.61	0.13	-0.13
gg->H,>=2jet,mjj>=700GeV,pTH<200GeV	H->ZZ->4l	delta H->ZZ->4l	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	0.20	0.40	-0.40	0.40	-0.30	0.20	-0.20	0.27	0.06	-0.06

Hình 4.1: Ví dụ về file dữ liệu `observable.csv`, ví dụ này là 10 kết quả đo đầu tiên của thí nghiệm ATLAS-2021-053[2].

Cơ sở dữ liệu của Fiteft được lưu trong thư mục

1 Fiteft/data/{tên thí nghiệm}

gồm 3 file chính:

observable.csv : file dữ liệu về những đại lượng vật lý và sai số được cung cấp bởi thực nghiệm.

correlation.csv : file chứa thông tin về ma trận tương quan được cung cấp bởi thực nghiệm.

parametrization.csv : file chứa thông tin về ma trận tham số, có thể được cung cấp bởi bài báo thực nghiệm, hoặc người dùng có thể cung cấp cho mô hình vật bất kỳ.

Những file phụ khác, chương trình có thể chạy khi không có sự có mặt của những file này. Chúng có vai trò bổ sung thông tin giúp kết quả khớp dữ liệu được tốt hơn.

corelation_theory.csv : file chứa thông tin về ma trận tương quan lý thuyết.

rotation.csv : Ma trận chuyển cơ sở, là ma trận chuyển từ cơ sở c sang cơ sở c' với số vector cơ sở nhỏ hơn, giúp giảm số lượng tham số khi khớp dữ liệu.

4.1.1 observable.csv

File dữ liệu này có 2 phần quan trọng :

index : Cần có 5 cột quan trọng:

- production: Tên của những kênh sinh hạt Higgs bin trong stage 1.2, có thể chọn tên tùy ý, chữ hoặc số, tên của **production+decay** trong cùng một hàng không được phép với **production+decay** của hàng khác.
- decay: Tên của những kênh phân rã của hạt Higgs ứng với bin này, có thể chọn tên tùy ý, chữ hoặc số, tên **production+decay** trong cùng một hàng không được phép với **production+decay** của hàng khác.
- acceptance: Loại acceptance được sử dụng cho bin ứng với kênh **decay** vừa nói trên, tên tùy ý, không được trùng với **decay**, đơn giản nhất là đặt " $\{\dots\}$ **decay**" với $\{\dots\}$ là bất cứ ký tự gì.
- signature: Đặc trưng của kết quả thực nghiệm của kênh sinh+phân rã. Chúng tôi cho phép một vài đặc trưng ở bảng 4.1.

column : Cần những thông tin sau đây:

đại lượng vật lý	Đặc trưng (signature)	giá trị tiên đoán SM
$(\sigma_i \times B_j)$	CS*BR	$(\sigma_i \times B_j)_{SM}$
$(\sigma_i \times B_j)$ normalized to SM Signal strength	CS*BR/(CS_SM*BR_SM)	1
$(\sigma_i \times B_Z)/B_Z^{SM}$	CS*BR_ZZ/BR_ZZSM	σ_i^{SM}
$B_i/B_{H \rightarrow ZZ}$	BR/BR_ZZ	$(B_i/B_Z)_{SM}$

Bảng 4.1: Những đặc trưng hiện tại được hỗ trợ trong Fiteft ở cột một, tên của những đặc trưng đó để điền vào cột signature trong file `observable.csv` ở cột thứ hai, những giá trị tiên đoán cần được cung cấp thêm bởi người dùng ở cột thứ ba.

- central: giá trị trung bình
- +total: sai số toàn phần bên phải
- -total: sai số toàn phần bên trái
- +syst: sai số hệ thống bên phải
- -syst: sai số hệ thống bên trái
- +stat: sai số thống kê bên phải
- -stat: sai số thống kê bên trái

Những giá trị tiên đoán của SM, sẽ tùy vào signature của kết quả đo đạc, những tiên đoán này được liệt kê ở bảng 4.1

- central_SM: giá trị tiên đoán lý thuyết
- +total_SM: sai số lý thuyết toàn phần bên phải
- -total_SM: sai số lý thuyết toàn phần bên trái

4.1.2 correlation.csv

Hình 4.2 là ví dụ về file `correlation.csv`, file này chứa dữ liệu về tương quan giữa hai bin bất kỳ, mỗi bin sẽ là sự kết hợp giữa một kênh sinh hạt Higgs và một kênh phân rã hạt Higgs. Ta có thể dễ dàng thấy được đại lượng tương quan một bin với chính nó là bằng 1, đại diện cho đường chéo của ma trận. Đây bắt buộc phải là một ma trận vuông với số hàng và cột bằng với số đại lượng vật lý đo được ở file `observable.csv`. Và mỗi bin sẽ được đại diện bởi sự kết hợp giữa hai cái tên `production` và `decay`, mỗi sự kết hợp phải bắt buộc tương ứng với một sự kết hợp trong file `observable.csv`.

index

production decay	production decay	gg->H->Bgaga,0-jet,pTH<10GeV H->gaga	gg->H->Bgaga,0-jet,10<=pTH<200GeV H->gaga	gg->H->Bgaga,1-jet,pTH<60GeV H->gaga	gg->H->Bgaga,1-jet,60<=pTH<120GeV H->gaga	gg->H->Bgaga,1-jet,120<=pTH<200GeV H->gaga
		index				
gg->H->Bgaga,0-jet,pTH<10GeV	H->gaga	1.00	0.00	-0.02	-0.06	-0.02
gg->H->Bgaga,0-jet,10<=pTH<200GeV	H->gaga	0.00	1.00	-0.23	0.11	0.08
gg->H->Bgaga,1-jet,pTH<60GeV	H->gaga	-0.02	-0.23	1.00	0.24	0.14
gg->H->Bgaga,1-jet,60<=pTH<120GeV	H->gaga	-0.06	0.11	0.24	1.00	0.36
gg->H->Bgaga,1-jet,120<=pTH<200GeV	H->gaga	-0.02	0.08	0.14	0.36	1.00
gg->H->Bgaga,>=y2-jet,mjj<350GeV,pTH<120GeV	H->gaga	0.03	-0.04	-0.05	-0.19	-0.04
gg->H->Bgaga,>=y2-jet,mjj<350GeV,120<=pTH<200GeV	H->gaga	-0.02	0.08	-0.01	0.08	-0.02
gg->H->Bgaga,>=y2-jet,mjj>=y350GeV,pTH<200GeV	H->gaga	0.05	-0.02	0.00	-0.02	0.02
gg->H->Bgaga,200<=pTH<300GeV	H->gaga	-0.02	0.11	0.05	0.22	0.20
gg->H->Bgaga,300<=pTH<450GeV	H->gaga	0.00	0.05	0.03	0.08	0.08

Hình 4.2: Ví dụ về file dữ liệu `corelation.csv`, ví dụ này là kết quả của 10 hàng, 5 cột đầu tiên của thí nghiệm ATLAS-2020-053.

Việc chọn tên là tùy ý, chỉ cần chọn tên sao cho chúng riêng biệt và đầy đủ. Cách đơn giản nhất là chúng lấy những bin có trong file `observable.csv` và bỏ chúng vào file ma trận tương quan và điền những giá trị vào trong bảng.

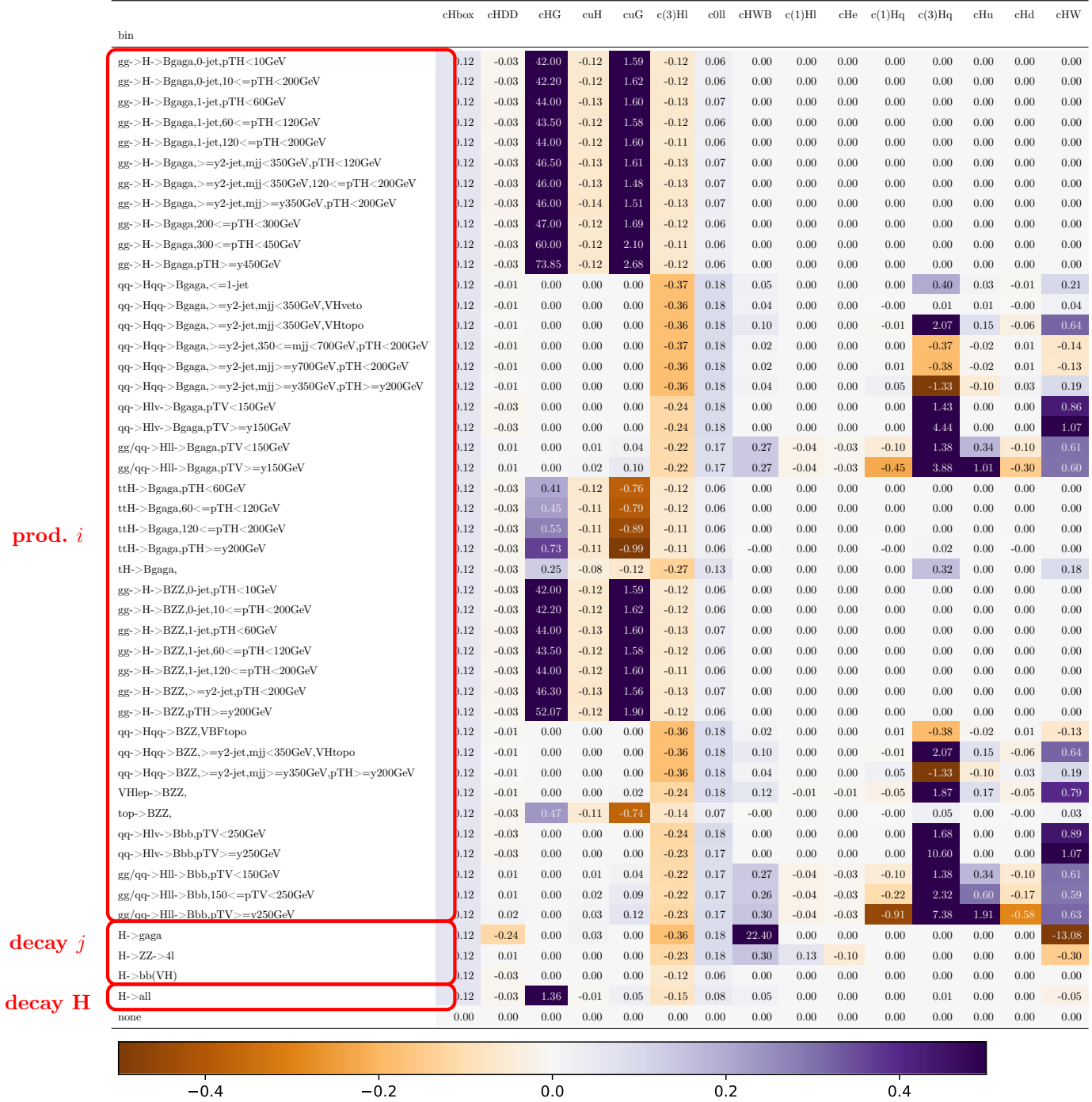
4.1.3 parametrization.csv

Bảng 4.2 liệt kê một phần tham số của ma trận sức ảnh hưởng \mathbf{A} của tham số SMEFT, ma trận này có tổng cộng 34 tham số. Ở cột `bin`, được bao quanh bởi hình chữ nhật màu đỏ với tên **prod. i** , chúng ta cần phải đảm bảo liệt kê đầy đủ tham số hóa tuyến tính của **tất cả** các kênh sinh **production**, **decay j** là tất cả các kênh phân rã **decay**. Ở trong bài báo này `acceptance`, xuất hiện trong file `observable.csv`. Một yêu cầu bắt buộc nữa là tham số hóa phân rã toàn phần của hạt Higgs $(\mathbf{a}_H^{\text{decay}})^\top$. Tất cả các số trong đây sẽ là đại diện cho sức ảnh hưởng tuyến tính của tham số đối với bin đo đang xét, ví dụ cho hàng 1 cột 1 của bảng 4.2, ta có thể suy ra được:

$$\frac{\sigma^{\text{SMEFT}}(\text{gg} \rightarrow \text{H}, 0\text{jet}, p_{\text{TH}} < 10\text{GeV})|_{\text{cHbox}=1}}{\sigma^{\text{SM}}(\text{gg} \rightarrow \text{H}, 0\text{jet}, p_{\text{TH}} < 10\text{GeV})} = 1 + 0.12, \quad (4.1)$$

và ở đây chúng ta chỉ giữ lại thành phần giao thoa là 0.12. Hoặc từ hàng thứ nhất, chúng ta có thể suy ra được:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^{\text{SMEFT}}(\text{gg} \rightarrow \text{H}, 0\text{jet}, p_{\text{H}}^{\text{T}} < 10\text{GeV})}{\sigma^{\text{SM}}(\text{gg} \rightarrow \text{H}, 0\text{jet}, p_{\text{H}}^{\text{T}} < 10\text{GeV})} \\ &= 1 + 0.12 \text{ cHbox} - 0.0294 \text{ cHDD} + 42.0 \text{ cHG} - 0.117 \text{ cuH} + 1.59 \text{ cuG} \\ &- 0.117 \text{ c(3)H1} + 0.0587 \text{ c011} + 0.0 \text{ cHWB} + 0.0 \text{ c(1)H1} + 0.0 \text{ cHe} + 0.0 \text{ c(1)Hq} \\ &+ 0.0 \text{ c(3)Hq} + 0.0 \text{ cHu} + 0.0 \text{ cHd} + 0.0 \text{ cHW} + 0.0 \text{ cHB} + 0.0 \text{ cG} \\ &+ 0.0 \text{ cuW} + 0.0 \text{ cuB} + 0.0 \text{ cqq} + 0.0 \text{ c(1)qq} + 0.0 \text{ c(3)qq} \\ &+ 0.0 \text{ c(31)qq} + 0.0 \text{ cuu} + 0.0 \text{ c(1)uu} + 0.0 \text{ c(1)ud} + 0.0 \text{ c(8)ud} + 0.0 \text{ c(1)qu} \\ &+ 0.0 \text{ c(8)qu} + 0.0 \text{ c(1)qd} + 0.0 \text{ c(8)qd} + 0.0 \text{ cW} + 0.0 \text{ cdH} + 0.0 \text{ ceH}. \end{aligned}$$



Bảng 4.2: Ví dụ về file dữ liệu `parametrization.csv`, ví dụ này đại diện cho sự ảnh hưởng tuyến tính của các tham số SMEFT đối với các kênh sinh và phân rã của hạt Higgs đối với thí nghiệm ATLAS-2020-053 [2]. Ở trong bảng này có sự góp mặt của hệ số của 34 tham số SMEFT.

4.2 Đối tượng fiteft

4.2.1 Khởi tạo đối tượng fiteft

Để khởi tạo được đối tượng `fiteft`, tham khảo phần ví dụ 4.4.

```
1 fiteft(experiment='ATLAS-CONF-2020-053')
```

Tham số

experiment : string

Tên của thư mục chứa dữ liệu của một thí nghiệm, nằm trong thư mục `Fiteft/data`.

Giá trị trả lại: Đối tượng `Fiteft`.

Ví dụ

```
1 >>> from Fiteft import fiteft
2 >>> a = fiteft(experiment='ATLAS-CONF-2020-053')
3 Your input to the likelihood function is a DataFrame with one of
  ↳ these colums:
4 ['c(3)Hq', 'c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB', 'c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB',
  ↳ 'c[3]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB', 'c[1]Hu-Hd-Hq(1)', 'c[1]Hl(1)-He',
  ↳ 'c[1]Hl(3)-ll0', 'c[1]HG-uG-uH-top', 'c[2]HG-uG-uH-top', 'c[3]HG-
  ↳ uG-uH-top']
```

4.2.2 Thay đổi tính chất của hàm likelihood

Người dùng có thể thay đổi loại likelihood và cách tính likelihood thông qua

```
1 fiteft.attribute.update(dict)
```

Tham số: là python dictionary với dạng `{key: value}`.

key : dữ liệu dạng string, chọn 'likelihood_type' hoặc 'devide':

value likelihood_type: loại likelihood, có thể lựa chọn một trong những giá trị sau đây: ['variable Gaussian 0', 'vg0', 0], ['variable Gaussian 1', 'vg1',

1], ['normal Gaussian', 'ng', 2], những giá trị trong ngoặc vuông đều có cùng một chức năng. Các loại like lihood trên lần lượt được giải thích cụ thể ở các phương trình (3.47), (3.48). Mặc định của tính chất này là 'normal Gaussian'.

devide: chọn giữa **True** đại diện cho tham số hóa phi tuyến hoặc **False** đại diện cho tham số hóa tuyến tính, cả hai lựa chọn lần lượt đại diện cho hai cách tham số hóa tiên đoán lý thuyết ở phương trình (2.64), (2.65). Mặc định của tính chất này là **False**, đồng nghĩa với phương trình (2.65).

Ví dụ

Dưới đây là ví dụ về hai cách thay đổi tính chất của hàm likelihood với loại likelihood là variable Gaussian 0

```
1 a.attribute.update({'likelihood_type' : 0, 'devide' : False})
2 a.attribute.update({'likelihood_type' : 'variable Gaussian 0'})
```

4.2.3 Các giá trị có thể truy cập

Các đối tượng tham gia vào việc khớp dữ liệu, người dùng có thể truy cập sau khi khởi tạo đối tượng Fiteft. Để sử dụng Fiteft thì người dùng cũng không cần phải để tâm đến những giá trị này, mục đích của chúng là để tiện lợi hơn trong việc quan sát dữ liệu của một thí nghiệm nhất định.

fiteft.C, fiteft.C2 : pandas Index

Tên của các tham số trong cơ sở lần lượt là **c, c'**, đối tượng này tương tự như một list dữ liệu.

fiteft.obs : pandas DataFrame

Bảng chứa dữ liệu của thí nghiệm.

fiteft.cor_exp : pandas DataFrame

Bảng chứa dữ liệu về ma trận tương quan của giá trị đo đạc cung cấp bởi thực nghiệm.

fiteft.cor_thep : pandas DataFrame

Bảng chứa dữ liệu về ma trận tương quan của tiên đoán lý thuyết, được cung cấp bởi người dùng, mặc định là ma trận đơn vị.

fiteft.param : pandas DataFrame

Bảng dữ liệu chứa các giá trị tham số hóa tuyến tính, bản chất là tất cả các

vector $\mathbf{a}_i^{\text{prod}\top}, \mathbf{a}_i^{\text{decay}\top}, \mathbf{a}_i^{\text{acc}\top}$ xếp chồng lên nhau.

fiteft.rot : pandas DataFrame

Bảng dữ liệu chứa ma trận $\overline{\mathbf{M}}_{\lambda>a}^\top$.

fiteft.Ndf, fiteft.Ddf, fiteft.Adf : pandas DataFrame

Bảng dữ liệu của ma trận tham số hóa $\mathbf{N}, \mathbf{D}, \mathbf{A}$ cho cơ sở c .

fiteft.Ndf2, fiteft.Ddf2, fiteft.Adf2 : pandas DataFrame

Bảng dữ liệu của ma trận tham số hóa $\mathbf{N}', \mathbf{D}', \mathbf{A}'$ cho cơ sở c' .

Ví dụ:

Chúng tôi cung cấp dưới đây là một vài ví dụ về một vài cách sử dụng những dữ liệu trên.

Chúng ta có thể in ra tên của các tham số trong hệ cơ sở c'

```
1 >>> a.C2
2 Index(['c(3)Hq', 'c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB', 'c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB',
3       'c[3]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB', 'c[1]Hu-Hd-Hq(1)', 'c[1]Hl(1)-He',
4       'c[1]Hl(3)-ll0', 'c[1]HG-uG-uH-top', 'c[2]HG-uG-uH-top',
5       'c[3]HG-uG-uH-top'],
6       dtype='object')
```

Sau đó truy cập tham số thứ 2 (lưu ý tham số thứ 0 là tham số đầu tiên)

```
1 >>> a.C2[2]
2 'c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB'
```

Truy cập tham số thứ 0 và 2

```
1 >>> a.C2[[0,2]]
2 Index(['c(3)Hq', 'c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB'], dtype='object')
```

Bỏ đi tham số thứ 2 và trả lại danh sách tham số

```
1 >>> a.C2.drop(a.C2[2])
2 Index(['c(3)Hq', 'c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB', 'c[3]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB',
```

```

3      'c[1]Hu-Hd-Hq(1)', 'c[1]Hl(1)-He', 'c[1]Hl(3)-ll0', 'c[1]HG-uG-
      ↪uH-top',
4      'c[2]HG-uG-uH-top', 'c[3]HG-uG-uH-top'],
5      dtype='object')

```

Chọn cột thứ 0 và 1, hàng thứ 0 tới 5 trong ma trận \mathbf{A}' bằng cách sử dụng số.

```

1 >>> a.Adf2.iloc[0:5,[0,1]]
2
3 production      decay      acceptance      signature      c(3)Hq      c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB
4 gg->H->Bgaga,0-jet,pTH<10GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019
5 gg->H->Bgaga,0-jet,10<=pTH<200GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019
6 gg->H->Bgaga,1-jet,pTH<60GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019
7 gg->H->Bgaga,1-jet,60<=pTH<120GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019
8 gg->H->Bgaga,1-jet,120<=pTH<200GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019

```

Chọn cột tương ứng với tham số thứ 0 và 1, hàng thứ 0 tới 5 trong ma trận \mathbf{A}' bằng cách sử dụng ký tự.

```

1 >>> temp = a.C2[[0,1]]
2 >>> temp
3 Index(['c(3)Hq', 'c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB'], dtype='object')
4 >>> a.Adf2.loc[:,temp].head()
5
6 production      decay      acceptance      signature      c(3)Hq      c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB
7 gg->H->Bgaga,0-jet,pTH<10GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019
8 gg->H->Bgaga,0-jet,10<=pTH<200GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019
9 gg->H->Bgaga,1-jet,pTH<60GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019
10 gg->H->Bgaga,1-jet,60<=pTH<120GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019
11 gg->H->Bgaga,1-jet,120<=pTH<200GeV      H->gaga none      CS*BR/(CS_SM*BR_SM)      -0.013      47.84019

```

4.3 Các hàm tính toán của đối tượng fiteft

4.3.1 fiteft.likelihood

```

1 fiteft.likelihood(C_df)

```

Tham số:

$\mathbf{C_df}$: Panda DataFrame

Bảng dữ liệu chứa n vector \mathbf{c}'^T xếp lên nhau với tên các cột là tên các tham số, với số tham số tùy ý, chúng tôi chỉ sử dụng những cột có tên trùng với tên cột của đối tượng `fiteft.Ndf2`.

Giá trị trả lại: `np.ndarray`

Mảng có hình dạng $(n,1,1)$, với n là số vector của $\mathbf{C_df}$

Ví dụ:

Để sử dụng được hàm số này, chúng ta cần biết cách khởi tạo pandas DataFrame C_{df} cho vector c' , dưới đây chúng tôi ví dụ hai cách để khởi tạo một pandas dataframe:
Cách 1:

```
1 >>> df = pd.DataFrame(np.ones((2,2)), columns = ['c(3)Hq', 'c[1]Hl(3)-
    ↪l10'])
2 >>> df
3      c(3)Hq  c[1]Hl(3)-l10
4 0         1.0             1.0
5 1         1.0             1.0
```

Cách 2:

```
1 >>> df = pd.DataFrame(np.ones((2,2)), columns = a.C2[[0,6]])
2 >>> df
3      c(3)Hq  c[1]Hl(3)-l10
4 0         1.0             1.0
5 1         1.0             1.0
```

Sau đó ta có thể sử dụng hàm `fiteft.likelihood` với tham số là pandas dataframe như trên

```
1 >>> a.likelihood(df)
2 array([[1803.67453384]],
3
4        [[1803.67453384]]])
```

Các tham số còn lại mặc định được bỏ qua (bằng 0). Hai số trên đồng nghĩa với hàm likelihood được tính cho điểm $[c(3)Hq = 1, c[1]Hl(3) - l10 = 1]$ hai lần. Chúng ta có thể gán giá trị 0 cho một tham số bất kỳ ngoài hai tham số ban đầu và hàm likelihood vẫn sẽ trả lại giá trị không đổi.

```
1 >>> df = pd.DataFrame(np.array([[1,1,0],[1,1,0]]),\
2      columns = ['c(3)Hq', 'c[1]Hl(3)-l10', 'c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB'])
3 >>> df
```

```

4      c(3)Hq  c[1]Hl(3)-ll0  c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB
5 0          1          1          0
6 1          1          1          0
7 >>> a.likelihood(df)
8 array([[1803.67453384]],
9
10        [[1803.67453384]]])

```

Thứ tự của các tham số có thể được sắp xếp tùy ý, dưới đây lần lượt là kết quả của $\mathcal{L}(c(3)Hq = 0, c[1]Hl(3) - ll0 = 1)$ và $\mathcal{L}(c(3)Hq = 1, c[1]Hl(3) - ll0 = 0)$

```

1 >>> df = pd.DataFrame(np.array([[0,1],[1,0]]),\
2      columns = ['c(3)Hq', 'c[1]Hl(3)-ll0'])
3 >>> df
4      c(3)Hq  c[1]Hl(3)-ll0
5 0          0          1
6 1          1          0
7 >>> a.likelihood(df)
8 array([[ 52.22424586]],
9
10        [[1911.79581288]]])

```

Nếu chúng ta đổi chỗ của hai tham số thì giá trị của hàm likelihood không đổi

```

1 >>> df = pd.DataFrame(np.array([[1,0],[0,1]]),\
2      columns = ['c[1]Hl(3)-ll0', 'c(3)Hq'])
3 >>> df
4      c[1]Hl(3)-ll0  c(3)Hq
5 0          1          0
6 1          0          1
7 >>> a.likelihood(df)
8 array([[ 52.22424586]],
9
10        [[1911.79581288]]])

```

4.3.2 fiteft.l

Mục đích của hàm này là để thuận tiện hơn cho việc nhập dữ liệu mà không phải nhập tên của các tham số mỗi lần tính likelihood.

```
1 fiteft.l(cvecs)
```

Tham số:

cvecs : pandas DataFrame hoặc numpy ndarray

numpy ndarray: có hình dạng (n,m) đại diện cho n vector \mathbf{c}'^T xếp chồng theo cột, m là số tham số của vector \mathbf{c}'^T , thứ tự của các tham số trong numpy array sẽ tự động gán cho các cột của **cvecs** giống với thứ tự các tham số của **fiteft.C2**.

pandas DataFrame: giống như tham số của hàm **fiteft.likelihood()**.

Giá trị trả lại: **np.ndarray** với hình dạng (n,1,1)

Mảng có hình dạng (n,1,1), với n là số vector của **cvecs**

Ví dụ

Để biết được số tham số tham gia vào việc tính likelihood, chúng ta có thể gọi các cột của ma trận tham số hóa:

```
1 >>> a.C2
2 Index(['c(3)Hq', 'c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB', 'c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB',
3       'c[3]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB', 'c[1]Hu-Hd-Hq(1)', 'c[1]Hl(1)-He',
4       'c[1]Hl(3)-l10', 'c[1]HG-uG-uH-top', 'c[2]HG-uG-uH-top',
5       'c[3]HG-uG-uH-top'],
6       dtype='object')
```

Kết quả trả lại là các tham số tham gia vào việc khớp dữ liệu. Tương đương với số tham số là 10. Hoặc là muốn biết được số tham số, chúng ta có thể in hình dạng của ma trận tham số ra:

```
1 >>> a.C2.shape
2 (10,)
```

Kết quả trả lại tương đương với số tham số của \mathbf{c}' là 10. Từ đây ta sẽ khởi tạo numpy ndarray với hình dạng (n,10) bất kỳ

```
1 >>> arr = np.tile([[0],[0.1],[0.2]], (1,10))
2 >>> arr
3 array([[0. , 0. , 0. , 0. , 0. , 0. , 0. , 0. , 0. , 0. ],
4        [0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1],
5        [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]])
```

Từ đây ta có thể bỏ `arr` vào hàm `fiteft.l()`

```
1 >>> a.l(arr)
2 array([[ 39.28929247],
3
4        [ 6658.64606328]],
5
6        [[25489.35871156]]])
```

Cách làm trên sẽ trả lại giá trị tương đương với cách làm dưới đây

```
1 >>> arr = np.tile([[0],[0.1],[0.2]], (1,10))
2 >>> df = pd.DataFrame(arr, columns = a.C2)
3 >>> df
4   c(3)Hq  c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB  ...  c[2]HG-uG-uH-top  c[3]HG-uG-uH-top
5 0      0.0                      0.0  ...                0.0                0.0
6 1      0.1                      0.1  ...                0.1                0.1
7 2      0.2                      0.2  ...                0.2                0.2
8
9 [3 rows x 10 columns]
10 >>> a.l(df)
11 array([[ 39.28929247],
12
13        [ 6658.64606328]],
14
15        [[25489.35871156]]])
```

4.3.3 fiteft.dl

Đây là hàm tính đạo hàm của hàm $\mathcal{L}(\mathbf{c})$.

```
1 fiteft.dl(cvecs, delta =1.49e-08)
```

Tham số:

cvecs : pandas DataFrame hoặc numpy ndarray

numpy ndarray: có hình dạng (n,m) đại diện cho n vector \mathbf{c}'^\top xếp chồng theo cột, với m là số vector \mathbf{c}'^\top , n là số tham số của vector \mathbf{c}'^\top , thứ tự của các tham số trong numpy array sẽ tự động gán cho các cột của **cvecs**, thứ tự của các tham số giống với **fiteft.Ndf2**.

pandas DataFrame: giống như tham số của hàm **fiteft.likelihood()**.

Giá trị trả lại: **np.ndarray** với hình dạng (n,1,m)

Mảng có hình dạng (n,1,m), với n là số vector của **cvecs** và m là số tham số \mathbf{c}' . Giá trị trả lại là danh sách các vector đạo hàm của hàm likelihood theo các vector \mathbf{c}'

Ví dụ

Ta sẽ tính đạo hàm của hàm likelihood theo vector \mathbf{c}' với các giá trị tại 0. Đầu tiên ta khởi tạo **cvecs** đại diện cho các vector \mathbf{c}' sau đó sử dụng **|cvecs|** làm tham số cho hàm **fiteft.dl**

```
1 >>> arr = np.zeros((1,10))
2 >>> arr
3 array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]])
4 >>> a.dl(arr)
5 array([[[ 1.74947677e+01,  1.19368262e+03,  4.69186152e-01,
6           4.96926121e+00, -5.59564136e+00,  2.77503991e+00,
7           -1.56736581e+01,  1.22274234e+03, -8.44857583e+00,
8           -8.51474262e+00]]]])
9 >>> a.dl(arr).shape
10 (1, 1, 10)
```

Giá trị trên tương đương với $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{c}'^\top} |_{\mathbf{c}'=0}$

Chúng ta cũng có cách khác để nhập dữ liệu cho hàm trên như sau:

```
1 >>> df = pd.DataFrame([[0,0]], columns = ['c(3)Hq', 'c[1]HW-HB-HWB-
      ↳HDD-uW-uB'])
2 >>> df
3      c(3)Hq  c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB
```

```

4 0      0      0
5 >>> a.dl(df)
6 array([[ 17.49476769, 1193.68261566]])

```

Một cách làm khác với kết quả tương tự

```

1 >>> df = pd.DataFrame([[0,0]], columns = a.C2[[0,1]])
2 >>> df
3      c(3)Hq   c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB
4 0      0      0
5 >>> a.dl(df)
6 array([[ 17.49476769, 1193.68261566]])

```

Các giá trị không được chắc tới sẽ được mặc định bằng 0, chúng ta có thể đổi vị trí của các vector trong dataframe để giá trị đạo hàm cũng được sắp theo dataframe đã sử dụng

```

1 >>> df = pd.DataFrame([[0,0]], columns = ['c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB',
      ↪ 'c(3)Hq'])
2 >>> df
3      c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB   c(3)Hq
4 0      0      0
5 >>> a.dl(df)
6 array([[1193.68261566, 17.49476769]])

```

Chúng ta cũng có thể tính đạo hàm cho nhiều vector cùng một lúc

```

1 >>> df = pd.DataFrame([[0,0],[0.1,0.1]], columns = a.C2[[0,1]])
2 >>> df
3      c(3)Hq   c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB
4 0      0.0      0.0
5 1      0.1      0.1
6 >>> a.dl(df)
7 array([[1.74947686e+01, 1.19368262e+03]],
8

```


4.3.4 fiteft.l_profile

```
1 fiteft.l_profile(cvecs, loc, val)
```

Hàm dùng để tính profile likelihood với số tham số là $m-1$, với m là số tham số của vector \mathbf{c}' . Hàm này tương đương với $\mathcal{L}(c'_i = \text{val}, \overline{\mathbf{c}}'_i)$ với $i = \text{loc}$.

Tham số:

cvecs : pandas DataFrame hoặc numpy ndarray

numpy ndarray: có hình dạng $(n, m-1)$ đại diện cho n vector $\overline{\mathbf{c}}'_i$ xếp chồng theo cột, với $m-1$ là số vector $\overline{\mathbf{c}}'_i$, n là số tham số của vector $\overline{\mathbf{c}}'_i$, thứ tự của các tham số trong numpy array sẽ tự động gán cho các cột của **cvecs**, thứ tự của các tham số giống với **fiteft.Ndf2** bỏ tham số thứ i .

pandas DataFrame: giống như tham số của hàm **fiteft.likelihood()**. Với lưu ý là DataFrame này không chứa tham số c'_i

loc : str hoặc int

str: tên của tham số, ví dụ như **c(3)Hq**

int: số thứ tự của tham số đang xét, bắt đầu từ 0 là tham số đầu tiên

val : float

Giá trị của tham số c'_i đang xét

delta : float

Giá trị của bước nhảy trong tính đạo hàm số, mặc định $1.49\text{e-}8$

Giá trị trả lại: **np.ndarray** với hình dạng $(n, 1, 1)$

Mảng có hình dạng $(n, 1, 1)$, với n là số vector của **cvecs**

Ví dụ

Chúng ta tính $\mathcal{L}(c'_i = 0.5, \overline{\mathbf{c}}'_i)$ với $i = \text{c(3)Hq}$ bằng hai cách.

Cách đầu là sử dụng dataframe

```
1 >>> df = pd.DataFrame([[0],[1]], columns = ['c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB'])
```

```

2 >>> df
3      c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB
4 0
5 1
6 >>> a.l_profile(df, 'c(3)Hq', 0.5)
7 array([[ 511.78960776]],
8
9        [[261073.42566001]]])

```

Hai giá trị trên là $\mathcal{L}(c(3)Hq = 0.5, \overline{c}_{c(3)Hq})$ với $c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB$ được gán với hai giá trị 0 và 1, cách tham số khác được mặc định bằng 0. Việc sử dụng DataFrame có lợi thế là tự do sắp xếp các tham số.

Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng numpy array để làm input

```

1 >>> arr = np.zeros((2,9))
2 >>> arr[1,0]=1
3 >>> arr
4 array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
5        [1., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]])
6 >>> a.l_profile(arr, loc = 0, val= 0.5)
7 array([[ 511.78960776]],
8
9        [[261073.42566001]]])

```

Hoặc chúng ta có thể tạo một DataFrame hoàn chỉnh một cách đơn giản như sau

```

1 >>> arr = np.zeros((2,9))
2 >>> arr[1,0]=1
3 >>> df = pd.DataFrame(arr, columns = a.C2.drop(a.C2[0]))
4 >>> df
5      c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB  c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB  ...  c[2]HG-uG-uH-top  c[3]HG-uG-uH-
   →top
6 0                                0.0                    0.0  ...                0.0
   →0.0
7 1                                1.0                    0.0  ...                0.0
   →0.0
8
9 [2 rows x 9 columns]
10 >>> a.l_profile(df, a.C2[0], 0.5)
11 array([[ 511.78960776]],
12
13        [[261073.42566001]]])

```

Chúng ta có ba kết quả giống nhau, ở đây chúng ta đã đặt c'_i là giá trị đầu tiên -vị trí 0- (ứng với $c(3)Hq$) của vector là 0.5.

4.3.5 fiteft.dl_profile

```
1 fiteft.dl_profile(cvecs, loc, val, delta=1.49e-08)
```

Hàm để tính giá trị đạo hàm $\frac{\partial \mathcal{L}(c'_i=\text{val}, \overline{c'_i})}{\partial}$ với $i = \text{loc}$

Tham số:

cvecs : pandas DataFrame hoặc numpy ndarray

numpy ndarray: có hình dạng $(n, m-1)$ đại diện cho n vector $\overline{c'_i}$ xếp chồng theo cột, với $m-1$ là số vector $\overline{c'_i}^\top$, n là số tham số của vector $\overline{c'_i}^\top$, thứ tự của các tham số trong numpy array sẽ tự động gán cho các cột của **cvecs**, thứ tự của các tham số giống với **fiteft.Ndf2** bỏ tham số thứ i .

pandas DataFrame: giống như tham số của hàm **fiteft.likelihood()**.
Với lưu ý là DataFrame này không chứa tham số c'_i

loc : str hoặc int

str: tên của tham số, ví dụ như $c(3)Hq$

int: số thứ tự của tham số đang xét, bắt đầu từ 0 là tham số đầu tiên

val : float

Giá trị của tham số c'_i đang xét

delta : float

Giá trị của bước nhảy trong tính đạo hàm số, mặc định $1.49e-8$

Giá trị trả lại: np.ndarray với hình dạng $(n, 1, m-1)$

Mảng có hình dạng $(n, 1, m-1)$, với n là số vector của **cvecs** và $m-1$ là số tham số của $\overline{c'_i}^\top$. Giá trị trả lại là danh sách các vector đạo hàm của hàm likelihood theo vector $\overline{c'_i}^\top$

Ví dụ

Chúng ta tính $\frac{\partial \mathcal{L}(c'_i=0.5, \overline{c'_i})}{\partial \overline{c'_i}^\top}$ với $i = c(3)Hq$ bằng hai cách.

Cách đầu là sử dụng dataframe

```
1 >>> df = pd.DataFrame([[0],[1]], columns = ['c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB'])
```

```

2 >>> df
3      c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB
4 0
5 1
6 >>> a.dl_profile(df, 'c(3)Hq', 0.5)
7 array([[ 2322.82750159]],
8
9        [[518378.25472623]]])

```

Hai giá trị trên là $\frac{\partial \mathcal{L}(\hat{c}_i, \overline{c}_i)}{\partial \overline{c}_i} |_{c(3)Hq=0.5}$ với `c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB` được gán hai giá trị 0 và 1, cách tham số khác được mặc định bằng 0, lưu ý là hàm chỉ trả lại đạo hàm đối với các tham số đã được khai báo. Việc sử dụng DataFrame có lợi thế là tự do sắp xếp các tham số.

Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng numpy array để làm dữ liệu đầu vào

```

1 >>> arr = np.zeros((2,9))
2 >>> arr[1,0]=1
3 >>> arr
4 array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.],
5        [1., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]])
6 >>> a.dl_profile(arr, loc = 0, val= 0.5)
7 array([[ 2.32282750e+03, -1.91485358e+02,  1.50639485e+01,
8        -1.85706419e+02,  4.26760551e-01, -7.62017694e+01,
9        7.84276547e+02, -3.75906673e-01,  1.47928321e+00]],
10
11        [[ 5.18378259e+05,  2.66560225e+03,  4.41266808e+02,
12        -6.12969642e+02, -1.40475791e+02, -4.58330052e+03,
13        2.38905668e+05, -2.01389912e+03, -1.43328552e+03]]])

```

Chúng ta có hai kết quả nhìn khác nhau, nhưng nếu để ý tới giá trị đầu tiên của mỗi hàng thì chúng ta có lại được kết quả giống nhưng phần phía trên, ở đây chúng ta đã đặt c'_i là giá trị đầu tiên -vị trí 0- (ứng với `c(3)Hq`) của vector là 0.

Một cách khác nữa là sử dụng một dataframe đầy đủ, chứa hai vector \overline{c}_i

```

1 >>> arr = np.zeros((2,9))
2 >>> arr[1,0]=1
3 >>> df = pd.DataFrame(arr, columns = a.C2.drop(a.C2[0]))

```

```

4 >>> df
5   c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB  c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB  ...  c[2]HG-uG-uH-top  c[3]HG-uG-uH-
   ↳top
6 0                               0.0                               0.0  ...                               0.0                               ↳
   ↳0.0
7 1                               1.0                               0.0  ...                               0.0                               ↳
   ↳0.0
8
9 [2 rows x 9 columns]
10 >>> a.dl_profile(df, a.C2[0], 0.5)
11 array([[ 2.32282750e+03, -1.91485358e+02,  1.50639485e+01,
12          -1.85706419e+02,  4.26760551e-01, -7.62017694e+01,
13           7.84276547e+02, -3.75906673e-01,  1.47928321e+00]],
14
15          [[ 5.18378255e+05,  2.66560225e+03,  4.41266808e+02,
16           -6.12969642e+02, -1.40475791e+02, -4.58330052e+03,
17           2.38905668e+05, -2.01389912e+03, -1.43328552e+03]]])

```

4.4 Ví dụ

Ở phần ví dụ này, chúng tôi sẽ ví dụ về việc sử dụng FITEFT, với một kết quả cụ thể là ATLAS-CONF-2020-053. Đầu tiên chúng ta import những thư viện cần thiết là numpy, pandas, Fieft và khởi tạo đối tượng Fiteft. Chúng tôi import Fiteft.Fiteft

```
[8]: import numpy as nup
import pandas as pd
import sys
from scipy.optimize import minimize

sys.path.append('/home/dung/project/Fiteft')
import Fiteft as Fiteft
f = Fiteft.fiteft()
```

Your input to the likelihood function is a DataFrame with one of
→ these columes:

```
['c(3)Hq', 'c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB', 'c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB',   
→ 'c[3]HW-HB-HWB-   
HDD-uW-uB', 'c[1]Hu-Hd-Hq(1)', 'c[1]Hl(1)-He', 'c[1]Hl(3)-l10',   
→ 'c[1]HG-uG-uH-   
top', 'c[2]HG-uG-uH-top', 'c[3]HG-uG-uH-top']
```

Chúng ta có thể bắt đầu tính likelihood với các giá trị **c** như sau (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) với các giá trị được xếp theo thứ tự được viết như trên. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc khởi tạo một mảng tên là **arr** với hình dạng (1,10)

```
[ ]: arr = np.zeros((1,10))
arr
```

```
[ ]: array([[0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]])
```

rồi sử dụng **arr** làm argument cho hàm **fiteft.l()**

```
[ ]: f.l(arr)
```

```
[ ]: array([[39.28929247]])
```

Chúng ta sẽ tìm cực tiểu hàm likelihood trên với sự trợ giúp của hàm **minimize** của thư viện **scipy**. input của hàm **minimize(fun)** có một điều đáng lưu ý là:

$\text{fun}(x)$ là hàm số với giá trị trả lại là dạng dữ liệu `float`, và giá trị nhập vào là numpy array với hình dạng $x(n,)$ với n là số tham số. Hàm like lihood của ta có dạng $x(1,n) \rightarrow \text{fx}(1,1,1)$, nên chúng ta sẽ phải thực hiện biến đổi sau

$$\underbrace{x(n,) \rightarrow x(1,n) \rightarrow \text{fx}(1,1,1)}_{\text{fun}} \rightarrow \text{fx}(\text{float})$$

Chúng ta làm vậy thông qua hàm `lambda` như sau

```
[ ]: fun = lambda x: f.l(x.reshape(1,-1))[0,0,0]
```

Để kiểm tra hàm `fun`, chúng ta sẽ sử dụng một mảng có hình dạng (10,)

```
[ ]: arr = np.zeros(10)
      arr.shape
```

```
[ ]: (10,)
```

sử dụng `arr` làm argument cho hàm `fun` và kết quả trả lại được mong đợi là dữ liệu dạng `float`

```
[ ]: fun(arr)
```

```
[ ]: 39.289292468722365
```

Và thế là chúng ta đã định nghĩa được hàm số mới sử dụng array với input có hình dạng $(n,)$ và output là `float`. Kết quả này đúng với điều kiện của hàm số của hàm `minimize`, giờ chúng ta có thể bắt đầu tính cực tiểu thông qua hàm `minimize` với điểm bắt đầu là `0` (mảng chứa các tham số đều là 0)

```
[ ]: minimize(fun = fun, x0 = np.zeros(10))
```

```
[ ]: message: Desired error not necessarily achieved due to precision
      ↪loss.
      success: False
      status: 2
      fun: 27.391502321886623
      x: [-5.262e-02 -1.140e-02  2.144e-01 -3.808e+00 -6.253e-01
          1.838e+01 -1.392e+00  4.151e-03  6.644e-02  8.962e-01]
      nit: 33
      jac: [ 1.192e-06  4.029e-05  9.060e-06  1.001e-05 -4.768e-07
```

```

2.146e-06 -3.576e-06 6.328e-04 -2.384e-07 -3.576e-06]
hess_inv: [[ 1.445e-03  1.219e-04 ... 2.940e-03 -1.642e-03]
[ 1.219e-04  7.498e-05 ... 9.721e-04  1.449e-03]
...
[ 2.940e-03  9.721e-04 ... 4.967e-02  2.122e-02]
[-1.642e-03  1.449e-03 ... 2.122e-02  4.947e-01]]
nfev: 462
njev: 42

```

Kết quả trả lại là `False`, điều này không có nghĩa là kết quả sai, mà tại vì đạo hàm của hàm likelihood chưa đạt đến mức nhỏ nhất định để được coi là chính xác, mặc định là 10^{-6} , chúng ta sẽ thay đổi con số này thành một số lớn hơn để điều kiện đạo hàm dễ dàng được thỏa mãn, ở đây, ta sẽ sử dụng argument `options = {'gtol':1e-3}`.

```
[ ]: res = minimize(fun = fun, x0 = np.zeros(10), options = {'gtol':1e-3})
res
```

```
[ ]: message: Optimization terminated successfully.
success: True
status: 0
fun: 27.391502321886623
x: [-5.262e-02 -1.140e-02 2.144e-01 -3.808e+00 -6.253e-01
1.838e+01 -1.392e+00 4.151e-03 6.644e-02 8.962e-01]
nit: 32
jac: [ 1.192e-06 3.958e-05 9.298e-06 1.049e-05 -7.153e-07
2.384e-06 -3.576e-06 6.330e-04 -4.768e-07 -4.053e-06]
hess_inv: [[ 2.079e-03 -2.024e-05 ... 1.680e-03 1.511e-03]
[-2.024e-05 1.059e-04 ... 1.246e-03 8.496e-04]
...
[ 1.680e-03 1.246e-03 ... 5.210e-02 1.578e-02]
[ 1.511e-03 8.496e-04 ... 1.578e-02 5.023e-01]]
nfev: 407
njev: 37

```

Kết quả trả lại là thành công, chúng ta thấy được là hàm `minimize` đã trả lại kết quả cực tiểu của hàm likelihood là $\mathcal{L}(\hat{c}) = 27.3915$ với giá trị \hat{c} là `res.x`, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c'}$ là `res.jac`, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial c' \partial c'^T}$ là `res.hess_inv`. Chúng ta sẽ tính thời gian để thực hiện phép toán này thông

qua câu lệnh

```
[ ]: %%timeit
minimize(fun = fun, x0 = np.zeros(10), options = {'gtol':1e-3})
```

13.4 s ± 1.39 s per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1 loop each)

Chúng ta có hiện thời gian để tìm cực tiểu này là khoảng 13.4 giây với điểm bắt đầu là tất cả tham số ở giá trị 0. Chúng ta có thể cải thiện hàm cực tiểu hóa một cách đáng kể bằng cách bổ sung cho nó hàm tính đạo hàm của `fiteft`, tôi đặt nó là `fun2`, và hàm này sử dụng giá input là một mảng với hình dạng (10,) và trả lại giá trị là một mảng với hình dạng là (10,) với cách thiết lập giống như hàm likelihood như ở trên. Hàm `fun2` sẽ có thuật toán dạng như sau

$$\underbrace{x(n,) \rightarrow x(1,n) \rightarrow \overbrace{fx(1,1,n)}^{\text{fiteft.dl}} \rightarrow fx(n,)}_{\text{fun2}}$$

```
[ ]: fun2 = lambda x: f.dl(x.reshape(1,-1))[0,0]
```

```
[ ]: (10,)
```

sử dụng hàm này với argument là một mảng hình dạng (10,), ta có:

```
[ ]: arr = np.zeros(10)
fun2(arr)
```

```
[ ]: array([ 1.74947677e+01,  1.19368262e+03,  4.69186152e-01,  4.
    ↪96926121e+00,
    ↪-5.59564136e+00,  2.77503991e+00, -1.56736581e+01,  1.
    ↪22274234e+03,
    ↪-8.44857583e+00, -8.51474262e+00])
```

Sử dụng lại hàm `minimize`, nhưng bây giờ chúng tôi bổ sung cho hàm cực tiểu hóa này argument là một hàm để tính đạo hàm `fun2` với cú pháp `jac = fun2`, ở đây `jac` là viết tắt của Jacobian.

```
[ ]: res = minimize(fun = fun, x0 = np.zeros(10), jac = fun2, options = ↪
    ↪{'gtol':1e-3})
res
```

```
[ ]: message: Optimization terminated successfully.
      success: True
      status: 0
      fun: 27.39150232202947
      x: [-5.262e-02 -1.140e-02  2.144e-01 -3.808e+00 -6.253e-01
          1.838e+01 -1.392e+00  4.151e-03  6.644e-02  8.962e-01]
      nit: 32
      jac: [-4.769e-07  2.003e-05  5.722e-06  5.007e-06  2.384e-07
            -2.384e-07 -1.431e-06  3.565e-04 -2.384e-07 -2.384e-06]
      hess_inv: [[ 2.090e-03 -2.388e-05 ...  1.650e-03  1.484e-03]
                 [-2.388e-05  1.065e-04 ...  1.250e-03  8.502e-04]
                 ...
                 [ 1.650e-03  1.250e-03 ...  5.212e-02  1.573e-02]
                 [ 1.484e-03  8.502e-04 ...  1.573e-02  5.022e-01]]
      nfev: 37
      njev: 37
```

Để thấy được sự cải thiện, chúng ta có thể tính thời gian thực hiện tác vụ này như sau

```
[ ]: %%timeit
      minimize(fun = fun, x0 = np.zeros(10), jac = fun2, options = {'gtol':
      ↪ 1e-3})
```

3.21 s ± 541 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1 loop each)

Và thời gian tìm cực tiểu được cải thiện đáng kể, từ 13.4 giây xuống còn 3.2 giây. Và chúng tôi cũng chỉ đang tính cực tiểu bằng đạo hàm số nhưng tận dụng sức mạnh của thư viện numpy, chúng tôi đã rút ngắn thời gian tính toán xuống hơn 3 lần. Nếu sử dụng kết quả đạo hàm giải tích thì thời gian tính toán trên có thể được rút ngắn hơn nhiều lần, ở phiên bản hiện tại của Fiteft chưa có hàm tính đạo hàm giải tích và sẽ xuất hiện ở những cải tiến sau này.

4.4.1 profiling

Sau khi tìm được $\hat{\mathbf{c}}'$, chúng ta có thể bắt đầu tính profile likelihood $\mathcal{L}(\hat{c}'_i, \hat{\mathbf{c}}'_i)$ chúng ta sẽ phải viết một hàm số mới để bỏ vào hàm `minimize`, hàm số này sẽ lấy một vector với hình dạng (m-1,) với m-1 là số tham số của $\hat{\mathbf{c}}'_i$ và trả lại kết quả là một float:

$$\underbrace{x(n,) \rightarrow x(1,n) \rightarrow \overbrace{fx(1,1,n)}^{fiteft.l_profile} \rightarrow fx(float)}_{fun3}$$

Chúng ta làm vậy thông qua hàm `lambda` và đặt tên là `fun3`.

Hàm số này sẽ nhận argument là một mảng với hình dạng (9,) thay vì (10,), đại diện cho các tham số khác với tham số đang xét $c_i =$.

Dưới đây là ví dụ của hàm $\mathcal{L}(c'_i = 0, \overline{c'_i})$ với i là `c(3)Hq`. Chúng ta sẽ sử dụng một mảng với giá trị 0, hình dạng (9,) để làm argument cho hàm `fun3`, với kết quả mong đợi là một đại lượng vô hướng với dạng dữ liệu `float`.

Ví dụ 1

```
[ ]: fun3 = lambda x: f.l_profile(x.reshape(1,-1), loc='c(3)Hq',
    ↪ val=0)[0,0,0]
arr = np.zeros(9)
fun3(arr)
```

```
[ ]: 39.289292468722365
```

Ví dụ 2

```
[ ]: fun3 = lambda x: f.l_profile(x.reshape(1,-1), loc=0, val=0)[0,0,0]
arr = np.zeros(9)
fun3(arr)
```

```
[ ]: 39.289292468722365
```

Cả hai ví dụ đều trả lại kết quả giống nhau, người dùng có thể chọn tùy ý. Tiếp theo chúng ta sử dụng hàm `fun3` để làm argument cho hàm `minimize` bằng câu lệnh sau

```
[ ]: res = minimize(fun = fun3, x0 = np.zeros(9), options = {'gtol' :
    ↪ 1e-2})
res
```

```
[ ]: message: Optimization terminated successfully.
      success: True
      status: 0
      fun: 28.060463368519766
      x: [-1.202e-02  5.068e-01 -3.097e+00 -4.279e-01  1.282e+01
```

```

-1.250e+00  3.262e-03  1.057e-01  9.461e-01]
nit: 26
jac: [-1.945e-03 -5.174e-05 -3.052e-05 -2.861e-06 -5.960e-06
      4.983e-05 -4.318e-04  7.153e-07  1.836e-05]
hess_inv: [[ 9.790e-05 -1.540e-03 ... 1.178e-03  2.458e-04]
           [-1.540e-03  5.395e-02 ... -9.581e-03  1.294e-02]
           ...
           [ 1.178e-03 -9.581e-03 ... 4.826e-02  2.982e-03]
           [ 2.458e-04  1.294e-02 ... 2.982e-03  3.895e-01]]
nfev: 300
njev: 30

```

Chúng ta thấy được là hàm `minimize` từ điểm bắt đầu là tất cả tham số ở giá trị 0, và tham số `c(3)Hq` được cố định tại giá trị 0, trả lại kết quả cực tiểu của hàm likelihood là $\mathcal{L}(c'_i = 0, \hat{\vec{c}}'_i) = 28.06$ với giá trị $\hat{\vec{c}}'_i$ là `res.x`, $\frac{\partial \mathcal{L}(c_i=0)}{\partial \vec{c}'_i}$ là `res.jac`, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \vec{c}'_i \partial \vec{c}'_i}$ là `res.hess_inv`.

Thời gian để thực hiện tác vụ này là:

```
[ ]: %%timeit
res = minimize(fun = fun3, x0 = np.zeros(9), options = {'gtol' : 1e-2})
```

10.6 s ± 1.59 s per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1 loop each)

Chúng ta có hiện thời gian để tìm cực tiểu này là khoảng 11 giây, chúng ta sẽ cải thiện tác vụ này bằng cách cung cấp cho hàm cực tiểu hóa một argument là một hàm số để tính cực tiểu, thông qua hàm `fiteft.dl_profile()`. Hàm cực tiểu hóa này có đặc trưng như sau:

$$\underbrace{x(n,) \rightarrow x(1,n) \rightarrow \overbrace{fx(1,1,n)}^{\text{fiteft.dl_profile}} \rightarrow fx(n,)}_{\text{fun4}}$$

Dưới đây là hai cách thiết lập hàm `fun4`

```
[ ]: fun4 = lambda x: f.dl_profile(x.reshape(1,-1), loc='c(3)Hq', val=0)[0,0]
arr = np.zeros(9)
fun4(arr)
```

```
[ ]: array([ 1.19368262e+03,  4.69186152e-01,  4.96926121e+00, -5.
↳59564136e+00,
          2.77503991e+00, -1.56736581e+01,  1.22274234e+03, -8.
↳44857583e+00,
          -8.51474262e+00])
```

```
[ ]: fun4 = lambda x: f.dl_profile(x.reshape(1,-1), loc= 0, val=0)[0,0]
arr = np.zeros(9)
fun4(arr)
```

```
[ ]: array([ 1.19368262e+03,  4.69186152e-01,  4.96926121e+00, -5.
↳59564136e+00,
          2.77503991e+00, -1.56736581e+01,  1.22274234e+03, -8.
↳44857583e+00,
          -8.51474262e+00])
```

Sử dụng fun4 làm argument cho hàm minimize

```
[ ]: res = minimize(fun = fun3, x0 = np.zeros(9), jac = fun4 , options = {
↳'gtol' : 1e-2})
res
```

```
[ ]: message: Optimization terminated successfully.
      success: True
      status: 0
      fun: 28.060463368585722
      x: [-1.202e-02  5.068e-01 -3.097e+00 -4.279e-01  1.282e+01
          -1.250e+00  3.262e-03  1.057e-01  9.461e-01]
      nit: 26
      jac: [-1.757e-03 -4.912e-05 -3.076e-05 -3.100e-06 -5.961e-06
          4.697e-05 -2.737e-04  9.537e-07  1.764e-05]
      hess_inv: [[ 9.749e-05 -1.536e-03 ...  1.169e-03  2.606e-04]
          [-1.536e-03  5.392e-02 ... -9.473e-03  1.268e-02]
          ...
          [ 1.169e-03 -9.473e-03 ...  4.809e-02  3.115e-03]
          [ 2.606e-04  1.268e-02 ...  3.115e-03  3.902e-01]]
      nfev: 30
```

njev: 30

Thời gian thực hiện tác vụ này là:

```
[ ]: %%timeit
res = minimize(fun = fun3, x0 = np.zeros(9), jac = fun4 , options =
↳ {'gtol' : 1e-2})
```

2.51 s ± 573 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1 loop each)

Vậy là chúng ta đã giảm được thời gian tính toán từ 11 giây xuống còn 2.5 giây. Chúng ta có thể thấy được việc cung cấp một hàm để tính đạo hàm cho hàm `minimize` tuy không ảnh hưởng tới kết quả, nhưng nó sẽ ảnh hưởng đáng kể tới tốc độ tính toán. Chúng ta cũng có thể cung cấp thêm một hàm để tính đạo hàm cấp hai, và điều này sẽ được cải tiến trong phiên bản tiếp theo, cũng như công thức để tính đạo hàm giải tích.

4.4.2 Tìm khoảng tin cậy

Bây giờ chúng ta đã có tất cả những nguyên liệu cần thiết để tính khoảng tin cậy cho hàm likelihood cho một tham số bất kỳ. Chúng ta sẽ quét qua các giá trị của hàm profile likelihood $\mathcal{L}(c'_i, \hat{\mathbf{c}}_i)$, với c'_i chạy trong một khoảng nào đó được xác định

$$|c_i| < \alpha \times \sqrt{\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial c' \partial c'^\top} \Big|_{c'=\hat{c}'} \right] (i, i)} \text{ với } \alpha \in \mathcal{O}(1),$$

bởi vì trong trường hợp tuyến tính hoàn toàn, với $\alpha = 1$ chúng ta sẽ có biểu thức phía trên chính xác **bằng khoảng tin cậy** 68%, nhưng vì hàm likelihood của chúng ta có thành phần phi tuyến, điều chúng ta đang áp đặt ở đây là **khoảng tin cậy sẽ không khác biệt quá lớn** so với trường hợp tuyến tính, chúng ta sẽ phải quét trong một khoảng như trên để tìm giá trị chính xác của khoảng tin cậy

Ví dụ dưới đây là tìm khoảng quét của tham số $c(3)_{Hq}$. Đầu tiên là tìm cực tiểu của hàm likelihood và sử dụng ma trận Hessian để xác định khoảng quét của tham số $c(3)_{Hq}$. Như phần trước, chúng ta viết hàm `fun` dùng làm argument cho hàm `minimize`, vfa ‘fun2’ là hàm để tính đạo hàm:

```
[ ]: fun = lambda x: f.l(x.reshape(1,-1))[0,0,0]
fun2 = lambda x: f.dl(x.reshape(1,-1))[0,0]
res = minimize(fun = fun, x0 = np.zeros(10), jac = fun2, options =
↳ {'gtol': 1e-3})
```

```
res
```

```
[ ]: message: Optimization terminated successfully.
      success: True
      status: 0
      fun: 27.39150232202947
      x: [-5.262e-02 -1.140e-02  2.144e-01 -3.808e+00 -6.253e-01
          1.838e+01 -1.392e+00  4.151e-03  6.644e-02  8.962e-01]
      nit: 32
      jac: [-4.769e-07  2.003e-05  5.722e-06  5.007e-06  2.384e-07
            -2.384e-07 -1.431e-06  3.565e-04 -2.384e-07 -2.384e-06]
      hess_inv: [[ 2.090e-03 -2.388e-05 ...  1.650e-03  1.484e-03]
                [-2.388e-05  1.065e-04 ...  1.250e-03  8.502e-04]
                ...
                [ 1.650e-03  1.250e-03 ...  5.212e-02  1.573e-02]
                [ 1.484e-03  8.502e-04 ...  1.573e-02  5.022e-01]]
      nfev: 37
      njev: 37
```

giá trị $\left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{c}' \partial \mathbf{c}'^\top} \Big|_{\mathbf{c}' = \hat{\mathbf{c}}'}\right] [0, 0]$ sẽ là bình phương đạo hàm bậc hai của hàm likelihood theo vector \mathbf{c} tại tham số $\mathbf{c}(3)\text{Hq}$, giá trị đó được xác định bởi con số sau đây

```
[ ]: res.hess_inv[0,0]
```

```
[ ]: 0.0020904827414526764
```

Khoảng quét của tham số $\mathbf{c}(3)\text{Hq}$ sẽ là $\alpha\sqrt{0.00209} < c_i < \alpha\sqrt{0.00209}$, và chúng ta sẽ chọn $\alpha = 5$. Chúng ta sẽ bắt đầu quét giá trị của $\mathbf{c}(3)\text{Hq}$ và tính cực tiểu của profile likelihood. Chúng tôi sẽ sử dụng điểm cực tiểu của lần trước làm điểm bắt đầu cho điểm cực tiểu của lần tìm cực tiểu sau, tại vì chúng tôi đã áp đặt là các điểm cực tiểu profile likelihood, nói cách khác

$$c'_i[0] \approx c_i[1] \rightarrow \hat{\mathbf{c}}'_i[0] \approx \hat{\mathbf{c}}_i[0]$$

Chúng ta sẽ thực hiện thuật toán sau đây

1. Đặt $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{c}}'_i(c'_i = \hat{\mathbf{c}}'_i)$, $b = \hat{c}'_i$
2. Tìm $\hat{\mathbf{c}}'_i(c'_i = b)$ với điểm bắt đầu là \mathbf{a} - cực tiểu hóa $\frac{\partial^2 \mathcal{L}(c'_i = b)}{\partial \mathbf{c}'_i \partial \mathbf{c}'_i{}^\top}$
3. Đặt giá trị của điểm bắt đầu $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{c}}'_i(c'_i = b)$

4. Tăng $b = b + \Delta$
5. quay lại bước 2

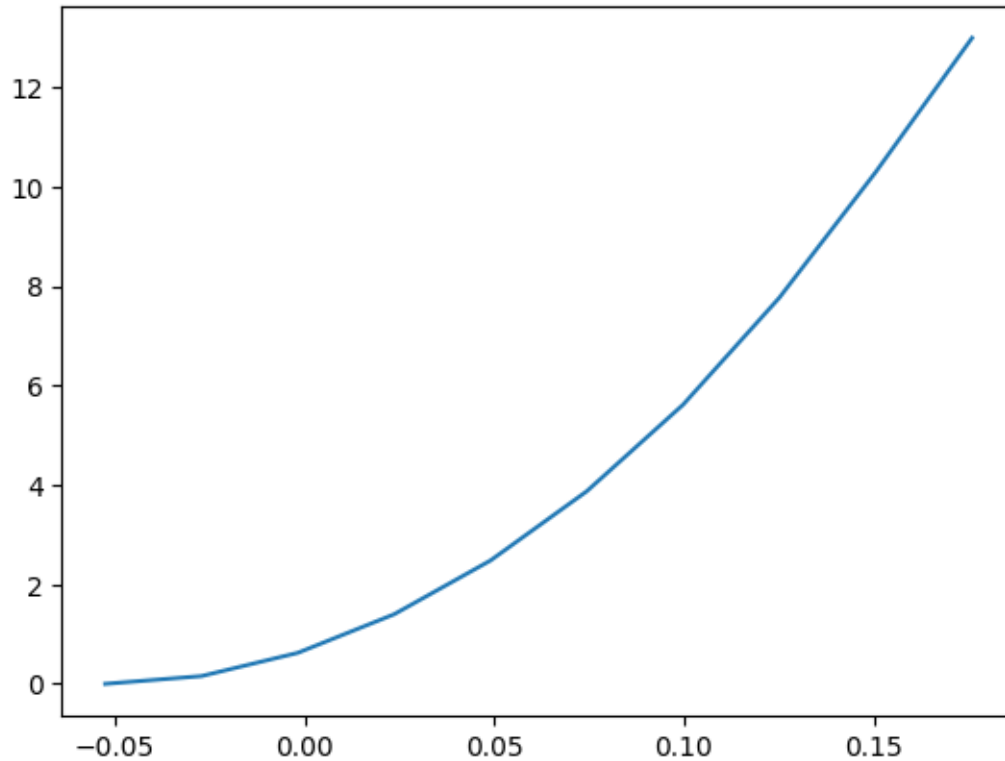
Chúng ta sẽ làm điều tương tự cho nửa bên trái, với thay đổi ở bước: 5. $b = b - \Delta$

```
[ ]: a = np.delete(res.x, f.C2.get_loc('c(3)Hq'))
b0 = res.x[f.C2.get_loc('c(3)Hq')]
bmax = 5 * res.hess_inv[f.C2.get_loc('c(3)Hq'),f.C2.
    ↳get_loc('c(3)Hq')]**0.5
ls = []
for b in np.linspace(b0, b0 + bmax, 10):
    fun3 = lambda x: f.l_profile(x.reshape(1,-1), loc='c(3)Hq',
    ↳val=b)[0,0,0]
    fun4 = lambda x: f.dl_profile(x.reshape(1,-1), loc='c(3)Hq',
    ↳val=b)[0,0]
    res2 = minimize(fun = fun3, x0 = a, jac = fun4, options = {'gtol':
    ↳1e-3})
    a = res2.x
    ls.append([b, res2.fun])
```

Nếu chúng ta vẽ kết quả ra thì ta được hình sau đây

```
[ ]: import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot( np.array(ls)[: ,0], np.array(ls)[: ,1]-np.array(ls)[: ,1] .
    ↳min())
```

```
[ ]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7e2968ed82b0>]
```

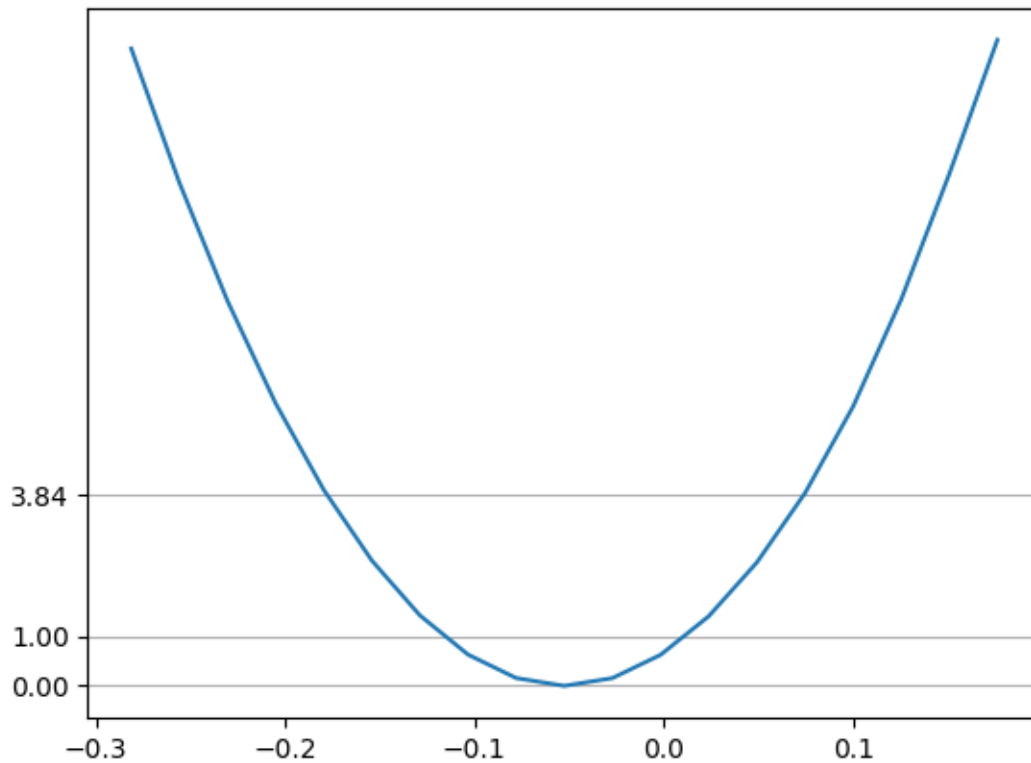



Chúng ta lặp lại điều tương tự cho nửa bên trái của hình bỏ kết quả vào danh sách `ls`

```
[ ]: a = np.delete(res.x, f.C2.get_loc('c(3)Hq'))
b0 = res.x[f.C2.get_loc('c(3)Hq')]
bmax = 5 * res.hess_inv[f.C2.get_loc('c(3)Hq'),f.C2.
    ↳get_loc('c(3)Hq')]**0.5
for b in np.linspace(b0, b0 - bmax, 10):
    fun3 = lambda x: f.l_profile(x.reshape(1,-1), loc='c(3)Hq',
    ↳val=b)[0,0,0]
    fun4 = lambda x: f.dl_profile(x.reshape(1,-1), loc='c(3)Hq',
    ↳val=b)[0,0]
    res2 = minimize(fun = fun3, x0 = a, jac = fun4, options = {'gtol':
    ↳1e-3})
    a = res2.x
    ls.append([b, res2.fun])
```

Vẽ hình cho cả hai nửa, ta được

```
[ ]: fig, ax = plt.subplots()
df = pd.DataFrame(ls)
df = df.sort_values(0, axis=0)
ax.plot(df[0], df[1] - df[1].min())
ax.set_yticks([0, 1, 3.84], minor=False)
ax.yaxis.grid(True, which='major')
```



Chương 5

KẾT QUẢ KHỚP DỮ LIỆU CỦA FITEFT

Ở phần này, chúng tôi sánh kết quả khớp dữ liệu của Fiteft và các thí nghiệm của ATLAS. Kết quả so sánh được thể hiện thông qua đồ thị của hàm profile-likelihood với ba loại hàm likelihood của Fiteft và đồ thị hàm profile-likelihood của thí nghiệm ATLAS. Kết quả cuối cùng sẽ là bảng các giá trị khớp tốt nhất và sai số của chúng. Các bước tính toán và vẽ hình được chạy trên Google colab với cấu hình máy cơ bản nhất (miễn phí).

5.1 ATLAS-CONF-2020-053

Kết quả so sánh của Fiteft với kết quả thực nghiệm được vẽ ở hình 5.1 và so sánh ở bảng 5.1. Thời gian để tính toán và vẽ hình là 11 phút.

Kết quả fit của normal Gaussian khá là sai lệch so với variable Gaussian 0 và variable Gaussian 1 bởi vì dữ liệu của thí nghiệm này có sự bất đối xứng cao ở các bin đo đạc. Kết quả khớp của hai loại variable Gaussian có kết quả khá tốt so với kết quả của thực nghiệm và điểm khớp tốt nhất nằm trong khoảng tin cậy 68% của thực nghiệm. Variable Gaussian 0 đem lại kết quả tốt nhất. Sự bất đối xứng của tham số $c[1]H1(1)-He$ chính là do sự phụ thuộc phi tuyến của acceptance lên các tham số c_{HW}, c_{HB}, c_{HWB} , và $c_{He}, c_{HW}, c_{HB}, c_{HWB}$ đều có ảnh hưởng nhất định lên các bin $H \rightarrow ZZ$. Hiệu chỉnh của acceptance lên các bin với phân rã $H \rightarrow ZZ$ thay vì có dạng tuyến tính như phương trình (2.59), chúng ta có

$$\Gamma_{ZZ}^{SMEFT} \rightarrow \Gamma_{ZZ}^{SMEFT} \times f(c_{HW}, c_{HB}, c_{HWB}), \quad (5.1)$$

với $f(c_i)$ là tham số hóa phi tuyến của acceptance, được định nghĩa ở bài báo [18] với dạng

$$f(\text{cHW}, \text{cHB}, \text{cHWB}) = A + \left[B + C_{ij} \sum_{i,j} c_i c_j + D_{ijk} \sum_{i,j,k} c_i c_j c_k \right]^{-1}, \quad (5.2)$$

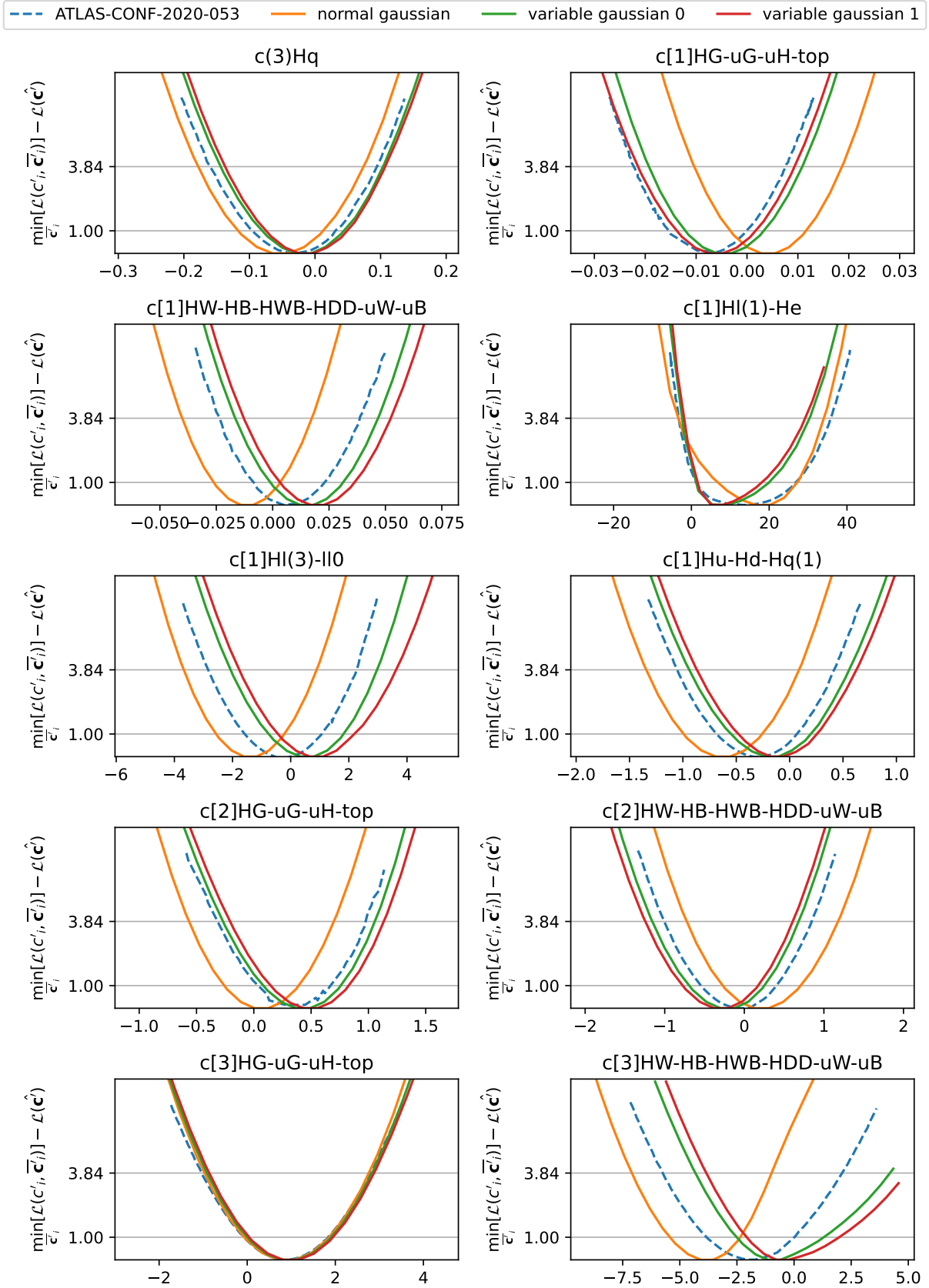
với A, B, C_{ij}, D_{ijk} là các hệ số của acceptance, $i, j, k \in \text{cHW}, \text{cHB}, \text{cHWB}$ là các tham số trong cơ sở c . Hàm likelihood của chúng ta sử dụng các tham số trong cơ sở c' , vậy nên chúng ta cần chuyển từ cơ sở c' sang cơ sở c để tính hàm likelihood. Sẽ có những trường hợp khác nhau ảnh hưởng đến việc xác định c từ c' có khả thi hay không, chúng tôi liệt kê vài trường hợp dưới đây:

Định nghĩa c'_1	acceptance $f(c)$	Tính được acceptance thông qua c'_1 hay không?
$ac_1 + bc_2$	$ac_1 + bc_2$	được
$ac_1 + bc_2$	ac_1	không
$ac_1 + \varepsilon c_2$	bc_1	gần đúng $c_1 = c'_1 \times (a^{-1})$

Ở đây, ta có a, b là hai tham số với độ lớn $\mathcal{O}(1)$, $\varepsilon \ll 1$ là tham số nhỏ. Trong bài báo này, chúng ta đang ở trong trường hợp thứ ba, với c_1 tương đương với các $\text{cHW}, \text{cHB}, \text{cHWB}$, c_2 tương đương với các tham số cuW, cuB , và c'_1 tương đương với các tham số $c[1]\text{HW-HB-HWB-HDD-uW-uB}, c[2]\text{HW-HB-HWB-HDD-uW-uB}, c[3]\text{HW-HB-HWB-HDD-uW-uB}$, và a tương ứng với block ma trận 3×3 tương ứng với vector c'_1 và c_1 ở bảng 3.8. Cuối cùng thì kết quả khớp dữ liệu của chúng tôi đối với những tham số này không được tốt, và các tham số này sẽ ảnh hưởng tới quá trình profile đối với các tham số khác. Kết quả so sánh sai lệch nhất sẽ là đối với những tham số trong cơ sở c' ảnh hưởng trực tiếp tới acceptance $c[1]\text{HW-HB-HWB-HDD-uW-uB}, c[2]\text{HW-HB-HWB-HDD-uW-uB}, c[3]\text{HW-HB-HWB-HDD-uW-uB}$, kế tiếp là các tham số cùng ảnh hưởng tới cùng một bin đối với tham số kể trên $c[1]\text{Hl}(1)\text{-He}$, kế tiếp là các tham số còn lại.

likelihood Parameter↓	ATLAS-CONF-2020-053			normal gaussian			variable gaussian 0			variable gaussian 1		
	best fit	left	right	best fit	left	right	best fit	left	right	best fit	left	right
c(3)Hq	-0.018	-0.1	0.033	-0.065	-0.12	0.013	-0.028	-0.081	0.045	-0.025	-0.075	0.05
c[1]HG-uG-uH-top	-0.006	-0.015	7e-05	0.0028	-0.0034	0.012	-0.0059	-0.012	0.0034	-0.0075	-0.014	0.0018
c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB	0.008	-0.009	0.023	-0.014	-0.026	0.0035	0.012	-0.0012	0.031	0.017	0.0031	0.036
c[1]Hl(1)-He	15	1.4	27	17	6.7	27	5.7	0.95	20	5.2	1.4	18
c[1]Hl(3)-ll0	-0.08	-1.6	1	-1.6	-2.6	-0.21	0.33	-0.77	1.8	0.66	-0.45	2.2
c[1]Hu-Hd-Hq(1)	-0.26	-0.7	0.07	-0.69	-1	-0.25	-0.23	-0.55	0.2	-0.18	-0.48	0.26
c[2]HG-uG-uH-top	0.4	0.04	0.7	0.0064	-0.26	0.39	0.37	0.08	0.76	0.44	0.14	0.83
c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB	-0.008	-0.5	0.4	0.12	-0.27	0.71	-0.3	-0.7	0.25	-0.38	-0.78	0.18
c[3]HG-uG-uH-top	0.9	-0.07	1.8	0.71	-0.072	1.9	0.78	-0.0078	1.9	0.81	0.036	2
c[3]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB	-1.8	-4	0.0002	-4.1	-5.4	-2.3	-1.1	-2.5	1.3	-0.77	-2.1	2

Bảng 5.1: Kết quả khớp dữ liệu cho kết quả của bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1] đối với các tham số trong hệ cơ sở \mathbf{c}' với tham số hóa tuyến tính cho tiên đoán lý thuyết, best fit là cực tiểu của profile likelihood, left (right) là cận trái (phải) của khoảng tin cậy 68%.



Hình 5.1: Giá trị profile likelihood của các tham số trong cơ sở c' cho thí nghiệm ATLAS-CONF-2020-053 [1].

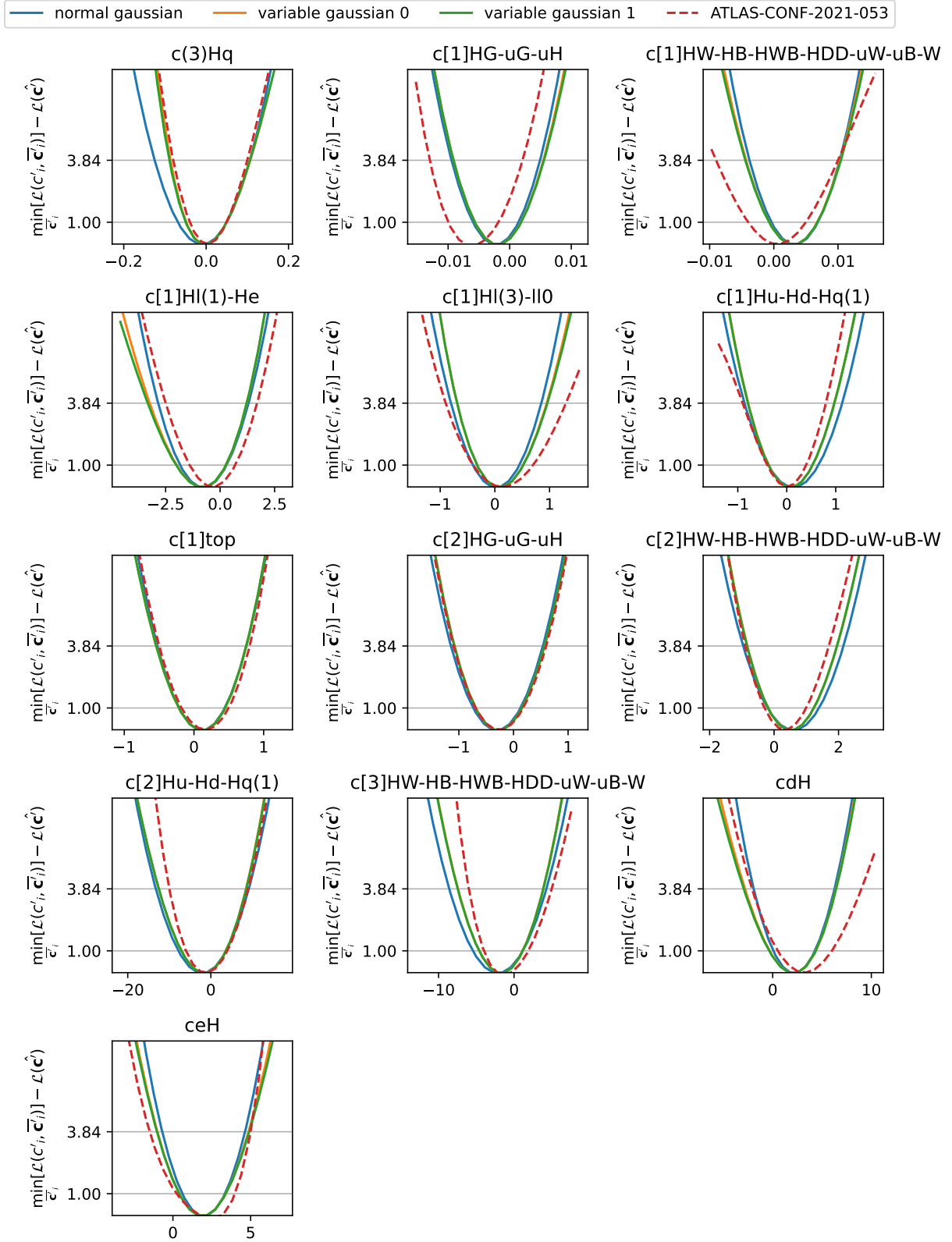
5.2 ATLAS-CONF-2021-053

Kết quả so sánh của Fiteft với kết quả thực nghiệm được vẽ ở hình 5.2 và so sánh ở bảng 5.2. Thời gian để tính toán và vẽ hình là 7 phút.

Ở bài báo này thì kết quả khớp dữ liệu của cả ba loại likelihood đều tốt tại vì kết quả đo đạc thực nghiệm khá là đối xứng. Chúng tôi cho rằng kết quả khớp dữ liệu là tốt.

likelihood Parameter↓	ATLAS-CONF-2021-053			normal gaussian			variable gaussian 0			variable gaussian 1		
	best fit	left	right	best fit	left	right	best fit	left	right	best fit	left	right
c(3)Hq	0	-0.04	0.05	-0.02	-0.069	0.05	-0.011	-0.049	0.05	-0.012	-0.05	0.05
c[1]HG-uG-uH	-0.005	-0.01	-0.0018	-0.0029	-0.006	0.0015	-0.0026	-0.0057	0.0018	-0.0026	-0.0057	0.0019
c[1]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB-W	0.001	-0.004	0.005	0.0026	-0.00039	0.0069	0.0024	-0.00072	0.0068	0.0024	-0.00076	0.0068
c[1]Hl(1)-He	-0.4	-1.4	0.71	-0.96	-1.8	0.3	-1	-2	0.28	-1	-2	0.27
c[1]Hl(3)-ll0	0.15	-0.4	0.7	-0.054	-0.4	0.45	0.0085	-0.33	0.52	0.0089	-0.33	0.52
c[1]Hu-Hd-Hq(1)	0	-0.4	0.4	0.046	-0.38	0.65	-0.00095	-0.37	0.53	-0.0038	-0.37	0.53
c[1]top	0.15	-0.18	0.5	0.054	-0.22	0.44	0.058	-0.22	0.45	0.059	-0.22	0.45
c[2]HG-uG-uH	-0.23	-0.7	0.18	-0.38	-0.74	0.13	-0.35	-0.69	0.16	-0.35	-0.7	0.16
c[2]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB-W	0.4	-0.3	1	0.46	-0.21	1.4	0.4	-0.19	1.2	0.39	-0.19	1.2
c[2]Hu-Hd-Hq(1)	-0.8	-6	4	-3.1	-7.8	3.7	-2.5	-7.1	3.7	-2.5	-7.1	3.7
c[3]HW-HB-HWB-HDD-uW-uB-W	-0.4	-4	1.9	-2.7	-5.5	1.2	-2.2	-4.6	1.2	-2.2	-4.6	1.2
cdH	3.2	0.5	6	1.8	0.055	4.3	1.7	-0.33	4.4	1.7	-0.37	4.4
ceH	1.8	0.23	4	1.7	0.6	3.4	1.6	0.41	3.4	1.6	0.4	3.4

Bảng 5.2: Kết quả khớp dữ liệu cho kết quả của bài báo ATLAS-CONF-2021-053 [2] đối với các tham số trong hệ cơ sở \mathbf{c}' với tham số hóa tuyến tính cho tiên đoán lý thuyết, best fit là cực tiểu của profile likelihood, left (right) là cận trái (phải) của khoảng tin cậy 68%.

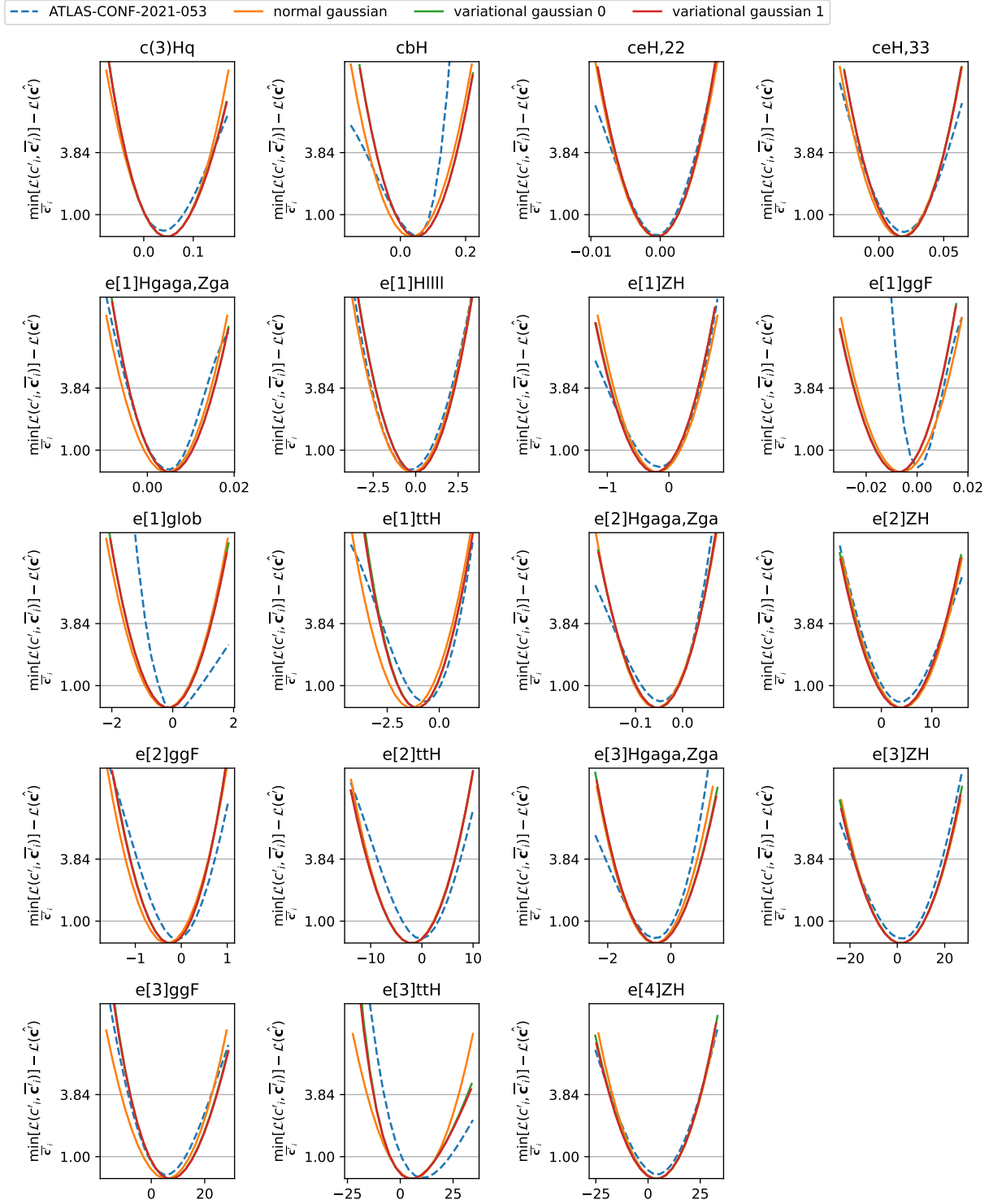


Hình 5.2: Giá trị profile likelihood của các tham số trong cơ sở c' cho thí nghiệm ATLAS-CONF-2021-053 [2]. Chúng tôi đã nội suy đường profile likelihood thông qua các khoảng tin cậy $\pm 95\%$, $\pm 68\%$ và best-fit bằng một hàm nội suy `scipy.interpolate.UnivariateSpline` cubic-spline chạy qua 5 điểm.

5.3 ATLAS HIGG-2022-17

Kết quả so sánh của Fiteft với kết quả thực nghiệm theo hai cách tham số hóa của tiên đoán lý thuyết, tham số tuyến tính theo phương trình (2.65) được vẽ ở hình 5.3 và so sánh ở bảng 5.3, tham số hóa phi tuyến theo phương trình (2.64) ở hình 5.4 và so sánh ở bảng 5.4. Cả hai cách tham số hóa sẽ được so sánh với kết quả của bài báo thực nghiệm, và bài báo này sử dụng cách tham số hóa phi tuyến theo phương trình ở phương trình (2.64). Thời gian để tính toán và vẽ hình lần lượt là 18, 21 phút.

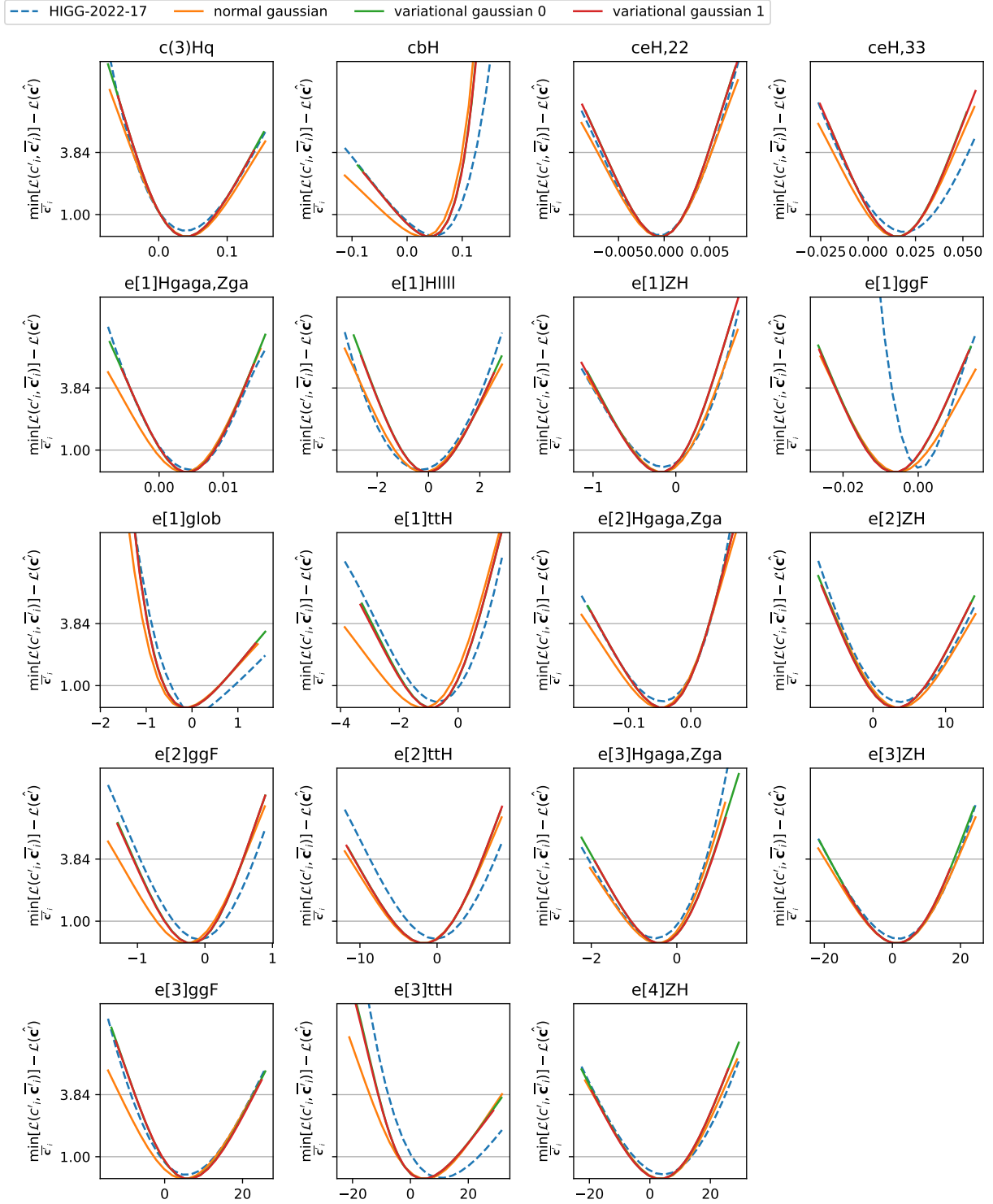
Đây là một kết quả thực nghiệm với lượng dữ liệu đo đạc lớn và được cung cấp khá hoàn chỉnh. Một vài kết quả đo đạc bị thiếu sai số bên trái, chúng tôi đã đặt giá trị của sai số bên trái bằng sai số bên phải. Cả hai cách tham số hóa đều có kết quả khá tốt, nhưng việc tham số hóa phi tuyến trả lại hình dạng của hàm profile likelihood khớp hơn so với kết quả thực nghiệm, và sự bất đối xứng của hàm likelihood rõ rệt hơn hẳn. Cả hai phương pháp đều có kết quả khớp không được tốt cho $e[1]ggF$, chúng tôi cho rằng nguyên nhân có thể là có sai sót trong việc nhập dữ liệu đầu vào, bởi vì các bảng dữ liệu chỉ được cung cấp dưới dạng hình ảnh, đặc biệt là với lượng chữ số lên tới 5000, khiến chúng tôi phải sử dụng công cụ nhận diện hình ảnh để trích xuất dữ liệu. Khả năng sai sót trong việc nhận dạng tự động dữ liệu là không thể tránh khỏi. Với lượng dữ liệu hoàn chỉnh hơn sẽ được cung cấp trên Hepdata trong tương lai, chúng tôi sẽ dễ dàng hơn để giải quyết vấn đề này. Một vấn đề nữa là một vài bin có số đo đạc bên trái bị bỏ đi do kết quả đo đạc tiết diện tán xạ bị âm, khiến chúng tôi phải đối xứng hóa sai số hoặc trích xuất từ hình ảnh, cả hai cách đều có kết quả tương tự nhau. Tham số hóa tuyến tính trả lại kết quả khớp không tốt cho $e[1]glob$ bởi vì kết quả khớp của tham số này bản chất là bất đối xứng mà tham số hóa tuyến tính sẽ trả lại kết quả đối xứng, điều này đã được giải quyết ở phương pháp tham số hóa phi tuyến. Do sự đối xứng của kết quả thực nghiệm, cả ba loại likelihood đều có kết quả tốt. Ở kết quả cho bài báo này, hàm profile likelihood sẽ chính xác hơn khi sử dụng cách tham số hóa phi tuyến.



Hình 5.3: Giá trị profile likelihood của các tham số trong cơ sở c' cho thí nghiệm HIGG-2022-17 [8] với cách tham số hóa tuyến tính cho tiên đoán lý thuyết.

likelihood Parameter↓	HIGG-2022-17			normal gaussian			variational gaussian 0			variational gaussian 1		
	best fit	left	right	best fit	left	right	best fit	left	right	best fit	left	right
c(3)Hq	0.039	-0.001	0.079	0.041	0.0025	0.093	0.04	0.0025	0.094	0.04	0.0025	0.094
cbH	0.055	-0.003	0.094	0.024	-0.033	0.1	0.039	-0.015	0.11	0.039	-0.015	0.11
ceH,22	-0.0002	-0.003	0.0026	-0.001	-0.0037	0.0026	-0.00092	-0.0035	0.0026	-0.00092	-0.0035	0.0026
ceH,33	0.019	0.003	0.035	0.014	-0.00021	0.034	0.016	0.0018	0.035	0.016	0.0019	0.035
e[1]Hgaga,Zga	0.0048	0.0005	0.0091	0.0037	-0.0008	0.0097	0.0045	0.00025	0.01	0.0045	0.00028	0.01
e[1]Hllll	-0.35	-1.4	0.75	-0.41	-1.5	1	-0.22	-1.2	1.2	-0.23	-1.2	1.2
e[1]ZH	-0.14	-0.48	0.2	-0.23	-0.55	0.18	-0.27	-0.59	0.14	-0.27	-0.59	0.14
e[1]ggF	0.0003	-0.0036	0.0042	-0.0074	-0.015	0.0029	-0.0086	-0.016	0.0011	-0.0088	-0.016	0.00099
e[1]glob	0.13	-5.6	0.96	-0.29	-0.91	0.54	-0.24	-0.84	0.58	-0.24	-0.84	0.58
e[1]ttH	-0.65	-1.5	0.19	-1.5	-2.4	-0.32	-1.2	-2	-0.13	-1.2	-2	-0.14
e[2]Hgaga,Zga	-0.042	-0.083	-0.001	-0.063	-0.1	-0.01	-0.059	-0.099	-0.0076	-0.059	-0.099	-0.0075
e[2]ZH	3.7	-0.2	7.6	3.5	-0.45	8.7	3.1	-0.78	8.3	3.1	-0.84	8.3
e[2]ggF	-0.07	-0.45	0.31	-0.38	-0.78	0.15	-0.3	-0.68	0.2	-0.31	-0.69	0.2
e[2]ttH	-0.05	-3.8	3.6	-2.7	-6.4	2.3	-2.6	-6.4	2.4	-2.6	-6.4	2.4
e[3]Hgaga,Zga	-0.47	-1.1	0.15	-0.61	-1.2	0.18	-0.56	-1.2	0.26	-0.56	-1.2	0.27
e[3]ZH	1.8	-6.7	10	0.17	-8.4	11	0.15	-8.5	11	0.12	-8.6	11
e[3]ggF	5.5	-1.6	13	4.5	-3	14	6	-0.83	16	6.2	-0.76	16
e[3]ttH	8.6	-0.6	22	4.5	-5.2	17	3.7	-4.8	18	3.7	-4.8	18
e[4]ZH	4.8	-5	15	2.7	-6.7	15	2.5	-7.3	15	2.4	-7.5	15

Bảng 5.3: Kết quả khớp dữ liệu cho kết quả của bài báo HIGG-2022-17 [8] đối với các tham số trong hệ cơ sở \mathbf{c}' với tham số hóa tuyến tính cho tiên đoán lý thuyết, best fit là cực tiểu của profile likelihood, left (right) là cận trái (phải) của khoảng tin cậy 68%.



Hình 5.4: Giá trị profile likelihood của các tham số trong cơ sở c' cho thí nghiệm HIGG-2022-17 [8] với cách tham số hóa phi tuyến cho tiên đoán lý thuyết .

likelihood Parameter↓	HIGG-2022-17			normal gaussian			variational gaussian 0			variational gaussian 1		
	best fit	left	right	best fit	left	right	best fit	left	right	best fit	left	right
c(3)Hq	0.039	-0.001	0.079	0.036	0.0022	0.087	0.034	0.0021	0.083	0.035	0.0022	0.083
cbH	0.055	-0.003	0.094	0.022	-0.038	0.072	0.034	-0.016	0.079	0.035	-0.016	0.079
ceH,22	-0.0002	-0.003	0.0026	-0.00094	-0.0035	0.0023	-0.00083	-0.0032	0.0022	-0.00086	-0.0032	0.0022
ceH,33	0.019	0.003	0.035	0.013	-0.00021	0.029	0.014	0.0016	0.029	0.013	0.0017	0.029
e[1]Hgaga,Zga	0.0048	0.0005	0.0091	0.0033	-0.00078	0.0084	0.0038	0.00022	0.0086	0.0039	0.00026	0.0086
e[1]Hllll	-0.35	-1.4	0.75	-0.36	-1.3	0.96	-0.18	-1.1	1	-0.17	-1.1	1
e[1]ZH	-0.14	-0.48	0.2	-0.21	-0.52	0.16	-0.23	-0.53	0.12	-0.24	-0.54	0.12
e[1]ggF	0.0003	-0.0036	0.0042	-0.0065	-0.013	0.0028	-0.0074	-0.014	0.001	-0.0075	-0.014	0.00091
e[1]glob	0.13	-5.6	0.96	-0.25	-0.68	0.59	-0.2	-0.61	0.6	-0.19	-0.61	0.6
e[1]ttH	-0.65	-1.5	0.19	-1.3	-2.3	-0.28	-1	-1.8	-0.11	-1	-1.8	-0.11
e[2]Hgaga,Zga	-0.042	-0.083	-0.001	-0.056	-0.098	-0.0086	-0.051	-0.09	-0.0063	-0.051	-0.09	-0.0062
e[2]ZH	3.7	-0.2	7.6	3.1	-0.41	7.9	2.6	-0.68	7.3	2.6	-0.73	7.3
e[2]ggF	-0.07	-0.45	0.31	-0.34	-0.72	0.14	-0.26	-0.59	0.18	-0.26	-0.6	0.17
e[2]ttH	-0.05	-3.8	3.6	-2.3	-6	2	-2.2	-5.7	2.1	-2.2	-5.7	2.1
e[3]Hgaga,Zga	-0.47	-1.1	0.15	-0.53	-1.2	0.15	-0.49	-1.1	0.22	-0.47	-1.1	0.22
e[3]ZH	1.8	-6.7	10	0.1	-8	10	0.087	-7.7	9.6	0.4	-7.8	9.5
e[3]ggF	5.5	-1.6	13	4	-2.8	13	5.1	-0.74	14	5.2	-0.67	14
e[3]ttH	8.6	-0.6	22	3.9	-4.5	16	3	-4.1	16	3.2	-4	16
e[4]ZH	4.8	-5	15	2.4	-6.4	13	2	-6.6	13	2.1	-6.7	13

Bảng 5.4: Kết quả khớp dữ liệu cho kết quả của bài báo HIGG-2022-17 [8] đối với các tham số trong hệ cơ sở \mathbf{c}' với tham số hóa phi tuyến cho tiên đoán lý thuyết, best fit là cực tiểu của profile likelihood, left (right) là cận trái (phải) của khoảng tin cậy 68%.

Chương 6

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Ở luận văn này, chúng tôi đã xây dựng một công cụ mới để phục vụ cho việc khớp dữ liệu từ thực nghiệm, tiềm năng của Fiteft không chỉ tóm gọn trong các thí nghiệm về hạt Higgs mà có thể sử dụng cho một thí nghiệm đo đặc bất kỳ để khớp mô hình vật lý mới bất kỳ với cách tham số hóa tuyến tính. Chúng tôi đã phát triển một các đơn giản hơn để nhập cũng như trình bày dữ liệu thực nghiệm thông qua dạng dữ liệu `csv`. Chúng tôi đã sử dụng Fiteft để tính hàm likelihood và thực hiện cực tiểu hóa bằng thư viện `scipy`. Chúng tôi cung cấp phương pháp để khớp dữ liệu độc lập với chương trình Fiteft. Kết quả khớp dữ liệu cuối cùng đối với ba bài báo ATLAS-CONF-2020-053 [1], ATLAS-CONF-2021-053 [2], ATLAS HIGG-2022-17 [8] đã mang lại kết quả tốt ngoài mong đợi. Một số kết quả bất thường cũng đã được chúng tôi chỉ ra và giải thích, chúng tôi tin rằng những vấn đề này sẽ được giải quyết trong tương lai.

Vấn đề còn bỏ ngỏ, hướng phát triển trong tương lai:

- Tự động hóa việc tính toán acceptance.
- Phát triển Fiteft để tính các số hạng bậc hai của tham số c . Sau đó phát triển phương pháp (mới) để tính cực tiểu likelihood.
- Tự động hóa tính ma trận tương quan lý thuyết, hiện tại ma trận tương quan với sai số lý thuyết cho các bin STXS vẫn chưa được hoàn thiện [26].
- Có một cách tham số chung, tự động cho các bin đo đặc, hiện tại mỗi thí nghiệm đều có một định nghĩa tham số riêng cho từng bin, và sẽ có những bin có chung tham số hóa được sử dụng chung giữa các thí nghiệm khác nhau.
- Cập nhật cơ sở dữ liệu, kiểm chứng kết quả đối với những kết quả thực nghiệm hiện tại của thí nghiệm CMS, ATLAS.

- Sử dụng Fiteft đối với những mô hình vật lý mới khác có ảnh hưởng lên tiên đoán của các bin đo đặc của hạt Higgs.

Chúng tôi hi vọng có thể công bố chương trình Fiteft sớm nhất trong những tháng sắp tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] “Interpretations of the combined measurement of Higgs boson production and decay, [ATLAS-CONF-2020-053](#)”, (2020) (cit. on pp. [17–18](#), [57](#), [60–61](#), [64–66](#), [68–71](#), [109–110](#), [118](#)).
- [2] “Combined measurements of Higgs boson production and decay using up to 139 fb⁻¹ of proton-proton collision data at $\sqrt{s} = 13$ TeV collected with the ATLAS experiment, [ATLAS-CONF-2020-053](#)”, (2021) (cit. on pp. [17–18](#), [42](#), [57](#), [71](#), [74](#), [78](#), [111–112](#), [118](#)).
- [3] B. Grzadkowski, M. Iskrzynski, M. Misiak, and J. Rosiek, “Dimension-Six Terms in the Standard Model Lagrangian”, [JHEP](#) **10**, 085 (2010), [arXiv:1008.4884 \[hep-ph\]](#) (cit. on pp. [17](#), [19](#), [32](#), [40](#)).
- [4] I. Brivio and M. Trott, “The Standard Model as an Effective Field Theory”, [Phys. Rept.](#) **793**, 1–98 (2019), [arXiv:1706.08945 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [17](#)).
- [5] J. Ellis, M. Madigan, K. Mimasu, V. Sanz, and T. You, “Top, Higgs, Diboson and Electroweak Fit to the Standard Model Effective Field Theory”, [JHEP](#) **04**, 279 (2021), [arXiv:2012.02779 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [17](#)).
- [6] I. Brivio, Y. Jiang, and M. Trott, “The SMEFTsim package, theory and tools”, [JHEP](#) **12**, 070 (2017), [arXiv:1709.06492 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [17](#)).
- [7] T. Giani, G. Magni, and J. Rojo, “SMEFiT: a flexible toolbox for global interpretations of particle physics data with effective field theories”, [Eur. Phys. J. C](#) **83**, 393 (2023), [arXiv:2302.06660 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [17](#)).
- [8] G. Aad et al. (ATLAS), “Interpretations of the ATLAS measurements of Higgs boson production and decay rates and differential cross-sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV, [HIGG-2022-17](#)”, (2024), [arXiv:2402.05742 \[hep-ex\]](#) (cit. on pp. [18](#), [31–32](#), [35–36](#), [41](#), [43](#), [57](#), [114–118](#)).
- [9] R. Alonso, E. E. Jenkins, A. V. Manohar, and M. Trott, “Renormalization Group Evolution of the Standard Model Dimension Six Operators III: Gauge Coupling Dependence and Phenomenology”, [JHEP](#) **04**, 159 (2014), [arXiv:1312.2014 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [18](#)).
- [10] N. D. B. Nhi, “Constraints on Higgs couplings using data from ATLAS and CMS experiments”, Master thesis (University of Science- VNU-HCM, 2023) (cit. on p. [20](#)).
- [11] S. Weinberg, “Baryon and Lepton Nonconserving Processes”, [Phys. Rev. Lett.](#) **43**, 1566–1570 (1979) (cit. on p. [31](#)).
- [12] D. Barducci et al., “Interpreting top-quark LHC measurements in the standard-model effective field theory”, edited by J. A. Aguilar-Saavedra, C. Degrande, G. Durieux, F. Maltoni, E. Vryonidou, and C. Zhang (2018), [arXiv:1802.07237 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [31](#)).
- [13] I. Brivio, T. Corbett, and M. Trott, “The Higgs width in the SMEFT”, [JHEP](#) **10**, 056 (2019), [arXiv:1906.06949 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [33](#)).
- [14] J. R. Andersen et al., “Les Houches 2015: Physics at TeV Colliders Standard Model Working Group Report”, in 9th Les Houches Workshop on Physics at TeV Colliders (May 2016), [arXiv:1605.04692 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [36](#)).
- [15] D. de Florian et al. (LHC Higgs Cross Section Working Group), “Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 4. Deciphering the Nature of the Higgs Sector”, [2/2017](#), [10.23731/CYRM-2017-002](#) (2016), [arXiv:1610.07922 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. [36](#)).

- [16] N. Berger et al., “Simplified Template Cross Sections - Stage 1.1”, (2019), [arXiv:1906.02754 \[hep-ph\]](#) (cit. on p. 36).
- [17] G. Aad et al. (ATLAS), “Measurement of the properties of Higgs boson production at $\sqrt{s} = 13$ TeV in the $H \rightarrow \gamma\gamma$ channel using 139 fb^{-1} of pp collision data with the ATLAS experiment”, *JHEP* **07**, 088 (2023), [arXiv:2207.00348 \[hep-ex\]](#) (cit. on p. 36).
- [18] G. Aad et al. (ATLAS), “Higgs boson production cross-section measurements and their EFT interpretation in the 4ℓ decay channel at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector”, *Eur. Phys. J. C* **80**, [Erratum: *Eur.Phys.J.C* **81**, 29 (2021), Erratum: *Eur.Phys.J.C* **81**, 398 (2021)], 957 (2020), [arXiv:2004.03447 \[hep-ex\]](#) (cit. on pp. 36, 41, 108).
- [19] G. Aad et al. (ATLAS), “Measurements of Higgs boson production cross-sections in the $H \rightarrow \tau^+\tau^-$ decay channel in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector”, *JHEP* **08**, 175 (2022), [arXiv:2201.08269 \[hep-ex\]](#) (cit. on p. 36).
- [20] G. Aad et al. (ATLAS), “Measurements of Higgs boson production by gluon-gluon fusion and vector-boson fusion using $H \rightarrow WW^* \rightarrow e\nu\mu\nu$ decays in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector”, *Phys. Rev. D* **108**, 032005 (2023), [arXiv:2207.00338 \[hep-ex\]](#) (cit. on p. 36).
- [21] G. Aad et al. (ATLAS), “Measurements of WH and ZH production in the $H \rightarrow b\bar{b}$ decay channel in pp collisions at 13 TeV with the ATLAS detector”, *Eur. Phys. J. C* **81**, 178 (2021), [arXiv:2007.02873 \[hep-ex\]](#) (cit. on p. 36).
- [22] G. Aad et al. (ATLAS), “Measurement of the associated production of a Higgs boson decaying into b -quarks with a vector boson at high transverse momentum in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector”, *Phys. Lett. B* **816**, 136204 (2021), [arXiv:2008.02508 \[hep-ex\]](#) (cit. on p. 36).
- [23] G. Aad et al. (ATLAS), “Measurements of Higgs bosons decaying to bottom quarks from vector boson fusion production with the ATLAS experiment at $\sqrt{s} = 13$ TeV”, *Eur. Phys. J. C* **81**, 537 (2021), [arXiv:2011.08280 \[hep-ex\]](#) (cit. on p. 36).
- [24] G. Aad et al. (ATLAS), “Constraints on Higgs boson production with large transverse momentum using $H \rightarrow b\bar{b}$ decays in the ATLAS detector”, *Phys. Rev. D* **105**, 092003 (2022), [arXiv:2111.08340 \[hep-ex\]](#) (cit. on p. 36).
- [25] G. Aad et al. (ATLAS), “Measurement of Higgs boson decay into b -quarks in associated production with a top-quark pair in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector”, *JHEP* **06**, 097 (2022), [arXiv:2111.06712 \[hep-ex\]](#) (cit. on p. 36).
- [26] *Lhchxswgfiducialandstxs*, (2024) https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/LHCPhysics/LHCHWGFiducialAndSTXS?redirectedfrom=LHCPhysics.LHCHXSWGfiducialAndSTXS#Bin_definitions (cit. on pp. 37–39, 118).
- [27] (2024) <https://people.eecs.berkeley.edu/%7Ejordan/courses/260-spring10/other-readings/chapter13.pdf> (cit. on p. 50).
- [28] G. Cowan, *Statistical data analysis* (Clarendon Press, Oxford U.K, 1998) (cit. on p. 58).

Phụ lục A

Phụ lục

A.1 Đạo hàm của hàm likelihood

Hàm likelihood (3.42) với \mathbf{y}_c ở (3.44) và Δ_y ở (3.46) sẽ có vi phân như sau:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}(\mathbf{c})) &= d[(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})] \\ &= d(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}}) + (\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot d(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}}) \\ &= d(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}}) + [(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot d(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})]^\top \\ &= 2(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot d(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}}) \\ &= 2(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot d(\mathbf{y}_c), \end{aligned} \tag{A.1}$$

ở đây ta có \mathbf{V} là ma trận đối xứng nên lấy chuyển vị bằng chính nó số hạng thứ hai của hàng thứ ba là hằng số nên lấy chuyển vị thì số hạng đó không đổi. Chia hai vế cho $d\mathbf{c}^\top$, ta được đạo hàm của hàm likelihood theo \mathbf{c}

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}^\top} = 2(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{c}^\top}. \tag{A.2}$$

đồng thời, ta có

$$\begin{aligned} d(\mathbf{y}_c) &= d[\mathbf{y}_{SM} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{c})] \\ &= \mathbf{y}_{SM} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{c}) \end{aligned} \tag{A.3}$$

chia hai vế cho $d\mathbf{c}^\top$ thì ta được đạo hàm của \mathbf{y}_c theo \mathbf{c} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{c}^\top} &= \mathbf{y}_{SM} \circ \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{c}^\top} \\ &= \mathbf{y}_{SM} \circ \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \\ &= \mathbf{y}_{SM} \circ \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Lấy (A.4) thế vào (A.1), ta được:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}^\top} &= 2(\mathbf{y}_c - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}) \\
&= 2(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ (1 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}) - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}) \\
&= 2(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{y}_{\text{SM}} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Phương trình trên bằng 0 khi:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A} \cdot \mathbf{c})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}) &= -(\mathbf{y}_{\text{SM}} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}) \\
\mathbf{c}^\top \cdot (\mathbf{A} \circ \mathbf{y}_{\text{SM}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}) &= -(\mathbf{y}_{\text{SM}} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}) \\
\Leftrightarrow \mathbf{c}^\top &= -(\mathbf{y}_{\text{SM}} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}) \cdot [(\mathbf{A} \circ \mathbf{y}_{\text{SM}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})]^{-1} \\
\Leftrightarrow \mathbf{c} &= -[(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \circ \mathbf{y}_{\text{SM}})]^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} - \hat{\mathbf{y}})
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Đạo hàm bậc hai của hàm likelihood:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c} \partial \mathbf{c}^\top} &= 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} [(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{y}_{\text{SM}} - \hat{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})] \\
&= 2 \frac{\partial (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A} \cdot \mathbf{c})^\top}{\partial \mathbf{c}} \cdot [\mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})] \\
&= 2 \mathbf{y}_{\text{SM}}^\top \circ \frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{c})^\top}{\partial \mathbf{c}} \cdot [\mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})] \\
&= 2 \mathbf{y}_{\text{SM}}^\top \circ \left[\frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}^\top} \right]^\top \cdot [\mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})] \\
&= 2 \mathbf{y}_{\text{SM}}^\top \circ \mathbf{A}^\top \cdot [\mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})] \\
&= 2(\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A})^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{SM}} \circ \mathbf{A}).
\end{aligned} \tag{A.7}$$

A.2 Phân tách tích ma trận

Tách tích của ma trận với vector:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \cdot \mathbf{c})_{jl} &= \sum_k A_{jk} c_k \\
&= A_{ji} c_i + \sum_{k \neq i} A_{jk} c_k \\
&= A_{ji} c_i + \sum_{k \neq i} A_{jk} c_k \\
\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a}_i c_i + \overline{\mathbf{A}}_i \cdot \overline{\mathbf{c}}_i.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Ở đây \mathbf{a}_i là cột thứ i của ma trận \mathbf{A} , c_i hàng thứ i của vector \mathbf{c} , $\overline{\mathbf{A}}_i$ là ma trận \mathbf{A} bỏ đi cột thứ i $\overline{\mathbf{c}}_i$ là vector c_i bỏ đi hàng thứ i .

A.3 Phép toán ma trận cơ bản

phép toán	hình dạng ma trận	hình dạng kết quả	ví dụ
$\mathbf{X} \circ \mathbf{Y}$	$(m, n) \circ (m, n)$	(m, n)	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \\ Y_{31} & Y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}Y_{11} & X_{12}Y_{12} \\ X_{21}Y_{21} & X_{22}Y_{22} \\ X_{31}Y_{31} & X_{32}Y_{32} \end{bmatrix}$
$\mathbf{X} \circ \mathbf{y}$	$(m, n) \circ (m, 1)$	(n, m)	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}y_1 & X_{12}y_1 \\ X_{21}y_2 & X_{22}y_2 \\ X_{31}y_3 & X_{32}y_3 \end{bmatrix}$
$\mathbf{X} \circ \mathbf{y}^\top$	$(m, n) \circ (1, n)$	(m, n)	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}y_1 & X_{12}y_2 \\ X_{21}y_1 & X_{22}y_2 \\ X_{31}y_1 & X_{32}y_2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$	$(m, 1) \circ (m, 1)$	$(m, 1)$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \end{bmatrix}$
\mathbf{X}/\mathbf{Y}	$(m, n)/(m, n)$	(m, n)	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \\ Y_{31} & Y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}/Y_{11} & X_{12}/Y_{12} \\ X_{21}/Y_{21} & X_{22}/Y_{22} \\ X_{31}/Y_{31} & X_{32}/Y_{32} \end{bmatrix}$
\mathbf{X}/\mathbf{y}	$(m, n)/(m, 1)$	(n, m)	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}/y_1 & X_{12}/y_1 \\ X_{21}/y_2 & X_{22}/y_2 \\ X_{31}/y_3 & X_{32}/y_3 \end{bmatrix}$
$\mathbf{X}/\mathbf{y}^\top$	$(m, n)/(1, n)$	(m, n)	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}/y_1 & X_{12}/y_2 \\ X_{21}/y_1 & X_{22}/y_2 \\ X_{31}/y_1 & X_{32}/y_2 \end{bmatrix}$
\mathbf{x}/\mathbf{y}	$(m, 1)/(m, 1)$	$(m, 1)$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1/y_1 \\ x_2/y_2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$	$(m, n) \cdot (n, l)$	(n, l)	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} & X_{11}Y_{12} + X_{12}Y_{22} \\ X_{21}Y_{11} + X_{22}Y_{21} & X_{21}Y_{12} + X_{22}Y_{22} \end{bmatrix}$
$\mathbf{X} \cdot \mathbf{y}$	$(m, n) \cdot (n, 1)$	$(n, 1)$	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}y_1 + X_{12}y_2 \\ X_{21}y_1 + X_{22}y_2 \\ X_{31}y_1 + X_{32}y_2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{Y}$	$(1, m) \cdot (m, n)$	$(1, n)$	$\mathbf{Y}^\top \cdot \mathbf{x}$
$\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{y}$	$(1, m) \cdot (m, 1)$	$(1, 1)$	$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}Y_{11} + X_{12}Y_{21} \end{bmatrix}$