1. **(15 баллов)**. Вложите блочно-теплицеву матрицу с теплицевыми блоками

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

в $B \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ – блочный циркулянт с циркулянтными блоками и найдите собственное разложение B.

Вспомним, что Теплицеву матрицу порядка n умеем вкладывать в циркулянт порядка $(2n-1)$.

Вложение блока $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a$

Вложение блока $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = b$

Вложение блока $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c$

Матрица, состоящая из этих блоков тоже теплицева 2×2 и ее можно вложить тоже в циркулянт:

$B = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

Теперь можем записать собственное разложение для этой штуки:

$B = (F_3 \otimes F_3)^{-1} diag((F_3 \otimes F_3)B^{(1)})(F_3 \otimes F_3)$

$(F_3 \otimes F_3)B^{(1)} = FB^{(1)} = F^{(2)} + F^{(4)} + F^{(9)}$

$F^{(2)} = (1, \omega_3, \omega_3^2, 1, \omega_3, \omega_3^2, 1, \omega_3, \omega_3^2)^T$

$F^{(4)} = (1, 1, 1, \omega_3, \omega_3, \omega_3, \omega_3^2, \omega_3^2, \omega_3^2)^T$

$F^{(9)} = (1, \omega_3^2, \omega_3, \omega_3^2, \omega_3, 1, \omega_3, 1, \omega_3^2)$

$F_3^{-1} = \frac{F_3^*}{n} = \frac{\bar{F}_3}{n}, \bar{\omega}_3 = \omega_3^{-1}$

$F_3^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega_3^{-1} & \omega_3^{-2} \\ 1 & \omega_3^{-2} & \omega_3^{-4} \end{pmatrix}$

$(F_3 \otimes F_3)^{-1} = F_3^{-1} \otimes F_3^{-1} = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} \bar{F}_3 & \bar{F}_3 & \bar{F}_3 \\ \bar{F}_3 & \omega_3^{-1}\bar{F}_3 & \omega_3^{-2}\bar{F}_3 \\ \bar{F}_3 & \omega_3^{-2}\bar{F}_3 & \omega_3^{-4}\bar{F}_3 \end{pmatrix}$

Отсюда знаем собственное разложение.

2. **(15 баллов)**. Сколько уровней алгоритма Штрассена надо сделать, чтобы число операций с плавающей точкой в нем стало в 10 раза меньше (асимптотически), чем для наивного умножения? Считайте, что рассматриваются достаточно большие действительные квадратные матрицы порядка 2^q, $q \in \mathbb{N}$.

Наивный алгоритм имеет сложность $2^{3q+1} + O(2^{2q})$ для матрицы порядка 2^q

У Штрассена умножений будет $M(n) = 7M(\frac{n}{2})$ - рекуррента.

Сложений $A(n) = 7(\frac{n}{2}) + 18A(\frac{n}{2})^2$

Теория с лекций кончилась - пора решать:

посчитаем число операций у Штрассена на $i-$ой итерации

$M(2^q) = 7^i \cdot 2^{3(q-i)}$

$$A(2^q) = 7^i A(2^{q-i}) + 18\sum_{j=1}^{i} 7^{j-1} \cdot 2^{2(q-j)}$$

$$\sum_{j=1}^{i} 7^{j-1} \cdot 2^{2(q-j)} = 2^{2(q-i)-1} \cdot \frac{7^i}{3} - \frac{2^{2q-1}}{3}$$

$A(2^q) = 7^i \cdot 2^{3(q-i)} - 7^i \cdot 2^{2(q-i)} - \frac{2^{2q}}{6} + \frac{7^i 2^{2(q-i)}}{6} = 7^i 2^{3(q-i)} + O(2^{2q})$

Смотрим отношение:

$$\frac{7^i \cdot 2^{3(q-i)+1}}{2^{3q+1}} = 7^i \cdot 2^{-3i} \leqslant 10^{-1}$$

$\frac{7^i}{8^i} \leqslant 10^{-1}$

$i = 18$

при 18 будет выполняться неравенство, 17 еще не хватит.

3. **(15 баллов)**. Проверьте наличие прямой и обратной устойчивости алгоритма $y = x - 2(u^\top x)u$ вычисления $y = H(u)x$, где $u, x \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$, $H(u)$ – матрица Хаусхолдера.

$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = O(\epsilon)$ машинное - прямая устойчивость

$$\|y - \tilde{y}\| = \|x - 2(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i)u - (1+\epsilon)(x - 2(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\epsilon)^{n-i+2}))u \cdot (1+\epsilon)^{n+1}\| = \|x(1 - l + \epsilon) - 2\sum_{i=1}^{n} u_i x_i u + 2\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1+\epsilon)^{n-i+2} u (1+\epsilon)^{n+2}\| = \|\epsilon x - 2(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i (1 - (1+\epsilon)^{2n-i+4}))u\| \leqslant \|\epsilon x\| + 2\sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |x_i| \cdot |\epsilon(2n - i + 4) + O(\epsilon_{machine}^2)| \cdot \|u\| \leqslant \epsilon_{machine}\|x\| + (2n+4)\epsilon_{machine}(\sum_{j=1}^{n} |u_j||x_j|)\|u\| + o(\epsilon_{machine}^2)$$

тогда прямая устойчивость $\leqslant \epsilon_{machine} \frac{\|x\| + (2n+4)|u^T||x|\|u\|}{\|x - 2(u^T x)u\|} + O(\epsilon_{machine}^2) = O(\epsilon_{machine})$

Обратная:

$\exists \tilde{x} : \tilde{f}(x) = f(\tilde{x}) : \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\epsilon_{machine})$

$$fl(x - 2(u^T x)u) = (1+\epsilon)(x - 2(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j (1+\epsilon)^{n-i+2}))u \cdot (1+\epsilon)^{n+1} = (1+\epsilon)x - (1+\epsilon)2(\sum_{j=1}^{n} u_i x_i (1+\epsilon)^{n-i+2})u(1+\epsilon)^{n+1} = \tilde{x} - 2(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i u_i (1 + \epsilon^{n-i+2}))u(1+\epsilon)^{n+1}$$

Обратной устойчивости тут не будет тк вектор не получается возмутить.

4. **(15 баллов)**. Пусть $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невырожденная матрица, $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что

$$\sup_{x \neq 0} \operatorname{cond}(f, x) = \operatorname{cond}(A).$$

Здесь в определениях чисел обусловленности используется вторая матричная и векторная нормы.

$cond(f, x) = \frac{\|df(x)\|}{\|f(x)\|}\|x\|$

$df(x) = A$

$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$$\sup_{x\neq 0} cond(f,x) = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A\|_2\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \sup_{x\neq 0} \frac{\sigma_1\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \sigma_1 \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|\Sigma V^T x\|_2} = \sigma_1 \|A^{-1}\|_2$$

$x = e_1 v_1 + \dots + e_n v_n$ - представление вектора через векторы матрицы V

$\|x\|^2 = e_1^2 + \dots + e_n^2$ тк векторы матрицы V образуют ортонормированный базис.

$$\frac{e_1^2 + \dots + e_n^2}{e_1^2\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 e_n^2} = \frac{1}{\sigma_n^2}$$

$\sigma_n^2 e_1^2 + \dots + \sigma_n^2 e_n^2 = \sigma_1^2 e_1^2 + \dots + \sigma_n^2 e_n^2$

разность квадратов сигм неотрицательная, а значит $e_1 = \dots = e_{n-1}$

Отсюда, $\frac{\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \frac{|e_n|}{\sigma_n |e_n|} = \frac{1}{\sigma_n}$ - успех.

5. **(20 баллов)**. С помощью матричной экспоненты найдите, при каком начальном условии y_0 решение системы дифференциальных уравнений $y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad \text{с матрицей} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

будет удовлетворять $y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. **Замечание:** В этой задаче может пригодиться разложение в ряд Тейлора гиперболических функций.

Из теории знаем, что решение такой задачи имеет вид:

$y(t) = e^{At} y_0$

$$y(1) = e^A y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \dots = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \dots & 0 & t + \frac{t^3}{6} + \dots \\ 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots & 0 \\ t + \frac{t^3}{6} + \dots & 0 & 1 + \frac{t^2}{2} + \dots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & 0 & \operatorname{sh}(t) \\ 0 & e^t & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

Тогда $y_{01} = \frac{\operatorname{ch} 1}{\operatorname{ch}^2 1 - \operatorname{sh}^2 1}$

$y_{02} = 0$

$y_{03} = \frac{-\operatorname{sh} 1}{\operatorname{ch}^2 1 - \operatorname{sh}^2 1}$

6. **(20 баллов)**. Пусть у $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n > 1$, все ведущие подматрицы невырождены. Покажите, что матрица $D - \frac{1}{a} bc^\top$ (см. обозначения в лекции 13) также удовлетворяет этому свойству.

$$A = \begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c^T \\ 0 & D - \frac{bc^T}{a} \end{pmatrix}$$

$S = D - \frac{bc^T}{a}$

$\sigma_1 a_{22} - \frac{1}{a_{11}} = \frac{\delta_2}{\delta_1} \neq 0$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b_2}{s_{11}} & I_{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{11} & c_2^T \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{b_2}{s_{11}} & I_{n-2} & \end{pmatrix}$$

тогда

$$A = p_1 p_2 \begin{pmatrix} a & c' & \\ 0 & s_{11} & c_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

$\delta_2 = S_{11} \cdot a_{11} = \sigma_1 \delta_1$

следующую дельту можно расписать аналогично, пользуясь методом якоби и обнуляя часть матрицы под главной диагональю будем получать

$\sigma_k = (s_k)_{11} \cdot \sigma_{k-1} = \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \sigma_{k-1} \neq 0$

и получаем искомое.

Бонусные задачи

1. **(30 б. балла)**. Найдите $\varepsilon_{\text{machine}}$ в зависимости от b и m (лекция 11) как точную верхнюю грань для $|\varepsilon|$:
$$\text{fl}(x) = x(1+\varepsilon),$$
где $\text{fl}(\cdot)$ – округление к ближайшему и $\text{fl}(x) \neq 0$.

2. **(30 б. балла)**. Паде аппроксимация $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – приближение f с помощью отношения полиномов p_k, q_k степени не выше k: $f(x) \approx p_k(x)/q_k(x)$. Найдите Паде аппроксимацию для матричной экспоненты, удовлетворяющую:
$$\|\exp(tA) - p_1(tA) q_1(tA)^{-1}\|_2 = \mathcal{O}(t^3).$$
Единственны ли (с точностью до умножения на константу) полиномы, удовлетворяющие этому условию?

3. **(40 б. балла)**. Пусть для элементов квадратных A, B порядка n выполняется $0 \leq a_{ij} \leq b_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Покажите, что $\rho(A) \leq \rho(B)$.