

# Biện luận bài tập tuần 2. INT3305 1

Ngô Quang Dương – 17020191

Ngày 20 tháng 9 năm 2020

## Bài tập 1a.

- Xác suất để phép thử Bernoulli thành công là  $p$ . Do đó, xác suất để sau  $n$  lần thực hiện phép thử mới có một lần thành công là:

$$\Pr(n) = p(1-p)^{n-1}$$

- Tổng của  $N$  xác suất đầu tiên là:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N p(1-p)^{n-1} &= p \sum_{n=1}^N (1-p)^{n-1} \\ &= p \cdot \frac{1 - (1-p)^N}{1 - (1-p)} \\ &= 1 - (1-p)^N\end{aligned}$$

Đẳng thức trên cho thấy khi  $N \rightarrow +\infty$  thì  $\sum_{n=1}^N p(1-p)^{n-1} \rightarrow 1$ .

Do đó hàm `sumProb (N, p)` có thể được sử dụng để kiểm chứng tổng xác suất của phân bố geometric bằng 1.

- Đặt  $H(N) = \text{approxEntropy}(N, p)$   
Các  $H(N)$  tạo thành một dãy số.

$$\begin{aligned}\text{Entropy} &= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \log \frac{1}{p(1-p)^{n-1}} \\ &= p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \left( \log \frac{1}{p} + (n-1) \log \frac{1}{1-p} \right) \\ &= p \log \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} + p \log \frac{1}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(1-p)^{n-1} \\ &= p \log \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} + p \log \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1-p}{(1-(1-p))^2} \\ &= \log \frac{1}{p} + \frac{1-p}{p} \log \frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

Dãy  $H(N)$  là dãy tăng, có giới hạn như trên, do đó  $H(N)$  có thể xấp xỉ entropy của nguồn tin geometric, tức là hàm `approxEntropy (N, p)` xấp xỉ entropy.

### Bài tập 1b.

- Xác suất để sau  $N$  lần thực hiện phép thử Bernoulli, có đúng  $n$  lần thành công là:

$$\Pr(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

- Tổng của  $N$  xác suất của nguồn tin nhị thức là:

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = (p + 1 - p)^N = 1$$

Do đó hàm `sumProb (N, p)` có thể dùng để kiểm tra tổng xác suất của phân bố nhị thức bằng 1 (máy tính chỉ tính được xấp xỉ).

- Khác với phân bố geometric, phân bố nhị thức chỉ mang lại hữu hạn symbol, do đó hàm `approxEntropy (N, p)` xấp xỉ entropy.

### Bài tập 1c.

- Để có được  $r$  lần thử thành công, ta cần thực hiện  $n$  lần, trong đó:

$$n \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$$

Nhưng trong  $n$  lần thử, lần cuối cùng là lần thành công, nên số cách chọn ra những lần thành công trong  $n-1$  lần thử trước đó là  $\binom{n-1}{r-1}$ .

Do đó, xác suất để sau  $n$  lần thực hiện phép thử Bernoulli mới có được  $r$  lần thành công là:

$$\Pr(n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = \binom{n-1}{n-r} p^r (1-p)^{n-r}$$

- Sử dụng khai triển Taylor

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

trong đó  $\alpha$  là một số thực và:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Dựa vào hai công thức trên, ta kiểm tra tổng xác suất:

$$\begin{aligned} \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \quad (\text{đặt } k = n-r) \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r-1)!}{(r-1)!k!} (1-p)^k \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!} (1-p)^k \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!} (1-p)^k \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (p-1)^k \\ &= p^r (1+p-1)^{-r} = 1 \end{aligned}$$

Quay trở lại với hàm  $\text{sumProb}(N, p, r)$ .

Ta xét dãy  $a_N = \text{sumProb}(N, p, r)$ . Đây là một dãy dương, tăng và có giới hạn bằng 1 (theo chứng minh trên). Do đó khi  $N \rightarrow +\infty$  thì  $a_N \rightarrow 1$ . Vì vậy hàm  $\text{sumProb}(N, p, r)$  có thể được sử dụng để kiểm tra tổng xác suất của phân bố nhị thức âm bằng 1.