§2. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN, CÁC TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN

Nguyễn Thị Hà

Hà Nội 2015

Nội dung bài dạy

2.1. Các khái niệm cơ bản

2.1. Các khái niệm cơ bản

Cho tới nay ta mới chỉ có khái niệm tổng của một dãy hữu hạn các số (thực).

Cho tới nay ta mới chỉ có khái niệm tổng của một dãy hữu hạn các số (thực). Bây giờ ta mở rộng sang "tổng của một dãy số vô hạn các số (thực)".

Cho một dãy số thực:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

2.1. Các khái niệm cơ bản (t)

Cho một dãy số thực:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Lập các tổng của n số hạng đầu:

$$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad (A_n)$$

Cho một dãy số thực:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Lập các tổng của n số hạng đầu:

$$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad (A_n)$$

ta được một dãy:

$$\{A_n\} = A_1, A_2, ..., A_n, ...$$

2.1. Các khái niệm cơ bản (t)

$$\{A_n\} = A_1, A_2, ..., A_n, ...$$

Định nghĩa

$$\{A_n\} = A_1, A_2, ..., A_n, ...$$

Định nghĩa

Ta gọi A_n là *tổng riêng* (thứ n) của *chuỗi số* (gọi tắt là chuỗi)

$$\{A_n\} = A_1, A_2, ..., A_n, ...$$

Định nghĩa

Ta gọi A_n là *tổng riêng* (thứ n) của *chuỗi số* (gọi tắt là chuỗi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (A)$$

gọi là *số hạng tổng quát* của chuỗi.

- Nếu dãy A_n có giới hạn (hữu hạn):

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

- Nếu dãy A_n có giới hạn (hữu hạn):

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

thì ta nói A là tổng của chuỗi (A) và viết:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

- Nếu dãy A_n có giới hạn (hữu hạn):

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

thì ta nói A là tổng của chuỗi (A) và viết:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Khi đó ta cũng nói rằng chuỗi (A) hội tụ về A.

- Nếu dãy A_n có giới hạn (hữu hạn):

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

thì ta nói A là tổng của chuỗi (A) và viết:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Khi đó ta cũng nói rằng chuỗi (A) hội tụ về A.

- Ngược lại, nếu dãy A_n không có giới hạn hữu hạn thì ta nói là chuỗi (A) không hội tụ hoặc phân kì.

Quan hệ giữa sự hội tụ của chuỗi và của dãy:

Quan hệ giữa sự hội tụ của chuỗi và của dãy:

- Theo định nghĩa trên, sự hội tụ của chuỗi (A) tương đương với sự hội tụ của dãy tổng riêng (A_n) của nó.

Quan hệ giữa sự hội tụ của chuỗi và của dãy:

- Theo định nghĩa trên, sự hội tụ của chuỗi (A) tương đương với sự hội tụ của dãy tổng riêng (A_n) của nó.
- Ngược lại, với một dãy bất kì

$$\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

Quan hệ giữa sự hội tụ của chuỗi và của dãy:

- Theo định nghĩa trên, sự hội tụ của chuỗi (A) tương đương với sự hội tụ của dãy tổng riêng (A_n) của nó.
- Ngược lại, với một dãy bất kì

$$\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

sự hội tụ của nó có thể quy về sự hội tụ của chuỗi:

$$x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) = x_1 + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) + ...$$

Quan hệ giữa sự hội tụ của chuỗi và của dãy:

- Theo định nghĩa trên, sự hội tụ của chuỗi (A) tương đương với sự hội tụ của dãy tổng riêng (A_n) của nó.
- Ngược lại, với một dãy bất kì

$$\{x_n\} = x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

sự hội tụ của nó có thể quy về sự hội tụ của chuỗi:

$$x_1+\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1}) = x_1+(x_2-x_1)+...+(x_n-x_{n-1})+...$$

(chuỗi này có các tổng riêng chính là các số hạng của dãy trên, và thường được gọi là *chuỗi co*).

Nhận xét

Nói một cách khác, việc nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi số chỉ đơn giản là một *dạng thức mới* của việc nghiên cứu sự hội tụ của dãy số.

Nhưng, như dưới đây ta sẽ thấy, dạng thức này đem lại lợi ích trong các vấn đề được đặt ra.

2.2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy a_n với $a_n = a$ (hằng số) với mọi n.

2.2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy a_n với $a_n = a$ (hằng số) với mọi n. Khi đó chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + \ldots + a + \ldots$$

(có các tổng riêng $S_n = na$)
hội tụ khi $a = 0$

Ví dụ 1. Cho dãy a_n với $a_n = a$ (hằng số) với mọi n.
Khi đó chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + ... + a + ...$$

(có các tổng riêng $S_n = na$)
hội tụ khi $a = 0$,
phân kì ra $+\infty$ nếu $a > 0$

Ví dụ 1. Cho dãy a_n với $a_n = a$ (hằng số) với mọi n.
Khi đó chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + ... + a + ...$$

(có các tổng riêng $S_n = na$)
hội tụ khi $a = 0$,
phân kì ra $+\infty$ nếu $a > 0$, ra $-\infty$ nếu $a < 0$.

Ví dụ 2.

Ví dụ 2. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n-1} + ...$$

Ví dụ 2. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

có các tổng riêng: $S_n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

Do đó S_n không có giới hạn khi $n \to \infty$

Ví dụ 2. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$$

có các tổng riêng: $S_n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

Do đó S_n không có giới hạn khi $n \to \infty$, tức là chuỗi trên phân kì.

Ví dụ 3.

Ví dụ 3. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots$$

Ví dụ 3. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots$$

Ta biết rằng

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

Vì thế sự hội tụ của chuỗi trên quy về sự hội tụ của *chuỗi co*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

Vì thế sự hội tụ của chuỗi trên quy về sự hội tụ của *chuỗi co*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

có các tổng riêng là:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$