Biện luận bài tập tuần 2. INT3305 1

Ngô Quang Dương – 17020191

Ngày 20 tháng 9 năm 2020

Bài tập 1a.

- Xác suất để phép thử Bernoulli thành công là p. Do đó, xác suất để sau n lần thực hiện phép thử mới có một lần thành công là:

$$\Pr(n) = p(1-p)^{n-1}$$

- Tổng của N xác suất đầu tiên là:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} p(1-p)^{n-1} &= p\sum_{n=1}^{N}(1-p)^{n-1} \\ &= p \cdot \frac{1-(1-p)^N}{1-(1-p)} \\ &= 1-(1-p)^N\end{aligned}$$

  Đẳng thức trên cho thấy khi $N \to +\infty$ thì $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} p(1-p)^{n-1} \to 1$.

  Do đó hàm `sumProb (N, p)` có thể được sử dụng để kiểm chứng tổng xác suất của phân bố geometric bằng 1.

- Đặt $H(N) = \texttt{approxEntropy}(N, p)$

  Các $H(N)$ tạo thành một dãy số.

$$\begin{aligned}\text{Entropy} &= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \log\frac{1}{p(1-p)^{n-1}} \\ &= p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}\left(\log\frac{1}{p} + (n-1)\log\frac{1}{1-p}\right) \\ &= p\log\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} + p\log\frac{1}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(1-p)^{n-1} \\ &= p\log\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p} + p\log\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1-p}{(1-(1-p))^2} \\ &= \log\frac{1}{p} + \frac{1-p}{p}\log\frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

  Dãy $H(N)$ là dãy tăng, có giới hạn như trên, do đó $H(N)$ có thể xấp xỉ entropy của nguồn tin geometric, tức là hàm `approxEntropy (N, p)` xấp xỉ entropy.

Bài tập 1b.

- Xác suất để sau N lần thực hiện phép thử Bernoulli, có đúng n lần thành công là:

$$\Pr(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

- Tổng của N xác suất của nguồn tin nhị thức là:

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = (p + 1 - p)^N = 1$$

  Do đó hàm `sumProb (N, p)` có thể dùng để kiểm tra tổng xác suất của phân bố nhị thức bằng 1 (máy tính chỉ tính được xấp xỉ).

- Khác với phân bố geometric, phân bố nhị thức chỉ mang lại hữu hạn symbol, do đó hàm `approxEntropy (N, p)` xấp xỉ entropy.

Bài tập 1c.

- Xác suất để sau n lần thực hiện phép thử Bernoulli mới có được r lần thành công là:

$$\Pr(n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = \binom{n-1}{n-r} p^r (1-p)^{n-r}$$

- Sử dụng khai triển Taylor

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

  trong đó α là một số thực và:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

  Dựa vào hai công thức trên, ta kiểm tra tổng xác suất:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \quad (\text{đặt } k = n-r) \\
&= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r-1)!}{(r-1)!k!} (1-p)^k \\
&= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!} (1-p)^k \\
&= p^r \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!} (1-p)^k \\
&= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (p-1)^k \\
&= p^r (1 + p - 1)^{-r} = 1
\end{aligned}$$

  Quay trở lại với hàm `sumProb(N, p, r)`.

  Ta xét dãy $a_N =$ `sumProb(N, p, r)`. Đây là một dãy dương, tăng và có giới hạn bằng 1 (theo chứng minh trên). Do đó khi $N \to +\infty$ thì $a_N \to 1$. Vì vậy hàm `sumProb(N, p, r)` có thể được sử dụng để kiểm tra tổng xác suất của phân bố nhị thức âm bằng 1.