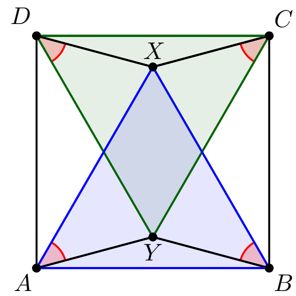
1. ročník tímovej súťaže DuoGeo – kategória ZŠ

9. 2. 2025

Úloha 1. Do štvorca $ABCD$ boli nakreslené rovnostranné trojuholníky ABX a CDY. Určte súčet vyznačených uhlov.

(Mária Dománová)



Riešenie. V prvom rade si uvedomíme, že vďaka symetrii sú všetky štyri vyznačené uhly rovnaké. Zameriame sa na nájdenie veľkosti $|\angle YDX|$.

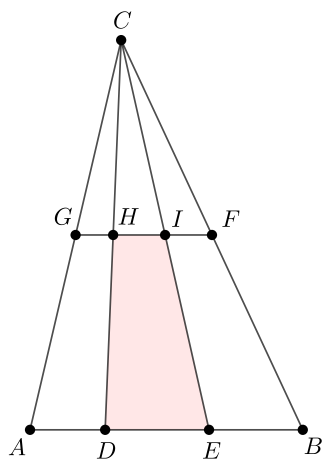
Všimnime si, že vieme vypočítať $|\angle XAD|$ ako $|\angle BAD| - |\angle BAX|$, čo je $90° - 60° = 30°$. Podobne vieme odvodiť $|\angle ADY| = 30°$.

Ďalej platí $|DA| = |AB| = |AX|$, takže trojuholník AXD je rovnoramenný. Keďže $|\angle XAD| = 30°$, tak z toho ľahko dopočítame $|\angle ADX| = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$. Máme však $|\angle ADY| = 30°$, z čoho hneď dostávame, že hľadaný uhol $\angle YDX$ má veľkosť $|\angle ADX| - |\angle ADY| = 75° - 30° = 45°$.

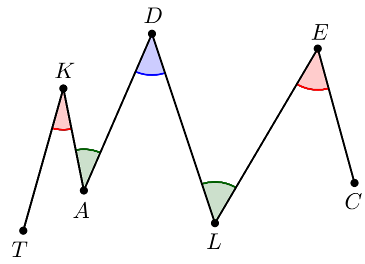
Zadanie sa na nás pýta na súčet štyroch uhlov veľkosti 45°, odpoveď je teda $4 \cdot 45° = 180°$.

Úloha 2. Je daný trojuholník ABC. Stredy jeho strán BC a AC označme postupne ako F a G. Na strane AB sú dané body D a E tak, že D leží medzi A a E. Úsečky CD a CE pretínajú úsečku FG postupne v bodoch H a I. Štvoruholník $DEIH$ má obsah 90 cm^2 a dĺžky úsečiek HI a AB sú postupne 4 cm a 21 cm. Vypočítajte obsah trojuholníka ABC. *(Karel Pazourek)*

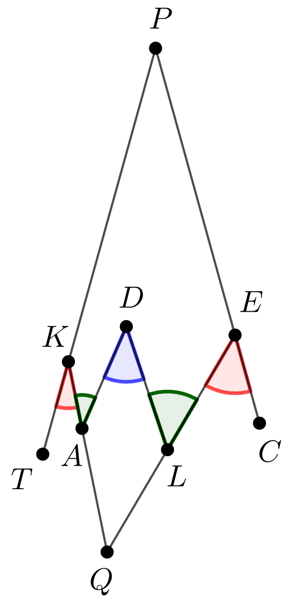
Riešenie. Všimnime si trojuholník CDE. Úsečka HI je jeho stredná priečka. Obsah trojuholníka CHI je teda štvrtina obsahu trojuholníka CDE. Preto platí, že obsah štvoruholníka $DEIH$ je rovný trojnásobho obsahu CHI, takže obsah CHI je rovný $90/30 = 30$. Keďže $|HI| = 4$, je výška na stranu HI v tomto trojuholníku rovná $2 \cdot 30/4 = 15$. Výška v trojuholníku CDE je jej dvojnásobkom, takže je rovná 30. Obsah trojuholníka ABC potom musí byť $21 \cdot 30/2 = 315$.



Úloha 3. Sú dané body T, K, A, D, L, E, C ako na obrázku. Predpokladajme, že súčet červených uhlov je $73°$, modrý uhol je $42°$, a súčet zelených uhlov je $84°$. Určte uhol, ktorý zvierajú priamky TK a EC. *(Svetlana Bednářová)*



Riešenie. Aby sme mohli určiť uhol, ktorý zvierajú priamky TK a EC, predĺžime si úsečky TK a EC na priamky a ich priesečník označíme P. Potom vlastne hľadáme $|\angle TPC|$.



Tento krok by nás mohol motivovať k tomu, aby sme skúsili predĺžiť na priamky aj iné úsečky – všimneme si, že ak predĺžime AK a LE a priesečník týchto priamok označíme Q, bude novovzniknutý útvar $KQEP$ štvoruholník a potrebujeme určiť veľkosť jeho vnútorneho uhla pri vrchole P. Pretože sú uhly $\angle PKT$ a $\angle PEC$ oba priame, je ich súčet rovný $360°$, čo je tiež súčet vnútorných uhlov štvoruholníka $KQEP$. Porovnaním týchto dvoch vyjadrení dostaneme

$$|\angle TPC| + |\angle KQE| = |\angle TKQ| + |\angle QEC| = 73°.$$

Teraz vyjadríme uhol $\angle KQE$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade využijeme, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v štvoruholníku $AQLD$ je $360°$, rovnako ako súčet priamych uhlov $\angle KAQ$ a $\angle QLE$. Preto

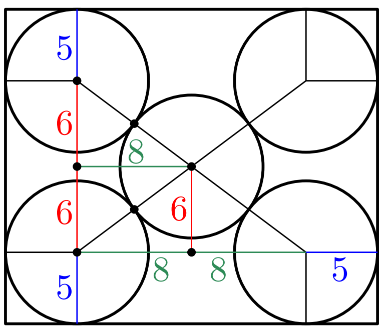
$$84° = |\angle KAD| + |\angle DLE| = |\angle AQL| + |\angle ADL| = |\angle KQE| + 42°,$$

odkiaľ $|\angle KQE| = 42°$. Dosadením do prvej uvedenej rovnosti už ľahko získame

$$|\angle TPC| = 73° - |\angle KQE| = 73° - 42° = 31°.$$

Úloha 4. Máme obdĺžnikový papier so stranami dĺžok 22 cm a 26 cm. Rozhodnite a zdôvodnite, či je možné z neho vyrezať 5 kruhov s priemermi 10 cm. *(Josef Tkadlec)*

Riešenie. Odpoveď je, že to ide spraviť. Pomôžeme si trojuholníkom so stranami 6, 8, 10, ktorý je z Pytagorovej vety kvôli $6^2+8^2 = 10^2$ pravouhlý. Strana dĺžky 26 je potom rozdelená ako $5+2\cdot 8+5$, zatiaľ čo strana dĺžky 22 ako $5+2\cdot 6+5$. Konštrukcia je viditeľná z obrázka. Aby bolo rezanie možné, potrebujeme, aby sa kruhy neprekrývali. To je ale zabezpečné tým, že súčet polomerov žiadnych dvoch kruhov neprevyšuje vzdialenosť ich stredov.

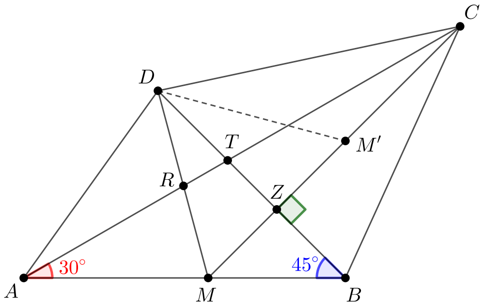


Úloha 5. Je daný štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok T. Predpoladajme, že veľkosti uhlov BAC a DBA sú postupne $30°$ a $45°$. Na úsečke BT leží bod Z taký, že $CZ \perp BT$. Predpokladajme, že priamka CZ pretne úsečku AB v bode M. Nech R je priesečník úsečiek AT a MD. Predpokladajme, že $|AM| = |AR|$ a $|MR| + |TD| = 14$ cm. Určte veľkosť úsečky $|BZ|$. *(Patrik Bak, Mária Dományová)*

Riešenie. V trojuholníku ATB poznáme uhly pri vrcholoch A a B, a síce $30°$ a $45°$, uhol pri vrchole T teda bude mať veľkosť $180° - 30° - 45° = 105°$, takže $|\angle DTR| = 180° - 105° = 75°$.

Ďalej si všimnime, že v rovnoramennom trojuholníku AMR poznáme uhol oproti jeho základni, a síce $30°$. Zvyšné uhly teda budú mať veľkosť $180° - \frac{1}{2} \cdot 30° = 75°$, takže tiež $|\angle DRT| = |\angle ARM| = 75°$.

Spojením dvoch predošlých odstavcov máme, že trojuholník DTR je rovnoramenný so základňou TR, takže $|DT| = |DR|$. Predpoklad $|MR| + |TD| = 14$ teda znamená, že $|MR| + |DR| = 14$, takže $|MD| = 14$.

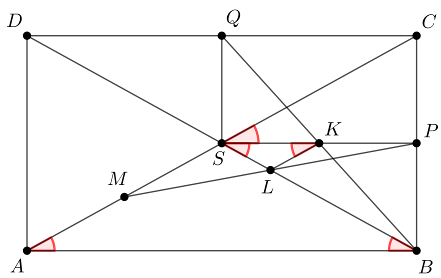


Pozrime sa na trojuholník MDZ. Je pravouhlý, pričom uhol pri vrchole D má veľkosť $30°$. O takomto trojuholníku je všeobecne známe, že jeho prepona je dvojnásobkom odvesny oproti vrcholu s uhlom $30°$, takže $|MZ| = 14/2 = 7$ (nahliadnuť to môžeme tak, že si uvedomíme, že ide o polovičku rovnostranného trojuholníka – viď obrázok, bod M' je taký bod, že Z je stred MM'; potom $|\angle MDM'| = 2 \cdot 30° = 60° = |\angle M'MD|$, takže trojuholník DMM' je naozaj rovnostranný, a teda $|MD| = |MM'| = 2|MZ|$).

Posledným krokom je uvedomiť si, že trojuholník MZB je tiež rovnoramenný: uhol pri vrchole Z je totiž $90°$ a uhol pri B je $45°$, takže uhol pri M je tiež $45°$.Tým pádom $|BZ| = |MZ| = 7$, takže úloha je vyriešená.

Úloha 6. Nech P, Q sú postupne stredy strán BC, CD obdĺžnika $ABCD$. Bod S je priesečník jeho uhlopriečok. Označme K priesečník priamok BQ a SP. Rovnobežka s AC prechádzajúca bodom K pretína priamku BD v bode L a priamka PL pretína uhlopriečku AC v bode M. Určte pomer $|SM| : |SL|$. *(Jaroslav Švrček)*

Riešenie. Všimnime si trojuholník BCD. Bod K je priesečníkom ťažnice BQ na stranu CD a jeho strednej priečky SP rovnobežnej s CD, tým pádom je K stredom SP (môžeme to vidieť napr. z toho, že SK je stredná priečka v BDQ, KP je stredná priečka v BQC, teda z rovností $|DQ| = 2|SK|$, $|CQ| = 2|KP|$ a $|DQ| = |CQ|$ máme $|SK| = |KP|$).



Teraz dokážeme, že $|LS| = |LK|$, k tomu si pomôžeme uhlami: Z rovnobežnosti $AB \parallel SK$ máme $|\angle LSK| = |\angle SBA|$. Z rovnoramennosti SBA je tento uhol rovný aj $|\angle BAS|$, čo je znova z rovnobežnosti $AB \parallel SK$ rovné $|\angle KSC|$. Nakoniec, vďaka rovnobežnosti $AC \parallel LK$ máme $|\angle KSC| = |\angle SKL|$, takže dokopy $|\angle LSK| = |\angle SKL|$, čo sme chceli dokázať.

Teraz si všimnime trojuholník PMS. Bod K je stredom SP. Týmto bodom vedieme rovnobežku s MS a pretneme s MP v L, úsečka KL je teda stredná priečka trojuholníka PMS. Spojením s $|LS| = |LK|$ z predošlého odstavca teraz už ľahko dostávame $|SM| = 2|LK| = 2|SL|$, takže $|SM| : |SL| = 2 : 1$.