



北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

《高等动力学-运动稳定性》课程论文 《关于 Aizerman 稳定性的证明和反例》

姓 名: 杨顿

学 号: SY2005302

学 院: 航空科学与工程学院

2021 年 5 月

目录

1	阿兹曼稳定性的提出和推翻过程	3
2	阿兹曼猜想的证明[11]	4
2.1	一般的非线性系统	4
2.2	一类特殊的非线性系统及阿兹曼猜想表述	4
2.3	线性化原系统	5
2.4	求解 K 的区间	5
2.5	验证判据	6
3	对阿兹曼猜想存在错误的原因的定性理解	6
4	阿兹曼猜想的反例[10]	7
4.1	对反例系统非全局渐进稳定的证明	8
4.1.1	反例系统特性分析	8
4.1.2	反例系统非线性项分析与简化	8
4.1.3	反例系统数值求解初值的选择范围	9
4.1.4	y_1, y_2 为隐藏振动的判定方法	9
4.1.5	对反例系统周期解的综合分析	10
4.2	对反例系统满足阿兹曼假设条件的分析	11
4.2.1	将反例系统线性化	11
4.2.2	求解使线性化系统渐稳的 K 区间	11
4.2.3	验证反例系统满足阿兹曼假设的条件	12
5	总结	12
	附录 1: 定理 2 证明	13
	参考文献 (References)	14

关于 Aizerman 稳定性的证明和反例

在非线性系统稳定性的研究中有一类稳定性问题称之为绝对稳定性, 这个领域的研究中, 阿兹曼在 1949 年提出了一种假设, 引起了许多学者的深入探究。之后的诸多研究逐渐证明阿兹曼稳定性假设在很多情况下是不成立的, 而对阿兹曼稳定性进行反驳的核心步骤就是找到系统中不稳定的隐藏振荡。

基于以上思路, 本文第一部分简要介绍了阿兹曼稳定性判据的研究历史; 第二部分详细推导了阿兹曼对其假设的证明过程; 最后一部分在诸多反例和证伪方法中选择了 Leonov G.A 在 2011 年提出的方法, 阐明并补充了利用该方法推翻阿兹曼假设的过程。

1 阿兹曼稳定性的提出和推翻过程

1949 年, 阿兹曼在赫尔维兹角度下提出了稳定性假设[1], 这个猜想一经提出, 立即引起了控制理论和微分方程领域许多杰出科学家的注意[2]。阿兹曼稳定性猜想如下: 考虑一个具有非线性项的系统:

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\psi(r^T x), x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

其中 P 是 $n \times n$ 阶常数矩阵, q 和 r 是 n 维常数向量, 令系统输出 $\sigma = r^T x$, $\psi(\sigma)$ 是分段连续标量函数, 满足 $\psi(0) = 0$ 。系统(1)取 Filippov 意义下的解。

为了分析以上非线性系统的稳定性, 不失一般性, 阿兹曼首先将非线性项 $\psi(\sigma)$ 进行线性化:

$$\psi(\sigma) = \mu\sigma, \mu \in (\mu_1, \mu_2)$$

我们假设这样得到的线性系统在 $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ 是渐近稳定的, 当下式成立时:

$$\mu_1 < \frac{\psi(\sigma)}{\sigma} < \mu_2, \forall \sigma \neq 0 \quad (2)$$

阿兹曼猜想表述为: 非线性系统(1)是全局渐进稳定的。

之后许多年, 研究人员都在寻求阿兹曼猜想的答案。

1952 年, N.N. Krasovskii[3], I.G. Malkin[4], N.P. Erugin[5]等人证明了 2 阶非线性系统的 Aizerman 猜想: 当 $n = 2$ 时, 如果矩阵 $(P + \mu_1 q r^T)$ 不具有多重零特征值, 艾泽曼猜想成立, 但同时需要满足:

$$\int_0^{\infty} (\psi(\sigma) - \mu_1 \sigma) d\sigma \neq +\infty \quad \text{or} \quad \int_0^{-\infty} (\psi(\sigma) - \mu_1 \sigma) d\sigma \neq -\infty \quad (3)$$

2 阶系统阿兹曼猜想的第一个反例由 Krasovskii 在 1952 提出: 如果不满足所有以上条件, 系统(1)将拥有趋于无限大的解, 即系统不全局渐进稳定。

任意阶系统(1)的阿兹曼猜想, 由 Pliss 在 1958 年使用三阶系统反例[6]推翻。在此之后, 1958 年 V. A. Yakubovich[7], 1968 年 A. R. Efendiev[8], 1981 年 G. A. Leonov[9]纷纷将 2 阶系统的阿兹曼猜想的反例推广到一般系统。

1996 年 G.A. Leonov, 提出了与阿兹曼假设相矛盾的绝对稳定性充分必要标准[10]。

2 阿兹曼猜想的证明[11]

为了清晰的表述阿兹曼猜想的证伪过程, 我们首先讨论阿兹曼猜想在初期是如何被证明是正确的。

2.1 一般的非线性系统

定常非线性系统的扰动方程表示成一般形式为:

$$\dot{x} = f(x)$$

对这种系统, 要找到有效的 v 函数构造方法是不容易的。在实际问题中, 系统方程里可能仅有一个非线性项。例如, 单自由度振动系统, 若阻尼是非线性的, 则其方程为:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + kx = 0$$

若恢复力是非线性时, 则其方程为:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + f(x) = 0$$

2.2 一类特殊的非线性系统及阿兹曼猜想表述

为了简化问题, 我们研究一类较简单的特殊非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i f(\sigma) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sigma = \sum_{i=1}^n c_i x_i \end{cases} \quad (4)$$

其中 $f(\sigma)$ 连续。接下来我们要求一个扇形区 (k_1, k_2) , $((k_1, k_2)$ 是使系统(4)线性化后的系统保持全局渐稳的 k 所满足的条件) 如图 1 所示,

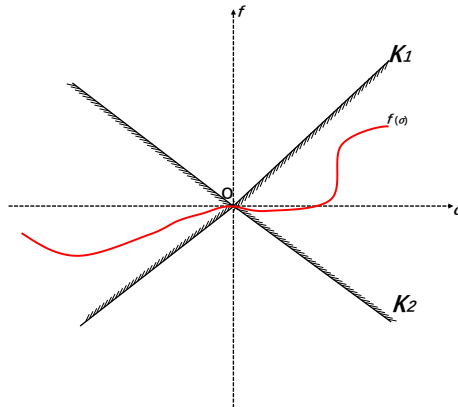


图 1 阿兹曼假设的扇形区

阿兹曼猜想表述为：当 $f(\sigma)$ 位于其中时，(即满足 $k_1\sigma < \sigma^2 f(\sigma) < k_2$ 时)，不管 $f(\sigma)$ 的具体形式如何,系统 (4) 原点均全局渐近稳定。

这类非线性系统的特点是：系统中只有一个非线性单变量函数 $f(\sigma)$ 。

2.3 线性化原系统

以下我们对该假设做出证明，作线性变换：

$$\begin{cases} y_i = x_i \ (i = 1, 2, \dots, n) \\ y_n = \sigma = \sum c_i x_i \end{cases} \quad (5)$$

则系统 (4) 可以化为：

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j + d_s f(y_n) \quad (6)$$

为表述简单起见，采用矩阵符号，将系统 (4) 写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}f(\sigma), \quad \sigma = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T \\ \mathbf{c}^T &= (c_1, \dots, c_n), \quad \mathbf{A} = (a_{ij}) \end{aligned}$$

线性变换 (5) 表示为

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

设 $c_n \neq 0$ ，即线性变换非奇异 ($|\mathbf{T}| \neq 0$)，可将系统 (6) 化为

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{T}\mathbf{b}f(y_n) = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{d}f(y_n) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{b}$ ，即得系统 (6) 的矩阵形式。

将非线性系统 (7) 线性化，令 $f(y_n) = ky_n$ ，得线性系统

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{d}ky_n = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{d}k\mathbf{e}_n y = (\mathbf{B} + \mathbf{d}k\mathbf{e}_n)\mathbf{y} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ 。

2.4 求解 K 的区间

任取一 k_0 ，使系统

$$\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{B} + k_0\mathbf{d}\mathbf{e}_n)\mathbf{y} \quad (9)$$

渐近稳定，即 $(\mathbf{B} + k_0\mathbf{d}\mathbf{e}_n)$ 的特征根均有负实部 (这样的 k_0 是存在的, 否则所要求的扇形区 (k_1, k_2) 不存在)。

根据定理：如线性系统渐进稳定，则对任意给定的正定阵 \mathbf{W} ，存在唯一的正定阵 \mathbf{V} ，满足：

$$A^T V + V A = -W$$

对系统(8), 任给一二次型 $w = -y^T N y < 0$, 可以唯一地确定另一二次型 $v = y^T M y > 0$, 使得 v 沿系统 (9)的解的导数

$$\dot{v} = w$$

以这样构造的 v 作为含有参数 k 的线性系统 (8)的 v 函数, 并求其沿 (8) 解的导数:

$$\dot{v} = y^T [(B + k d e_n)^T M + M(B + k d e_n)] y = -y^T N y \quad (10)$$

对称阵 N 含有参数 k , 设我们求得了 k 的可行区间: (k_1^0, k_2^0) 。当 k 在其中时, N 正定, 从而系统 (8) 全局渐近稳定。

2.5 验证判据

现在证明当 $k_1^0 \sigma < \sigma^2 f(\sigma) < k_2^0 \sigma$ 或 $k_1^0 < \frac{f(\sigma)}{\sigma} < k_2^0$ 时, 非线性系统(4)原点全局渐近稳定:

v 函数仍用已经用过的那个二次型 $v = y^T M y$, 求它沿 (7)解的导数,得

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{y}^T M y + y^T M \dot{y} = (B y + d f(y_n))^T M y + y^T M (B y + d f(y_n)) \\ &= \left(B y + d \frac{f(y_n)}{y_n} y_n \right)^T M y + y^T M \left(B y + d \frac{f(y_n)}{y_n} y_n \right) \\ &= y^T \left(B + d \frac{f(y_n)}{y_n} e_n \right)^T M y + y^T M \left(B + d \frac{f(y_n)}{y_n} e_n \right) y \\ &= y^T \left[\left(B + \frac{f(y_n)}{y_n} d e_n \right)^T M + M \left(B + \frac{f(y_n)}{y_n} d e_n \right) \right] y \\ &= -y^T N y \end{aligned} \quad (11)$$

因当 $k_1^0 < k < k_2^0$ 时, N 正定, 比较 (10) 式与 (11) 式, 可知, 当 $k_1^0 < \frac{f(y_n)}{y_n} < k_2^0$ 时, N 也正定。故非线性系统 (4) 的是全局渐近稳定的。

注 1: 非线性特性 $f(\sigma)$ 只要位于扇形区内, 系统 (4) 全局渐进稳定, 这种稳定性常称为系统原点的绝对稳定性。

注 2: 扇形区 (k_1^0, k_2^0) 的计算有赖于 N , N 有赖于 v , v 有赖于 N 与 k_0 , 故不同的 k_0, N , 可能得到不同的扇形区。

3 对阿兹曼猜想存在错误的原因的定性理解

以上阿兹曼稳定性证明过程在后来的研究中被诸多反例推翻, 核心原因在于阿兹曼假设中对线性化过程过于绝对, 即对非线性项 $\varphi(\sigma)$ 进行了过于简单直接的线性化过程, 可以利用图 2 进行理解: 阿兹曼假设主要工作是非线性项要满足线性化后的系统的稳定区间:

$$k_1^0 < \frac{f(\sigma)}{\sigma} < k_2^0$$

即图 2 中，非线性函数 $\varphi(\sigma)$ 的割线范围在 (k_1, k_1) 之间 ($k_1 < k_{low} < k_{up} < k_1$)，这相当于将非常复杂的非线性函数直接简化为斜率为 k_{low} 和 k_{up} 的直线，这种简化忽略了太多信息，对约束的放松程度太大，所以会存在某些系统即使满足阿兹曼的判据，但并非全局渐稳，因为该系统的很多非线性规律和信息被略去了，类似隐藏振荡这样的不渐进稳定情况就有可能被非线性化。

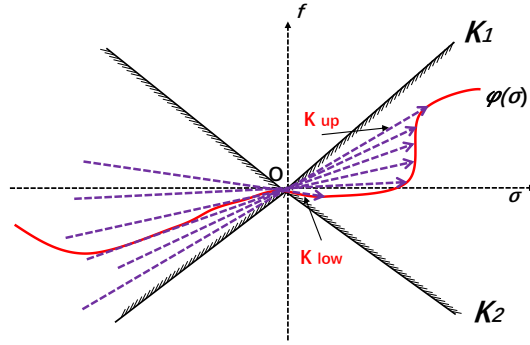


图 2 阿兹曼假设的核心思想

部分学者从从另一种角度理解阿兹曼猜想错误的原因[10]，是其没有考虑非线性系统线性部分矩阵的特征值有多个零特征值的情况，若存在上述情况，即使非线性项在 K 区间内，仍有部分状态变量的解不是渐进稳定的，会存在周期解，即隐藏振荡情况。

基于阿兹曼猜想存在的上述问题，后续研究人员相继提出了诸多正确的稳定性判据，如卡尔曼猜想(比阿兹曼猜想更严格)，波波夫绝对稳定性判据(The Popov criterion)、内奎斯特绝对稳定性判据(Nyquist stability criterion)等等。

4 阿兹曼猜想的反例[10]

以下我们分析并补充了 Leonov 在 2011 年提出的反例和分析方法来发现隐藏振荡（某些 x 的解为周期解）以推翻阿兹曼猜想。

存在如下系统：

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varphi(x_2) \\ \sigma &= \mathbf{r}^T \mathbf{x} = x_2 \end{aligned} \quad (12-0)$$

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 5\sigma, & \forall |\sigma| \leq \frac{1}{5} \\ \text{sign}(\sigma) + 0.04 \times \left(\sigma - \text{sign}(\sigma) \frac{1}{5} \right), & \forall |\sigma| > \frac{1}{5} \end{cases}$$

假设上述系统 A 阵仅含一对纯虚特征值 $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$):

将其简化表述为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}\varphi(\mathbf{r}^T\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (12)$$

通过非奇异变换, $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ 系统(12)可以简化为以下形式

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\omega_0 y_2 + b_1 \varphi^0(y_1 + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3) \\ \dot{y}_2 &= \omega_0 y_1 + b_2 \varphi^0(y_1 + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3) \\ \dot{\mathbf{y}}_3 &= \mathbf{A}_3 \mathbf{y}_3 + \mathbf{b}_3 \varphi^0(y_1 + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3) \end{aligned} \quad (13)$$

其中 y_1 、 y_2 是标量, \mathbf{y}_3 、 \mathbf{b}_3 是 2 维向量, b_1 和 b_2 是实数; \mathbf{A}_3 为 2×2 阵, 其特征值均含有负实部

4.1 对反例系统非全局渐进稳定的证明

4.1.1 反例系统特性分析

不失一般性, 我们假设对于矩阵 \mathbf{A}_3 存在大于 0 的正数 d , 满足:

$$\mathbf{y}_3^*(\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_3^*)\mathbf{y}_3 \leq -2d|\mathbf{y}_3|^2, \forall \mathbf{y}_3 \in \mathbb{R}^{n-2}$$

系统(12)的传递函数表示为:

$$\mathbf{r}^T(\mathbf{P} - p\mathbf{I})^{-1}\mathbf{q} = \frac{\eta p + \theta}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{R(p)}{Q(p)}$$

系统(13)传递函数表示为:

$$\frac{-b_1 p + b_2 \omega_0}{p^2 + \omega_0^2} + \mathbf{c}_3^T(\mathbf{A}_3 - p\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}_3$$

这里 \mathbf{I} 是单位矩阵, η 和 θ 是实数, $Q(p)$ 是一个稳定的 2 次多项式, $R(p)$ 是一个小于 2 次的多项式。假设多项式 $R(p)$ 和 $Q(p)$ 没有共同的根, 根据系统(1)和(4)的等价性, 这些系统的传递函数是一致的。这意味着以下关系成立:

$$\begin{aligned} \eta &= -b_1 \\ \theta &= b_2 \omega_0 \\ \mathbf{c}_3^T \mathbf{b}_3 + b_1 &= \mathbf{r}^T \mathbf{q} \\ \frac{R(p)}{Q(p)} &= \mathbf{c}_3^T(\mathbf{A}_3 - p\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}_3 \end{aligned}$$

4.1.2 反例系统非线性项分析与简化

接下来我们讨论非线性项的一般形式:

$$\varphi^0(\sigma) = \begin{cases} \varphi_1(\sigma), & \forall |\sigma| \leq \varepsilon \\ \varepsilon^3 \varphi_2(\sigma), & \forall |\sigma| > \varepsilon \end{cases} \quad (##)$$

函数 $\varphi_1(\sigma)$ 和 $\varphi_2(\sigma)$ 是分段可微的, 且满足以下条件:

$$|\varphi_1(\sigma)| \leq \mu|\sigma|$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (b_2(\mathbf{c}_3^T \mathbf{b}_3 + b_1)\varphi_1(\sigma) + b_1 \omega_0 \sigma) \varphi_1(\sigma) d\sigma = L\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$$

这里 $\mu > 0$, L 是确定的值。此外, 不失一般性我们假设:

$$\varphi_2(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

这些条件对于下列非线性是有效的:

$$\varphi^0(\sigma) = \begin{cases} \mu\sigma, & \forall |\sigma| \leq \varepsilon \\ M\varepsilon^3 \text{sign}(\sigma), & \forall |\sigma| > \varepsilon, \end{cases}$$

4.1.3 反例系统数值求解初值的选择范围

在相空间中非线性系统(4)的变量取值集合为:

$$\Omega = \{y_1 + c_3^T y_3 = 0, y_2 \in [-a_1, -a_2], |y_3| \leq D\varepsilon^2\}$$

这里 a_1 、 a_2 是某个正数, 数字 D 由以下引理确定:

引理 1: 系统(13)的初始解来自以下表述:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= -\sin(\omega_0 t)y_2(0) + O(\varepsilon^2), \\ y_2(t) &= \cos(\omega_0 t)y_2(0) + O(\varepsilon^2), \\ y_3(t) &= \exp(\mathbf{A}_3 t)\mathbf{y}_3(0) + \mathbf{O}_{n-2}(\varepsilon^2) = \mathbf{O}_{n-2}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad t \in [0, T] \quad (14)$$

此外, 存在 $D_1 \geq D > 0$, 当存在足够小的 $\varepsilon > 0$, 使得当 $|y_3(0)| \leq D\varepsilon^2$ 成立时, 有 $|y_3(T)| \leq D\varepsilon^2$, 且 $|y_3(t)| \leq D_1\varepsilon^2, \forall t \in [0, T]$ 。

4.1.4 y_1, y_2 为隐藏振动的判定方法

考虑系统(13)在集合 Ω 中的庞加莱映射 F :

$$F \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(T) \\ y_2(T) \\ y_3(T) \end{pmatrix} \quad (15)$$

这里 T 是一个正值, 满足: $y_1(T) + c_3^T y_3(T) = 0, y_2(T) < 0$, 且以下关系不成立。

$$y_1(t) + c_3^T y_3(t) = 0, \quad y_2(t) < 0, \quad \forall t \in (0, T)$$

引入描述函数:

$$\Phi(a) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \varphi_2(a \sin(\omega_0 t)) \sin(\omega_0 t) dt \quad (16)$$

定理 1: 如果以下不等式成立:

$$b_1 \Phi(a_2) > -\frac{2}{\omega_0^2 a_2^2} L, \quad b_1 \Phi(a_1) < -\frac{2}{\omega_0^2 a_1^2} L \quad (17)$$

那么对于足够小的 $\varepsilon > 0$, 集合 Ω 的庞加莱(15)就是集合本身: $F\Omega \subset \Omega$ 。在这种情况下, 根据布劳威尔的固定点定理, 我们有以下表述:

推论 1: 如果不等式(16)成立, 此时对于足够小的 $\varepsilon > 0$, 系统(14)在初始集合 Ω 下存在周期解, 某种意义上这个周期解稳定在集合 Ω 附件, 并映射到 Ω 自身。

定理 2: 假设存在一个大于0的数 a_0 , 使得以下条件成立:

$$b_1 \Phi(a_0) = -\frac{2}{\omega_0^2 a_0^2} L, \quad a_0 \neq v_i, \quad b_1 \frac{d\Phi(a)}{da} \Big|_{a=a_0} < \frac{4}{\omega_0^2 a_0^3} L \quad (18)$$

此时对于足够小的 $\varepsilon > 0$ ，系统(13)存在形如(14)周期解，且初始值为：

$$\begin{aligned} y_1(0) &= O(\varepsilon^2) \\ y_2(0) &= -a_0 + O(\varepsilon) \\ \mathbf{y}_3(0) &= \mathbf{O}_{n-2}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (19)$$

周期为： $T = \frac{2\pi}{\omega_0} + O(\varepsilon^2)$

推论 2： 非线性项(φ^0)满足：

$$L = \frac{2}{3} (b_2(c_3^T \mathbf{b}_3 + b_1)\mu + b_1\omega_0)\mu, \quad \Phi(a_0) = M \frac{4}{\omega_0}$$

由等式(19)表明下式成立：

$$\begin{aligned} y_1(0) &= O(\varepsilon^2), \\ y_2(0) &= -\sqrt{-\frac{\mu}{3\omega_0 b_1 M} (b_2(c_3^* \mathbf{b}_3 + b_1)\mu + b_1\omega_0) + O(\varepsilon)} \\ \mathbf{y}_3(0) &= \mathbf{O}_{n-2}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (20)$$

对定理 2 的证明在附录 1。

4.1.5 对反例系统周期解的综合分析

利用以上 4 点所介绍的分析方法和定理引理，我们利用不等式(17)对系统(12-0)的系数进行判定，其满足不等式(17)，所以该系统存在周期映射；将(12-0)的系数代入不等式(18)，即可利用定理 2 所得到的公式(20)进行初始值的计算：

$$\begin{aligned} y_1(0) &= O(\varepsilon^2), \\ y_2(0) &= -\sqrt{-\frac{\mu}{3\omega_0 b_1 M} (b_2(c_3^* \mathbf{b}_3 + b_1)\mu + b_1\omega_0) + O(\varepsilon)}, \\ y_3(0) &= \mathbf{O}_{n-2}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

得到 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{S}\mathbf{y}(0) = (0.2309, 0, 0, 0.2309)$ ，可作为为算法[10]迭代的初值，利用数值求解过程(数值求解方法在论文[10]中，本文不再赘述)得到存在周期解 x_1 、 x_2 ，如下图 3 所示；输出 σ 也为周期性变化，如图 4；即该系统不是全局渐进稳定的。

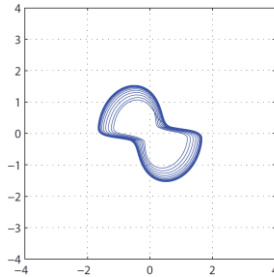


图 3 系统(12-0)中存在的隐藏振荡解

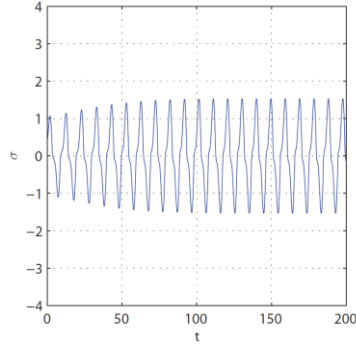


图 4 系统(12-0)中输出的变换情况

以上过程利用 Leonov [10]的方法，我们得到了系统(12-0)所需的初值，并利用数值解得到系统的隐藏振荡变量。

4.2 对反例系统满足阿兹曼假设条件的分析

4.2.1 将反例系统线性化

以下分析系统(12-0)是否满足阿兹曼假设的判据，即非线性项 $\varphi(\sigma)$ 是否被夹在扇形区域内：

首先将原系统(12-0)线性化：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} k\sigma \quad (12-1)$$

$$\sigma = \mathbf{r}^T \mathbf{x} = x_2$$

可以表示为：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \quad \text{or} \quad \dot{X} = AX$$

4.2.2 求解使线性化系统渐稳的 K 区间

以下分析 k 满足的条件，可以使 A 阵的特征值都为负实部：

$$\det|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & -1 & k \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + (1+k)\lambda^3 + (2+k)\lambda^2 + \lambda + 1$$

Hurwitz 矩阵为：

$$H_f = \begin{bmatrix} 1+k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2+k & 1 & 0 \\ 0 & 1+k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+k & 1 \end{bmatrix}$$

利用 Hurwitz 定理：矩阵 A 的所有特征值均具有负实部的充分必要条件是 H_f 的各阶顺序子式为：

$$\Delta_1 = a_1 = 1 + k > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = k^2 + 3k + 2 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = k > 0$$

$$\Delta_4 = 1 \times \Delta_3 > 0$$

综上所述得到： $k \in (0, +\infty) = (k_1, k_2)$

4.2.3 验证反例系统满足阿兹曼假设的条件

$$\text{非线性项: } \varphi(\sigma) = \begin{cases} 5\sigma, & \forall |\sigma| \leq \frac{1}{5} \\ \text{sign}(\sigma) + 0.04 \times \left(\sigma - \text{sign}(\sigma) \frac{1}{5} \right), & \forall |\sigma| > \frac{1}{5} \end{cases}$$

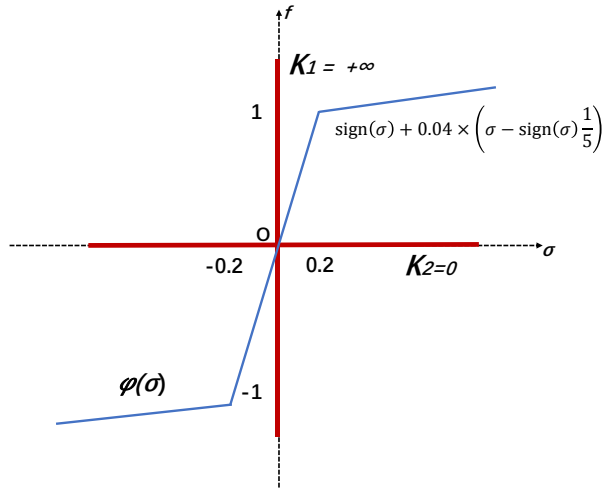


图 5 验证阿兹曼假设的条件

由此可知，此时系统满足阿兹曼判据的条件：

$$k_1^0 < \frac{f(\sigma)}{\sigma} < k_2^0$$

但系统(12-0)由图 3、图 4 知，并非全局渐稳系统。

即此系统为阿兹曼判据的一个反例。

5 总结

本文简要介绍了阿兹曼稳定性的研究历史发展情况，从阿兹曼对其猜想的证明推导过程中我们定性的分析了错误出现的根本原因，最后通过 Leonov 提出的反例和分析方法，我们对一个反例系统进行的详细的推导和证明过程。

附录 1：定理 2 证明

由以下引理完成定理 2 的证明。

通过非线性项 φ^0 和解(14)的形式，对于系统(13)的输出和对输出进行求导，我们得到

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= y_1(t) + \mathbf{c}_3^T \mathbf{y}_3(t) = -\sin(\omega_0 t) y_2(0) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\sigma}(t) &= \dot{y}_1(t) + \mathbf{c}_3^T \dot{\mathbf{y}}_3(t) = -\omega_0 \cos(\omega_0 t) y_2(0) + O(\varepsilon)\end{aligned}\quad (\text{a})$$

因此对于 $|\sigma(\tau)| \leq \varepsilon$ 存在 $|\dot{\sigma}(\tau)| > \kappa > 0$ ，从(a)和(14)可以得出结论，存在以下数字序列：

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 < \tau_5 = T$$

满足：

$$\begin{aligned}\tau_1: & \quad \forall t \in (0, \tau_1) \sigma(t) \in (0, \varepsilon), & \sigma(\tau_1) &= \varepsilon \\ \tau_2: & \quad \forall t \in (\tau_1, \tau_2) \sigma(t) > \varepsilon, & \sigma(\tau_2) &= \varepsilon \\ \tau_3: & \quad \forall t \in (\tau_2, \tau_3) \sigma(t) \in (-\varepsilon, \varepsilon), & \sigma(\tau_3) &= -\varepsilon; \\ \tau_4: & \quad \forall t \in (\tau_3, \tau_4) \sigma(t) < -\varepsilon, & \sigma(\tau_4) &= -\varepsilon; \\ \tau_5 = T: & \quad \forall t \in (\tau_4, T) \sigma(t) \in (-\varepsilon, 0), & \sigma(T) &= 0.\end{aligned}$$

根据关系式(a),我们有如下结论：

引理 2： 下列估计成立：

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{\varepsilon}{\omega_0 |y_2(0)|} + O(\varepsilon^2) \\ \tau_2 - \tau_1 &= \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{2\varepsilon}{\omega_0 |y_2(0)|} + O(\varepsilon^2), \\ \tau_3 - \tau_2 &= \frac{2\varepsilon}{\omega_0 |y_2(0)|} + O(\varepsilon^2), \\ \tau_4 - \tau_3 &= \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{2\varepsilon}{\omega_0 |y_2(0)|} + O(\varepsilon^2), \\ T - \tau_4 &= \frac{\varepsilon}{\omega_0 |y_2(0)|} + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

引理 3： 下列估计成立：

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} \varphi_2(\sigma(t)) dt = \int_0^{2\pi/\omega_0} \varphi_2(-\sin(\omega_0 t) y_2(0)) dt + O(\varepsilon)$$

引理 4： 对于足够小的 $\varepsilon > 0$ ，以下估计成立：

$$y_2^2(T) - y_2^2(0) = 2|y_2(0)| \left(\frac{2}{\omega_0^2 |y_2(0)|^2} L + b_1 \Phi(|y_2(0)|) \right) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$$

引理 1 和 4 表明如果不等式(xx)是有效的，那么包含 F 出现。根据布劳威尔的固定点定理，可以推断出映射 F 存在固定点，因此，初始点来自集合 Ω 的系统(13)存在周期解。

参考文献 (References)

- [1] M. A. Aizerman, "On a problem concerning the stability "in the large" of dynamical systems," *Uspekhi matematicheskikh nauk*, vol. 4, no. 4, pp. 187-188, 1949.
- [2] S. Lefschetz, "Stability of nonlinear control systems," MARTIN MARIETTA CORP BALTIMORE MD RESEARCH INST FOR ADVANCED STUDIES, 1965.
- [3] N. Krasovskii, "Theorems concerning stability of motions determined by a system of two equations," *Prikl. Mat. Mekh.(PMM)*, vol. 16, no. 5, pp. 547-554, 1952.
- [4] I. Malkin, "On the Theory of Stability of the Controllable Systems," *Prikl. Mat. Mekh*, vol. 15, pp. 59-66, 1951.
- [5] N. Erugin, "Some questions of motion stability and qualitative theory of differential equations on the whole," *Prikl. Mat. Mekh*, vol. 14, no. 5, pp. 459-512, 1950.
- [6] V. Pliss, "Some Problems in the Theory of the Stability of Motion," *Izd LGU, Leningrad*, 1958.
- [7] V. A. Yakubovich, "On Boundedness and Stability in Large of Solutions of Certain Nonlinear Differential Equations," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 121 (6), 984-986 (1958).
- [8] A. R. Efendiev and M. A. Balitinov, "On Asymptotic Stability in Large of a Nonlinear System," *Differets.Uravneniya* 4 (4), 618 (1968).
- [9] G. A. Leonov, "On Stability in Large of Nonlinear Systems in the Critical Case of Two Nonzero Roots," *Prikl.Mat. Mekh.* 45 (4), 752-755 (1981).
- [10] G.A. Leonov, I.M. Burkin, A.I. Shepeljavyi - Frequency Methods in Oscillation Theory (Mathematics and Its Applications)-Springer (2011)
- [11] Айзерман М.А. Лекции по теории автоматического регулирования