Во всех задачах считайте, что $m, n \geq 2$.

1. **(12 баллов)**. Найдите скелетное разложение вида $C\widehat{A}^{-1}R$ матрицы $m \times n$ с элементами:

$$a_{ij} = \frac{i}{j} + \frac{j}{i}.$$

Нумерация индексов начинается с 1.

Матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2} & \dots & n+\frac{1}{n} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 & \dots & \frac{2}{n}+\frac{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \frac{m}{2}+\frac{2}{m} & \dots & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ 2 & 1 & \dots & \frac{2}{n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m & \frac{m}{2} & \dots & \frac{m}{n} \end{pmatrix} +$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{2} & 1 & \dots & \frac{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{m} & \frac{2}{m} & \dots & \frac{n}{m} \end{pmatrix}$

ранги двух матриц - слагаемых равны единиц, тк их можно представить в виде произведения двух векторов (от 1 до m и от 1 до 1/n), таким образом ранг суммы не превосходит двух.

(a) Хотим узнать ранг, для этого посчитаем миноры. Не помню, как они обозначались в линале, договоримся, что буквой t.

$t_0 = 2 \neq 0, t_1 = 4 - 2(2+\frac{1}{2}) \neq 0$

$t_2 = 0$, значит старший ненулевой минор - второй(индекс равен 1), откуда ранг матрицы равен 2. Потому что второй минор ненулевой, значит - ранг не меньше 2.

(b) Теперь строим CUR-разложение:

Раз знаем, что ранг 2, значит возьмём верхнюю левую подматрицу в качестве $\widehat{A}$

$$C\widehat{A}^{-1}R = \begin{pmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 \\ \vdots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \frac{m}{2}+\frac{2}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-8}{9} & \frac{10}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{-8}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2} & \dots & n+\frac{1}{n} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 & \dots & \frac{2}{n}+\frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

2. **(15 баллов)**. Пусть $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$, а $S^\perp, S_1^\perp, S_2^\perp$ – их ортогональные дополнения.

(a) Покажите, что $\mathrm{dist}(S_1, S_2) = \mathrm{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp)$.

□

$\mathrm{dist}(S_1, S_2) = \|P_1 - P_2\|_2$, где P_1, P_2 - соответствующие ортопроекторы.

Знаем, что $\|-t\|_2 = \|t\|_2$

$\mathrm{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp) = \|(I - P_1) - (I - P_2)\|_2$ из свойств ортопроектора

$= \|P_2 - P_1\|_2 = \|-(P_1 - P_2)\|_2 = \|P_1 - P_2\|_2 = \mathrm{dist}(S_1, S_2)$ ■

(b) Найдите $\mathrm{dist}(S, S^\perp)$.

$\|P - I + P\|_2 = \|2P - I\|_2 = \lambda_{max}((2P-I)^*(2P-I))$ звезда - это эрмитово сопряжение

$(2P-I)^*(2P-I) = 4P^*P - 2P^* - 2P + I = 4P^2 - 4P + I$ (тк P - ортопроектор)

$= 4P - 4P + I = I$ (по тем же причинам)

$(I - \lambda I) = 0$

$\lambda = 1$ это я типа харчлен написал.

Ну все, лямбда равна единице, значит и вторая норма, значит и дист.

3. **(15 баллов)**. Пусть $U = [U_r \ U_r^\perp] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – матрица левых сингулярных векторов матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r. Покажите, что $\ker(A^*) = \mathrm{Im}(U_r^\perp)$ и запишите ортопроектор на $\ker(A^*)$.

□

(a) $x \in Im(U_r^{\perp}) \implies x \in \ker(A^*) \iff Im(U_r^{\perp}) \subseteq \ker(A^*)$
$\forall x \in Im(U_r^{\perp}) \implies \exists U_r^{\perp} t = x \implies A^* x = V\Sigma^* U^* U \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = V\Sigma^* I \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = 0$
тк сигма состоит из диагонального блока слева вверху, а вектор t в этом месте имеет нули, после произведения получится так.

(b) $\ker(A^*) \subseteq Im(U_r^{\perp})$
$\sqsupset x \in \ker(A^*)$
$A^* x = V\Sigma^* U^* x = 0$
$\begin{pmatrix} v_1\bar{\sigma}_1 & \dots & v_r\bar{\sigma}_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r^* \\ u_r^{\perp *} \end{pmatrix} x =$
назовем все кроме первой матрицы m
$= v_1\bar{\sigma}_1 m_1 + \dots + v_r\bar{\sigma}_r m_r = 0$
из того, что в свд унитарные матрицы и векторы из них составляют ОНБ, верхнее выполнено iff
$\bar{\sigma}_1 m_1 + \dots + \bar{\sigma}_r m_r = 0$
Но сигмы не нулевые, тк это сигнулярные числа, а они будут нулю равны только начиная с r + 1
Тогда m имеет вид:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ m_{r+1} \\ m_m \end{pmatrix}$$
а это то, с чего мы начинали решение в другую сторону ■

(c) Если P - ортопроектор на $\mathrm{Im}(U_r) \implies I - P$ на $\mathrm{Im}(U_r^{\perp}) = \ker(A^*)$
$Im(A) = Im(U_r) \implies (I - P) = (I - U_r U_r^*)$ (ну как в первом пракдз)

4. **(18 баллов)**. Вычислите $\frac{\partial f}{\partial x}$ для следующих функционалов, где $x \in \mathbb{R}^n$. Считайте все возникающие матрицы и векторы действительными.

(a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$;
$\|A(x+h)-b\|_2^2 = \langle A(x+h)-b, A(x+h)-b\rangle = \langle Ax, Ax\rangle + 2\langle Ax, Ah\rangle + \langle Ah, Ah\rangle - 2\langle Ax, b\rangle - 2\langle Ah, b\rangle + \langle b, b\rangle = f(x) + \langle 2Ax - 2b, Ah\rangle + \langle Ah, Ah\rangle = f(x) + 2(x^T A^T - b^T)Ah + \bar{o}(\|h\|_2^2)$
откуда
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2A^T(AX - b)$

(b) $f(x) = \ln(x^\top x)$, $x \neq 0$.
тут сложный функционал, поэтому брать надо по очереди
знаем, что $x^T x$ это просто умный способ написать $\langle x, x\rangle$
если хотим диф, то $\langle x+h, x+h\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, h\rangle + \bar{o}(\|h\|_2^2) = f(x) + 2x^T h + \bar{o}(\|h\|_2^2)$
тогда диф $2x^T$
второй кусок композиции это $\frac{\partial \ln x}{\partial x} = \frac{1}{x}$
ну теперь просто формула с семинара про свойство композиции
$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{x^T x}$

5. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симметричная матрица. Пусть $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $p < n$. **Указание:** при использовании правил дифференцирования необходимо указывать, на какое конкретно правило вы ссылаетесь.

(a) Найдите дифференциал $f(X) = X^\top AX$.
$f(x+h) - f(x) = (x+h)^T A(x+h) - x^T Ax = x^T Ah + hx^T Ax + h^T Ah$
тогда диф это $x^T Ah + hx^T Ax$
тут по сути ничего не юзал, чисто by def (by order of the linear f. algebra)

(b) Найдите дифференциал $g(X) = (X^\top X)^{-1}$. Напомним, что для квадратной обратимой Y справедливо $d(Y^{-1})[H] = -Y^{-1}HY^{-1}$.
$dg = dg((X^\top X)^{-1})[d(X^\top X)]$ фанфект про композицию
$= -(X^T X^{-1})d(X^T X)(X^T X)^{-1}$ фанфект из условия
$-(X^T X)^{-1}((dX)^T X + X^T dX)(X^T X)^{-1}$ фанфект про произведение
kinda success

(c) Найдите $\frac{\partial w(X)}{\partial X}$, где $w(X) = \mathrm{Tr}(f(X)g(X))$. Считайте, что производная считается в точке X с ортонормированными столбцами.
$dw = d(tr(f(X)g(X))) = tr(d(f(X)g(X)))$ свойство трейса, вроде из линейности
$= tr(df(X)[H]g(X) + dg(X)[H]f(X))$ диф произведения
$= tr((H^T AX + X^T AH)g(X) - (X^T AX)(X^T X)^{-1}((H^T X + X^T H)(X^T X)^{-1})) =$
$X^T X = I$ тк ОНБ
$= tr((H^T A^T X + X^T AH)) - tr(X^T AXH^T X + X^T AXX^T H) = 2tr(X^T AH) - tr(X^T AXH^T X) - tr(X^T AXX^T H) = 2tr(X^T AH) - tr(X^T A^T XX^T H) - tr(X^T AXX^T H) = 2tr(X^T A(I - XX^T)H)$
тогда ответ $2(I - XX^T)A^T X$

6. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная невырожденная матрица.

(a) Найдите матрицу M, такую что

$$\mathrm{vec}(AX + XA) = M\,\mathrm{vec}(X)$$

и укажите ее размер.
$\mathrm{vec}(AX) = \begin{pmatrix} AX^{(1)} & \dots & AX^{(n)} \end{pmatrix}^T = (I \otimes A)\mathrm{vec}(X)$ ну это просто из связи векторизации и кронекерова произведения.
тк мы знаем, что $\mathrm{vec}(AXI) = (I^T \otimes A)\mathrm{vec}(X)$
$\mathrm{vec}(AX + XA) = \mathrm{vec}(AX) + \mathrm{vec}(XA)$

$$A \otimes I = \begin{pmatrix} a_{11}I & \dots & a_{1n}I \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}I & \dots & a_{nn}I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$$

$$\mathrm{vec}(XA) = \begin{pmatrix} XA^{(1)} \\ \vdots \\ XA^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}X^{(1)}+ & \dots & +a_{1n}X^{(n)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}X^{(1)}+ & \dots & +a_{nn}X^{(n)} \end{pmatrix} = (A \otimes I)\mathrm{vec}(X)$$

Итого:
$\mathrm{vec}(AX) + \mathrm{vec}(XA) = (I \otimes A + A \otimes I)\mathrm{vec}(X) = M\mathrm{vec}(X) \implies M = (I \otimes A + A \otimes I)$
$M \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$

(b) Пусть $A = S\Lambda S^{-1}$ – собственное разложение A. Выразите собственные векторы и собственные значения матрицы M через S и Λ. **Подсказка:** вам поможет тождество $I = SS^{-1}$ и правила Кронекерова произведения.
Ну нам намекнули, с чего начать
$M = (I \otimes A) + (A \otimes I) = (SS^{-1}) \otimes (S\Lambda S^{-1}) + (S\Lambda S^{-1}) \otimes (SS^{-1})$
вспомним, что $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D)$
$= (S \otimes S)(S^{-1} \otimes \Lambda S^{-1}) + (S \otimes S)(\Lambda S^{-1} \otimes S^{-1}) = (S \otimes S)(S^{-1} \otimes \Lambda S^{-1} + \Lambda S^{-1} \otimes S^{-1}) =$
$= (S \otimes S)(I \otimes \Lambda + \Lambda \otimes I)(S^{-1} \otimes S^{-1})$
вспомним, что $S^{-1} \otimes S^{-1} = (S \otimes S)^{-1}$, также из диагональности $I \otimes \Lambda = \Lambda \otimes I$
$= (S \otimes S)(\Lambda \otimes I + I \otimes \Lambda)(S \otimes S)^{-1}$
ну и в собственном разложении нам обещали, что в левой матрице живут св, а в средней значения.
поэтому столбцы матрицы $(S \otimes S)$ это собственные векторы, а собственные значения выглядят как значения матрицы $(\Lambda \otimes I + I \otimes \Lambda)$
Там все ребятки на диагонали и выглядят как суммы всех возможных $\lambda_i + \lambda_j$

(c) Покажите, что решение $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричного уравнения

$$AX + XA = B,$$

существует и единственно для любой $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$\mathrm{vec}(X) = \mathrm{B}$
$det \mathrm{vec}(X)(AX + XA) = \prod_{i\leq j} \lambda_i + \lambda_j$
причем этот дет не ноль из положительной определенности, то матрица полноранговая, а значит найдется единственное решение - успех. ■

Бонусные задачи

1. **(25 б. баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m > n$, и $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — ее подматрица максимального объема среди $n \times n$ подматриц. Докажите, что $\|AB^{-1}\|_C \leq 1$.

2. **(30 б. баллов)**. Пусть P, Q – ортопроекторы. Покажите, что $\|P - Q\|_2 \leq 1$.

3. **(45 б. баллов)**. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$. Предложите, обоснуйте и запишите в виде псевдокода алгоритм решения следующей задачи:

$$f(X) = \|A - X \otimes X\|_F \to \min_{X\in\mathbb{R}^{n\times n}}$$

в случае:

(a) симметричной A,

(b) произвольной A.

Считайте, что помимо базовых арифметических операций с матрицами, вам доступно вычисление собственного разложения матрицы `eigs` (при условии его существования), а также функции `reshape` и `transpose`. **Подсказка:** подумайте, как переписать $f(X)$ с использованием $\mathrm{vec}(X)$.