1. **(15 баллов)**. Посчитайте (аналитически) LU-разложение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

с помощью элементарных преобразований Z_k. Объясните, почему в данном случае существование LU-разложения не противоречит теореме о существовании LU-разложения из лекций.

Если привести A к ступенчатому виду, то получим матрицы U, L^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Слева получили U, справа L^{-1}

Тогда $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Теорема из лекции работает для невырожденных матриц, а ну нас A - вырождена, поэтому все работает.

2. **(35 баллов)**. Пусть симметричная положительно определенная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ задана в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} a & c^\top \\ c & D \end{bmatrix},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Исключением Холецкого первой строки назовем следующую операцию:

$$A = \begin{bmatrix} a & c^\top \\ c & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 \\ \frac{c}{l} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D - \frac{cc^\top}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & \frac{c^\top}{l} \\ 0 & I \end{bmatrix} = L_0 A_1 L_0^\top, \quad l = \sqrt{a}. \tag{1}$$

Применив разложение аналогичное (1) к дополнению по Шуру $D - \frac{cc^\top}{a}$ и т.д., получим разложение Холецкого.

(a) **(9 баллов)**. Докажите, что $D - \frac{cc^\top}{a}$ будет симметричной положительно определенной.
Тут написано дополнение по Шуру. A - строго регулярна, знаем, что дополнение по Шуру для нее тоже строго регулярно.
Все угловые миноры дополнения по Шуру положительные, поэтому оно положительно определено. $D, c \cdot c^T$ симметричные и дополнение тогда тоже таким будет.

(b) **(4 баллов)**. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

постройте ее граф G(A).
Вершины - столбцы матрицы от 1 до 5 слева направо. Задам граф списком ребер:
$1 \to 2$
$1 \to 3$
$1 \to 5$
$5 \to 4$
(ребра если что неориентированы)

(c) **(8 баллов)**. Нарисуйте на графе $G(A)$ (выделите цветом) возникающие заполнения у дополнения по Шуру $D - \frac{cc^\top}{a}$ и продолжите эту процедуру рекурсивно. Находить конкретные числа не обязательно.

Добавятся ребра $2 \to 3$

$2 \to 5$

$3 \to 5$

(ребра если что неориентированы)

Первая итерация $D - \frac{cc^T}{a} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ -1 & -2 & 12 & 15 \end{pmatrix}$

На второй итерации $= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 236 & 0 & -32 \\ 0 & 60 & 180 \\ -32 & 180 & 224 \end{pmatrix}$

в эти два раза никаких ребер не добавилось, дальше тоже не будет.

(d) **(8 баллов)**. Примените к графу G(A) алгоритм minimal degree ordering (вычислять разложение для матрицы не нужно, этот пункт подразумевает работу только с графом) и соответствующую матрицу $PAP^\top$. На сколько сократилось число ребер заполнения при исключении вершин в новом порядке?

Наименьшая степень у второй вершины, выбрасываем.

Потом третью, затем первую, четвертую и остается пятая.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

в новом графе ребра $1 \to$

$3 \to 2$

$5 \to 3$

$4 \to 5$

(e) **(6 баллов)**. Запишите матрицу A из (2) в CSR формате.

$rows = \{0, 4, 6, 8, 10, 13\}$

$cols = \{0, 1, 2, 4, 0, 10, 2, 3, 4, 0, 3, 4\}$

$values = \{4, 1, 2, 1, 1, 4, 2, 5, 1, 3, 1, 3, 4\}$

3. **(25 баллов)**.

(a) Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – произвольная невырожденная матрица. Пусть рассматривается итерационный процесс вида $x_{k+1} = x_k + \tau_k r_k$, $r_k = b - Ax_k$. Получите оптимальные параметры $\tau_k \in \mathbb{R}$, минимизирующие функционал невязки $J(x) = \|b - Ax\|_2^2$ на каждом шаге итерационного процесса. Убедитесь, что полученное выражение зависит только от A и r_k.

$r_{k+1} = b - AX_{k+1} = b - A(X_k - \tau_k r_k) = b - AX_k - \tau_k Ar_k = (I - \tau_k A)r_k$

$\|b - AX_{k+1}\|_2^2 = \langle r_k, r_k\rangle + \tau_k^2\langle Ar_k, Ar_k\rangle - 2\tau_k\langle r_k, Ar_k\rangle$

$\tau_k = \frac{\langle r_k, Ar_k\rangle}{\langle Ar_k, Ar_k\rangle}$

(b) В случае $A = A^\top > 0$ покажите, что для полученного процесса выполняется:

$$\|r_k\|_2 \le \left(\frac{\text{cond}_2(A) - 1}{\text{cond}_2(A) + 1}\right)^k \|r_0\|_2.$$

$\|r_{k+1}\|_2 = min_\tau(\|r_k - \tau A r_k\|) \leqslant \|(I - \frac{2A}{\lambda_1+\lambda_n})r_k\|_2 \leqslant \|I - \frac{2A}{\lambda_1+\lambda_n}\|_2\|r_k\|_2 \leqslant \frac{cond_2(A)-1}{cond_2(A)+1} \cdot \|r_k\|_2$
$\leqslant (\frac{cond_2(A)-1}{cond_2(A)+1})^k\|r_0\|_2$

4. **(25 баллов)**. Покажите, что для достижения точности $\frac{\|e_k\|_2}{\|e_0\|_2} \le \varepsilon$ для заданного $0 < \varepsilon < 1$ в методе Чебышева необходимо сделать не больше

$$N(\varepsilon) = 1 + \frac{\sqrt{\text{cond}_2(A)}}{2} \ln(2\varepsilon^{-1})$$

итераций (при достаточно большом $\text{cond}_2(A)$).

$\|e_k\|_2 \leqslant 2 \cdot (\frac{\sqrt{cond_2(A)}-1}{\sqrt{cond_2(A)}+1})^k$

Нужно, чтобы правая часть была $\leqslant \epsilon$

$\ln 2 + k(\ln\sqrt{cond_2(A)} - 1) - \ln\sqrt{cond_2(A)} + 1 \leqslant \ln \epsilon$

$k \leqslant \frac{\ln \epsilon/2}{\ln \frac{\sqrt{cond_2(A)}-1}{\sqrt{cond_2(A)}+1}} = \frac{\ln 2/\epsilon}{\ln 1 + \frac{2}{\sqrt{cond_2(A)}-1}} \leqslant \frac{\ln 2/\epsilon \cdot (\sqrt{cond_2(A)}-1)^2}{2\cdot(\sqrt{cond_2(A)}-1)-2} = 1 + \frac{\sqrt{cond_2(A)}}{2} \cdot \ln\frac{2}{\epsilon}$

Бонусные задачи

1. **(50 б. балла)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ обладает строгим строчным диагональным преобладанием. Докажите, что для такой матрицы LU-разложение существует, и для коэффициента роста $\rho = \|U\|_C/\|A\|_C$, где $A = LU$, справедливо $\rho \le 2$.

2. **(50 б. балла)**. Дана матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = A^\top > 0$ и вектор правой части $b \in \mathbb{R}^2$. Покажите, что метод скорейшего спуска для этой системы либо сходится не более, чем за одну итерацию, либо сходится не быстрее, чем со скоростью геометрической прогрессии, то есть для последовательности невязок r_k верно неравенство:

$$\|r_k\|_2 \ge c\alpha^k\|r_0\|_2, \quad k \ge 0,$$

где α и c — положительные константы (которые могут зависеть от A и b).