

椭圆盘纯滚动问题建模与仿真

杨顿^{1,*}

1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083

摘要: 对于椭圆盘纯滚动问题, 本文应用两种思路建立了椭圆盘水平面纯滚动的约束条件, 使用第一类拉格朗日方程构建了该问题的动力学模型, 对微分代数方程 (DAE) 使用Baumgarte违约修正方法, 推导化简得到了矩阵形式的常微分方程, 对此方程进行Matlab数值计算得到了仿真结果, 最后通过圆盘算例、不使用Baumgarte修正方法椭圆盘算例、初速度算例、持续施加作用力算例等实验证明了该方法的正确性以及违约修正方法的有效性。

关键词: 第一类拉格朗日方程; Baumgarte违约修正; 纯滚动; 点接触; 数值计算; DAE

中图分类号: (0316) 文献标识码: A 文章编号: 1000-6893 (2019) XX-XXXXX-

1 问题描述

水平面放置一长轴为 a , 短半轴为 b , 质量为 m 的椭圆盘, 其转动惯量 $J_c = \frac{m}{4} \times (a^2 + b^2)$ 。

建立椭圆盘在水平面上的纯滚动的动力学模型。
计算 matlab 并定性分析结果的正确性。

2 坐标描述 (思路一)

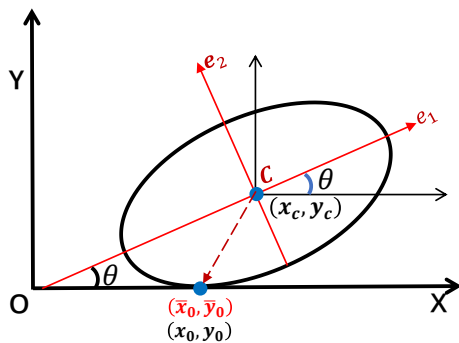


图1 建立坐标系

Fig.1 Create a coordinate system

如图 1 所示, 建立惯性坐标系 $O-XY$, 椭圆盘质心坐标在惯性系下表示为 (x_c, y_c) , 椭圆盘与

水平面交点坐标为 (x_0, y_0) 。同时以椭圆盘质心为原点建立随体系 $c-e_1e_2$, 椭圆盘与水平面交点在随体系的坐标表示为 (\bar{x}_0, \bar{y}_0) , 椭圆盘随体系相对于惯性系的夹角为 θ 。

由于椭圆盘与地面之间为点接触且发生纯滚动, 所以该系统可以仅用一个坐标将其完全描述, 即该系统只有一个自由度。思路一在建立模型时选择的广义坐标为 (x_c, y_c, θ) 。

椭圆盘与水平面的接触点可在随体系中通过椭圆切线公式表示:

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}_0^2}{a^2} + \frac{\bar{y}_0^2}{b^2} = 1 \\ \frac{\bar{x}_0 x}{a^2} + \frac{\bar{y}_0 y}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中切点与夹角 θ 满足:

$$\bar{x}_0 = \frac{\tan \theta}{b^2} a^2 \bar{y}_0 \quad (2)$$

将 (2) 式代入 (1) 式, 化简可得:

$$\begin{cases} \bar{x}_0 = \frac{-a^2 \sin(\theta)^2}{\sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)}} \\ \bar{y}_0 = \frac{-b^2 \cos(\theta)^2}{\sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)}} \end{cases} \quad (3)$$

在惯性系中接触点坐标可以表示为:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

3 约束模型

3.1 点接触约束

椭圆盘与水平面在纯滚动时要保证点接触, 此条件相当于共点相切条件, 即惯性系中的切点 (x_0, y_0) :

$$\Phi_1(q) = y_0 = y_c + \sin\theta \bar{x}_0 + \cos\theta \bar{y}_0 = 0 \quad (5)$$

其中 \bar{x}_0 、 \bar{y}_0 可用(3)式表示。

约束(5)是变量仅含广义坐标的完整几何约束。

3.2 纯滚动约束

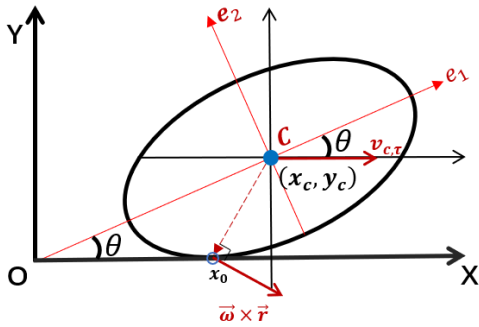


图2 纯滚动条件

Fig.2 Pure rolling condition

发生纯滚动时需要满足接触点 (x_0, y_0) 处速度为0, 即:

$$\vec{v}_{(x_0, y_0)} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0 \quad (6)$$

代入具体值, 即:

$$\vec{v}_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

可以得到切点处 x 方向速度满足:

$$\Phi_1^*(q, \dot{q}) = \vec{v}_{(x_0, y_0), \tau} = \dot{x}_c + \dot{\theta} y_0' = 0 \quad (8)$$

其中: $y_0' = \sin\theta \bar{x}_0 + \cos\theta \bar{y}_0$ 。

约束(8)是可积的速度约束, 仍为完整约束, 可以使用第二类拉格朗日方程建立动力学方程。

联立(5)和(8)式即可得到以广义坐标 (x_c, y_c, θ) 建立系统时的几何约束和速度约束。第二种约束推导思路展示在附录。

4 拉格朗日函数和广义力

系统的动能和势能表达如下:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \times m \times (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} \times J_c \times \dot{\theta}^2 \\ V = mg \times (y_c - b) \end{cases} \quad (9)$$

其中以短半轴高度 b 为零势能点。

广义力:

$$\begin{cases} Q_{x_c} = 0 \\ Q_{y_c} = -mg \\ Q_{\theta} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

5 利用第一类拉格朗日方程建立动力学方程

保守系统第一类拉格朗日方程如下:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + \Phi_q^T \lambda + \Phi_q^{*T} \lambda^* \\ \Phi(q) = 0 \\ \Phi^*(q, \dot{q}) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\Phi(q, t) = 0$ 为含广义坐标的几何约束方程, $\Phi^*(q, \dot{q}) = 0$ 为含有广义坐标和广义速度的约束; Φ_q^T 为 Φ 对广义坐标列向量求偏导的雅克比矩阵, Φ_q^{*T} 为 Φ^* 对广义速度列向量求偏导的雅克比矩阵, Q 为主动力的广义力。

式 (11) 为微分代数方程 (DAE) 包含独立变量 $(x_c, y_c, \theta, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\theta}, \lambda, \lambda^*)$, 一般通过对约束方程求导将其转化成常微分方程组 (ODE) 进行数值计算。

首先将其转化为矩阵方程形式: 由 $T = \dot{q}^T M \dot{q}$, 代入方程 (11) 可以得到:

$$\ddot{q} = M^{-1}(Q + \Phi_q^T \lambda + \Phi_q^{*T} \lambda^*) \quad (12)$$

式 (12) 包含未知参数 λ, λ^* , 可以通过以下方法进行代换, 现在讨论如何将其代数方程进行转换并解决约束偏移问题。

6 Baumgarte 违约修正

6.1 几何约束

对于约束方程 $\Phi(q) = 0$, 数值求解时由于计算误差积累, 会使 Φ, Φ^* 不满足约束, 出现违约情况。目前大量文献对违约修正的问题进行了研究, 很多学者提出了不同的方法, 其中 1984 年 Baumgarte^[1] 提出了一种违约修正方法, 利用弹簧阻尼系统的思想, 将代数形式的约束方程转化为线性常微分方程的解, 该方程的解是稳定的, 振荡后最终会收敛, 因此不会产生累积的误差。我们以此方法为基础来进一步推导。

约束方程 (5) 使用违约修正稳定化后为:

$$\ddot{\Phi} + \alpha \dot{\Phi} + \beta \Phi = 0 \quad (13)$$

其中: $\dot{\Phi} = \Phi_q \dot{q}$, $\ddot{\Phi} = \Phi_q \ddot{q} + \dot{\Phi}_q \dot{q}$, 代入 (13) 式可得:

$$\Phi_q \ddot{q} + \dot{\Phi}_q \dot{q} + \alpha \Phi_q \dot{q} + \beta \Phi = 0 \quad (14)$$

记 $B = \dot{\Phi}_q \dot{q} + \alpha \Phi_q \dot{q} + \beta \Phi$, 并将式 (12) 代入 (14) 可得:

$$\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T \lambda + \Phi_q M^{-1} \Phi_q^{*T} \lambda^* + \Phi_q M^{-1} Q + B = 0 \quad (15)$$

6.2 速度约束

速度约束 (8) 已经包含广义速度, 在求解时为避免广义速度的二阶导出现, 使用 Baumgarte 违约修正时速度约束只求一阶导:

$$\dot{\Phi}^* + \gamma \Phi^* = 0 \quad (16)$$

其中 $\dot{\Phi}^* = \Phi_q^* \ddot{q} + \dot{\Phi}_q^* \dot{q}$, 代入 (16) 可得:

$$\Phi_q^* \ddot{q} + \dot{\Phi}_q^* \dot{q} + \gamma \Phi^* = 0 \quad (17)$$

记 $C = \dot{\Phi}_q^* \dot{q} + \gamma \Phi^*$, 并将式 (12) 代入 (17) 得:

$$\Phi_q^* M^{-1} \Phi_q^T \lambda + \Phi_q^* M^{-1} \Phi_q^{*T} \lambda^* + \Phi_q^* M^{-1} Q + C = 0 \quad (18)$$

6.3 方程形式化简

以下进行方程 (12) 的化简, 将其转化为易于求解的形式:

合并式 (15)、(18) 得到:

$$\begin{bmatrix} \Phi_q M^{-1} \Phi_q^T & \Phi_q M^{-1} \Phi_q^{*T} \\ \Phi_q^* M^{-1} \Phi_q^T & \Phi_q^* M^{-1} \Phi_q^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Phi_q M^{-1} Q + B \\ \Phi_q^* M^{-1} Q + C \end{bmatrix} \quad (19)$$

因此有:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Phi_q M^{-1} \Phi_q^T & \Phi_q M^{-1} \Phi_q^{*T} \\ \Phi_q^* M^{-1} \Phi_q^T & \Phi_q^* M^{-1} \Phi_q^{*T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_q M^{-1} Q + B \\ \Phi_q^* M^{-1} Q + C \end{bmatrix} \quad (20)$$

将上式代入式 (12) 得到不含 λ, λ^* , 可用于直接求解的常微分方程:

$$\ddot{q} = M^{-1} \left(Q + \begin{bmatrix} \Phi_q^T & \Phi_q^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^* \end{bmatrix} \right) \quad (21)$$

7 方程求解

利用 Matlab ode45 函数进行数值求解时，需要将高阶求导方程转化为最高一阶求导方程进行计算：

$$\begin{cases} \dot{q}(1) = \dot{x}_c \\ \dot{q}(2) = \dot{y}_c \\ \dot{q}(3) = \dot{\theta} \\ \dot{q}(4) = \dot{x}_c = \ddot{q}(1) \\ \dot{q}(5) = \dot{y}_c = \ddot{q}(2) \\ \dot{q}(6) = \dot{\theta} = \ddot{q}(3) \end{cases} \quad (22)$$

计算式(22)时，首先采用 Matlab 符号运算推导出用 $(x_c, y_c, \theta, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\theta})$ 表示的式(22)各项，然后利用 ode45 进行具体算例求解。

8 算例

8.1 验证算例-圆

表 1 圆算例参数设置

Table1 Circle parameter setting		
$m = 1$	$g = 9.8$	
$a = 1$	$b = 1$	
$\alpha = 10$	$\beta = 10$	$\gamma = 10$
计算时长 $t = [0:0.01:20]$		
初值 $q0 = [0; a; \pi/2; -0.5*a; 0; 0.5]$		

算例 1 为圆盘验证算例，测试其在某一初速度下能否保证纯滚动、点接触、能量守恒条件。如图 4 所示，圆盘运动时几何约束 (5) 保持为 0；如图 5 所示，速度约束式 (8) 在 0-5 秒保持为 0，8s 后以 0 为中心在 $\pm 10^{-6}$ 范围内波动，属于可以接受的误差范围；由图 6 知，能量基本保持守恒。由此可验证该算法的正确性。

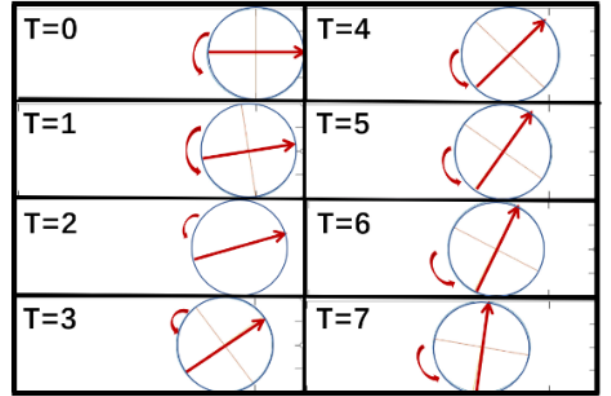


图3 圆盘7s运动过程结果展示

Fig.3 7s motion process

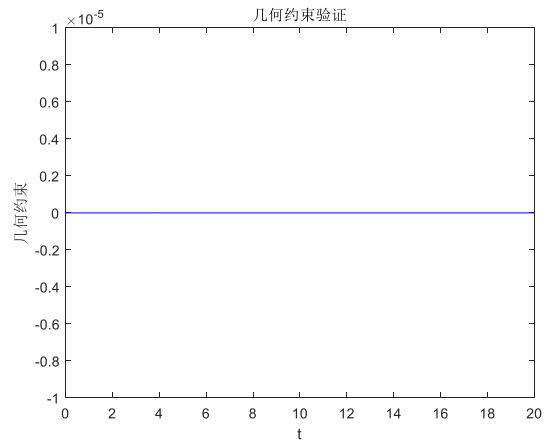


图4 圆盘运动几何约束验证

Fig.4 Verification of geometric constraints

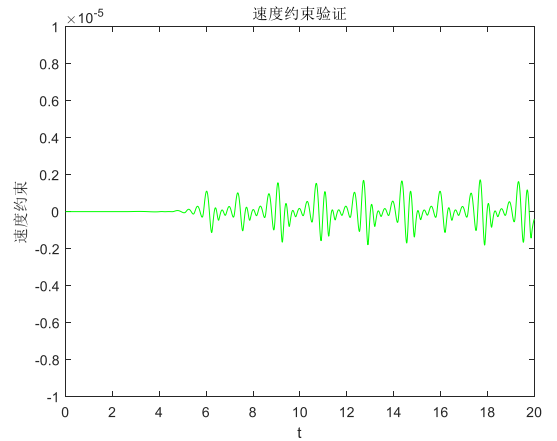


图5 圆盘运动速度约束验证

Fig.5 Verification of Disc Motion Speed Constraint

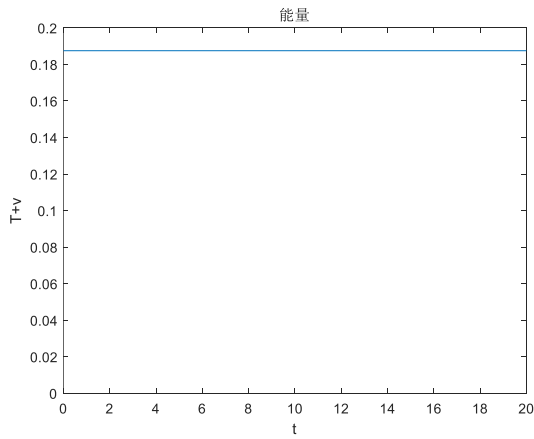


图6 圆盘运动能量验证

Fig.6 Disk motion energy verification

8.2 椭圆算例1-椭圆从长轴初始位置开始滚动

表 2 椭圆算例参数设置

Table1 Ellipse parameter setting

$m = 1$		$g = 9.8$
$a = 1.5$		$b = 1$
$\alpha = 10$	$\beta = 10$	$\gamma = 10$
计算时长 $t = [0:0.01:20]$		
初值 $q_0 = [0; a; \pi/2; -0.5*a; 0; 0.5]$		

图 7 展示了椭圆盘 8s 运动过程，从中可以初步观察其运动满足点接触和纯滚动条件。在 0s 和 8s 运动最高点即势能最大点处，速度最小，为初速度；3s 运动最低点处速度最大。要验证该过程是否满足能量守护和约束条件还要进一步分析。

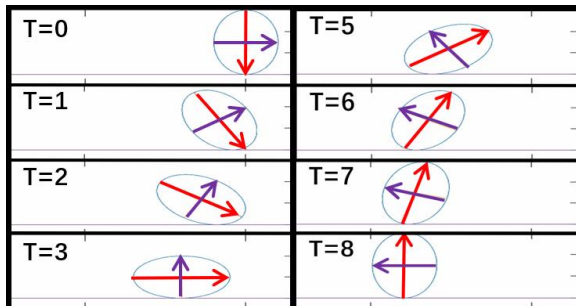


图7 椭圆盘8s运动过程

Fig.7 8s motion process

由图 8 椭圆的质心运动曲线、图 9 椭圆转角

变化可看出运动过程无滑动，基本保持均匀速度翻滚。

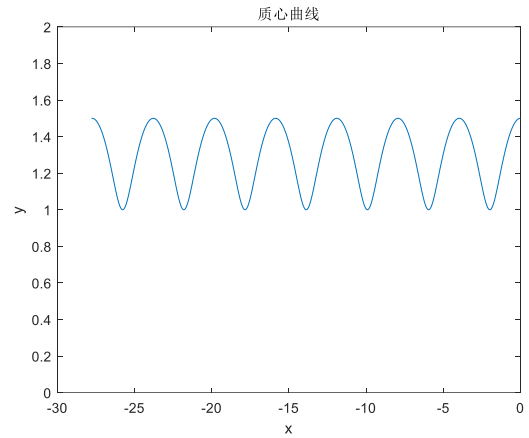


图8 椭圆盘质心运动轨迹

Fig.8 Center of mass trajectory

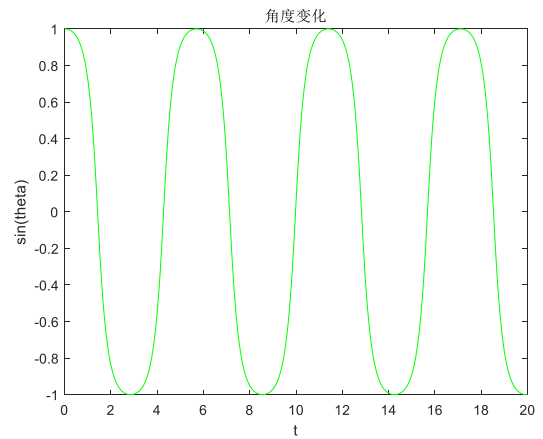


图9 椭圆盘质心转动角theta变化曲线

Fig.9 The angle of rotation theta changes with time

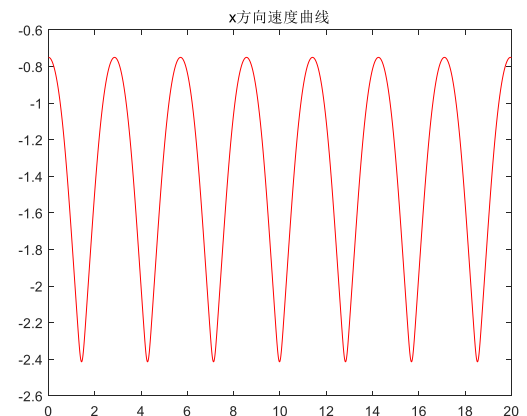


图10 椭圆盘质心x方向速度变化曲线

Fig.10 Velocity change in the x direction

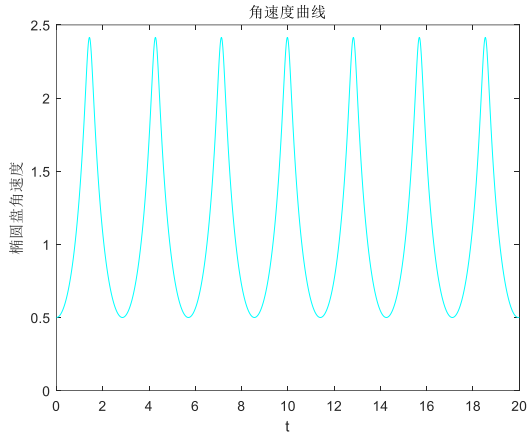


图11 椭圆盘角速度变化曲线

Fig.11 Angular velocity change curve of ellipse disk

通过式 (9) 计算每一时间步的能量, 来判断此系统是否满足保守系统的能量关系, 如图 11-12 所示, 可知在某些时刻系统能量发生突变, 但总体保证稳定守恒, 最大误差在 10^{-6} , 可认为系统能量守恒。值得注意的是, 观察图 12 在某些特定时刻, 能量误差会突发较大幅度波动, 一般在转角 $\theta = k\pi$ 位置, 初步分析其原因在这些点, 数值计算分母出现 $\cos(k\pi) = 0$, 从而产生奇异。

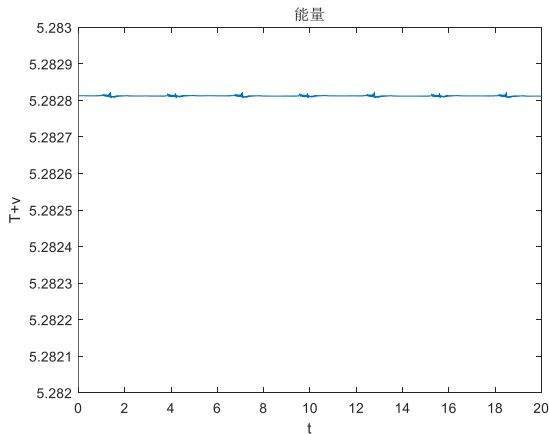


图12 椭圆盘能量变化曲线

Fig.12 Energy change curve of elliptical disk

可以观察到图 12 中能量曲线会在某些特定点出现小幅度波动, 将其放大如图 13 所示。

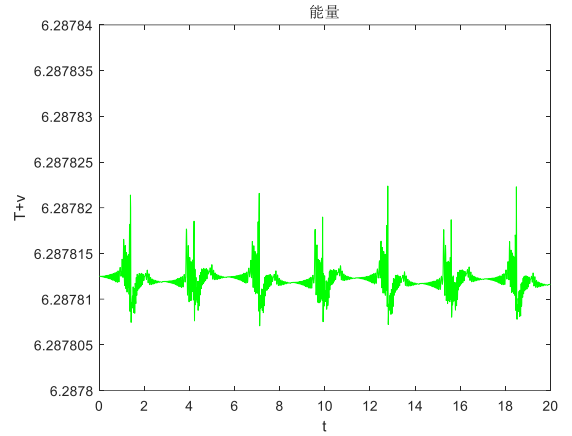


图13 椭圆盘能量变化曲线 (放大图)

Fig.13 Energy change curve of elliptical disk

通过计算每一时间步的几何约束与速度约束以及其各阶导数, 可以判断运动过程中约束的满足情况。

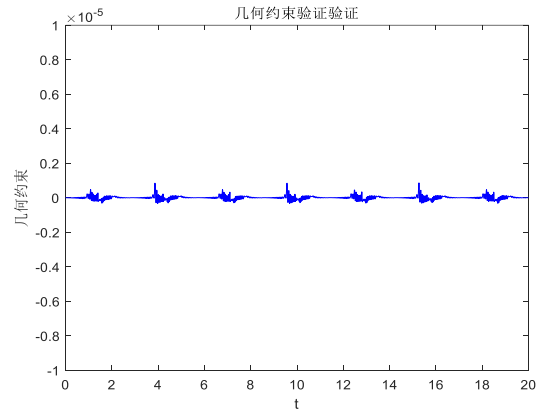


图14 几何约束验证

Fig.14 Geometric constraint verification

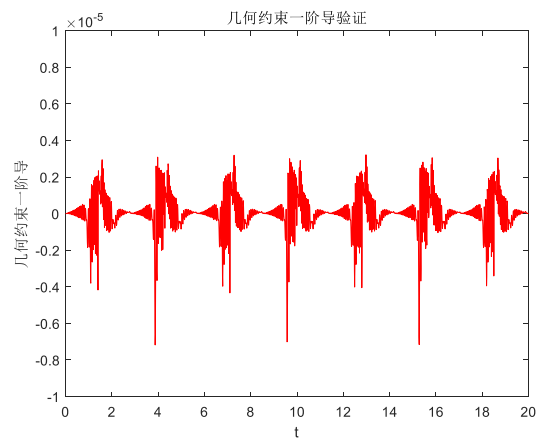


图15 几何约束一阶导验证

Fig.15 Geometric constraint first-order guide verification

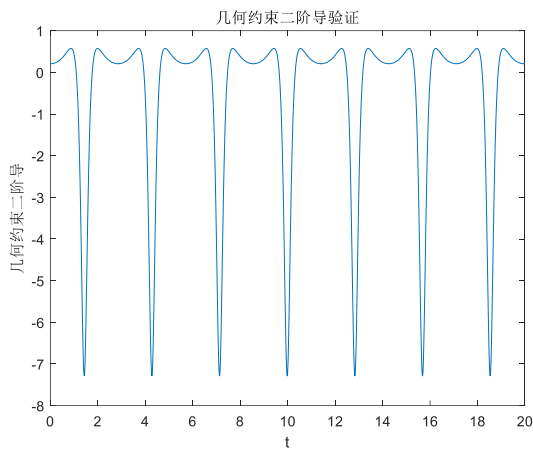


图16 几何约束二阶导验证

Fig.16 Geometric Constraint Second Order Derivation

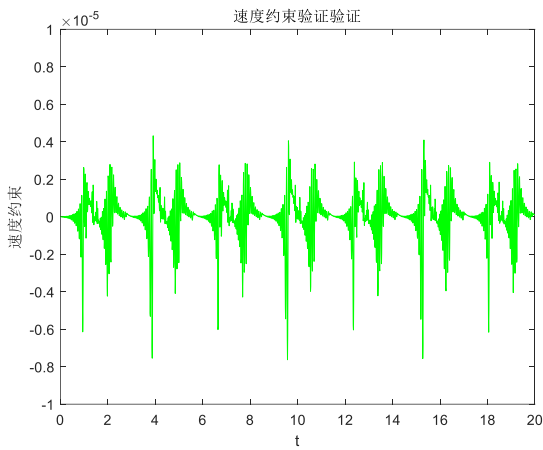


图17 速度约束验证

Fig.17 Geometric constraint first-order guide verification

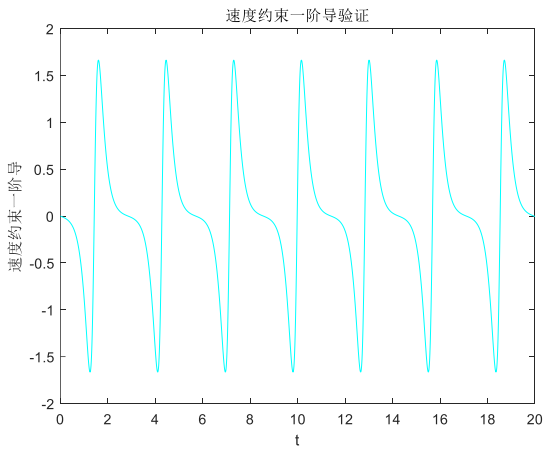


图18 速度约束一阶导验证

Fig.18 Speed constrained first order derivative

由图 14 可知椭圆盘滚动时几何约束的误差在 10^{-7} 范围内，由图 15 知几何约束的一阶导在

10^{-6} 范围内，基本满足约束条件。图 16 知几何约束的二阶导变化幅度较大，这是因为使用 Baumgarte 违约修正只能保证一阶导及原函数满足约束条件。

图 17 知速度约束误差范围在 10^{-6} 内，速度约束的一阶导变化范围较大但可判断速度约束基本满足约束条件。

8.3 椭圆算例2-不使用Baumgarte违约修正的椭圆盘

表 3 椭圆算例 2 参数设置

Table3 Ellipse2 parameter setting		
$m = 1$	$g = 9.8$	
$a = 1.5$	$b = 1$	
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$\gamma = 0;$
计算时长 $t = [0:0.01:20]$		
初值 $q_0 = [0; a; \pi/2; -0.5*a; 0; 0.5]$		

将 Baumgarte 违约修正各项系数设为 0 进行计算后得到如下的约束情况：

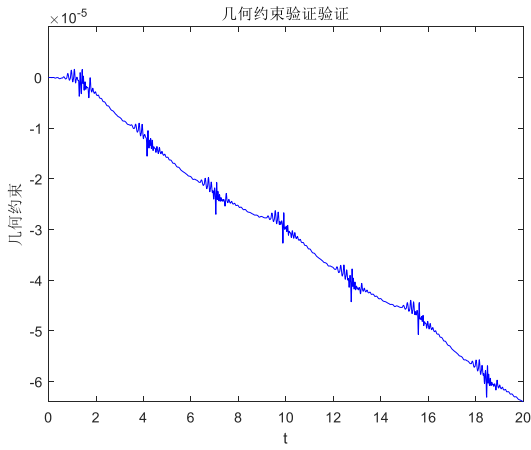


图19 几何约束验证

Fig.19 Geometric constraint verification

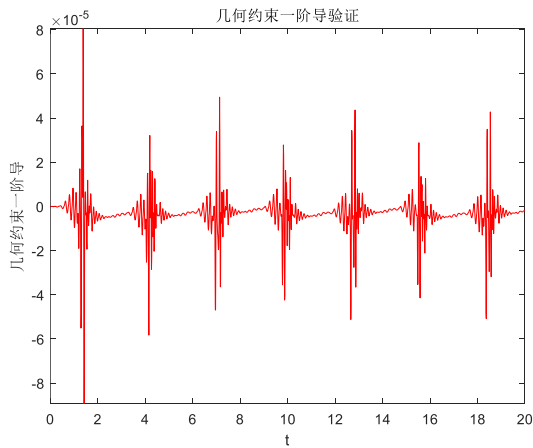


图20 几何约束一阶导验证

Fig.20 Geometric constraint first-order guide verification

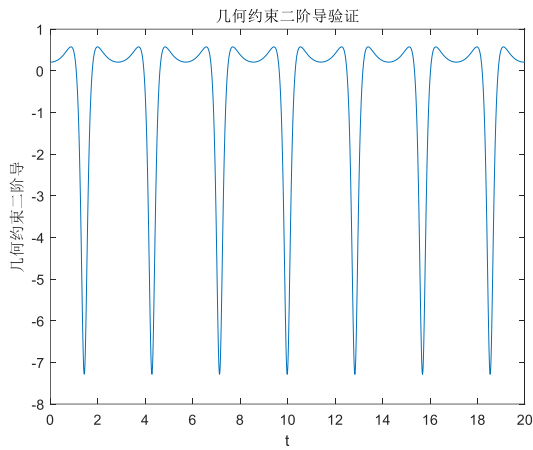


图21 几何约束二阶导验证

Fig.21 Geometric Constraint Second Order Derivation

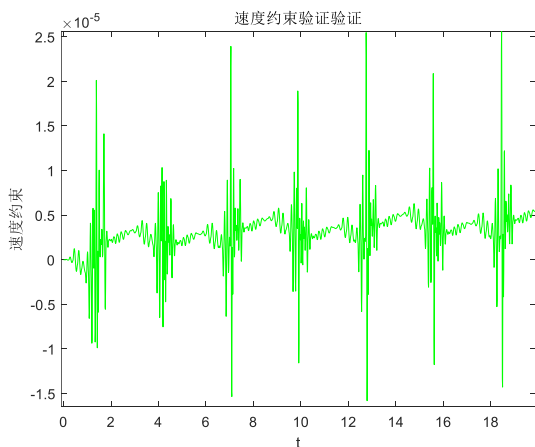


图22 速度约束验证

Fig.22 Geometric constraint first-order guide verification

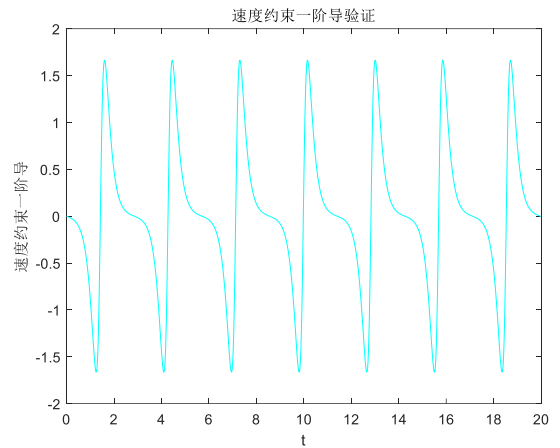


图23 速度约束一阶导验证

Fig.23 Speed constrained first order derivative

对比图 14-18 与图 19-23 可知：不使用违约修正时几何约束的误差达到了 10^{-4} 量级，相较使用违约修正方法的情况，产生了越 1000 倍的误差；速度约束的误差达到了 10^{-5} 量级，相较算例 2 产生了接近 100 倍的误差。且该算例下两种约束无法维持在 0 值附近波动，误差不断累积增大。由此可以证明：使用 Baumgarte 违约修正方法可以高效提升计算的精度，减小误差。

8.4 椭圆算例3-从短半轴初始位置开始低初速度滚动

表 4 椭圆算例 3 参数设置

Table4 Ellipse3 parameter setting

m = 1		g = 9.8,	
a = 1.5		b = 1	
$\alpha = 10$	$\beta=10$	$\gamma = 10$	
计算时长 t = [0:0.01:20]			
初值 q0 = [0;b;0; -2.3*b; 0;2.3]			

椭圆盘算例 1 展示了从长半轴开始，给一初速度，发生滚动的运动情况，该算例经过约束和能量验证可以得到准确计算结果。为了测试其他初始状态，本算例从短半轴初始位置开始，给一初速度，测试其运动状态，结果输出动画如下图：

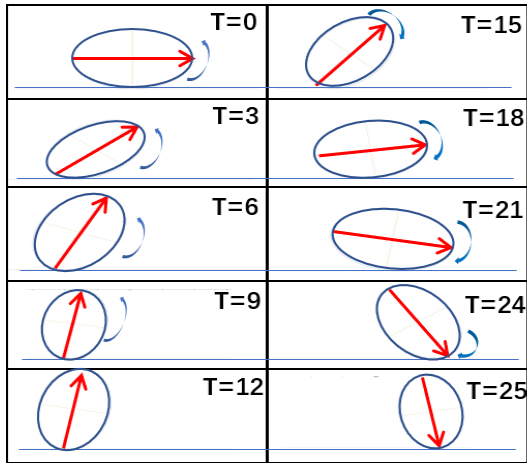


图24 椭圆盘从短半轴开始运动

Fig.24 From the short semi-axis starts to move

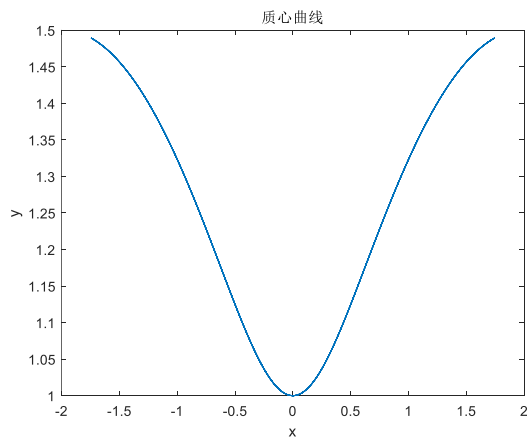


图25 质心运动轨迹

Fig.25 Center of mass trajectory

由图 24、25 可知，该状态下椭圆盘处于来回滚动状态，由于系统保守，所以椭圆盘将一直处于此状态。

8.5 椭圆算例4-施加作用力

表 5 椭圆算例 4 参数设置

Table5 Ellipse4 parameter setting

$m = 1$		$g = 9.8$
$a = 1.5$		$b = 1$
$\alpha = 10$	$\beta = 10$	$\gamma = 10$
计算时长 $t = [0:0.01:20]$		
初值 $q_0 = [0;b;0; -2.3*b; 0;2.3]$		
作用力 $Q = [3; -mg; 0]$		

在椭圆盘质心施加 x 方向作用力，并分别计

算使用和不使用 Baumgarte 违约修正的计算方法，可以得到较明显的约束对比情况。

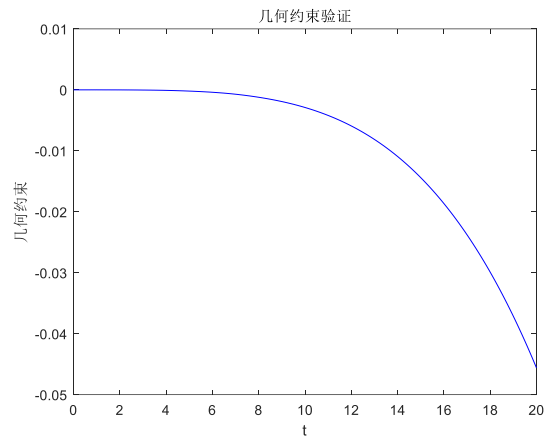


图26 施加力-不使用违约修正-几何约束

Fig.26 No default correction-geometric constraints

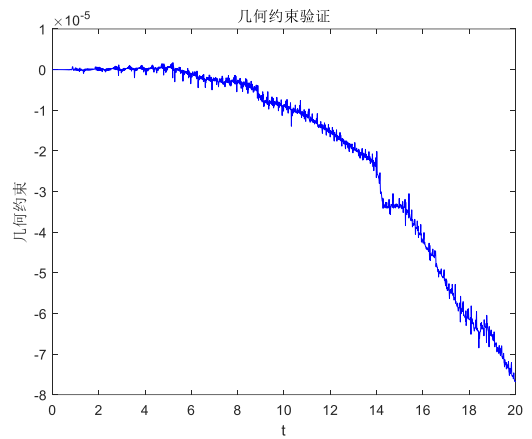


图27 施加力-使用违约修正-几何约束

Fig.27 Default correction-geometric constraints

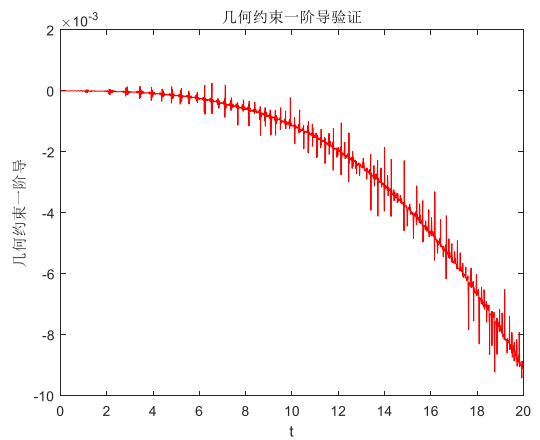


图28 施加力-不使用违约修正-几何约束一阶导

Fig.28 Geometric Constraint First Order Derivation

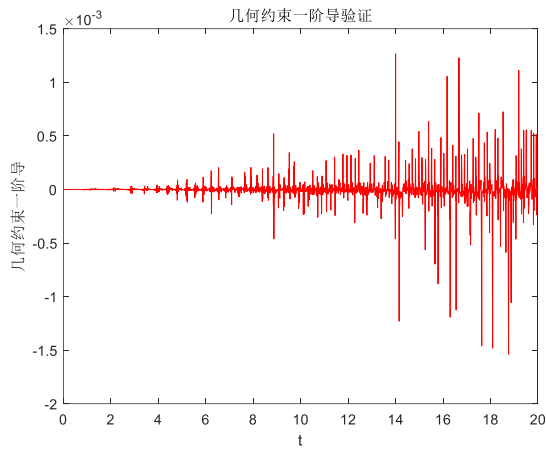


图29 施加力-使用违约修正-几何约束一阶导

Fig.29 Geometric Constraint First Order Derivation

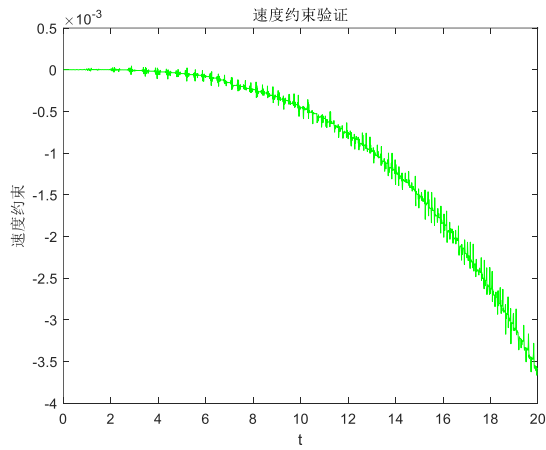


图30 施加力-不使用违约修正-速度约束

Fig.30 No default correction-speed constraint

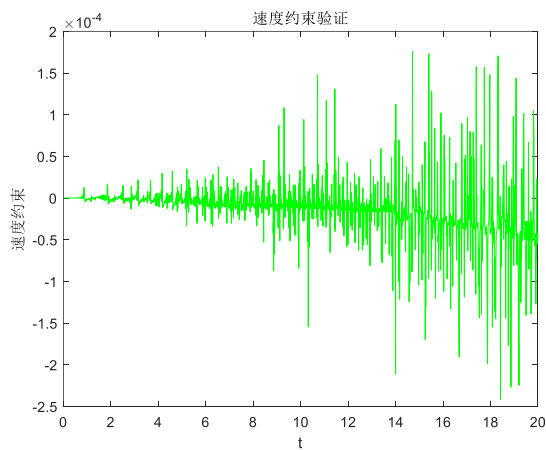


图31 施加力-使用违约修正-速度约束

Fig.31 Default correction-speed constraint

由图26-27可知，在施加持续作用力情况下，

两种方法的几何约束误差整体都以外凸曲线趋势增大，同时在在曲线附件小范围波动，这一特征不同于椭圆盘算例1，可能原因是系统能量和广义速度持续增大，误差不断积累导致。但仍然可以得到结论，不使用的违约修正方法得到的误差为使用该方法误差的 10^5 倍。图28-29得到，几何约束的一阶导误差量级相等，但使用Baumgarte方法后误差只在0值上下波动，而不使用时，误差会积累。图30-31得知，速度约束误差量级为10倍，规律分析同上。

8.5 椭圆算例5-施加转矩

表6 椭圆算例5 参数设置

Table6 Ellipse5 parameter setting

m = 1		g = 9.8	
a = 1.5		b = 1	
$\alpha = 10$	$\beta=10$	$\gamma = 10$	
计算时长 t = [0:0.01:20]			
初值 q0 = [0;b;0; -0*b; 0;0]			
作用力 Q = [0; - mg ; 5]			

在椭圆盘质心持续转矩，并分别计算使用和不使用违约修正的约束情况。

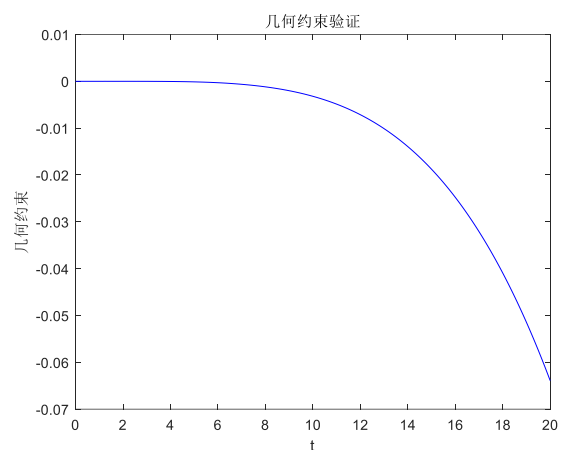


图32 施加转矩-不使用违约修正-几何约束

Fig.32 No default correction-geometric constraints

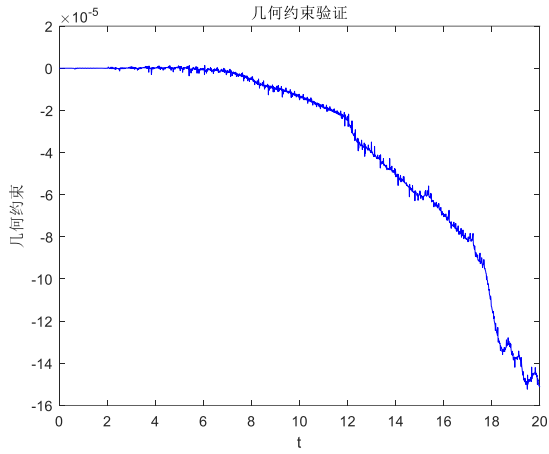


图33 施加转矩-使用违约修正-几何约束
Fig.33 Default correction-geometric constraints

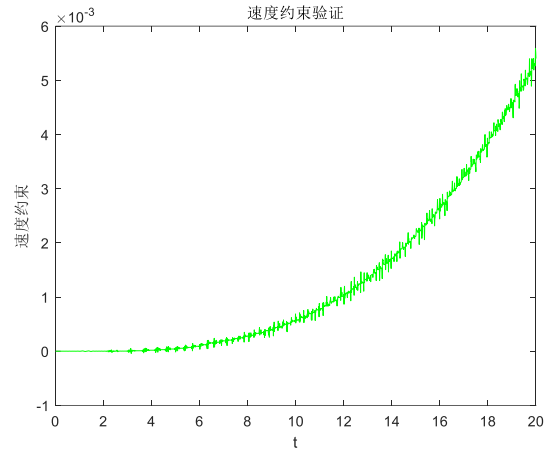


图36 施加转矩-不使用违约修正-速度约束
Fig.36 No default correction-speed constraint

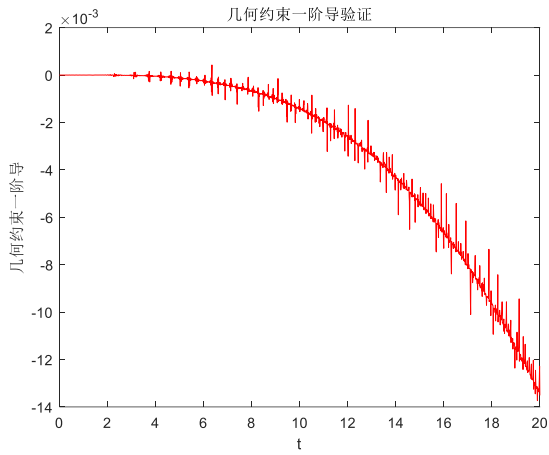


图34 施加转矩-不使用违约修正-几何约束一阶导
Fig.34 Geometric Constraint First Order Derivation

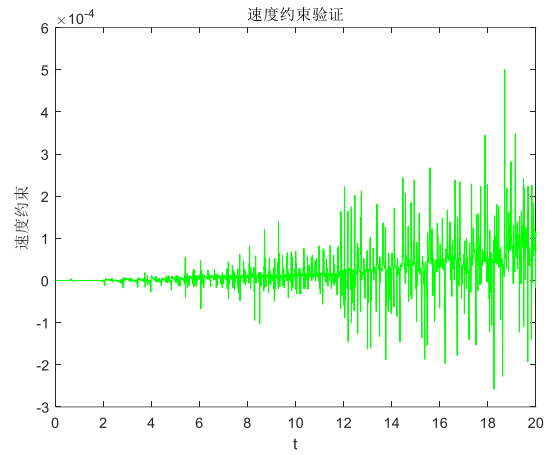


图37 施加转矩-使用违约修正-速度约束
Fig.37 Default correction-speed constraint

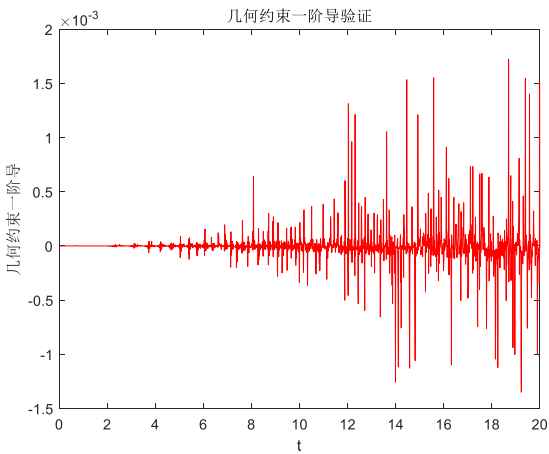


图35 施加转矩-使用违约修正-几何约束一阶导
Fig.35 Geometric Constraint First Order Derivation

由图32-37可知，在施加持续转矩的工况下，两种算法误差对比基本与施加力的算例4一致。由此可证Baumgarte违约修正方法能有效提升计算精度。

9 结论

对于椭圆盘纯滚动问题, 本文应用两种思路建立了椭圆盘水平面纯滚动的约束条件, 使用第一类拉格朗日方程构建了该问题的动力学模型, 对微分代数方程 (DAE) 使用 Baumgarte 违约修正方法, 推导化简得到了矩阵形式的常微分方程, 对此方程进行 Matlab 数值计算得到了仿真结果, 最后通过圆盘算例、不使用 Baumgarte 修正方法椭圆盘算例、初速度算例、持续施加作用力算例等实验证明了该方法的正确性以及违约修正方法的有效性。通过分析讨论得到以下结论:

(1) 利用第一类拉格朗日方程建立动力学方程相较第二类拉格朗日方程虽然过程和形式复杂, 但能够更方便的进行参数调整和修改, 更多的广义坐标也便对原问题展开更多方面的讨论。

(2) 纯滚动约束可以通过几种角度的描述建立不同形式的约束方程, 如纯滚动接触点切线速度为0等价于纯滚过程滚过的弧长积分与地面路径相等; 接触点法向速度为0等价于点接触条件即共点相切条件。因此在分析约束时, 不同形式的约束可能描述相同的关系, 但复杂程度是不同的, 所以需要在建模时选择更简洁的约束形式。

(3) 使用 Baumgarte 违约修正方法能明显提升计算精度, 但具体参数的选取采用人工尝试的方法, 系统科学的系数选择方法需要进一步讨论研究。

(4) 本文所使用方法在验证能量及约束时, 基本能够满足约束关系, 但在 $\theta = k\pi$ 点处, 能

量会出现较大波动, 这一问题可以进一步定性分析, 通过公式推导处理奇异点情况。

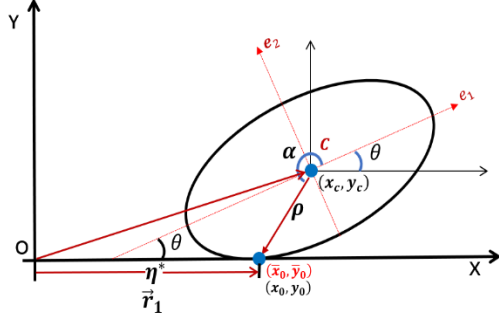
(5) 在 Matlab 中进行计算时, 为提升计算精度应尽量使用符号推导得到的解析公式进行计算, 同时为提升计算速度应该使用隐式表达。

参 考 文 献

- [1] J. Baumgarte, "A new method of stabilization for holonomic constraints," ASME Transactions Series E Journal of Applied Mechanics, vol. 50, p. 869, 1983.
- [2] Z. Zhao and C. Liu, "Contact constraints and dynamical equations in Lagrangian systems," *Multibody System Dynamics*, vol. 38, no. 1, pp. 77-99, 2016.

附录 使用参考文献^[2]方法推导约束（思路二）

1 坐标描述



如图建立局部坐标系 $o-xy$ 、随体系 $c-e_1e_2$ ，选择广义坐标为 (x_c, y_c, θ) 。地面接触点在惯性系下的坐标表示为 (x_0, y_0) ，矢径为 \vec{r}_1 表示为：

$$\vec{r}_1 = [\eta \quad 0]^T$$

椭圆盘与地面接触点在惯性系下的坐标表示为 (\bar{x}_0, \bar{y}_0) ，矢径为 \vec{r}_2 ，可用椭圆盘质心坐标 (x_c, y_c) 和随体系下切点的半径 ρ 及切点在随体系下相对初始点的夹角 α 表示为为：

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \rho \cos \alpha \\ \rho \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (23)$$

A 为转换阵：

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

椭圆与地面接触点到椭圆质心的距离 ρ 与坐标 (\bar{x}_0, \bar{y}_0) 存在关系：

$$\begin{cases} \bar{x}_0 = \rho \cos \alpha \\ \bar{y}_0 = \rho \sin \alpha \end{cases} \quad (25)$$

2 建立约束

(1) 共点

共点条件需要满足 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 0$ ，即：

$$\begin{cases} x_c + \rho^* \cos(\alpha^* + \theta) - \eta^* = 0 \\ y_c + \rho^* \sin(\alpha^* + \theta) = 0 \end{cases}$$

利用上式第二式，联立（23-25）可以得到共点约束关系：

$$\Phi_1(q) = y_0 = y_c + \sin \theta \bar{x}_0 + \cos \theta \bar{y}_0 = 0 \quad (26)$$

(2) 相切

相切需满足： $\tau \cdot n = 0$

利用椭圆盘接触点切向量和地面接触点法向量建立相切关系，其中： $n = [1 \quad 0]^T$

由椭圆切线公式，随体系中椭圆盘接触点切向量：

$$\bar{\tau} = [-a^2 \bar{y}_0 \quad b^2 \bar{x}_0]^T$$

在惯性系中可表示为：

$$\tau = A \bar{\tau}$$

代入相切条件可以得到：

$$a^2 \bar{y}_0 \sin \theta - b^2 \bar{x}_0 \cos \theta = 0 \quad (27)$$

(\bar{x}_0, \bar{y}_0) 同时满足：

$$\frac{\bar{x}_0^2}{a^2} + \frac{\bar{y}_0^2}{b^2} = 1 \quad (28)$$

联立（26-28）可以得到满足共点相切条件：

$$\Phi_1(q) = y_0 = y_c - \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} \quad (29)$$

(3) 纯滚动

纯滚动这一约束的表征可以使用积分形式的几何约束或微分形式的速度约束，思路二为了证明与思路一方法的统一性，我们使用速度约束。虽然其为微分形式，但可以进行积分，

所以仍然为完整约束。

纯滚动条件： $\vec{v}_{r,\tau} = 0$

接触点的速度在关系系下表示如下：

$$\vec{v}_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (30)$$

可以得到 x 方向速度满足：

$$\Phi_1^*(q, q^*) = \vec{v}_{(x_0, y_0), \tau} = \dot{x}_c + \dot{\theta} y'_0 = 0 \quad (31)$$

由此我们利用参考文献[2]的方法建立约束 $\Phi_1(q)$ 、 $\Phi_1^*(q, q^*)$ ，其中 $\Phi_1(q)$ 由共点和相切条件联立得到； $\Phi_1^*(q, q^*)$ 为微分形式的速度约束，可以用来反映纯滚动条件。

得到约束关系之后的方法与思路一相同，即建立动力学方程，引入Baumgarte违约修正，将微分代数方程推导为矩阵形式的常微分方程，并进行数值计算和讨论，这里不再赘述。