

Minimal Difference

Ahnaf Shahriar Asif

৬ আগষ্ট ২০১৯

শুরুতেই আমি ক্ষমা চেয়ে নিচ্ছি, কারন একটা অসাধারণ সুন্দর প্রব্লেম হওয়া সত্যেও আমি ঠিকভাবে arrange করতে পারিনি। তার কারনগুলো বলছি। আমি মূলত কন্টেস্টের দায়িত্বে ছিলাম না। আমাকে আজকে সন্ধ্যার সময় সৃজন কুমার অনুরোধ করে বলল তাদের কন্টেস্টের জন্য ইমিডিয়েট একটা প্রব্লেম বানিয়ে দিতে হবে। কন্টেস্ট শুরু হতে আর ১ ঘন্টা বাকি, সেসময় প্রব্লেম বানানোটা খুবই চ্যালেঞ্জিং, তাও না করতে পারলাম না। খুব তাড়াহুড়ো করে সেট করলাম, সলুশন লিখলাম, ইনপুট-আউটপুট কেস লিখলাম, তারপর ডেস্কপশন লিখে খুব তাড়াহুড়ার মধ্যে ৩০ মিনিটে প্রব্লেমটা সেট করেছি। কিন্তু আমার দুইটা ভুল হয়ে গেছে, একটা হলো আমি প্রব্লেম সেটে $\sum_{i=0}^n a_i \leq 10^8$

দিয়েছি, কিন্তু সেটি $\sum_{i=0}^n a_i \leq 10^6$ হবে। আরও একটা ভুল করেছি, যেটা হলো, আমি টেস্ট কেস বানানোর সময় ওই জিনিসটি চেক করতে ভুলে গেছি। অর্থাৎ, আমার টেস্ট কেসে সংখ্যাগুলোর যোগফল 10^6 এর বেশি হয়ে গিয়েছিল। এজন্য আমি আন্তরিকভাবে দুঃখিত আবং ক্ষমাপ্রার্থী। আমি যদি প্রব্লেমটি সেট করার জন্য ৪-৫ ঘন্টা সময় পেতাম, তাহলে হয়তো আমি নিজে কয়েকবার রিভিশন দিতাম সবকিছু, হয়তো ভুলগুলো হতো না। আর আমার জাজডাটা তে যে প্রব্লেম আছে সেটি বেড় করে দেয়ার জন্য Mr Emrul কে ধন্যবাদ। আমার মনে হয় আমার ব্যপারটি আপনারা সবাই বুঝতে পেরেছেন, আমার কিছুই করার ছিল না। একটা প্রব্লেম সেট করা অনেক কষ্টের। বেশ কিছুটা সময় দিতে হয়। যাই হোক, দয়া করে ক্ষমা করে দিবেন। আর Mr Emrul এর একরা সলুশন পাস করেছে, যেটা পাস করার কথা না। এটার কারনও আমার জাজডাটা। এর এটা কী কারনে পাস করেছে সেটা নিচে প্রব্লেম সমাধান সেকশনে বুঝিয়ে বলেছি। দয়া করে নিচের সমাধানটি পড়ুন। আর যদি এখান থেকে নতুন কোনো প্রব্লেম সলিভিংয়ের আইডিয়া পান, তাহলে দয়া করে আমাকে ক্ষমা করে দিয়োন।

Problem:

প্রব্লেমটা খুব সহজ, একটা অ্যারে দেয়া আছে, অ্যারেটির মধ্যে থেকে এমন দুটি সাবসিকোয়েন্স নিতে হবে, যেন এদের যোগফলের পার্থক্য সর্বনিম্ন হয়। আমাদেরকে শুধুমাত্র পার্থক্য আউটপুট দিলেই হয়ে যাবে।

NOTE: প্রব্লেম ডেস্ক্রিপশনে কিছুটা ভুল আছে, $\sum_{i=1}^n a_i \leq 10^6$ হবে।

Solution:

প্রথমেই আমরা চিন্তা করি, যদি প্রব্লেমটায় N এর মান খুব ছোট হতো তাহলে কি করতাম। ধরা যাক $N \leq 18$. যদি তাই হয়, তাহলে আমরা কিছুটা ডিপি এর মতো করে প্রব্লেমটা সলভ করতে পারি। ধরে নেই আমাদের কাছে দুইটা বাক্স আছে আর আমরা অ্যারে থেকে ওই দুটো বাক্সের মধ্যে সংখ্যা রাখবো। মূলত বাক্স দুটো হলো দুটো সাবসিকোয়েন্স। আমরা প্রত্যেকটা সংখ্যার ক্ষেত্রে তিনটি অপশন পাবো। হয় আমরা সংখ্যাটিকে প্রথম বাক্সে রাখবো, নাহয় দ্বিতীয় বাক্সে, নাহয় রাখবোই না। এবার এই তিনটি অপশন মেইন্টেন করে আমরা ডাইনামিক প্রোগ্রামিং করলেই আমাদের সল্যুশন হয়ে যাবে। খুব সহজ। কমপ্লেক্সিটি 3^N নিচে কোডটি দিয়ে দিচ্ছি:

```
int call(int taken1, int taken2, int i, int sum)
{
    if(i==n+1){
        if(taken1 && taken2) return abs(sum);
        return 10000000;
    }
    if(dp[taken1][taken2][i][sum] != -1) return dp[taken1][taken2][i][sum];
    int res1 = ara[i]+sum;
    int res2 = sum-ara[i];
    if(res2 < 0) res2*=-1;
    res1 = call(1, taken2, i+1, res1);
    res2 = call(taken1, 1, i+1, res2);
    int res3 = call(taken1, taken2, i+1, sum);
    return dp[taken1][taken2][i][sum] = min(res1, min(res2, res3));
}
```

Modification(Real Part):

আমরা $N \leq 18$ খুব সহজেই সলভ করে ফেলতে পারলাম। এবার সমস্যা হচ্ছে প্রব্লেমে তো N এর মান 10^5 , তাহলে কী করবো? আসলে এখন আমাদেরকে কিছুটা গনিতের সাহায্য নিতে হবে। আমরা একটা কথা চিন্তা করি। যদি অ্যারের মধ্যে দুইটা সংখ্যা সমান হয় বা দুটি সাবসিকোয়েন্স পাওয়া যায় যাদের যোগফল সমান, তাহলে উত্তর কিন্তু 0 হবে। এখন আমরা চিন্তা করি। ধরি, $N > 18$ । তাহলে আমাদের সংখ্যা আছে, ধরি 19 টি। এখন আমরা এই 19 টি সংখ্যা দিয়ে কতগুলো ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা গঠন করতে পারি? 2^{19} টি। যার মানে 19 টি সংখ্যা থাকলে হিসাব অনুযায়ী 524288 টি আলাদা আলাদা যোগফল পাওয়া যাবে। এখন আমরা যদি 20 টি বা তার থেকে বেশি সংখ্যা নেই, তাহলে সেই সংখ্যাগুলো দিয়ে আমরা সবথেকে খারাপ ঘটনা ঘটলেও আলাদা আলাদা 2^{20} টি যোগফল বেড় করতে পারবো, যা 10^6 এর থেকে বেশি। যার জন্য কোনো না কোনো যোগফল সমান হয়ে যাবেই। এটাকে Pigeon Hole Theorem বলা হয়। অর্থাৎ, ঘর আছে 3 টি, আর পায়রা আছে 4 টি, তাহলে চোখ

বন্ধ করেই বলে দেয়া যায়, কোনো ঘরে নিশ্চিতভাবেই একটার বেশি পায়রা আছে। এবার তাহলে আমাকে ২০ টা আলাদা আলাদা সংখ্যা দিলে আমি এমন কোনো দুইটা সাবসিকোয়েন্স পাবোই পাবো, যাদের যোগফল পরস্পর সমান। তাই $N > 20$ হলে উত্তর সর্বদা ০। এবার তাহলে আমরা কী পেলাম? N এর মান ১৮ এর কম বা সমান থাকলে ডিপি, আর ১৯ এর বেশি থাকলে উত্তর সর্বদা ০। তাহলে বাকি থাকলো শুধু ১৯। এখন এই ক্ষেত্রে সমস্যা হলো আমরা ডিপি করতে পারবোনা ১৯ এর জন্য, টাইম লিমিট খাবো। আবার $2^{19} < 10^6$ । কিন্তু আরও একটা modification আছে। আপনাকে যদি বলা হয়, কিছু সংখ্যা দিয়ে ১ থেকে ২০ পর্যন্ত সবগুলো সংখ্যাই যোগফল আকারে লেখার জন্য, আপনি কি লিখতে পারবেন collision ছাড়া? এটা সম্ভব না। অর্থাৎ, $2^{19} = 524288$ হলেও এর ভিতরে ভিতরে গ্যাপ আছে, আর গ্যাপ যদি না থাকে তাহলে তো ০ পাওয়া যাবেই, এটা একটু আগেই প্রমাণ করলাম। যে কারনে $N = 19$ এর জন্যও উত্তর হবে ০। আর আমার সময় কম থাকায় আমি সবগুলো টেস্ট কেসে $N = 100000$ বসিয়ে করে দিয়েছিলাম, যেকারনে একজনের $N \leq 18$ এর কেসগুলোর জন্য ভুল আসলেও যেহেতু আমি সব বড় কেস দিয়েছি, সেহেতু তার সব এমনিতেও ০ চলে এসেছে, তাই কোড accepted হয়ে গেছে। যাই হোক, তাহলে আমরা দারুন গনিতের বুদ্ধি খাটিয়ে খুব কঠিন একটা সমস্যাকে খুব সহজে সমাধান করতে পারলাম। এই প্রব্লেমের এডিটোরিয়ালে যদি নতুন কিছু শিখে থাকেন তাহলে দয়া করে কন্টেন্টে যে সমস্যাগুলো হয়েছে, সেটির জন্য আমাকে ক্ষমা করে দিবেন। ধন্যবাদ।