Задачи по лекции 1

1. **(11 баллов)**. Пусть задан вектор $u \in \mathbb{C}^n$: $\|u\|_2 = 1$. Найдите все $\alpha \in \mathbb{C}$, для которых $A = I - \alpha uu^*$ является: 1) эрмитовой 2) косоэрмитовой 3) унитарной 4) нормальной. Для пункта 3) также нарисуйте найденные α на комплексной плоскости.

(a) $A = I - \alpha uu^* = A^*$

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha|u_1|^2 & \alpha u_1 u_2^* & \dots \\ \alpha u_1^* u_2 & 1-\alpha|u_2|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Если сопрячь $\alpha u_1 u_2^*$, получится $\alpha u_1^* u_2$

Эрмитово сопряжение это транспонирование(которое сейчас просто отразит элементы относительно диагонали) и сопряжение, как я показал.

Тогда получается, что

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha|u_1|^2 & \alpha u_1 u_2^* & \dots \\ \alpha u_1^* u_2 & 1-\alpha|u_2|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-\alpha^*|u_1|^2 & \alpha^* u_1^* u_2 & \dots \\ \alpha^* u_1 u_2^* & 1-\alpha^*|u_2|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

равенство выполняется $\iff \alpha^* = \alpha$

Для скаляра имею в виду под звездочкой комплексное сопряжение.

(b) $A = I - \alpha uu^* = -A^*$

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha|u_1|^2 & \alpha u_1 u_2^* & \dots \\ \alpha u_1^* u_2 & 1-\alpha|u_2|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -1+\alpha^*|u_1|^2 & -\alpha^* u_1^* u_2 & \dots \\ -\alpha^* u_1 u_2^* & -1+\alpha^*|u_2|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Значит

$$\begin{cases} \alpha = -\alpha^* \\ 2 = \alpha^*|u_1|^2 + \alpha|u_1|^2 \end{cases}$$

$\sqsupset \alpha = a + ib \implies a + ib = -a + ib \iff \alpha = ib$ - первое условие

$2 = -ib|u_1|^2 + ib|u_1|^2 \iff 2 = 0$(юзаю результат первого уравнения, что у альфы только мнимая часть)

получается, что такого не бывает.

(c) $A = (I - \alpha uu^*) \cdot (A^*) = I$

$(I - \alpha uu^*) \cdot (I - \alpha uu^*)^* = I$

$(I - \alpha uu^*) \cdot (I^* - \alpha^* uu^*) = I$

$I - I\alpha^* uu^* - I\alpha uu^* + (\alpha uu^*) \cdot (\alpha^* uu^*) = I$

$I - \alpha^* uu^* - \alpha uu^* + (\alpha uu^*) \cdot (\alpha^* uu^*) = I$

$\alpha^* uu^* + \alpha uu^* = (\alpha uu^*) \cdot (\alpha^* uu^*)$

$\alpha^* uu^* + \alpha uu^* = |\alpha|^2 \cdot (uu^* uu^*)$

$u^* u = 1$ по условию единичности нормы.

$\alpha^* uu^* + \alpha uu^* = |\alpha|^2 uu^*$

$(\alpha + \alpha^*) uu^* = |\alpha|^2 uu^*$

$(\alpha + \alpha^*) = |\alpha|^2 \xLeftrightarrow{\alpha = a+bi} 2a = a^2 + b^2$

Ответ: выполняется при альфах, для которых верно равенство выше и см. рисунок.

Рисунок:

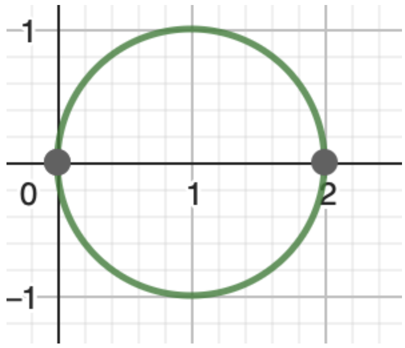

Рис. 1: Вертикальная ось - мнимая часть.

(d) $(I - \alpha uu^*) \cdot (A^*) = A^* \cdot (I - \alpha uu^*)$
$(I - \alpha uu^*) \cdot (I^* - \alpha^* uu^*) = (I^* - \alpha^* uu^*) \cdot (I - \alpha uu^*)$
$I - \alpha^* uu^* - \alpha uu^* + (\alpha uu^*) \cdot (\alpha^* uu^*) = I - \alpha uu^* - \alpha^* uu^* + |\alpha|^2 uu^*$
$|\alpha|^2 uu^* = |\alpha|^2 uu^* \iff \alpha \in \mathbb{C}$

2. **(11 баллов)**. Пусть $e = (1, 1, 1)^\top$ и $e_1 = (1, 0, 0)^\top$. Найдите $\|A\|_{2023}$, где $A = ee_1^\top$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\|A\|_{2023} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{2023}}{\|x\|_{2023}} = \sup_{\|t\|_{2023}=1} \|At\|_{2023}$

$\|t\|_{2023} = (|t_1|^{2023} + |t_2|^{2023} + |t_3|^{2023})^{\frac{1}{2023}} = 1$

$|t_1|^{2023} + |t_2|^{2023} + |t_3|^{2023} = 1$ значит каждая координата не больше единицы.

$At = (t_1, t_1, t_1)$ норма максимальная при $t_1 = 1$

$\sup_{\|t\|_{2023}=1} \|At\|_{2023}$ уже векторная норма потому

$\sup_{\|t\|_{2023}=1} \|At\|_{2023} = \sqrt[2023]{1^{2023} + 1^{2023} + 1^{2023}} = \sqrt[2023]{3}$

3. **(12 баллов)**.

(a) Докажите, что
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$
На каких векторах x достигаются равенства?

i. $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2| + 2\sum_{i \neq j} |x_i||x_j|} = \|x\|_1$$
Под корнями стоит одна и та же сумма, но в первой норме мы еще прибавили что-то неотрицательное, потому все верно.

ii. $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$
$$\|x\|_1 = \frac{\sum_i |x_i|}{n}] \leqslant \|x\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_i |x_i|^2}{n}}$$
если вынести справа из под корня n получится в точности то, что в условии, а выполняется оно в силу неравенства о среднем.

Точно достигается на нулевых. Левое помимо этого, когда одна из коодинат вектора единичка, а остальные - нули(удвоенные произведения равны нулю будут).

Правая часть помимо нулевых еще на векторах, пропорциональных единичному.

(b) Используя неравенство из (a), покажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{m}\|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$

□

i. $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1$
Распишем по определению:
$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\_2|}{\sqrt{n}\|x\|_2} \leqslant$
вспомним результат предыдущего пункта и заменим в знаменателе вторую норму на первую. Также можно сделать в числителе не испортив знака неравенства.
$\leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$ а это как раз первая норма - успех

ii. $\|A\|_1 \le \sqrt{m}\|A\|_2$
снова определение первой нормы и меняем первую на вторую
$\|Ax\|_1 \leqslant \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_2} \leqslant$ теперь домножим на корень, чтобы подогнать в числителе ко второй норме
$\leqslant \sup_{x\neq 0} \sqrt{m}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ а это как раз вторая норма домноженная на корень из м

■

4. **(16 баллов)**. Обозначим $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$.

(a) Обоснуйте сходимость $A_n \to A$, $n \to \infty$.
$\|A_n - A\|_F = \| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \|_F = \sqrt{\frac{1}{n^2}} \to 0$ при $n \to +\infty$ значит есть сходимость.

(b) Найдите собственные разложения $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из S_n,Λ_n и S_n^{-1}. Почему не у всех из этих матриц существует предел?
Ищем харчлен:
$det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{n} & -\lambda \end{pmatrix}$
$\lambda^2 - \frac{1}{n} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{n} & 1 \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow УСВ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
ФСР: $\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$ - первый собсвтенный вектор
$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow УСВ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
ФСР: $\begin{pmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$ - второй собсвтенный вектор
$A_n = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -\sqrt{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\| \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -\sqrt{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \|_F = \| \begin{pmatrix} \sqrt{n} - a & -\sqrt{n} - b \\ 1 - c & 1 - d \end{pmatrix} \|_F$
Чтобы эта матрица стремилась к нулю "предел"должен стремиться к бесконечности, значит, что предела нет.
$\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \|_F = \| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \|_F$ стремится к нулю, значит есть предел.
$\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \|_F = \| \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{n}} & 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix} \|_F$ стремится к нулю, предел есть.

(c) Найдите разложения Шура $A_n = U_n T_n U_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из U_n,T_n и U_n^{-1}.

Помним, что собственные значения равны $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$

Грам-Шмидт:

$x_1 = v_1$

$x_2 = v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} - (1-n) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{n^3} - 2\sqrt{n} \\ n \end{pmatrix}$

тут я понял, что нормировать это неприятно, поэтому возьмем более простой ортогональный вектор.

$\begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{1+n} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{1+n} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$

$A_n = \frac{1}{1+n} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \cdot T_n \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}^T$

Заметим, что $U_n^T = U_n$ в нашем случае

Нужно найти среднюю матрицу

$T_{11} = \frac{1}{1+n} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$T_{12} = \frac{1}{1+n} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} = \frac{n-1}{n}$

$T_{21} = 0$

$T_{22} = \frac{1}{1+n} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{n} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{n}}$

$A_n = \frac{1}{1+n} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -1 \\ 1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}^T$

Получили разложение, проверим сходимость

$\|U_n - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\|_F = \| \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+n}} & \frac{-1}{\sqrt{1+n}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+n}} & \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \|_F$ правда стремится к нулю при н к беск, значит предел есть. С транспонированой все также с точностью до знака - предел будет.

$\|T_n - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\|_F = \| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-1}{n} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \|_F$ правда стремится к нулю при н к беск, значит предел есть.

Замечание: построить разложение Шура поможет доказательство теоремы Шура. При проверке сходимости используйте удобную норму и определение сходимости из лекции.

Задачи по лекции 2

5. **(10 баллов)**. Докажите, что нормальная матрица является унитарной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения по модулю равны 1.

$\sqsupset A$ - нормальная и собственные 1 по модулю $\implies A$ - унитарная

$\square$

Построим SVD разложение матрицы A

$A = U\Sigma V^*$ одного размера из нормальности

$A^* = V\Sigma^* U^*$

$AA^* = U\Sigma\Sigma^* U^*$ (убили $V^*V = I$)

Теперь вспомним, что сигма - это диагональная матрица собственных значений, про которые мы можем сказать, что

$\Sigma\Sigma^* = I$

Тогда

$U\Sigma\Sigma^* U^* = UU^* = I = AA^* \implies A$ унитарная ■

$\sqsupset A$ - унитарная $\implies A$ - нормальная и собственные 1 по модулю

□

Построим разложение Шура (помним, что $U^* = U^{-1}$)

$A^* = UT^*U^*$

$AA^* = UTT^*U^*$ аналогично как в другую сторону $U^*U = I$

$I = UTT^*U^*$

умножим с двух сторон на U и на U звезду

$I = TT^* \iff T = T^{-1}$, но тк T - вехнетреугольная, а T звезда - нижне, получаем, что T - диагональная из собственных, но раз T звезда - сопряженная комплексно к ней, а произдведение равно единичной, значит все собственные, правда, по модулю равны единице. ■

6. **(12 баллов)**. Найдите сингулярное разложение матрицы с элементами $a_{ij} = ij + j$ и запишите его в компактном и полном представлениях. **Замечание:** при записи полного SVD не обязательно явно строить векторы, ортогональные данному.

$A^T A$

скажу что левая матрица это u, правая это v

$u_{ik} = ki + i$
$v_{kj} = u_{kj} = kj + j$

$$\sum_k u_{ik} \cdot v_{kj} = \sum_k (ki + i) \cdot (kj + j) = \sum_k (k^2 ij + kij + kij + ij) = ij \sum_k^m (k^2 + 2k + 1) = \frac{ij(2m^3 + 9m^2 + 13)}{6}$$

Тогда

$$A^T A = \frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot(2m+3)}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

Знаем, что для нормальной матрицы $tr = \sum_i |\lambda_i|$ собственных значений.

у этой матрицы ранг равен единице, тк все строки пропорциональны первой(линейно зависимы)

тогда есть всего одно ненулевое собственное значение.

$tr(A^*A) = \lambda_1 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6} \cdot (1 + 4 + \dots + n^2) = \frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot(2m+3)}{6} \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{m\cdot(2m^2+9m+13)}{6} \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}}$

Найдем собственный вектор для этого значения

$A^T A - \lambda_1 I = 0$

Здесь мы вычли матрицу, пропорциональный единичной матрице, а значит ранг интересующей нас стал n, откуда в ФСР будет только один вектор и найти его можно подбором.
$(A^TA - \lambda_1 I)v = 0$

Вычтем вектор $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$

Заметим, что произведение этого малыша на каждую из строк дает номер строки, умноженный на сумму квадратов от одного до n, что приводит нас как раз к
$A^TAv = \lambda_1 v$

Строим разложение

$u_1 = AV_1\sigma_1^{-1} = \frac{Av_1}{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\cdot\sqrt{\frac{m\cdot(2m^2+9m+13)}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m\cdot(2m^2+9m+13)}{6}}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} = t$

$A = t\cdot\sqrt{\frac{m\cdot(2m^2+9m+13)}{6}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ - compact svd
В компактном представлении нам все равно на все векторы, кроме первого, тк они умножатся на нулевую строку в сигме

Чтобы построить полное svd достаточно взять компактное svd и дополнить его матрицы векторами, которые образуют с имеющимися ортонормированный базис.

$A = U\cdot\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\cdot V$, где

$U-$ матрица, состоящая из u_1 и тех самых векторов, которые образуют с u_1 бла-бла. V - матрица состоящая из v_1 и тех самых векторов, которые образуют с v_1 бла-бла.

7. **(14 баллов)**.

(a) Докажите, что для любой $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \geq n$, справедливо:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2.$$

i. $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$
□
$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$
$\|A\|_2 = \sigma_1$
собственно ясно, что вторая норма не больше. ■

ii. $\|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$
□
Из прошлого пункта знаем, что
$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}, r = rk(A)$
помним с линала
$\sigma_1 \geqslant \dots \geqslant \sigma_r > 0$
Потому оценим все первым собственным
$\|A\|_F \leqslant \sqrt{r}\cdot\sigma_1$
Ранг не больше, чем минимум из $(m,n) = n \implies rk \leqslant n$
$|A\|_F \leqslant \sqrt{n}\sigma_1 \iff |A\|_F \leqslant \sqrt{n}\|A\|_2$ ■

(b) Покажите, что все матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющие $\|A\|_F = \sqrt{n}\|A\|_2$, являются унитарными, умноженными на некоторую константу.

□

Помним, что

$\|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2}$

Возведем обеих ребят в квадрат и поделим на квадрат первого собственного значения

$(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})^2 + \dots + (\frac{\sigma_r}{\sigma_1})^2 = n - 1$

При этом равенство достигается, когда матрица полноранговая, и все собственные значения равны (получится просто сумма единиц)

Теперь посмотрим на SVD

$AA^* = U\sigma_1 IV^* = |\sigma_1^2|UU^*$

Поэтому нужно, чтобы $|\sigma_1|^{-2} \cdot AA^* = I$ и тогда успех

■

Замечание: воспользуйтесь сингулярным разложением.

8. **(14 баллов)**. Дана нормальная матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и её разложение Шура $A = U\Lambda U^*$.

   (a) Запишите сингулярное разложение матрицы A с использованием матриц U и Λ.

   Из нормальности матрицы знаем, что $A^*A = AA^*$

   Тогда $U\Lambda U^* \cdot U\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^* U^* = U\Lambda^*\Lambda U^*$ (из нормальности)

   Тогда

   $\Lambda^*\Lambda = \Lambda\Lambda^* \implies \Lambda$ - диагональная.

   по той же причине $\Lambda^*\Lambda = diag(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2)$

   Возьмем матрицу $U\sqrt{\Lambda\Lambda^*}U^*$ - то что надо.

   (b) Покажите, что $\sigma_1(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.

   $\sigma_1^2 = |\lambda_1|^2$ остальные также

   ещё известно, что $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_r > 0$

   поэтому

   $\sigma_1 = \max_i |\lambda_i|$

   (c) Приведите пример матрицы $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, не являющейся нормальной и для которой полученное в (b) выражение неверно.

   Возьмем частный случай нормальной матрицы, а именно - нормальную с действительными элементами.

   $A^TA = AA^T$

   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

   $AA^T = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \neq A^TA = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} \implies c = 0 \wedge b = 0$

   Возьмем матрицу

   $A = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

   Собственные значения будут

   $\lambda^2 - 224\lambda + 300 = 0 \iff \lambda_1 = 14, \lambda_2 = 16$

   $AA^T = \begin{pmatrix} 421 & 240 \\ 240 & 256 \end{pmatrix}$

   ищем сигнулярные числа:

   $$det(\begin{pmatrix} 421-x & 240 \\ 240 & 256-x \end{pmatrix}) = 0 \iff x^2 - 677x + 50176 = \iff x = \frac{677 \pm \sqrt{1145}}{2}$$

   не совпали - успех.

Бонусные задачи

1. **(30 б. баллов)**. Пусть $|x| \in \mathbb{R}^n$ обозначает вектор, компоненты которого являются абсолютными значениями компонент вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Для каждого $n \geq 2$ приведите пример нормы на $\mathbb{R}^n$, для которой $\|x\| \neq \||x|\|$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^n$.

2. **(30 б. баллов)**.

   (a) Найдите явное выражение для $\|A\|_{p\to\infty}$ через элементы матрицы A при $p \geq 1$ и $p = \infty$. **Замечание:** считайте неравенство Гельдера известным.

   (b) Для каждого значения $p \geq 1$ и $p = \infty$ проверьте, является ли $\|\cdot\|_{p\to\infty}$ субмультипликативной.

   (c) Является ли Чебышевская норма операторной (то есть найдутся ли две векторные нормы, порождающие ее)?

3. **(40 б. баллов)**.

   (a) Докажите, что расстояние по норме $\|\cdot\|_2$ от произвольной квадратной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ до множества вырожденных матриц равно $\sigma_n(A)$. Чему равно расстояние от произвольной вырожденной матрицы до множества невырожденных?

   (b) Дана $n \times n$-матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad a_1, \dots, a_{n-1} > 0.$$

   Докажите[1], что $0 < \sigma_n(A) \leq (a_1 \dots a_{n-1})^{-1}$. **Замечание**: нужно догадаться, как возмутить некоторый элемент матрицы A, чтобы она стала вырожденной.

[1] Из полученной оценки на $\sigma_n(A)$ следует, что, например, при $a_k = 2$, $k = 1, \dots, n-1$ минимальное сингулярное число ограничивается сверху 2^{-n+1}, что даже для матрицы 50×50 уже сравнимо с машинным эпсилон в двойной точности.