

# 牛客暑期ACM多校训练营

第七场-出题人: zscoder

讲解人: wwwwodddd



牛客网  
NOWCODER

# ■ Minimum Cost Perfect Matching

---

- 签到题 & 构造常识题
- $\wedge$  符号(\wedge)一般表示 逻辑与。
- $\vee$  符号(\vee)一般表示 逻辑或。
- $\oplus$  符号(\oplus)一般表示 异或。
- 多读书.....

# I Minimum Cost Perfect Matching

---

## 题目大意

- 求出0到n-1的一个排列 $p[i]$
- 使得所有 $i \& p[i]$ 之和最小
- $\&$ 表示按位与

# Minimum Cost Perfect Matching

---

## 题目解答

- 最优解的和一定是0。
- 当 $n$ 是2的次幂的时候，非常简单 $p[i] = n - 1 - i$ 即可。
- 否则，设 $b$ 为 $\leq n$ 最大的2的次幂，
- 对于 $b \leq x < n$ ，交换 $x$ 和 $x - b$ 。
- 分别求两边的最优解。

# Minimum Cost Perfect Matching

---

## 举例

- $n = 11$ , 初始为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
- 取b为8, 开始交换 8, 9, 10, 3, 4, 5, 6, 7 / 0, 1, 2
- 取b为2, 开始交换 8, 9, 10, 3, 4, 5, 6, 7 / 2, 1 / 0
- 翻转每段得到
- 7, 6, 5, 4, 3, 10, 9, 8 / 1, 2 / 0

# Sudoku Subrectangles

---

- 简单题 & 英语题
- A nonempty subrectangle of the grid is called sudoku-like if for any row or column in the subrectangle, all the cells in it have distinct characters.
- 应该是每行每列吧。
- 不然为什么要强调for any row or column呢?

# Sudoku Subrectangles

---

## 题目大意

- 输入一个只包含52种字符的矩阵,
- 问有多少个子矩形, 满足:
- 任意一行的字母互不相同。
- 任意一列的字母互不相同。

# Sudoku Subrectangles

---

## 题目解答

- 注意到52种字符，子矩形最多52行，52列。
- 一个 $52 \times 52 \times nm$ 的做法是显然的，可以优化到 $52 \times nm$ 。
- 枚举上下边界（最多差52）
- 当左端点确定后，右端点的范围是连续的一段，并且单调
- 扫一遍即可，可以使用位运算降低复杂度。



# 1 Bit Compression

---

- 简单题 & 暴力题/卡常题
- 做法比较多

# Bit Compression

---

## 题目大意

- 初始长度 $2^n$ 的01序列，要从 $\wedge \& |$ 中选择 $n$ 个运算符。
- 序列长度： $(2^n) \rightarrow (2^{(n-1)}) \rightarrow \dots \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 。
- 问有多少个可能，使得运算后剩下的一个字符为1。

# 1Bit Compression

---

## 题目解答

- 暴力的复杂度是 $3^n$ 的，只需要再优化一点点！
- 如果剩下了16个变量，可能性只有65536个。
- 预处理他们，得到一个 $3^{(n-4)}$ 的做法。
- 事实上，直接暴力，常数优化即可。

# Counting 4-Cliques

---

- 简单题 & 构造题

## 题目大意

- 构造一个 $\leq 75$ 个点的图，使得大小为4的团恰有 $k$ 个。
- $k \leq 1e6$

# Counting 4-Cliques

---

## 题目解答

- 构造一个大小为 $t$ 的完全图，和 $a, b, c, d, e$ 五个点。
- $a, b, c, d, e$ 五个点之间没有边，他们只会向 $t$ 个点连边。
- 如果连了 $x$ 个，构成 $C(x, 3)$ 个大小为4个团。
- 找到最大的 $t$ ，枚举 $a, b, c, d$ ，计算 $e$ 。
- 也可以直接背包，并且记录方案。
- 时间复杂度 $70^4$ 或者是背包复杂度。

# Inverse Inverse Problem

---

- 中等题 & 数论题
- 感谢杜瑜皓的帮助

# Inverse Inverse Problem

---

## 题目大意

- 输入 $A, B, X, N$ ,  $f(x) = Ax + B$ , 求 $f(f(\dots f(x)\dots)) \bmod p$ 的结果
- 输入 $X, N, T, P$ ,  $t = f(f(\dots f(x)\dots))$ , 构造出 $A, B$ 。
- 输入 $M$ , 构造出 $X, N, T, P$ , 满足 $P \leq M$ , 使得 $A$ 最大。

# Inverse Inverse Problem

## 题目解答

- 第一个问题：矩阵乘法，或者等比数列求和。
- $T = A^n X + (1 + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) * B$
- 第二个问题：如果  $X = T$  或者  $N \% P \neq 0$ ，A 可以是 1。
- 否则 A 不能是 1，枚举 A 的值，一个一个验证。
- $T - A^n X = (A^n - 1) / (A - 1) * B$
- 如果左侧为  $T - A^n X = 0$ ，或者  $(A^n - 1) / (A - 1) \neq 0$ ，方程有解



# Inverse Inverse Problem

- 确定A后, 为了使得B无解,  $T=1$ ,  $X=0$ ,  $A^{n-1}=0$ 。
- 为了A有解,  $n$ 不能是 $p-1$ 的倍数。 (否则一定 $A^{n-1}=0$ )
- 也就是为了最大化A, 需要满足:  $A^{n-1}>0$  并且对于所有  $2 \leq x < A$ , 均有 $x^{n-1}=0$
- $n = \text{lcm}(r(2), r(3), \dots, r(A-1))$  并且  $n \%(p-1) \neq 0$
- 其中 $r(x)$ 表示 $x$ 的阶, 即最小的正整数 $r$ , 使得 $x^r \equiv 1 \pmod p$ 。
- 推荐代码 <https://www.nowcoder.com/acm/contest/view-submission?submissionId=31226996>

# IMindiff and Maxdiff

---

## 题目解答

- 中等题 & 计数题
- 感谢杜瑜皓的帮助。

# ■ Mindiff and Maxdiff

---

## 题目大意

- 考虑1到n的所有子集，共 $2^n - 1$ 个。
- 设mindiff为最小的差（一定是排序之后相邻2个）
- 设maxdiff为最大的差（最大的减去最小的）
- 求mindiff\*maxdiff的和。

# ■ Mindiff and Maxdiff

## 题目解答

- 枚举 $d$ ，考虑所有 $\text{mindiff} \geq d$ 的子集 $\text{maxdiff}$ 的和。
- 对于一个子集，恰好被考虑 $\text{mindiff}$ 次。 $(d=1, 2, \dots, \text{mindiff})$
- 枚举子集中元素个数 $k$ 。方案数用隔板法 $C(n-(k-1)*(d-1), k)$
- 子问题：1到 $n$ 中所有大小为 $k$ 的子集， $\text{maxdiff}$ 的和是多少？
- $\text{Sum}[(n-t)*t*\text{Binomial}[t-1, k-2], \{t, k-1, n-1\}]$
- 杜瑜皓：Mathematica算一下

# ■ Mindiff and Maxdiff

## 一些细节

- 首先需要熟悉 $O(n)$ 预处理阶乘，阶乘的逆元， $O(1)$ 组合数。
- 时间复杂度： $n/1 + n/2 + n/3 + \dots + n/n = n \log n$
- 原本的子集是 $a_1 \leq a_2 - d \leq a_3 - 2d \leq \dots \leq a_k - (k-1)d$
- 设 $b_i = a_i - (i-1)(d-1)$ 。
- 新子集是 $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n - (k-1)(d-1)$
- 方案数 $C(n - (k-1)(d-1), k)$

# ■ Mindiff and Maxdiff

## 一些细节

- 求所有maxdiff的和，相当于求所有 $a_k - a_1$ 的和
- $a_k - a_1 = (k-1)d + b_k - b_1$ ，前者是常数。
- 后者枚举 $t = b_k - b_1$ ， $b_1$ 可能的值有 $n - t$ 个。
- $b_2, b_3, \dots, b_{k-1}$ 可能的值有 $C(t-1, k-2)$ 个
- $\text{Sum}[(n - t) * t * \text{Binomial}[t - 1, k - 2], \{t, k - 1, n - 1\}]$
- 参考代码 <https://www.nowcoder.com/acm/contest/view-submission?submissionId=31230342>

# Tree Subset Diameter

---

- 中等题 & 点分治 & 计数题
- 感谢杜瑜皓的帮助。

## 题目大意

- 一个树，问有多少个点的子集，直径是 $D$ 。

# Tree Subset Diameter

---

## 题目解答

- 直径是奇数和偶数要分别讨论。
- 直径可能有很多个，但是中心只有一个，枚举中心。
- 点分治统计，对于每个点（边）作为中心分别计算答案。
- 至少有2个来自不同子树的点，距离是 $D/2$ ，其他必须 $< D/2$



# Tree Subset Diameter

---

## 一些细节

- 每条边中间加一个点，减少代码复杂度。
- 对于每个点，求 距离 $< d/2$  的点的个数 和 每个子树内 距离 $= d/2$  的点的个数。
- 点分治。求出根节点的情况，把根节点的情况传给每个点 对于每个子树，再减去子集子树传下来的。
- 参考代码 <https://www.nowcoder.com/acm/contest/view-submission?submissionId=31216546>

# 其他题目

---

- Birthday Problem  
说实话我看不太懂题>\_<
- Class Division  
std是 $m^3 n^2$ 的做法。  
aabbxxyy 通过贪心和随机化AC了，但我反复测试都是WA
- Rock-Paper-Scissors Tournament  
暴力 $2^4$ 次方以内的情况，对于最后 $2^5$ 的情况  
枚举一半，解另一半。  
但是有无解等情况，需要判断。

# Thanks