Lý thuyết tập hợp và các tập hợp số

random

2023.12

Lời nói đầu

Mục lục

Chương 1

Logic và Tập hợp

1 Mệnh đề và các phép toán logic

1.1 Mệnh đề

Trong toán học cũng như đời sống, bạn đọc hẳn đã bắt gặp những câu có tính phát biểu. Chẳng hạn như:

(1) (Định lý Pythagoras) Trong một tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

(2) Tồn tại số hữu tỉ có bình phương bằng 2.

(3) Không tồn tại số tự nhiên $n > 4$ sao cho $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố.

(4) Năm 1967, Alexander Grothendieck đến Việt Nam.

Mỗi câu trên được gọi là một **mệnh đề toán học**, hay nói ngắn gọn trong ngữ cảnh của tài liệu này là **mệnh đề**, và *có tính đúng sai*. Một mệnh đề hoặc đúng, hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai. Trong các ví dụ nêu trên, bạn đọc có thể kiểm tra tính đúng sai của một số mệnh đề. Các mệnh đề 1, 4 là đúng. Mệnh đề 2 là sai. Mệnh đề 3 mặc dù có tính đúng sai, nhưng cho đến nay các nhà toán học vẫn chưa có câu trả lời. Mệnh đề chưa được xác minh tính đúng sai được gọi là **giả thuyết**.

Với một mệnh đề đúng, chúng ta nói giá trị chân lý (hay chân trị) của mệnh đề đó là *đúng*. Với một mệnh đề sai, chúng ta nói giá trị chân lý (hay chân trị) của mệnh đề đó là *sai*.

1.2 Các phép toán logic

Sẽ không phải bàn gì thêm nếu chúng ta chỉ xem xét các mệnh đề một cách riêng rẽ. Trong thực tế, người ta kết hợp các mệnh đề với nhau, tạo ra các mệnh đề mới, và *lập luận*. Để cho ngắn gọn, sau đây chúng ta kí hiệu mệnh đề bằng các chữ cái $P, Q, \ldots$

Từ một mệnh đề P, chúng ta đưa ra được mệnh đề phủ định, kí hiệu là $\neg P$. Nếu P đúng thì $\neg P$ sai. Ngược lại, nếu P sai thì $\neg P$ đúng.

Từ hai mệnh đề P và Q, người ta định nghĩa ra phép toán VÀ (hội) và HOẶC (tuyển). Hội của P và Q là đúng nếu cả hai mệnh đề đúng, là sai nếu ít nhất một trong hai mệnh đề sai. Tuyển của P và Q là đúng nếu ít nhất một trong hai mệnh đề đúng, là sai nếu cả hai mệnh đề sai. Hội của P và Q được kí hiệu là $P \wedge Q$. Tuyển của P và Q được kí hiệu là $P \vee Q$.

Tính đúng sai của các mệnh đề được tạo ra từ ba phép toán phủ định, hội, tuyển được tổng kết trong Bảng 1.1 dưới đây.

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
đúng	đúng	sai	đúng	đúng
đúng	sai	sai	sai	đúng
sai	đúng	đúng	sai	đúng
sai	sai	đúng	sai	sai

BẢNG 1.1. Bảng chân trị của các mệnh đề được tạo ra từ ba phép toán phủ định ($\neg$), hội ($\wedge$) và tuyển ($\vee$).

Bên cạnh ba phép toán logic là phủ định, hội, và tuyển, chúng ta còn dành sự quan tâm tới quan hệ giữa các mệnh đề. Cụ thể hơn, chúng ta đặc biệt quan tâm đến *quan hệ kéo theo* và *quan hệ tương đương*.

Để nêu lên quan hệ kéo theo giữa hai mệnh đề P và Q, chúng ta nói "P kéo theo Q" hay "từ P suy ra Q", kí hiệu $P \implies Q$. Với quan hệ tương đương, chúng ta nói "P tương đương với Q", "P và Q tương đương", "P nếu và chỉ nếu Q", "P khi và chỉ khi Q", hay "Q là điều kiện cần và đủ của P", kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$. Hai câu "P kéo theo Q" và "P tương đương với Q" cũng chính là các mệnh đề. Tính đúng sai của hai mệnh đề này được liệt kê trong Bảng 1.2.

P	Q	$P \implies Q$	$P \Leftrightarrow Q$
đúng	đúng	đúng	đúng
đúng	sai	sai	sai
sai	đúng	đúng	sai
sai	sai	đúng	đúng

BẢNG 1.2. Bảng chân trị của hai mệnh đề $P \implies Q$ và $P \Leftrightarrow Q$

Thay vì ghi nhớ Bảng 1.2, chúng ta có thể tóm gọn nội dung bảng bằng vài nhận xét: $P \implies Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai; $P \Leftrightarrow Q$ đúng nếu P và Q cùng đúng, hoặc cùng sai; $P \Leftrightarrow Q$ sai nếu một trong hai mệnh đề đúng, mệnh đề còn lại sai.

1.3 Biểu thức logic

Với các toán tử và quan hệ logic đã nêu, chúng ta có thể kết hợp các mệnh đề với nhau để tạo ra những *biểu thức logic*. Biểu thức logic có thể phức tạp như biểu thức số, và cũng có quy ước về thứ tự thực hiện các phép toán. Theo mức độ ưu tiên giảm dần, chúng ta lần lượt thực hiện phép phủ định, hội, và tuyển, trong đó biểu thức ở ngoặc trong cùng được thực hiện trước. Một số ví dụ về biểu thức logic là $(P \wedge Q) \wedge R$, $P \vee (Q \vee R)$, $P \implies (Q \vee \neg R)$, $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Một biểu thức logic cũng chính là một mệnh đề, chúng chỉ khác ở hình thức. Hai mệnh đề có thể tương đương hoặc không, hai biểu thức logic cũng vậy. Tuy nhiên, do biểu thức logic có thể được cấu thành từ một hay nhiều mệnh đề, nên việc kiểm tra sự tương đương của hai biểu thức logic có phần khó khăn hơn. Chúng ta xem xét hai ví dụ sau đây.

Theo Bảng 1.1, hai biểu thức $P \wedge Q$ và $P \vee Q$ tương đương trong hai trường hợp (1) P, Q cùng đúng và (2) P, Q cùng sai. Còn khi P, Q khác tính đúng-sai thì $P \wedge Q$ và $P \vee Q$ không tương đương. Chúng ta xét hai biểu thức $P \implies Q$ và $\neg P \vee Q$ (lưu ý thứ tự thực hiện phép toán). Để kiểm tra sự tương đương của hai biểu thức trong tất cả các trường hợp, chúng ta lập bảng chân trị (Bảng 1.3).

Bảng 1.3 cho thấy hai biểu thức đang xét là tương đương, với bất kì giá trị nào của P và Q. Đây là một ví dụ cho việc đưa ra một biểu thức logic tương đương với biểu thức đã cho, và chỉ sử dụng các phép toán "quen thuộc hơn" (phủ định và tuyển).

Trên đây, chúng ta đã nhắc đến thứ tự thực hiện phép toán trong một biểu thức logic, tuy nhiên quy tắc đó

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P \vee Q$
đúng	đúng	đúng	đúng
đúng	sai	sai	sai
sai	đúng	đúng	đúng
sai	sai	đúng	đúng

BẢNG 1.3. Bảng chân trị của hai mệnh đề $P \implies Q$ và $\neg P \vee Q$

chỉ bao gồm ba phép toán phủ định, hội, và tuyển. Vậy phải chăng quy tắc đã nêu là chưa đủ (vì còn có các phép toán khác như là kéo theo và tương đương chẳng hạn)?. Trong phần bài tập, chúng ta sẽ trả lời cho hai câu hỏi:

- Có bao nhiêu phép toán logic có thể định nghĩa trên hai mệnh đề?
- Có thể tạo ra một biểu thức logic mới, tương đương với biểu thức logic đã cho và chỉ sử dụng ba phép toán phủ định, hội, và tuyển hay không?

1.4 Bài tập

Bài tập 1.1. Trong các câu dưới đây, câu nào là một mệnh đề? Nếu đó là một mệnh đề, hãy cho biết mệnh đề đó đúng, sai, hay không xác định.

(a) $\pi = 3.14159265358979$

(b) Hôm nay có mưa.

(c) Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau nếu và chỉ nếu $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, $AB = A'B'$.

(d) Làm bài tập đi!

Bài tập 1.2. Cho trước mệnh đề P, có thể kết luận gì về tính đúng sai của các mệnh đề sau: $P \vee P$, $P \wedge P$, $P \vee \neg P$, $P \wedge \neg P$?

Bài tập 1.3. Cho trước ba mệnh đề P, Q, và R. Dùng bảng chân trị, hãy chứng minh

(a) $P \wedge Q$ và $Q \wedge P$ tương đương.

(b) $P \vee Q$ và $Q \vee P$ tương đương.

(c) $(P \wedge Q) \wedge R$ và $P \wedge (Q \wedge R)$ tương đương.

(d) $(P \vee Q) \vee R$ và $P \vee (Q \vee R)$ tương đương.

(e) $P \vee (Q \wedge R)$ và $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ tương đương.

(f) $P \wedge (Q \vee R)$ và $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ tương đương.

Hãy đối chiếu hai mệnh đề sau cùng với tính chất phân phối của phép nhân với phép cộng.

Thứ tự thực hiện phép toán cho phép người sử dụng lược bỏ những cặp ngoặc không cần thiết. Tuy nhiên, khi biểu thức sử dụng các phép toán rất nhiều lần, việc sử dụng ngoặc ngay cả ở những vị trí không cần thiết lại tỏ ra dễ đọc và bớt gây nhầm lẫn.

Bài tập 1.4. Cho hai mệnh đề P và Q, chứng minh rằng các cặp mệnh đề dưới đây tương đương.

(a) $\neg(P \vee Q)$ và $(\neg P) \wedge (\neg Q)$.

(b) $\neg(P \wedge Q)$ và $(\neg P) \vee (\neg Q)$.

(c) $\neg(P \implies Q)$ và $(\neg Q) \implies (\neg P)$.

(d) $P \Leftrightarrow Q$ và $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Bài tập 1.5. Một phép toán logic hai ngôi $*$ thực hiện trên hai mệnh đề P và Q là một quy tắc gán mỗi cặp giá trị chân lý của P và Q với *đúng một* giá trị chân lý nữa, kí hiệu là $P * Q$. Phép toán hội và tuyển là hai ví dụ về phép toán logic hai ngôi. Hai phép toán logic $*$ và # được gọi là trùng nhau (tương đương) nếu tại mỗi cặp giá trị chân lý của P và Q luôn có $P * Q \Leftrightarrow P\#Q$.

Có bao nhiêu phép toán logic hai ngôi (không tính thêm phép toán trùng với phép toán đã xét)? Tương tự, bạn có thể định nghĩa phép toán logic n ngôi không? Và có bao nhiêu phép toán logic n ngôi? [Gợi ý: Quan sát bảng chân trị của một phép toán logic hai ngôi, và đếm bằng quy tắc nhân.]

Bài tập 1.6. Dựa vào bảng chân trị của biểu thức $P \implies Q$, chứng minh quan hệ tương đương sau

$$(P \implies Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

[Gợi ý: Các biểu thức $P \wedge Q$, $\neg P \wedge Q$, $\neg P \wedge \neg Q$ tương ứng với các hàng nào trong bảng chân trị của $P \implies Q$?]

Bài tập 1.7. Áp dụng cách tiếp cận của Bài tập 1.6, chứng minh rằng với mỗi phép toán logic hai ngôi $*$, biểu thức $P * Q$ tương đương với một biểu thức chỉ gồm P, Q và ba phép toán phủ định, hội, và tuyển.

2 Tập hợp

2.1 Tập hợp

Tập hợp là một khái niệm nguyên thủy, không được định nghĩa về mặt toán học. Chúng ta chấp nhận và hiểu về tập hợp bằng định nghĩa trực giác "Tập hợp là một bộ các đối tượng" và các ví dụ: *Tập hợp các sinh viên trong một lớp học*, *Tập hợp các câu văn trong một cuốn sách*, *Tập hợp các nghiệm thực của phương trình* $x^2 + 1 = 0$, *Tập hợp các số nguyên*... Bạn đọc có thể đưa ra thêm nhiều ví dụ khác về tập hợp. Tựu chung lại, chúng ta thống nhất các thuật ngữ và các đặc điểm sau của tập hợp như sau:

(1) Một **tập hợp** được cấu thành từ các đối tượng được gọi là **phần tử**. Nếu đối tượng x là phần tử của tập hợp S, chúng ta kí hiệu $x \in S$. Nếu đối tượng x không là phần tử của tập hợp S, chúng ta kí hiệu $x \notin S$.

(2) Chỉ có đúng một tập hợp không chứa phần tử nào. Tập hợp đó được gọi là **tập hợp rỗng**. Chúng ta kí hiệu tập hợp rỗng là $\varnothing$.

(3) Cho trước một đối tượng x và một tập hợp S. Khi đó chỉ đúng một trong hai mệnh đề sau là đúng: (1) $x \in S$, (2) $x \notin S$.

Một tập hợp có thể không có phần tử nào (tập hợp rỗng), khác rỗng và có hữu hạn phần tử, hoặc có vô hạn phần tử. Để xác định một tập hợp, chúng ta có thể liệt kê tất cả các phần tử nếu tập hợp đó có hữu hạn phần tử hoặc các phần tử đó tuân theo một quy luật dễ đoán nào đó, chẳng hạn

- Tập hợp S gồm các nghiệm thực của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$S = \{1, 3\}.$$

- Tập hợp E gồm các số nguyên chia hết cho 3

$$E = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}.$$

Trong toán học, chúng ta thường xuyên làm việc với các tập hợp số. Những tập hợp này được kí hiệu bằng các chữ cái rỗng: $\mathbb{N}$ (tập hợp các số tự nhiên), $\mathbb{Z}$ (tập hợp các số nguyên), $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ (tập hợp các số nguyên không âm), $\mathbb{Q}$ (tập hợp các số hữu tỉ), $\mathbb{R}$ (tập hợp các số thực). Trong các chương sau, chúng ta sẽ tìm hiểu chi tiết hơn về các tập hợp này.

Bên cạnh đó, để xác định tập hợp, thay vì liệt kê các phần tử, chúng ta có thể đưa ra một *mô tả chính xác* cho các phần tử của tập hợp đó. Lưu ý rằng mô tả này cần rõ ràng, khách quan (được thống nhất giữa những người học và làm toán), không nhập nhằng hay đa nghĩa.

- $S = \{x \mid x$ là nghiệm thực của phương trình $x^5 - x - 1 = 0\}$ là một tập hợp.
- $S = \{n \mid n$ là một số tự nhiên rất lớn$\}$ không phải một tập hợp, vì khái niệm *số tự nhiên rất lớn* không được định nghĩa.

Để cho ngắn gọn, chúng ta có thể dùng từ tập thay vì tập hợp. Ở Chương 6, chúng ta sẽ bàn thêm về tập hợp có vô hạn phần tử.

2.2 Quan hệ bao hàm giữa các tập hợp

Cho trước một đối tượng và một tập hợp, chúng ta đặt câu hỏi đối tượng này có thuộc tập hợp đó hay không? Với hai tập hợp, chúng ta có câu hỏi: phần tử của tập hợp này có là phần tử của tập hợp kia hay không? Với câu hỏi này, chúng ta đi đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.1. (Tập hợp) A là tập hợp con của (tập hợp) B nếu và chỉ nếu mỗi phần tử của A cũng là phần tử của B.

Nói riêng, hai tập hợp A và B bằng nhau khi và chỉ khi mỗi phần tử của A là phần tử của B và mỗi phần tử của B là phần tử của A.

Khi A là tập hợp con của B, chúng ta còn nói, A là bộ phận của B (hay B chứa A), và kí hiệu $A \subseteq B$ (còn có thể viết là $B \supseteq A$). Khi hai tập hợp A và B bằng nhau, chúng ta kí hiệu $A = B$.

Có những trường hợp mà A là tập hợp con của B nhưng A không bằng B, nói cách khác, có phần tử của B lại không là phần tử của A. Khi đó, chúng ta nói A *là tập hợp con thực sự của* B và kí hiệu $A \subset B$ (còn có thể viết là $B \supset A$). Chúng ta quy ước tập hợp rỗng là tập hợp con của mọi tập hợp.

Dưới đây là một số ví dụ và phản ví dụ về quan hệ bao hàm giữa các tập hợp.

Ví dụ 2.2. $\{-1, 1\}$ là tập hợp con thực sự của $\{-1, 0, 1\}$.

Phản ví dụ 2.3. $\{-1, 1\}$ không phải tập hợp con của $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 3\}$ cũng không phải tập hợp con của $\{-1, 1\}$.

Ví dụ 2.4. Trong mặt phẳng, tập hợp các tam giác đều là tập hợp con thực sự của tập hợp các tam giác cân. Khi không dùng các thuật ngữ của lý thuyết tập hợp, phát biểu vừa rồi sẽ là: mọi tam giác đều là tam giác cân, nhưng một tam giác cân không nhất thiết là tam giác đều.

Phản ví dụ 2.5. Trong mặt phẳng, tập hợp các tam giác vuông không phải là tập hợp con của tập hợp các tam giác cân, và ngược lại. Nếu không dùng thuật ngữ của lý thuyết tập hợp, chúng ta nói: không phải tam giác vuông nào cũng là tam giác cân, và không phải tam giác cân nào cũng là tam giác vuông.

Định lý sau cho thấy quan hệ bao hàm giữa các tập hợp có tính chất bắc cầu. Chúng tôi để lại chứng minh định lý này cho bạn đọc trong phần bài tập.

Định lý 2.6. *Cho các tập hợp A, B, C. Nếu $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$.*

Chúng ta kết thúc mục này bằng định nghĩa tập hợp lũy thừa, và sẽ quay trở lại với khái niệm này trong Chương 6.

Định nghĩa 2.7 (Tập hợp lũy thừa)**.** **Tập hợp lũy thừa** của một tập hợp S là một tập hợp với các phần tử là tất cả các tập hợp con của S. Chúng ta kí hiệu tập hợp lũy thừa của S là $\mathcal{P}(S)$.

Dưới đây là một số ví dụ về tập lũy thừa.

Ví dụ 2.8. Tập hợp lũy thừa của tập hợp rỗng là $\{\varnothing\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\varnothing) &= \{\varnothing\}, \\ \mathcal{P}(\{1\}) &= \{\varnothing, \{1\}\}, \\ \mathcal{P}(\{1,2\}) &= \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}. \end{aligned}$$

Trong nhiều tài liệu khác, các tác giả còn dùng kí hiệu $\subset$ để chỉ quan hệ là tập hợp con, và dùng kí hiệu $\subsetneq$ để chỉ quan hệ là tập hợp con thực sự. Còn ở tài liệu này, chúng tôi quy ước dùng kí hiệu $\subseteq$ để chỉ quan hệ là tập hợp con, và dùng kí hiệu $\subset$ để chỉ quan hệ là tập hợp con thực sự, gợi sự tương tự với cặp kí hiệu $\leq$ và $<$.

2.3 Bài tập

Bài tập 2.1. Trong các trường hợp dưới đây, đâu là tập hợp? Nếu đó là tập hợp, hãy thử liệt kê các phần tử của tập hợp đó.

(a) $\{n \mid n$ là ước nguyên dương của 27 $\}$.

(b) $\{x \mid x$ là nghiệm thực của phương trình $2x^2 + 2x + 1 = 0\}$.

(c) $\{n \mid n$ có phân tích nguyên tố đơn giản $\}$.

(d) $\{x \mid x$ là nghiệm thực của một phương trình có hệ số nguyên với bậc không quá hai $\}$.

Bài tập 2.2. Cho tập hợp S gồm ba phần tử x, y, z. Hãy liệt kê tất cả các tập hợp con của S và quan hệ bao hàm giữa các tập hợp con đó.

Bài tập 2.3. Cho tập hợp S gồm tất cả các chuỗi nhị phân có độ dài n. S có bao nhiêu phần tử?

Bài tập 2.4. Cho các tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng nếu $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$.
Chứng minh rằng nếu $A \subseteq B$ và $B \subset C$, hoặc $A \subset B$ và $B \subseteq C$, hoặc $A \subset B$ và $B \subset C$, thì $A \subset C$.

3 Vị từ và lượng hóa

3.1 Vị từ

Mục này giới thiệu khái niệm vị từ. Chúng ta bắt đầu bằng hai ví dụ thực tế.

Một người đi chơi xa về hỏi hàng xóm về thời tiết trong hai ngày vừa rồi, ngày nào có mưa. Câu trả lời mà người đó nhận được là: **Ngày hôm qua** *có mưa* và **Ngày hôm kia** *có mưa*. Ở ví dụ này, câu trả lời (hay mệnh đề) có dạng "(ngày) có mưa".

Một giáo viên hỏi đồng nghiệp của mình về điểm thi Toán của các học sinh trong lớp mà người đồng nghiệp đó làm chủ nhiệm. Người đồng nghiệp đó có thể trả lời theo lối liệt kê (bằng trả lời miệng hoặc đưa ra một danh sách): **An** *được điểm 9*, **Bình** *được điểm 8*... Trong ví dụ này, câu trả lời của người đồng nghiệp là các câu (hay mệnh đề) có dạng "(Tên học sinh) được (điểm thi)".

Trong hai ví dụ vừa xét, chúng ta có những mệnh đề có cú pháp giống nhau, chỉ khác nhau về đối tương được nhắc đến (in đậm) và thông tin về đối tượng đó (in nghiêng). Về mặt hình thức, chúng ta có thể định nghĩa biểu thức $A(x)$ có nghĩa là *Ngày x có mưa*, và $B(x, y)$ có nghĩa là *x được điểm y*. Khi đó, A, B được gọi là các *vị từ*. Nói theo cách *không chính thức*, vị từ là một "mệnh đề chứa biến". Vì mệnh đề là một phát biểu có tính đúng sai, nên chúng ta không coi vị từ A, vị từ B là các mệnh đề. Chúng tạo ra mệnh đề khi áp dụng vị từ lên các đối tượng, chẳng hạn: Trong mệnh đề *Ngày hôm qua có mưa*, vị từ A áp dụng cho đối tượng **Ngày hôm qua**; Trong mệnh đề *An được điểm 9*, vị từ B áp dụng cho đối tượng **An**. $A(x)$, $B(x, y)$ còn được gọi là *điều kiện của các biến x, y*.

3.2 Lượng hóa

Quay trở lại với hai ví dụ được xét ở mục trước. Ở ví dụ đầu tiên, vì ngày hôm qua và ngày hôm kia có mưa, nên người hàng xóm có thể trả lời *cả hai ngày vừa qua đều có mưa* thay vì nói về từng ngày một. Ở ví dụ thứ hai, người giáo viên có thể hỏi tiếp người đồng nghiệp của mình rằng: "Trong lớp có học sinh nào được điểm 10 không?", hay là "Tất cả học sinh nào đều được điểm trên trung bình chứ?". Người đồng nghiệp có thể trả lời rằng "Có học sinh được điểm 10" và "Mọi học sinh đều được điểm lớn hơn hoặc bằng 5."

Tình huống tương tự cũng xảy ra khi chúng ta cần đưa ra lớp các mệnh đề về một tập hợp các đối tượng: Cho trước tập hợp S và một vị từ p (áp dụng lên các phần tử của x), chúng ta muốn biết liệu $p(x)$ đúng hay sai, với x là phần tử của S. Khi trả lời câu hỏi đó, chúng ta thường gặp các trường hợp sau đây:

(i) Có ít nhất một phần tử x của S sao cho có $p(x)$. Khi đó chúng ta kí hiệu

$$\exists x \in S\ p(x) \qquad \text{hay} \qquad \exists x \in S\ (p(x)) \qquad \text{hay} \qquad \exists x \in S : p(x)$$

hoặc chỉ ngắn gọn là $\exists x(p(x))$ nếu ngữ cảnh đã nêu rõ x thuộc tập hợp nào. Thay vì kí hiệu trên, chúng ta nói **tồn tại** x **thuộc** S **sao cho có** $p(x)$. Nói riêng, khi tồn tại $x \in S$ thỏa mãn $p(x)$, chúng ta thường đặt ra thêm câu hỏi về tính duy nhất của phần tử như vậy. Nếu đó là phần tử duy nhất thỏa mãn điều kiện đó, chúng ta kí hiệu

$$\exists! x \in S\ p(x) \qquad \text{hay} \qquad \exists! x \in S\ (p(x)) \qquad \text{hay} \qquad \exists! x \in S : p(x)$$

(ii) Mọi phần tử x của S đều làm cho $p(x)$ đúng. Khi đó chúng ta kí hiệu

$$\forall x \in S\ p(x) \qquad \text{hay} \qquad \forall x \in S\ (p(x)) \qquad \text{hay} \qquad \forall x \in S : p(x)$$

hoặc chỉ ngắn gọn là $\forall x(p(x))$ nếu ngữ cảnh đã nêu rõ x thuộc tập hợp nào. Thay cho kí hiệu, chúng ta còn nói **với mọi** x **thuộc** S**, có** $p(x)$, hay **với mỗi** x **thuộc** S**, có** $p(x)$.

Hành động đưa ra các mệnh đề như trên được gọi là **lượng hóa**. $\exists, \forall$ được gọi là những lượng hóa, hay lượng từ. $\exists$ được gọi là lượng hóa tồn tại, $\forall$ được gọi là lượng hóa phổ cập. Về mặt kí hiệu, chúng ta sẽ linh hoạt kí hiệu lượng hóa theo một trong các lối viết là $\exists x \in S\ p(x)$, $\exists x \in S(p(x))$ và $\exists x \in S : p(x)$. Lối viết thứ ba đơn giản nhưng phù hợp hơn với mệnh đề chỉ gồm một lượng từ. Trong khi đó, lối viết thứ hai tuy phức tạp hơn nhưng giúp kí hiệu không nhập nhằng khi mệnh đề có nhiều lượng từ. Trong tài liệu này, trừ chương hiện tại, khi áp dụng lượng hóa, chúng ta ưu tiên dùng các câu văn hoàn chỉnh.

Từ định nghĩa của hai lượng hóa, chúng ta rút ra hai nguyên lý sau đây.

(i) **Phủ định của** $\exists x \in S : p(x)$ là $\forall x \in S : \neg p(x)$. Viết thành câu, điều này có nghĩa là: **phủ định của mệnh đề "tồn tại** x **thuộc** S **sao cho có** $p(x)$**"** tương đương với **mệnh đề "với mọi** x **thuộc** S**, không có** $p(x)$**"**.

(ii) **Phủ định của** $\forall x \in S : p(x)$ là $\exists x \in S : \neg p(x)$. Viết thành câu, điều này có nghĩa là: phủ định của mệnh đề "với mọi x thuộc S sao cho có $p(x)$" tương đương với mệnh đề "tồn tại x thuộc S sao cho không có $p(x)$".

Để khép lại phần này, chúng ta bàn về trường hợp mệnh đề sử dụng nhiều lượng từ. Xét một vị từ p sử dụng hai biến x, y, và chúng ta chỉ xét các giá trị của x, y lần lượt thuộc hai tập hợp A, B nào đó.

Thay cho câu "với mọi x, với mọi y, có $p(x, y)$", chúng ta kí hiệu $\forall x \forall y : p(x, y)$. Thay cho câu "với mọi x, tồn tại y sao cho có $p(x, y)$", chúng ta kí hiệu $\forall x \exists y : p(x, y)$. Thay cho câu "tồn tại x sao cho với mọi y, có $p(x, y)$", chúng ta kí hiệu $\exists x \forall y : p(x, y)$. Bây giờ, chúng ta quan tâm tới việc phát biểu mệnh đề phủ định ở ba ví dụ trên. Bằng cách áp dụng liên tiếp hai nguyên lý nêu trên hai lần, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x \forall y(p(x, y))) &\Leftrightarrow \exists x(\neg(\forall y(p(x, y)))) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\exists y(\neg p(x, y))), \\
\neg(\forall x \exists y(p(x, y))) &\Leftrightarrow \exists x(\neg(\exists y(p(x, y)))) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\forall y(\neg p(x, y))), \\
\neg(\exists x \forall y(p(x, y))) &\Leftrightarrow \forall x(\neg(\forall y(p(x, y)))) \\
&\Leftrightarrow \forall x(\exists y(\neg(p(x, y))))
\end{aligned}$$

Qua ba ví dụ trên đây, chúng ta rút ra quy tắc khi viết phủ định của một mệnh đề gồm nhiều lượng hóa: đổi lượng hóa phổ cập sang lượng hóa tồn tại và ngược lại, rồi phủ định điều kiện giữa các biến.

Trong toán học, việc sử dụng lượng hóa trong các mệnh đề là rất phổ biến, đặc biệt là trong Giải tích. Việc sử dụng kí hiệu lượng hóa thay cho một câu văn hoàn chỉnh có thể khá ngắn gọn nhưng lại đánh đổi với tính dễ đọc của mệnh đề cũng như khả năng giao tiếp với người khác. Trong thực tế, cách phát biểu bằng một câu văn được ưa chuộng hơn. Nói riêng đối với bạn đọc là học sinh, sinh viên: Khi mới học, không nên lạm dụng kí hiệu, hãy dùng lời văn nhiều hơn, vì việc lạm dụng kí hiệu có thể làm thui chột khả năng diễn đạt và suy nghĩ mạch lạc.

3.3 Phương pháp quy nạp toán học

Trong mục này, chúng ta xem xét một trường hợp riêng của vị từ: vị từ sử dụng biến là số tự nhiên. Chúng ta quan tâm tới trường hợp này vì khi học và làm toán, chúng ta thường cần chứng minh các mệnh đề có dạng $p(n)$ (với n là số tự nhiên) cho *tất cả* các trường hợp của n. Để chứng minh một lớp các mệnh đề như vậy, phương pháp quy nạp toán học thường được sử dụng. Phương pháp này được phát biểu thành định lý sau.

Định lý 3.1 (Nguyên lý quy nạp toán học)**.** *Cho p là một vị từ áp dụng trên tập hợp các số tự nhiên. Nếu*

- *Có $p(0)$.*
- *Với mọi số tự nhiên k, có $p(k)$ kéo theo $p(k+1)$.*

thì có $p(n)$ với mọi số tự nhiên n.

Khi chứng minh có $p(n)$ với mọi n là số tự nhiên bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. (Bước cơ sở) Chúng ta chứng minh có $p(0)$.

Bước 2. (Bước quy nạp) Chúng ta chứng minh rằng với mỗi $k \geq 1$, $p(k)$ kéo theo $p(k+1)$. Ở bước này, mệnh đề $p(k)$ được gọi là *giả thiết quy nạp*.

Bước 3. Kết luận rằng có $p(n)$ với mọi số nguyên dương n.

Từ tổng kết trên của phương pháp chứng minh bằng quy nạp toán học, bạn đọc có thể kiểm tra nhận xét sau: phương pháp trên vẫn áp dụng được cho trường hợp n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng một số nguyên n_0 cho trước, hoặc trường hợp n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng một số nguyên cho trước bằng cách thay đổi một chút ở Bước cơ sở.

Chúng ta đưa ra hai ví dụ về chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Ví dụ 3.2. Chứng minh rằng tổng của các số tự nhiên lẻ liên tiếp bắt đầu từ 1 là bình phương của một số tự nhiên.

Phát biểu của bài toán này không chứa biến. Trước hết, chúng ta khảo sát một số trường hợp đầu tiên, với nhận xét rằng số tự nhiên lẻ thứ n là $(2n-1)$.

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2,$$
$$\sum_{i=1}^{2}(2i-1) = 1+3 = 4 = 2^2,$$
$$\sum_{i=1}^{3}(2i-1) = 1+3+5 = 9 = 3^2.$$

Từ khảo sát trên, chúng ta dự đoán (cuối mục này, chúng ta sẽ bàn thêm về sự dự đoán này) rằng

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+\cdots+(2n-1) = n^2.$$

Đây là điều mà chúng ta sẽ chứng minh.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, có $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

Với trường hợp $n = 1$, mệnh đề đúng, bởi vì $1 = 1^2$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ $(k \geq 1)$.

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + (2k+1).$$

Theo giả thiết quy nạp, $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$. Do đó

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, với mọi số nguyên dương n, có $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. Do đó, tổng của các số tự nhiên lẻ liên tiếp bắt đầu từ 1 là bình phương của một số tự nhiên. □

Ví dụ 3.3. Chứng minh rằng mỗi đa thức bậc n với hệ số thực có không quá n nghiệm.

Chứng minh. Với trường hợp $n = 1$, chúng ta xét đa thức $aX + b$ (trong đó $a \neq 0$). Phương trình $aX + b = 0$ chỉ có một nghiệm là $X = \frac{-b}{a}$. Do đó, mệnh đề đúng với $n = 1$.

Giả sử rằng đa thức bậc k có không quá k nghiệm $(k \geq 1)$. Chúng ta xét đa thức $f(X)$ có bậc $(k+1)$.

Nếu $f(X)$ không có nghiệm, chúng ta kết luận $f(X)$ có không quá $(k+1)$ nghiệm (vì $0 \leq k+1$).

Nếu $f(X)$ có ít nhất một nghiệm là $X = a$, chúng ta thực hiện phép chia đa thức và lấy dư. Sau khi thực hiện phép chia, chúng ta thu được một đa thức $g(X)$ bậc k (bậc của $g(X)$ = bậc của $f(X)$ trừ 1) nào đó và số dư là một số thực r, chúng ta viết $f(X) = (X - a)g(x) + r$. Vì $f(a) = 0$ nên $r = 0$, dẫn đến $f(X) = (X - a)g(X)$. Theo giả thiết quy nạp, $g(X)$ có không quá k nghiệm. Cùng với đẳng thức vừa thu được, chúng ta kết luận $f(X)$ có không quá $(k + 1)$ nghiệm.

Theo nguyên lý quy nạp, mỗi đa thức bậc n với hệ số thực có không quá n nghiệm. □

Khi chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, bước cơ sở và bước quy nạp đều là bắt buộc. Khi thiếu một trong hai bước, chúng ta gọi đó là *quy nạp không hoàn toàn*. Việc bỏ qua một trong hai bước có thể dẫn đến một kết luận sai. Nhà toán học Fermat khi xem xét các số tự nhiên có dạng $2^{2^n} + 1$ đã nhận thấy rằng khi $n = 0, 1, 2, 3, 4$ thì số có dạng như vậy là số nguyên tố, và đi thẳng tới kết luận rằng mọi số tự nhiên có dạng đó là số nguyên tố. Về sau, nhà toán học Euler đã bác bỏ kết luận này sau khi chỉ ra $2^{2^5} + 1$ là hợp số với ước số là 641.

Cũng có khi việc sử dụng giả thiết quy nạp mà chỉ gồm đúng mệnh đề "liền trước" là không đủ. Khi đó, người ta có thể áp dụng một dạng khác của phương pháp quy nạp toán học, gọi là phương pháp quy nạp mạnh. Với phương pháp này, giả thuyết quy nạp bao gồm toàn bộ các mệnh đề đi trước.

Nếu chứng minh có $p(n)$ với mọi n là số nguyên dương bằng phương pháp quy nạp mạnh, chúng ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. (Bước cơ sở) Chúng ta chứng minh có $p(0)$.

Bước 2. (Bước quy nạp) Chúng ta chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên k, nếu có $p(n)$ *với mọi* $0 \leq n \leq k$ thì có $p(k + 1)$. Ở bước này, các mệnh đề $p(1), p(2), \ldots, p(k)$ được gọi là *giả thiết quy nạp*.

Bước 3. Kết luận rằng có $p(n)$ với mọi số nguyên dương n.

Sau đây là một ví dụ điển hình cho việc chứng minh bằng phương pháp quy nạp mạnh.

Ví dụ 3.4 (Định lý cơ bản của số học). Mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều là tích của các số nguyên tố, và phân tích nguyên tố đó là duy nhất, không tính đến thứ tự.

Chứng minh. Khi $n = 2$, n là một số nguyên tố, mệnh đề đúng.

Giả sử mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 và không vượt quá $m - 1$ đều là tích của các số nguyên tố và phân tích nguyên tố đó là duy nhất. Xét số tự nhiên m.

Nếu m là số nguyên tố, mệnh đề đúng.

Nếu m là hợp số thì m chia hết cho một số nguyên tố p nào đó và $1 < m/p < m$. Chúng ta có phân tích $m = p \cdot (m/p)$. Theo giả thiết quy nạp, m/p là tích của các số nguyên tố. Do đó m là tích của các số nguyên tố. Chúng ta cần chứng minh tính duy nhất của phân tích nguyên tố. Giả sử phân tích nguyên tố của m là

$$m = (p_1)^{m_1}(p_2)^{m_2} \cdots (p_r)^{m_r} = (q_1)^{t_1}(q_2)^{t_2} \cdots (q_s)^{t_s}$$

trong đó $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ là các số nguyên tố, còn $m_1, \ldots, m_r, t_1, \ldots, t_s$ là các số nguyên dương.

p_1 là ước của $m = (p_1)^{m_1}(p_2)^{m_2} \cdots (p_r)^{m_r}$ nên p_1 cũng là ước của $(q_1)^{t_1}(q_2)^{t_2} \cdots (q_s)^{t_s}$. Theo hệ quả của Bổ đề Euclid[1], tồn tại chỉ số i (mà $1 \leq i \leq s$) sao cho p_1 là ước của $(q_i)^{t_i}$. Do tính giao hoán của phép nhân nên không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử chỉ số đó chính là 1. Việc p_1 là ước của $(q_1)^{t_1}$ kéo theo $p_1 = q_1$ (điều này cũng được rút ra từ hệ quả của Bổ đề Euclid). Như vậy, chúng ta có hai phân tích nguyên tố của số tự nhiên m/p_1. Theo giả thiết quy nạp, phân tích nguyên tố của m/p_1 là duy nhất. Do đó phân tích nguyên tố của m cũng là duy nhất.

Theo nguyên lý quy nạp mạnh, mỗi số tự nhiên lớn hơn 1 đều là tích của các số nguyên tố và phân tích nguyên tố đó là duy nhất. □

[1] Hệ quả của Bổ đề Euclid được phát biểu rằng: Nếu một số nguyên tố p là ước của tích ab thì p là ước của ít nhất một trong hai số a và b.

Dù mang tên gọi "Nguyên lý quy nạp mạnh" nhưng nguyên lý này và nguyên lý quy nạp toán học là tương đương nhau.

Không phải mệnh đề nào với lượng hóa cho số tự nhiên, hay số nguyên dương cũng được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. Tuy vậy, phương pháp quy nạp toán học tỏ ra hiệu quả trong việc chứng minh nhiều kết quả. Lúc này chúng ta chưa khẳng định được tính đúng đắn của phương pháp này mà mới chỉ được thuyết phục bằng các bước chứng minh nghe hợp lý cũng như các ví dụ. Thực ra, nguyên lý quy nạp toán học thường được phát biểu như một tiên đề. Chúng ta sẽ quay lại với nguyên lý quy nạp toán học trong Chương 3.

Như đã đề cập từ trước, chúng ta nói thêm về sự dự đoán trong chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. Bạn đọc khi theo dõi đến ví dụ về tổng các số tự nhiên lẻ liên tiếp có thể thấy điều được dự đoán là không tự nhiên, và đặt ra các câu hỏi như: "Dự đoán đó đến từ đâu?" thậm chí là "Nếu gặp trường hợp quá khó dự đoán thì sao?" Đây là một nhược điểm lớn của phương pháp chứng minh quy nạp — Đó là *người sử dụng phương pháp quy nạp phải biết mình đang chứng minh điều gì, một cách cụ thể*, và chứng minh bằng phương pháp quy nạp *không cung cấp thêm thông tin gì về bài toán* ngoại trừ chính kết quả được chứng minh. Điểm yếu này không thể khắc phục hoàn toàn vì tính chủ quan của nó. Những người học và làm toán chỉ còn cách phát triển kinh nghiệm để cải thiện kĩ năng dự đoán đó, hoặc dùng những phương pháp chứng minh khác.

3.4 Bài tập

Bài tập 3.1. Chỉ ra rằng nguyên lý quy nạp mạnh là hệ quả của nguyên lý quy nạp toán học.

Bài tập 3.2. Hãy dự đoán một tập hợp có n phần tử ($n \geq 0$) thì tập lũy thừa của tập hợp đó có bao nhiêu phần tử. Chứng minh dự đoán đó.

4 Các phép toán trên tập hợp

Với các tập hợp cho trước, chúng ta có thể kết hợp các phần tử từ các tập hợp này để cho ra một tập hợp khác.

4.1 Hợp và giao của các tập hợp

Định nghĩa 4.1 (Hợp của hai tập hợp)**.** Cho hai tập hợp A và B. Hợp của A và B là tập hợp gồm các phần tử của A và các phần tử của B, được kí hiệu là $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Định nghĩa 4.2 (Giao của hai tập hợp)**.** Cho hai tập hợp A và B. Giao của A và B là tập hợp gồm các phần tử đồng thời thuộc A và B, được kí hiệu là $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Phép toán hợp và phép toán giao của hai tập hợp có những tính chất tương tự như hai phép toán logic là tuyển và hội (tính chất giao hoán, kết hợp, và phân phối). Điều này được thể hiện qua định lý sau.

Định lý 4.3. *Cho ba tập hợp A, B, C. Khi đó*

(i) $A \cup B = A \cup B$.

(ii) $A \cap B = B \cap A$.

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(vi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Chứng minh cho định lý trên có thể được thực hiện bằng các tính chất giao hoán, kết hợp, và phân phối của hai phép toán tuyển và hội. Trong định lý trên, nhờ tính chất kết hợp mà chúng ta có thể bỏ qua dấu ngoặc để viết $A \cup B \cup C$ và $A \cap B \cap C$ mà không lo ngại có hiểu lầm nào.

4.2 Phần bù và hiệu hai tập hợp

Khi học hay làm toán và làm việc với tập hợp, chúng ta thường xuyên gặp trường hợp các tập hợp đang xét đều là tập hợp con của một tập hợp nào đó. Chẳng hạn: Khi học hình học phẳng, chúng ta làm việc trong một mặt phẳng (mặt phẳng này chứa tất cả các điểm, đường thẳng, tam giác, đường tròn mà chúng ta đang xét); Khi xem xét một đồ thị, chúng ta quan tâm tới các đỉnh, cạnh của đồ thị, và có thể cả các đồ thị con của đồ thị đó;... Tập hợp chứa tất cả các đối tượng đang xét được gọi là *không gian*, hay *tập vũ trụ* (việc tập hợp này là gì phụ thuộc vào ngữ cảnh của môn học, chuyên ngành, và đặc biệt là vấn đề đang tìm hiểu). Ở các phân ngành khác của toán học nói riêng và khoa học nói chung, thuật ngữ không gian được sử dụng như vậy thường xuyên (không gian vector, không gian topology, không gian mẫu, không gian affine, không gian xạ ảnh, không gian tìm kiếm,...). Trong mục này, chúng ta kí hiệu không gian là X.

Định nghĩa 4.4 (Phần bù)**.** Cho tập hợp A trong không gian X. Phần bù của A (trong X) là tập hợp gồm các phần tử thuộc X nhưng không thuộc A. Phần bù của A trong X được kí hiệu là A^c.

Khi không gian X đã được xác định qua ngữ cảnh, chúng ta chỉ cần nói "phần bù của A" thay cho "phần bù của A trong X". Gần giống với khái niệm phần bù, chúng ta có khái niệm hiệu của hai tập hợp.

Định nghĩa 4.5 (Hiệu của hai tập hợp)**.** Cho tập hợp A và B. Hiệu của A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Chúng ta kí hiệu hiệu của A và B là $A - B$ hoặc $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Khái niệm phần bù là một trường hợp riêng của khái niệm hiệu hai tập hợp. Khác với phần bù, để định nghĩa hiệu của hai tập hợp A và B, chúng ta không nhất thiết phải có $A \supseteq B$.

4.3 Công thức De Morgan

Để có thể phát biểu hình thức cho công thức De Morgan, chúng ta cần định nghĩa hợp và giao của một lượng tùy ý các tập hợp (có thể là vô hạn các tập hợp). Cho đến thời điểm hiện tại, chúng ta chỉ có một cách để thể hiện "số lượng" tùy ý như vậy, đó là sử dụng chính tập hợp. Chúng ta áp dụng điều này trong định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 4.6 (Hợp và giao của các (nhiều tùy ý) tập hợp)**.** Cho trước một tập hợp I khác tập hợp rỗng. $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập hợp.

Hợp của *họ các tập hợp* A_i, trong đó $i \in I$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử của các tập hợp A_i, với $i \in I$. Nói cách khác, tập hợp này gồm các phần tử sao cho phần tử đó thuộc A_i với $i \in I$ nào đó. Chúng ta kí hiệu

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

Giao của *họ các tập hợp* A_i, trong đó $i \in I$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử đồng thời thuộc tất cả các tập hợp A_i, với $i \in I$. Chúng ta kí hiệu

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

Tập hợp I được sử dụng trong định nghĩa trên được gọi là **tập hợp chỉ số**. Bằng cách sử dụng tập hợp chỉ số, chúng ta có thể phát biểu hình thức cho một họ gồm nhiều tùy ý (có thể vô hạn) các tập hợp. Bạn đọc hãy thử trường hợp tập hợp I gồm 2 phần tử để kiểm tra định nghĩa trên có phù hợp với định nghĩa hợp và giao của hai tập hợp không.

Lúc này, chúng ta có thể phát biểu công thức De Morgan.

Định lý 4.7 (Công thức De Morgan)**.** $(A_i)_{i\in I}$ *là một họ các tập hợp. Khi đó*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} {A_i}^c,$$
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} {A_i}^c.$$

Chúng ta đưa ra một chứng minh cho công thức De Morgan bằng nguyên lý lượng hóa. Chứng minh này cũng minh họa cho cách chứng minh hai tập hợp bằng nhau.

Chứng minh. Với công thức đầu tiên, chúng ta giả sử $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$. Điều này tương đương với việc $x \notin A_i$ với mọi $i \in I$, hay $x \in {A_i}^c$ với mọi $i \in I$ (theo định nghĩa phần bù). Theo định nghĩa của phép giao các tập hợp, $x \in \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$. Do đó $x \in \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$, kéo theo

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \subseteq \bigcap_{i\in I} {A_i}^c.$$

Ngược lại, giả sử $x \in \bigcap_{i\in I} {A_i}^c$. Theo định nghĩa của phép giao các tập hợp, chúng ta suy ra $x \in {A_i}^c$ với mọi $i \in I$, hay $x \notin A_i$ với mọi $i \in I$ (theo định nghĩa phần bù). Theo nguyên lý lượng hóa, mệnh đề vừa thu được tương đương với phủ định của mệnh đề "tồn tại $i \in I$ sao cho $x \in A_i$". Do đó $x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)^c$, kéo theo

$$\bigcap_{i\in I} {A_i}^c \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c$$

Do vậy

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} {A_i}^c.$$

Cuối cùng, bằng phép toán lấy phần bù, chúng ta chỉ ra được công thức thứ hai là hệ quả của công thức đầu tiên. □

Ngay ở thời điểm chưa chứng minh, chúng ta có thể chỉ ra hai công thức là hệ quả của nhau. Ngoài ra, công thức thứ hai hoàn toàn có thể được chứng minh một cách độc lập với công thức thứ nhất.

Bằng lời, công thức De Morgan được phát biểu là: Phần bù của hợp của một họ các tập hợp là giao của các phần bù, phần bù của giao của một họ các tập hợp là hợp của các phần bù.

4.4 Phân hoạch của một tập hợp

Định nghĩa 4.8 (Hai tập hợp rời nhau)**.** Hai tập hợp được gọi là rời nhau nếu giao của chúng là tập hợp rỗng.

Cùng với định nghĩa trên và định nghĩa hợp của nhiều tùy ý các tập hợp, chúng ta đưa ra định nghĩa phân hoạch của một tập hợp khác rỗng.

Định nghĩa 4.9 (Phân hoạch của tập hợp khác rỗng)**.** Cho tập hợp S khác tập hợp rỗng. Một họ tập hợp $(A_i)_{i\in I}$ được gọi là một phân hoạch của tập hợp S nếu và chỉ nếu các tập hợp của họ trên rời nhau từng đôi một và hợp thành của tất cả các tập hợp này là S. Bằng kí hiệu, chúng ta viết

$$\forall i \in I\ \forall j \in I (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing) \qquad \text{và} \qquad \bigcup_{i\in I} A_i = S.$$

Dĩ nhiên, mỗi tập hợp trong một phân hoạch của một tập hợp S khác rỗng đều là tập hợp con của S. Thay cho cách phát biểu như trên, chúng ta còn nói: S được phân hoạch bởi (thành) họ tập hợp A_i với $i \in I$. Khi áp dụng phép toán hợp trên một họ các tập hợp đôi một rời nhau, chúng ta nói phép hợp đó là phép hợp rời, và kí hiệu là:

$$\bigsqcup_{i\in I} A_i.$$

Khi đó, chúng ta còn nói S là *hợp rời* của họ tập hợp A_i với $i \in I$. Hãy xem xét một số ví dụ về phân hoạch.

- Tập hợp $S = \{1\}$ gồm một phần tử có đúng một phân hoạch là $\{1\}$. Tổng quát hơn, mọi tập hợp khác rỗng đều nhận chính nó làm một phân hoạch với họ gồm đúng một tập hợp.
- Tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ được phân hoạch thành họ gồm năm tập hợp $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$, hoặc thành họ gồm hai tập hợp $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$. Ví dụ này cho thấy phân hoạch của một tập hợp khác rỗng có thể là không duy nhất. Bạn đọc có thể chứng minh một tập hợp khác rỗng với nhiều hơn một phần tử sẽ có nhiều hơn một phân hoạch.
- Tập hợp các số nguyên có thể được phân hoạch thành họ gồm hai tập hợp: tập hợp gồm các số nguyên chẵn và tập hợp gồm các số nguyên lẻ.

Trong Chương 2, chúng ta sẽ quay trở lại với khái niệm phân hoạch khi bàn về quan hệ tương đương.

4.5 Bài tập

Bài tập 4.1. Cho ba tập hợp A, B, C gồm hữu hạn phần tử. Kí hiệu $|A|$ là số lượng phần tử của tập hợp A. Chứng minh rằng

(a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

(b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$ [Gợi ý: Áp dụng phần (a)]

Bạn đọc hãy đưa ra một tổng quát (không cần chứng minh) cho hai công thức trên (cho nhiều tập hợp thay vì hai, hay ba tập hợp).

Bài tập 4.2. Cho ba tập hợp A, B, C. Chứng minh rằng

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Bài tập 4.3. Hãy đưa ra một chứng minh trực tiếp cho công thức thứ hai trong Định lý 4.7.

Bài tập 4.4. Công thức De Morgan có thể được viết dưới dạng khác, sử dụng phép toán hiệu hai tập hợp thay vì lấy phần bù. Cụ thể là

$$A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i),$$
$$A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus A_i).$$

Chứng minh hai công thức trên. [Gợi ý: Tham khảo cách chứng minh của công thức De Morgan ban đầu và Bài tập 4.2]

Bài tập 4.5. Trong ví dụ, chúng ta đã phân hoạch tập hợp các số nguyên thành một họ gồm tập hợp các số nguyên lẻ và tập hợp gồm các số nguyên chẵn. Hãy đưa ra một phân hoạch là một họ 3 tập hợp cho tập hợp số nguyên. Tương tự, hãy phân hoạch tập hợp số nguyên thành một họ n tập hợp với $n \geq 2$.

Bài tập 4.6. Chứng minh rằng mọi tập hợp khác rỗng đều có thể được phân hoạch bởi một họ các tập hợp mà mỗi tập hợp trong họ đó gồm đúng một phần tử. [Gợi ý: Lưu ý rằng tập hợp đã cho có thể có vô hạn phần tử. Hãy chọn tập hợp chỉ số là chính tập hợp khác rỗng được cho ban đầu.]

Kết quả từ Bài tập 4.6 khá đơn giản, thậm chí có thể xem là hiển nhiên, nhưng lại tỏ ra hữu ích trong một số bài toán. Bản thân tác giả đã dùng đến kết quả này khi học topology điểm và lý thuyết nhóm.

Bài tập 4.7. Cho tập hợp S khác rỗng được phân hoạch thành họ các tập hợp A_i với $i \in I$ (tập hợp I khác rỗng). Chứng minh rằng với mỗi phần tử thuộc S, tồn tại duy nhất $i \in I$ sao cho phần tử đó thuộc A_i. [Gợi ý: Chứng minh bằng phản chứng.]

Chương 2

Ánh xạ và Quan hệ

5 Tích Descartes của hai tập hợp

Tích Descartes là một phép toán khác trên các tập hợp. Để định nghĩa tích Descartes của hai tập hợp, chúng ta định nghĩa cặp có thứ tự.

5.1 Cặp có thứ tự

Định nghĩa. (Cặp có thứ tự) Một **cặp có thứ tự** là một cặp gồm hai đối tượng và xác định thứ tự là a và b, kí hiệu là (a, b). Hai cặp có thứ tự (a, b) và (c, d) được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$. Khi hai cặp có thứ tự (a, b) và (c, d) bằng nhau, chúng ta kí hiệu $(a, b) = (c, d)$.

Định nghĩa trên cho cặp có thứ tự ổn và phù hợp với trực giác. Chúng ta hoàn toàn có thể tiếp tục với định nghĩa này. Tuy nhiên nhược điểm của định nghĩa này là việc chấp nhận nó đồng nghĩa với việc bổ sung một tiên đề nữa (điều kiện bằng nhau của hai cặp có thứ tự) vào hệ tiên đề mà chúng ta đang dùng. Để khắc phục nhược điểm này, chúng ta có thể định nghĩa cặp có thứ tự bằng tập hợp, như định nghĩa dưới đây, được đề xuất bởi nhà toán học Kuratowski. Định nghĩa này cho đến nay đã được sử dụng rộng rãi.

Định nghĩa 5.1 (Cặp có thứ tự)**.** Một **cặp có thứ tự** gồm hai đối tượng là a và b (a và b là hai phần tử của một tập hợp nào đó) là một tập hợp, được kí hiệu là (a, b). Tập hợp đó là như sau:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Với định nghĩa này, điều kiện bằng nhau của hai cặp có thứ tự trở thành một định lý.

Định lý 5.2. *$(a, b) = (c, d)$ khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) $a = c$ và $b = d$.

Khi $a = c$ và $b = d$ thì $\{a\} = \{c\}$ và $\{a, b\} = \{c, d\}$. Do đó $(a, b) = (c, d)$.

($\Leftarrow$) $(a, b) = (c, d)$.

Theo định nghĩa cặp có thứ tự, chúng ta có $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Để chứng minh $a = c$ và $b = d$, chúng ta xem xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $a = b$.

Khi $a = b$, $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. Như vậy tập hợp (a, b) chỉ có một phần tử là tập hợp $\{a\}$. Vì hai tập hợp (a, b) và (c, d) bằng nhau nên tập hợp (c, d) cũng chỉ có một phần tử. Do đó $\{c\} = \{c, d\}$, dẫn đến $c = d$. Như vậy, $(a, b) = (c, d)$ kéo theo $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$; $\{\{a\}\} = \{\{b\}\}$ kéo theo $\{a\} = \{b\}$; $\{a\} = \{b\}$ kéo theo $a = b$. Cùng với việc $a = b$ và $c = d$, chúng ta kết luận $a = c$ và $b = d$.

Trường hợp 2. $a \neq b$.

Khi $a \neq b$ thì $\{a\}$ là tập hợp con thực sự của $\{a, b\}$, nên (a, b) là một tập hợp có hai phần tử. Cùng với việc $(a, b) = (c, d)$, chúng ta có (c, d) cũng là một tập hợp có hai phần tử, nên hai tập hợp $\{c\}$ và $\{c, d\}$ khác nhau, kéo theo $c \neq d$.

$(a, b) = (c, d)$ nên $\{a\}$ là một phần tử của $\{\{c\}, \{c, d\}\}$. Vì $\{c\}$ gồm một phần tử, $\{c, d\}$ gồm hai phần tử (vì $c \neq d$) nên $\{a\} = \{c\}$. Do đó $a = c$. Bằng lập luận tương tự, $\{a, b\}$ là một phần tử của $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ và $\{a, b\}$ với $\{c, d\}$ là hai tập hợp có hai phần tử (vì $a \neq b$, $c \neq d$) còn $\{c\}$ chỉ có một phần tử nên $\{a, b\} = \{c, d\}$. Cùng với việc $a = c$, chúng ta suy ra $b = d$.

Tóm lại, trong cả hai trường hợp, chúng ta đều có $a = c$ và $b = d$.

Vậy $(a, b) = (c, d)$ khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$. □

Từ Định lý trên, chúng ta thu được hệ quả: $(a, b) = (b, a)$ khi và chỉ khi $a = b$. Một lần nữa, tính thứ tự được nhấn mạnh.

5.2 Tích Descartes của hai tập hợp

Định nghĩa 5.3 (Tích Descartes của hai tập hợp)**.** Cho hai tập hợp A và B. Tích Descartes của A và B là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự mà đối tượng thứ nhất là phần tử của A, đối tượng thứ hai là phần tử của B. Tích Descartes của A và B được kí hiệu là $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}.$$

Nói riêng, khi ít nhất một trong hai tập hợp A, B là tập hợp rỗng thì tích Descartes $A \times B$ cũng là tập hợp rỗng.

Không như phép toán hợp và giao hai tập hợp, tích Descartes nói chung không giao hoán, và cũng không có tính kết hợp. Chúng ta minh họa điều đó với ví dụ sau đây: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$.

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,2), (2,2), (3,2), (1,3), (2,3), (3,3)\}, \\
B \times A &= \{(2,1), (3,1), (2,2), (3,2), (2,3), (3,3)\}, \\
(A \times B) \times C &= \{((1,2),3), ((2,2),3), ((3,2),3), ((1,3),3), ((2,3),3), ((3,3),3), \\
&\quad ((1,2),4), ((2,2),4), ((3,2),4), ((1,3),4), ((2,3),4), ((3,3),4)\}, \\
A \times (B \times C) &= \{(1,(2,3)), (1,(2,4)), (1,(3,3)), (1,(3,4)) \\
&\quad (2,(2,3)), (2,(2,4)), (2,(3,3)), (2,(3,4)) \\
&\quad (3,(2,3)), (3,(2,4)), (3,(3,3)), (3,(3,4))\}.
\end{aligned}$$

5.3 Bài tập

Bài tập 5.1. Cho hai tập hợp khác rỗng A và B. Tìm điều kiện để $A \times B = B \times A$. Nếu bỏ điều kiện A và B khác rỗng, khi nào $A \times B = B \times A$?

Bài tập 5.2. Cho hai tập hợp A và B. Chứng minh rằng $A \times B$ và $B \times A$ rời nhau khi và chỉ khi A và B rời nhau.

Bài tập 5.3. Cho các tập hợp A, B, C, D. Chứng minh rằng $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

6 Ánh xạ

6.1 Định nghĩa

Định nghĩa 6.1 (Ánh xạ). Cho hai tập hợp X và Y. Một **ánh xạ** f **từ** X **vào** Y là một *quy tắc gán mỗi phần tử của X với đúng một phần tử của Y*. Tập X được gọi là **tập nguồn** (hay **miền**, **miền giá định**) của f, còn tập Y được gọi là **tập đích** (hay **đối miền**) của f.

Để biểu thị rằng f là một ánh xạ từ tập hợp X vào tập hợp Y, chúng ta kí hiệu $f : X \to Y$. Nếu x là một phần tử của X thì theo định nghĩa ánh xạ, tồn tại duy nhất một phần tử y của Y sao cho f gán x với y. Khi đó, chúng ta kí hiệu $y = f(x)$ (hay $x \mapsto f(x)$, $f : x \mapsto y$) và nói y là **ảnh của** x **qua** f, hoặc y là ảnh của x nếu ngữ cảnh đã rõ là chúng ta đang sử dụng ánh xạ nào.

Có những quy tắc gán là ánh xạ, nhưng cũng có những quy tắc gán không phải ánh xạ. Chúng ta đưa ra một số ví dụ và phản ví dụ về ánh xạ.

Ví dụ 6.2. f là quy tắc gán mỗi phần tử của một tập hợp X với chính phần tử đó.
f là một ánh xạ. Ánh xạ đặc biệt này được gọi là **ánh xạ đồng nhất** trên tập hợp X, và được kí hiệu là $\mathrm{id}_X : X \to X$. Trên mỗi tập hợp, tồn tại duy nhất một ánh xạ đồng nhất.

Ví dụ 6.3. f là một ánh xạ từ X vào Y khác rỗng, y là một phần tử cố định thuộc Y và với mọi $x \in X$, $f(x) = y$.
Ánh xạ f được gọi là **ánh xạ hằng**.

Ví dụ 6.4. f là quy tắc gán mỗi số thực x với một số thực x^3.
Cùng với việc x^3 là một số thực hoàn toàn xác định với mỗi số thực x, câu trên cho biết f là một ánh xạ với tập nguồn là tập hợp số thực, tập đích cũng là tập hợp số thực. Nói riêng, nếu $x \neq y$ thì $x^3 \neq y^3$, và với mỗi số thực a chúng ta có $f(\sqrt[3]{a}) = a$.

Ví dụ 6.5. f là quy tắc gán mỗi số tự nhiên n với số tự nhiên $2n$.
Với mỗi số tự nhiên n, $2n$ là một số tự nhiên hoàn toàn xác định. f là một ánh xạ từ tập hợp số tự nhiên vào tập hợp số tự nhiên. Nói riêng, nếu $m \neq n$ thì $f(m) \neq f(n)$. Với mỗi số tự nhiên chẵn m, chúng ta có $f(m/2) = m$. Nhưng với mỗi số tự nhiên lẻ p, không tồn tại số tự nhiên q nào sao cho $f(q) = p$.

Phản ví dụ 6.6. f là quy tắc gán mỗi số thực x với một số thực y mà $x = y^2$.
Nếu x là một số thực âm thì không tồn tại số thực y nào sao cho $x = y^2$. Do đó f không phải một ánh xạ.

Phản ví dụ 6.7. f là quy tắc gán mỗi số thực không âm x với một số thực y mà $x = y^2$.
Với số 1, chúng ta có $1^2 = (-1)^2 = 1$. Như vậy, quy tắc f không xác định duy nhất một số thực để gán với số 1, nên f không phải một ánh xạ.

Bạn đọc có thể đã học qua khái niệm *hàm số*. Ánh xạ chính là một tổng quát cho khái niệm hàm số. Khái niệm hàm số trong chương trình trung học cơ sở và trung học phổ thông tập trung vào quy tắc gán, thường xuất hiện dưới dạng một biểu thức; còn tập nguồn và tập đích được *ngầm hiểu* là tập hợp số thực hoặc một tập hợp con của tập hợp số thực. Đến với khái niệm ánh xạ, chúng ta nhấn mạnh vào cả ba thành phần là **quy tắc gán**, **tập nguồn**, và **tập đích**.

Khái niệm tích Descartes và ánh xạ cho chúng ta một góc nhìn khác về các phép toán quen thuộc (cộng, trừ, nhân, chia các số thực).

Ví dụ 6.8. Phép toán cộng hai số thực là ánh xạ sau:

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & (x, y) \mapsto x + y. \end{aligned}$$

Phép toán trừ hai số thực là ánh xạ sau:

$$\begin{aligned} - : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & (x, y) \mapsto x - y. \end{aligned}$$

Phép toán nhân hai số thực là ánh xạ sau:

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & (x, y) \mapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

Chúng ta không định nghĩa phép chia cho số không, nên phép toán chia hai số thực là ánh xạ sau:

$$\begin{aligned} / : \quad & \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}, \\ & (x, y) \mapsto x/y. \end{aligned}$$

Trừu tượng hơn, với một tập hợp S cho trước, $*$ được gọi là một *phép toán hai ngôi*, hay *luật hợp thành* trên S nếu $*$ gán mỗi cặp phần tử của S với đúng một phần tử nữa của S. Bằng kí hiệu, chúng ta viết $* : S \times S \to S$, còn ảnh của phần tử $(x, y) \in S \times S$ dưới ánh xạ $*$ được kí hiệu là $x * y$. Các phép toán cộng, trừ, nhân hai số thực là các phép toán hai ngôi, còn phép chia một số thực cho một số thực khác không được gọi là một phép toán hai ngôi không toàn phần. Trong ngành Đại số (hay còn gọi là Đại số trừu tượng để phân biệt với Đại số sơ cấp được dạy trong chương trình phổ thông), người ta thường xuyên làm việc với những phép toán hai ngôi trừu tượng như vậy (những phép toán đó thường mang các tính chất đặc biệt nào đó, chẳng hạn như tính chất kết hợp và tính chất giao hoán, vân vân).

Nói riêng, tập nguồn của một ánh xạ có thể là tập hợp rỗng. Nhưng nếu tập đích của một ánh xạ là tập rỗng thì tập nguồn của ánh xạ đó cũng phải là tập hợp rỗng. Vì nếu tập nguồn khác rỗng và tập đích rỗng thì "ánh xạ" sẽ không có phần tử nào để gán với phần tử của tập nguồn – Điều này vi phạm định nghĩa ánh xạ. Chúng ta gọi ánh xạ có tập nguồn rỗng là một ánh xạ rỗng. Khi học và làm toán, chúng ta rất ít khi gặp ánh xạ rỗng và thường bỏ qua (việc này là chấp nhận được) trường hợp này.

6.2 Ảnh và Nghịch ảnh

Ở mục trước, khi định nghĩa ánh xạ, chúng ta đã đề cập đến ảnh của một phần tử dưới một ánh xạ.

Định nghĩa 6.9. Cho ánh xạ $f : X \to Y$, S là một tập hợp con của X.

(i) (Ảnh của một tập hợp) **Ảnh của S dưới ánh xạ f** là một tập hợp gồm các phần tử của Y sao cho với mỗi phần tử y thuộc ảnh của f, tồn tại (không nhất thiết duy nhất) phần tử x trong S sao cho $f(x) = y$. Chúng ta kí hiệu ảnh của S dưới ánh xạ f bởi $f[S]$. Bằng kí hiệu, chúng ta viết

$$f[S] = \{y \mid \exists x \in S : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in S\}$$

(ii) (Ảnh của ánh xạ) **Ảnh của f** là tập hợp $f[X]$. Ngoài ra, chúng ta cũng kí hiệu ảnh của ánh xạ f là $\mathrm{Im}(f)$.

Trực tiếp từ định nghĩa trên, chúng ta có thể kết luận rằng ảnh của một tập hợp $S \subseteq X$ dưới f là một tập hợp con của Y, và ảnh của tập hợp rỗng là tập hợp rỗng. Định nghĩa này có thể được trình bày một cách không hình thức như sau: tác động ánh xạ f lên mọi phần tử của $S \subseteq X$, rồi gom tất cả ảnh thu được, chúng ta được ảnh của S dưới f. Ngược chiều với khái niệm ảnh của ánh xạ, chúng ta có khái niệm nghịch ảnh.

Định nghĩa 6.10 (Nghịch ảnh)**.** Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

(i) (Nghịch ảnh của một tập hợp) S là một tập hợp con của Y. Chúng ta định nghĩa **nghịch ảnh của** S **dưới ánh xạ** f là tập hợp gồm những phần tử của X mà ảnh của chúng thuộc S. Tập hợp này được kí hiệu là $f^{-1}[S]$. Bằng kí hiệu, chúng ta viết:

$$f^{-1}[S] = \{x \mid x \in X \wedge f(x) \in S\}.$$

(ii) (Nghịch ảnh của một phần tử) Cho phần tử $y \in Y$. Nghịch ảnh của y dưới ánh xạ f là tập hợp $f^{-1}[\{y\}]$.

Định nghĩa trên cho thấy khái niệm nghịch ảnh của một phần tử là trường hợp riêng của khái niệm nghịch ảnh của một tập hợp. Nói riêng, đối với ánh xạ $f : X \to Y$, nghịch ảnh của Y dưới ánh xạ f là X, nghịch ảnh của tập hợp rỗng là tập hợp rỗng.

Ví dụ 6.11. f là ánh xạ gán một số tự nhiên n với số tự nhiên $2n$.
Ảnh của ánh xạ f là tập hợp các số tự nhiên chẵn.
Nghịch ảnh của tập hợp các số tự nhiên chẵn dưới ánh xạ f là tập hợp các số tự nhiên. Nghịch ảnh của tập hợp các số tự nhiên lẻ dưới ánh xạ f là tập hợp rỗng.

Ví dụ 6.12. f là ánh xạ gán một số thực x với số thực x^2.
Nghịch ảnh của 0 dưới f là $\{0\}$. Nghịch ảnh của (-1) dưới f là tập hợp rỗng. Nghịch ảnh của $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ là $\{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Tương tự với hàm số, chúng ta cũng có thể định nghĩa đồ thị của ánh xạ. Khi nhắc đến đồ thị của hàm số, chúng ta thường liên tưởng đến một hình vẽ trong mặt phẳng tọa độ. Đồ thị của hàm số (thực ra chỉ là một phần của đồ thị đó) có thể được đặt lên, được trực quan hóa trong mặt phẳng (hay không gian) tọa độ Descartes. Nhưng đồ thị của ánh xạ lại hoàn toàn trừu tượng, theo nghĩa là không có một cách trực quan hóa tương tự như vậy mà được chấp nhận rộng rãi.

Định nghĩa 6.13. Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : A \to B$.

(i) (Đồ thị của ánh xạ) Đồ thị của ánh xạ f là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự mà thành phần thứ nhất là một phần tử của X, còn thành phần thứ hai là ảnh của phần tử đó dưới ánh xạ f. Bằng kí hiệu, đồ thị của ánh xạ f được viết như sau:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

(ii) (Hai ánh xạ bằng nhau) Hai ánh xạ f và g được gọi là bằng nhau, hay trùng nhau nếu và chỉ nếu tập nguồn của chúng bằng nhau, tập đích của chúng bằng nhau, và đồ thị của chúng bằng nhau. Bằng kí hiệu, ta viết $f = g$ để biểu thị quan hệ bằng nhau của hai ánh xạ.

Định lý sau đây cho chúng ta một điều kiện cần và đủ để hai ánh xạ có cùng tập nguồn, cùng tập đích là bằng nhau. Định lý này phát biểu rằng hai ánh xạ có cùng tập nguồn và tập đích bằng nhau khi và chỉ khi ảnh của chúng tại mỗi phần tử của tập nguồn là bằng nhau. Đây cũng có thể được sử dụng làm định nghĩa cho hai ánh xạ bằng nhau thay cho định nghĩa trên.

Định lý 6.14. *Cho hai ánh xạ f và g với tập nguồn là X, tập đích là Y. $f = g$ khi và chỉ khi với mọi $x \in X$, có $f(x) = g(x)$.*

Chứng minh. Chúng ta bỏ qua trường hợp hiển nhiên là trường hợp ánh xạ rỗng, chỉ xét trường hợp X và Y khác rỗng.

($\Rightarrow$) Chiều thuận. $f = g$.

$f = g$ nên đồ thị của hai ánh xạ này bằng nhau. Xét x là một phần tử bất kì của X. $(x, f(x))$ thuộc đồ thị của f, $(x, g(x))$ thuộc đồ thị của g. Vì đồ thị của f và g bằng nhau nên $(x, f(x))$ thuộc đồ thị của g. Theo định nghĩa ánh xạ (mỗi phần tử của tập nguồn được gán với duy nhất một phần tử của tập đích) và định nghĩa đồ thị của ánh xạ, việc $(x, f(x))$ thuộc đồ thị của g có nghĩa là $f(x)$ là ảnh của x dưới ánh xạ g, nghĩa là $f(x) = g(x)$. Vì chúng ta đang xét phần tử x bất kì của X, nên $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.

($\Leftarrow$) Chiều đảo. Với mọi $x \in X$, có $f(x) = g(x)$.

Xét x là một phần tử bất kì của X, khi đó $(x, f(x))$ là một phần tử bất kì trong đồ thị của f, và $(x, g(x))$ là một phần tử bất kì trong đồ thị của g. Vì $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$ nên $(x, f(x)) = (x, g(x))$. Do đó $(x, f(x))$ thuộc đồ thị của g, và $(x, g(x))$ thuộc đồ thị của f. Như vậy, đồ thị của f là tập hợp con của đồ thị của g và đồ thị của g là tập hợp con của đồ thị của f, nên đồ thị của f và g bằng nhau. Cùng với việc f và g có cùng tập nguồn và tập đích, chúng ta kết luận $f = g$.

Vậy hai ánh xạ f và g với chung tập nguồn X và tập đích Y bằng nhau khi và chỉ khi với mọi $x \in X$, có $f(x) = g(x)$. □

6.3 Ánh xạ hợp

Các ánh xạ có thể kết hợp với nhau để cho ra một ánh xạ nữa nếu tập nguồn của ánh xạ thứ nhất là tập đích của ánh xạ thứ hai, như trong định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 6.15 (Phép toán hợp thành hai ánh xạ)**.** Cho hai ánh xạ $g : Y \to Z$ và $f : X \to Y$, **ánh xạ hợp** của hai ánh xạ g và f được kí hiệu là $g \circ f$, là một ánh xạ sao cho

$$\begin{aligned} g \circ f : & X \to Z \\ & x \mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Khi áp dụng một ánh xạ là hợp thành của ánh xạ khác, chẳng hạn $g \circ f$ lên một phần tử x của tập nguồn, chúng ta áp dụng f lên x trước, sau đó áp dụng g lên $f(x)$. Việc viết $g \circ f$ chỉ có nghĩa khi tập nguồn của g cũng là tập đích của f.

Định lý dưới đây khẳng định phép toán hợp thành ánh xạ có tính chất kết hợp.

Định lý 6.16. *Cho ba ánh xạ $f : Z \to W$, $g : Y \to Z$, và $h : X \to Y$. Khi đó*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Chứng minh. Hai ánh xạ $(f \circ g) \circ h$ và $f \circ (g \circ h)$ có cùng tập nguồn là X, cùng tập đích là W.

x là một phần tử bất kì của X. Theo định nghĩa của phép toán hợp thành hai ánh xạ:

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))), \\ (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))). \end{aligned}$$

Do đó $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$ với mọi x. Vậy hai ánh xạ $(f \circ g) \circ h$ và $f \circ (g \circ h)$. □

Nhờ định lý trên, chúng ta có thể viết $f \circ g \circ h$ thay vì $(f \circ g) \circ h$ hay $f \circ (g \circ h)$. Nói chung, phép toán hợp thành hai ánh xạ không giao hoán. Cụ thể hơn, với hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to X$, không phải lúc nào chúng ta cũng có $f \circ g = g \circ f$.

Chúng ta xem xét một số ví dụ tính toán với những ánh xạ cụ thể.

Ví dụ 6.17. f là ánh xạ gán một số thực x khác không với số thực khác không $\frac{1}{x}$.
Tập nguồn và tập đích của f bằng nhau (là tập hợp các số thực khác không), và $(f \circ f)(x) = x$. Lưu ý rằng tập nguồn của $f \circ f$ là tập các số thực khác không.

Ví dụ 6.18. f là ánh xạ gán một số thực x với số thực $x^2 - 2x$. g là ánh xạ gán một số thực x với số thực $1 - 3x$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - 3x) = (1 - 3x)^2 - 2(1 - 3x) = 9x^2 - 3x,$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x) = 1 - 3(x^2 - 2x) = 1 + 6x - 3x^2.$$

6.4 Đơn ánh. Toàn ánh. Song ánh

Định nghĩa 6.19. Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

(i) (Đơn ánh) f được gọi là đơn ánh nếu $f(a) = f(b)$ khi và chỉ khi $a = b$ $(a, b \in X)$. Đơn ánh còn được gọi là ánh xạ $1 - 1$.

(ii) (Toàn ánh) f được gọi là toàn ánh nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại (không nhất thiết duy nhất) $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

(iii) (Song ánh) f được gọi là song ánh f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

Với định nghĩa trên, bạn đọc có thể kiểm tra xem những ánh xạ được đề cập trong các ví dụ ở mục trước là đơn ánh, toàn ánh, hay là cả hai (song ánh). Tuy chúng ta hầu như chỉ quan tâm tới ba loại ánh xạ là đơn ánh, toàn ánh, và song ánh, nhưng vẫn có những ánh xạ không thuộc về cả ba loại ánh xạ này. Hãy xem xét thêm các ví dụ bên dưới.

Ví dụ 6.20. Ánh xạ f từ tập hợp số thực vào tập hợp số thực không âm, được xác định bởi công thức $f(x) = x^2$ là một toàn ánh, nhưng không phải đơn ánh. Bởi vì với mỗi số thực không âm y, có $f(\sqrt{y}) = y$; với mọi số thực x, có $x^2 = (-x)^2$.

Ví dụ 6.21. Ánh xạ g từ tập hợp số thực vào tập hợp số thực, được xác định bởi công thức $g(x) = x^2$ không phải một đơn ánh, và cũng không phải một toàn ánh. Bởi vì với mỗi số thực x, có $x^2 = (-x)^2$; với mỗi số thực âm y, không tồn tại số thực nào có bình phương bằng y.
Hãy đối chiếu với ví dụ liền trước, hai ví dụ này khẳng định sự quan trọng của việc xác định tập nguồn và tập đích của một ánh xạ.

Ví dụ 6.22. Ánh xạ f từ tập hợp số tự nhiên vào tập hợp số tự nhiên, được xác định bởi công thức $f(n) = 2n$ là một đơn ánh, nhưng không phải toàn ánh.

Ví dụ 6.23. Một ánh xạ hằng với tập nguồn có nhiều hơn một phần tử là một toán ánh nhưng không phải đơn ánh. Mọi ánh xạ đồng nhất là song ánh.

Định lý khá hiển nhiên sau đây có thể được dùng để định nghĩa đơn ánh thay vì định nghĩa nêu trên.

Định lý 6.24. *Ánh xạ $f : X \to Y$ là đơn ánh khi và chỉ khi với mỗi $x_1, x_2 \in X$, có $x_1 \neq x_2$ kéo theo $f(x_1) \neq f(x_2)$. Chúng ta còn nói: f là đơn ánh khi và chỉ khi ảnh của hai phần tử khác nhau là khác nhau.*

Chứng minh. ($\Rightarrow$) f là đơn ánh.

Cho x_1, x_2 là hai phần tử khác nhau của X. Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì theo định nghĩa đơn ánh, có $x_1 = x_2$ (mâu thuẫn với điều đã giả sử). Do đó $f(x_1) \neq f(x_2)$. Như vậy $x_1 \neq x_2$ kéo theo $f(x_1) \neq f(x_2)$.

($\Leftarrow$) Với mỗi $x_1, x_2 \in X$, có $x_1 \neq x_2$ kéo theo $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Giả sử $f(x_1) = f(x_2)$. Nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$ (mâu thuẫn với điều đã giả sử). Do đó $x_1 = x_2$. Theo định nghĩa đơn ánh, f là đơn ánh.

Tóm lại, $f : X \to Y$ là đơn ánh khi và chỉ khi với mỗi $x_1, x_2 \in X$, có $x_1 \neq x_2$ kéo theo $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

Định nghĩa 6.25 (Ánh xạ ngược)**.** Cho hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to X$. g được gọi là một **ánh xạ ngược** của f nếu và chỉ nếu $f(g(y)) = y$ với mọi y và $g(f(x)) = x$ với mọi x. Ngoài cách nói trên, chúng ta còn nói rằng f **khả nghịch**.

Không phải ánh xạ nào cũng có ánh xạ ngược. Định lý sau đây cung cấp điều kiện cần và đủ để một ánh xạ có ánh xạ ngược.

Định lý 6.26. *Ánh xạ $f : X \to Y$ có ánh xạ ngược khi và chỉ khi f là song ánh.*

Chứng minh. Trong trường hợp f là ánh xạ rỗng, f là song ánh khi và chỉ khi tập nguồn và tập đích cùng là tập hợp rỗng, và khi đó f có ánh xạ ngược (cũng là một ánh xạ giữa hai tập hợp rỗng). Dưới đây chúng ta xét trường hợp f không phải ánh xạ rỗng.

($\Rightarrow$) f có ánh xạ ngược.

Chúng ta gọi $g : Y \to X$ là ánh xạ ngược của f. Theo định nghĩa ánh xạ ngược, với mọi $y \in Y$, có $f(g(y)) = y$. Điều này có nghĩa là ảnh của $g(y)$ là y, nên f là một toàn ánh. Với $x_1, x_2 \in X$, nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Do đó, f là một đơn ánh. Vì f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh nên f là một song ánh.

($\Leftarrow$) f là một song ánh.

Theo định nghĩa toàn ánh và Định lý 6.24, vì f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh nên với mỗi phần tử $y \in Y$, tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Mệnh đề vừa phát biểu đã xác định một quy tắc gán mỗi phần tử $y \in Y$ với một phần tử duy nhất $x \in X$. Như vậy, chúng ta có một ánh xạ $g : Y \to X$ với công thức $g(y) = x$ sao cho x là phần tử duy nhất của X thỏa mãn $f(x) = y$. Từ định nghĩa của f và g, nếu $f(x) = y$ thì $g(f(x)) = x$ và $f(g(y)) = y$. Do vậy f là một song ánh.

Vậy f có ánh xạ ngược khi và chỉ khi f là song ánh. □

Từ định nghĩa ánh xạ ngược, chúng ta suy ra rằng nếu ánh xạ $f : X \to Y$ nhận ánh xạ $g : Y \to X$ làm ánh xạ ngược thì f cũng là một ánh xạ ngược của g. Để biểu thị rằng hai ánh xạ f và g là ánh xạ ngược của nhau, chúng ta sử dụng phép toán hợp thành hai ánh xạ như sau:

$$g \circ f = \mathrm{id}_Y \qquad \text{và} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_X.$$

Định lý 6.27. *Nếu một ánh xạ có ánh xạ ngược thì ánh xạ ngược đó là duy nhất. Nói cách khác, khi một ánh xạ có hai ánh xạ ngược thì hai ánh xạ ngược đó bằng nhau.*

Chúng tôi nhường lại chứng minh định lý trên cho bạn đọc trong phần Bài tập.

6.5 Tích Descartes

Mục tiêu của mục này là đưa ra một định nghĩa cho tích Descartes của một họ các tập hợp (gồm hữu hạn hoặc vô hạn tập hợp).

Tuy ngay bây giờ có thể định nghĩa tích Descartes của một họ các tập hợp, nhưng chúng ta bắt đầu với tích Descartes của hữu hạn tập hợp trước. Trước tiên, chúng ta định nghĩa bộ-n có thứ tự. Một cách trực giác, chúng ta hiểu bộ-n có thứ tự là một danh sách gồm n đối tượng, và hai bộ-n có thứ tự bằng nhau khi và chỉ khi các đối tượng thứ i của chúng bằng nhau (i là số tự nhiên không vượt quá n). Thực tế, đó là tất cả những gì chúng ta cần biết và dùng đến về bộ-n có thứ tự trong tài liệu này.

Định nghĩa 6.28 (Bộ-n có thứ tự)**.** Bộ-0 có thứ tự, kí hiệu bởi một cặp ngoặc tròn () được định nghĩa là tập hợp rỗng.

Bộ-1 có thứ tự với đối tượng thứ nhất (và duy nhất) là a_1, kí hiệu là (a_1) được định nghĩa là cặp có thứ tự $((), a_1) = \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, a_1\}\}$.

Bộ-2 có thứ tự với đối tượng thứ nhất, thứ hai lần lượt là a_1, a_2 được định nghĩa là cặp có thứ tự $((a_1), a_2)$.

Bộ-n có thứ tự với đối tượng thứ nhất, thứ hai, ..., thứ n lần lượt là a_1, a_2, ..., a_n được định nghĩa là cặp có thứ tự $((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

Bộ-n có thứ tự được kí hiệu là $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Định nghĩa kiểu trên được gọi là định nghĩa bằng *quan hệ hồi quy* (bạn đọc có thể liên tưởng đến phương pháp quy nạp toán học). Chúng ta bắt đầu bằng định nghĩa cho những trường hợp nhỏ gọi là *trường hợp cơ sở*, còn với những trường hợp có "kích thước" lớn hơn, chúng ta quy về trường hợp nhỏ hơn, cứ như vậy cho đến khi đạt tới trường hợp cơ sở. (Một ví dụ khác cho định nghĩa bằng hồi quy là dãy số Fibonacci[1].) Với cách làm này, chúng ta định nghĩa được bộ-n có thứ tự với bất cứ số nguyên không âm nào. Nhưng cách làm này nói chung không áp dụng được cho ý tưởng về một bộ có *vô hạn* đối tượng, bởi không có điều gì đảm bảo rằng trường hợp cơ sở sẽ được đạt tới.

Định nghĩa 6.29 (Tích Descartes của hữu hạn tập hợp)**.** Cho n tập hợp $X_1, X_2, \dots, X_n$. Tích Descartes của $X_1, X_2, \dots, X_n$ là một tập hợp gồm tất cả các bộ-n có thứ tự mà trong đó, đối tượng thứ i là phần tử của tập hợp X_i (với mọi số tự nhiên i không vượt quá n). Tích Descartes của $X_1, X_2, \dots, X_n$ được kí hiệu là $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Bằng kí hiệu, chúng ta biểu thị tích Descartes này như sau:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n\}.$$

Nói riêng, lũy thừa Descartes bậc n của một tập hợp X được kí hiệu là X^n, là tập hợp sau:

$$X^n = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ lần } X}$$

Bạn đọc có thể đã nhận ra rằng tích Descartes của hữu hạn tập hợp cũng có thể được định nghĩa bằng hồi quy. Nhưng dù làm vậy, chúng ta vẫn gặp khó khăn khi định nghĩa tích Descartes của một họ các tập hợp, tương tự như với ý tưởng bộ vô hạn có thứ tự.

[1]Dãy Fibonacci bắt đầu bằng 0 và 1. Kể từ vị trí thứ ba trong dãy trở đi, mỗi số bằng tổng hai số liền trước trong dãy. Những số đầu tiên trong dãy Fibonacci là $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

Định nghĩa 6.30 (Tích Descartes của một họ các tập hợp)**.** Cho họ tập hợp A_i ($i \in I$, tập hợp I khác rỗng). Tích Descartes của họ tập hợp A_i được kí hiệu là $\prod_{i\in I} A_i$ và xác định như sau:

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i \right\}.$$

Trong định nghĩa trên, tích Descartes là một tập hợp các ánh xạ với tập nguồn là tập chỉ số I, tập đích là hợp của họ các tập hợp đã cho. Để hiểu định nghĩa này hơn, bạn đọc có thể cần một chút thời gian, mặc dù ở thời điểm này các chi tiết trong định nghĩa đều rõ nghĩa – Hãy thử xét trường hợp I là hữu hạn, và liên tưởng tới Định lý 6.14 về điều kiện để hai ánh xạ bằng nhau.

Tích Descartes của hữu hạn tập hợp là khác rỗng nếu từng tập hợp trong tích Descartes là khác rỗng, điều này có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. Tuy nhiên phương pháp quy nạp toán học mà chúng ta đã biết chỉ được áp dụng cho số tự nhiên, không áp dụng cho vô hạn. Nói thêm, nếu công nhận Tiên đề chọn, chúng ta khẳng định được tích Descartes của một họ các tập khác rỗng là khác rỗng. Nếu không công nhận tiên đề chọn, chưa thể trả lời được tích Descartes của họ vô hạn tập hợp là rỗng hay không.

6.6 Bài tập

Bài tập 6.1. Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Chứng minh rằng hai mệnh đề sau tương đương.

(i) f là toàn ánh.

(ii) $\text{Im}(f) = Y$.

Định nghĩa của đơn ánh và song ánh làm chúng ta có cảm giác rằng song ánh là hiếm gặp, bởi vì song ánh là một trường hợp riêng của đơn ánh. Bài tập sau cho biết có thể tạo ra một song ánh từ một đơn ánh, theo một cách "tự nhiên".

Bài tập 6.2. Cho ánh xạ $f : X \to Y$ là đơn ánh. $\overline{f}$ là ánh xạ với tập nguồn là X, tập đích là $\text{Im}(f)$, cùng công thức là $\overline{f}(x) = f(x)$ với mọi $x \in X$. Chứng minh rằng $\overline{f}$ là song ánh.

Bài tập 6.3. Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Chứng minh rằng:

(i) $\text{id}_X \circ f = f$.

(ii) $f \circ \text{id}_Y = f$.

(iii) Nếu f có ánh xạ ngược thì ánh xạ ngược đó là duy nhất. [Gợi ý: Giả sử g, h là hai ánh xạ ngược của f, hãy xét ánh xạ $g \circ f \circ h$]

Bài tập 6.4. Cho hai ánh xạ khả nghịch $g : Y \to Z$ và $f : X \to Y$. Chứng minh rằng $g \circ f$ cũng khả nghịch và ánh xạ ngược của $g \circ f$ là $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Bài tập 6.5. Cho hai ánh xạ khả nghịch $g : Y \to Z$ và $f : X \to Y$. Chứng minh rằng

(i) Nếu $g \circ f$ là đơn ánh thì f là đơn ánh.

(ii) Nếu $g \circ f$ là toàn ánh thì g là toàn ánh.

Bài tập 6.6. Cho ánh xạ $f : X \to Y$. A, B là hai tập hợp con của X. Chứng minh rằng

(i) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.

(ii) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$.

(iii) $f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B]$.

Hãy tìm một ví dụ mà $f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$ và một ví dụ mà $f[A - B] \neq f[A] - f[B]$. [Gợi ý: Với ví dụ thứ nhất, chọn A, B sao cho A và B là hai tập rời nhau. Với ví dụ thứ hai, chọn A, B sao cho ảnh của A và ảnh của B bằng nhau.]

Nghịch ảnh là một khái niệm quan trọng trong topology. Một vài trong những lý do cho điều đó là kết quả trong hai bài tập sau.

Bài tập 6.7. Cho ánh xạ $f : X \to Y$. A, B là hai tập hợp con của Y. Chứng minh rằng

(i) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.

(ii) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

(iii) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

Bài tập 6.8. Cho ánh xạ $f : X \to Y$. $(A_i)_{i \in I}$ (tập hợp I khác rỗng) là một họ tập hợp và mỗi tập hợp là tập con của Y. Chứng minh rằng

(i) $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$.

(ii) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$.

Bài tập 6.9. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, hai bộ-n có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bằng nhau khi và chỉ khi $a_i = b_i$ với mọi số tự nhiên i không vượt quá n.

7 Quan hệ

7.1 Quan hệ hai ngôi

Cho đến mục này, bạn chắc hẳn đọc đã bắt gặp thuật ngữ quan hệ, hoặc sử dụng khái niệm đó (dù là theo cách tường minh hay ngầm định) trong tài liệu vài lần. Chúng ta đều đã biết *quan hệ bằng nhau giữa các số thực*, *quan hệ bao hàm giữa các tập hợp*, *quan hệ so sánh giữa các số thức*... Điểm chung trong những ví dụ trên về quan hệ là có hai đối tượng cùng thuộc tập hợp nào đấy và được đặt trong mối quan hệ đó – *hai số thực bằng nhau*, *tập hợp này là tập hợp con của tập hợp kia*, *số thực này nhỏ hơn hoặc bằng số thực kia*. Sự ghép cặp như vậy dẫn tới ý tưởng định nghĩa quan hệ bằng tích Descartes của hai tập hợp.

Định nghĩa 7.1 (Quan hệ hai ngôi)**.** Cho tập hợp S. Một quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trên tập hợp S là một tập hợp con của $S \times S$. Chúng ta viết $\mathscr{R} \subseteq S \times S$. Với hai phần tử $x, y \in S$, nếu x có quan hệ $\mathscr{R}$ với y thì chúng ta viết $x \mathscr{R} y$.

Trong tài liệu này, chúng ta chỉ định nghĩa và quan tâm đến quan hệ hai ngôi. Nếu chúng ta chỉ nhìn nhận một quan hệ hai ngôi bằng định nghĩa trên thì sẽ không có thêm thông tin gì. Có những quan hệ trên các tập hợp nhất định có các tính chất đáng lưu ý. Hãy xem xét thêm một số ví dụ.

Ví dụ 7.2. Trên tập hợp số thực, chúng ta có quan hệ nhỏ hơn hoặc bằng, với kí hiệu $\leq$. Chẳng hạn: $-1 \leq 2$, $\sqrt{5} \leq 3$.
Quan hệ $\leq$ trên tập hợp số thực có các tính chất

- Phản xạ: với mọi số thực x, có $x \leq x$.
- Phản đối xứng: nếu $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y$.
- Bắc cầu: nếu $x \leq y$ và $y \leq z$ thì $x \leq z$.

Ngoài ra, với hai số thực x, y khác nhau, chỉ có một trong hai mệnh đề sau là đúng: (1) $x \leq y$, (2) $y \leq x$.

Ví dụ 7.3. Trên tập hợp số tự nhiên, chúng ta có quan hệ chia hết. Chẳng hạn: 1 chia hết 2, 3 chia hết 12 (hay còn nói 1 là ước của 2, 3 là ước của 12).

Quan hệ chia hết trên tập hợp số tự nhiên có tính chất sau:

- Phản xạ: với mọi số tự nhiên a, a chia hết a.
- Phản đối xứng: nếu a chia hết b và b chia hết a thì $a = b$.
- Bắc cầu: nếu a chia hết b và b chia hết c thì a chia hết c.

Ví dụ 7.4. Trên tập hợp số nguyên, chúng ta có quan hệ đồng dư modulo n với n là một số nguyên khác không (nghĩa là hai số nguyên có hiệu chia hết cho n). Để biểu thị hai số nguyên a và b đồng dư modulo n, chúng ta viết $a \equiv b \pmod{n}$ hoặc $a \equiv_n b$.
Quan hệ đồng dư modulo n trên tập hợp số nguyên có các tính chất

- Phản xạ: Với mọi số nguyên a, $a \equiv a \pmod{n}$.
- Đối xứng: Với mọi số nguyên a, b, nếu $a \equiv b \pmod{n}$ thì $b \equiv a \pmod{n}$ và ngược lại.
- Bắc cầu: Với mọi số nguyên a, b, c, nếu $a \equiv b \pmod{n}$ và $b \equiv c \pmod{n}$ thì $a \equiv c \pmod{n}$.

Với hai số nguyên a và b bất kỳ, có thể xảy ra trường hợp chúng không đồng dư modulo n.

Trong phần còn lại của chương này, chúng ta nói về hai loại quan hệ đặc biệt: quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự. Mỗi *loại quan hệ* được xác định bởi những tính chất mà chúng thỏa mãn.

7.2 Trường hợp riêng: Quan hệ tương đương

Định nghĩa 7.5 (Quan hệ tương đương)**.** Quan hệ tương đương trên một tập hợp là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp đó và quan hệ tương đương thỏa mãn ba tính chất: phản xạ, đối xứng, và bắc cầu. Chúng ta viết bằng lời và kí hiệu, nếu $\mathscr{R}$ là một quan hệ tương đương trên tập hợp S thì $\mathscr{R}$ thỏa mãn ba tính chất

(i) (Phản xạ) Với mọi $x \in S$, có $x\mathscr{R}x$.

(ii) (Đối xứng) Nếu $x\mathscr{R}y$ thì $y\mathscr{R}x$.

(iii) (Bắc cầu) Nếu $x\mathscr{R}y$ và $y\mathscr{R}z$ thì $x\mathscr{R}z$.

Chúng ta đã gặp nhiều quan hệ tương đương: *quan hệ bằng nhau trên tập hợp số thực, quan hệ bằng nhau giữa các tập hợp, quan hệ đồng dư modulo n trên tập hợp số nguyên, quan hệ đồng dạng giữa các tam giác trong mặt phẳng...*

Quan hệ tương đương thường được kí hiệu là $\sim$.

Định nghĩa 7.6 (Lớp tương đương)**.** Cho tập hợp S và một quan hệ tương đương $\sim$ trên tập hợp S, x là một phần tử của S. **Lớp tương đương của x theo** $\sim$ là một tập hợp con của S, gồm tất cả các phần tử tương đương với x. Lớp tương đương của x theo $\sim$ (hoặc chúng ta nói lớp tương đương của x nếu đã rõ rằng đang sử dụng quan hệ tương đương nào) được kí hiệu là $[x]$, chúng ta viết:

$$[x] = \{y \mid y \in S \wedge x \sim y\} \subseteq S.$$

Các lớp tương đương của một quan hệ tương đương có tính chất sau.

Định lý 7.7. *Cho tập hợp S và một quan hệ tương đương $\sim$ trên tập hợp S, x và y là các phần tử của S (không nhất thiết phân biệt). Nếu x và y tương đương thì $[x] = [y]$. Nếu x và y không tương đương thì $[x]$ và $[y]$ rời nhau.*

Chứng minh. Nếu x và y tương đương. Chúng ta lấy x' là một phần tử bất kì của $[x]$. Theo định nghĩa lớp tương đương, $x' \sim x$. Mà $x \sim y$ nên $x' \sim y$ theo tính chất bắc cầu của quan hệ tương đương, kéo theo x' thuộc $[y]$. Do đó $[x] \subseteq [y]$. Ngược lại, chúng ta lấy y' là một phần tử bất kì của $[y]$. Theo định nghĩa lớp tương đương, $y' \sim y$. Cùng với việc $y \sim x$, chúng ta suy ra $y' \sim x$ theo tính chất bắc cầu của quan hệ tương đương, dẫn đến y' thuộc $[x]$. Do đó $[y] \subseteq [x]$. Vậy $[x] = [y]$.

Nếu x và y không tương đương. Giả sử phản chứng rằng $[x]$ và $[y]$ có chung một phần tử z. Theo định nghĩa lớp tương đương, $x \sim z$ và $y \sim z$. Theo tính chất đối xứng và bắc cầu của quan hệ tương đương, $x \sim y$, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó giả sử phản chứng là sai. Vậy chúng ta phải có $[x]$ và $[y]$ rời nhau. □

Định lý trên khẳng định rằng tất cả các lớp tương đương theo một quan hệ tương đương trên một tập hợp cho trước tạo thành một phân hoạch của tập hợp đó. Khi làm việc với một lớp tương đương, chúng ta có thể chọn bất cứ phần tử nào của lớp tương đương đó để làm *đại diện* (chẳng hạn là x) và viết $[x]$.

Định nghĩa 7.8. Cho tập hợp S và một quan hệ tương đương $\sim$ trên tập hợp S. **Tập thương** của $\sim$ trên tập hợp S tập là một tập hợp gồm tất cả các lớp tương đương theo $\sim$. Tập thương của $\sim$ trên tập hợp S được kí hiệu là $S/_\sim$. Chúng ta viết

$$S/_\sim = \{[x] \mid x \in S\}.$$

Ngược lại, cho trước một phân hoạch của một tập hợp S khác rỗng, chúng ta có thể định nghĩa một quan hệ tương đương tương ứng với phân hoạch đó. Giả sử họ các tập hợp S_i (với $i \in I$ và tập hợp I khác rỗng) tạo thành một phân hoạch của tập hợp S. Khi đó chúng ta định nghĩa một quan hệ $\mathscr{R}$ trên S như sau: $x\mathscr{R}y$ nếu và chỉ nếu tồn tại $i \in I$ sao cho x và y là phần tử của A_i. Trong trường hợp này, $\mathscr{R}$ chính là một quan hệ tương đương. Phần kiểm chứng, chúng tôi xin nhường lại cho bạn đọc.

7.3 Trường hợp riêng: Quan hệ thứ tự

Trước mục này, chúng ta đã nhắc đến quan hệ nhỏ hơn hoặc bằng giữa các số thực và gọi đó là quan hệ so sánh. Thực ra, tên gọi chính thức của loại quan hệ này là quan hệ thứ tự.

Định nghĩa 7.9 (Quan hệ thứ tự)**.** **Quan hệ thứ tự** (hay còn gọi là **quan hệ thứ tự bộ phận**) trên một tập hợp là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp đó và quan hệ thứ tự thỏa mãn ba tính chất: phản xạ, phản đối xứng, và bắc cầu. Chúng ta viết bằng lời và kí hiệu, nếu $\mathscr{R}$ là một quan hệ thứ tự trên tập hợp S thì $\mathscr{R}$ thỏa mãn ba tính chất:

(i) (Phản xạ) Với mọi $x \in S$, có $x\mathscr{R}x$.

(ii) (Phản đối xứng) Với mọi $x, y \in S$, nếu $x\mathscr{R}y$ và $y\mathscr{R}x$ thì $x = y$.

(iii) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in S$, nếu $x\mathscr{R}y$ và $y\mathscr{R}z$ thì $x\mathscr{R}z$.

Một tập hợp với một quan hệ thứ tự trên đó được gọi là **tập được sắp**.

Quan hệ thứ tự thường được kí hiệu là $\leq$ nếu như không có hiểu nhầm nào hoặc không có quy ước gì khác. Nếu $x \leq y$ thì chúng ta cũng viết $y \geq x$. Khi $x \leq y$ và $x \neq y$ thì chúng ta viết $x < y$ hoặc $y > x$. Khi $x \leq y$ thì thay vì nói "x nhỏ hơn y" (áp dụng với phần tử của các tập hợp số), chúng ta nói "x đi trước y".

Chúng ta xem xét hai ví dụ tiêu biểu về quan hệ thứ tự.

Ví dụ 7.10. Trên tập hợp số thực, chúng ta có quan hệ nhỏ hơn hoặc bằng, với kí hiệu $\leq$. Đây là một quan hệ thứ tự. Quan hệ nhỏ hơn (với kí hiệu $<$) trên tập số thực thỏa mãn tính chất bắc cầu nhưng không thỏa mãn tính chất phản xạ và phản đối xứng nên không phải là một quan hệ thứ tự.

Ngoài ra, với hai số thực x, y khác nhau, chỉ có một trong hai mệnh đề sau là đúng: (1) $x \leq y$, (2) $y \leq x$. Nếu hai số thực bằng nhau thì giữa chúng có quan hệ thứ tự, theo tính chất phản xạ.

Ví dụ 7.11. Chúng ta xét tập lũy thừa của tập hợp gồm hai phần tử $\{1, 2\}$. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Quan hệ bao hàm giữa các tập hợp là một quan hệ thứ tự trên tập lũy thừa này.

Tuy nhiên, mặc dù có những cặp tập hợp có thể đặt vào quan hệ bao hàm, chẳng hạn như

$$\varnothing \subseteq \{1\}; \quad \varnothing \subseteq \{2\}; \quad \varnothing \subseteq \{1, 2\}; \quad \{1\} \subseteq \{1, 2\}; \quad \{2\} \subseteq \{1, 2\}$$

nhưng vẫn có cặp tập hợp không thể đặt vào quan hệ bao hàm, đó là: $\{1\}$ không phải tập hợp con của $\{2\}$ và $\{2\}$ cũng không phải tập hợp con của $\{1\}$. Đây là sự khác biệt mấu chốt giữa ví dụ này và ví dụ liền trước.

Từ sự khác biệt giữa hai ví dụ về quan hệ thứ tự, chúng ta đưa ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 7.12 (Quan hệ thứ tự toàn phần)**.** Cho trước một tập hợp và một quan hệ thứ tự trên tập hợp đó. Nếu hai phần tử bất kì của tập hợp này luôn đặt được vào quan hệ thứ tự đã cho (chúng ta còn nói rằng hai phần tử như vậy so sánh được với nhau) thì chúng ta nói quan hệ thứ tự này là **quan hệ thứ tự toàn phần**.
Một tập hợp với một quan hệ thứ tự toàn phần được gọi là **tập được sắp toàn phần**.

Quan hệ thứ tự toàn phần là trường hợp riêng của quan hệ thứ tự (quan hệ thứ tự bộ phận). Khi ngữ cảnh chỉ cho biết một quan hệ là quan hệ thứ tự thì chúng ta hiểu đó là quan hệ thứ tự bộ phận, cho đến khi chỉ ra được đó là quan hệ thứ tự toàn phần.

Trong một tập được sắp, có thể tồn tại những phần tử được gọi là phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

Định nghĩa 7.13 (Phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất)**.** Cho tập S là một tập hợp khác rỗng được sắp với quan hệ thứ tự $\leq$.

(i) Phần tử x của S được gọi là **phần tử nhỏ nhất** (theo quan hệ thứ tự $\leq$) nếu với mọi phần tử y của S, có $x \leq y$. Phần tử nhỏ nhất của S được kí hiệu là $\min S$.

(ii) Phần tử x của S được gọi là **phần tử lớn nhất** (theo quan hệ thứ tự $\leq$) nếu với mọi phần tử y của S, có $y \leq x$. Phần tử lớn nhất của S được kí hiệu là $\max S$.

Tuy một quan hệ thứ tự có thể không phải quan hệ thứ tự toàn phần, nhưng khi một tập được sắp có phần tử nhỏ nhất (hay lớn nhất) thì phần tử đó so sánh được với tất cả các phần tử khác trong tập hợp đã cho.

Định lý 7.14. *Nếu một tập được sắp có phần tử nhỏ nhất (hay lớn nhất) thì phần tử đó là duy nhất.*

Chứng minh. Chúng ta gọi tập hợp được sắp đã cho là S, kí hiệu quan hệ thứ tự trên S là $\leq$.

Nếu x, y là các phần tử nhỏ nhất của S thì theo định nghĩa phần tử nhỏ nhất, $x \leq y$ và $y \leq x$. Theo tính chất phản đối xứng, $x = y$. Do đó nếu S có phần tử nhỏ nhất thì phần tử nhỏ nhất đó là duy nhất.

Nếu a, b là các phần tử lớn nhất của S thì theo định nghĩa phần tử lớn nhất, $a \leq b$ và $b \leq a$. Theo tính chất phản đối xứng, $a = b$. Do đó nếu S có phần tử lớn nhất thì phần tử lớn nhất đó là duy nhất. □

7.4 Trường hợp riêng: Quan hệ tiền thứ tự

Quan hệ thứ tự là một trường hợp riêng của quan hệ tiền thứ tự. Quan hệ tiền thứ tự có tính chất phản xạ, bắc cầu, nhưng không nhất thiết có tính chất phản đối xứng.

Định nghĩa 7.15 (Quan hệ tiền thứ tự)**. Quan hệ tiền thứ tự** (hay còn gọi là **quan hệ tiền thứ tự bộ phận**) trên một tập hợp là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp đó và quan hệ tiền thứ tự thỏa mãn hai tính chất: phản xạ và bắc cầu. Chúng ta viết bằng lời và kí hiệu, nếu $\mathscr{R}$ là một quan hệ tiền thứ tự trên tập hợp S thì $\mathscr{R}$ thỏa mãn hai tính chất:

(i) (Phản xạ) Với mọi $x \in S$, có $x\mathscr{R}x$.

(ii) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in S$, nếu $x\mathscr{R}y$ và $y\mathscr{R}z$ thì $x\mathscr{R}z$.

Nói riêng, trong một tập hợp với một quan hệ tiền thứ tự được định nghĩa trên đó, nếu hai phần tử bất kì luôn đặt được vào quan hệ tiền thứ tự thì chúng ta nói đó là **quan hệ tiền thứ tự toàn phần**.

Quan hệ tiền thứ tự được kí hiệu bởi $\lesssim$. Chúng ta xem xét một ví dụ về quan hệ tiền thứ tự nhưng lại không phải quan hệ thứ tự.

Ví dụ 7.16. Trên tập hợp số nguyên cũng có quan hệ chia hết. Tuy nhiên quan hệ chia hết trên tập hợp số nguyên có tính chất phản xạ và bắc cầu, nhưng không có tính chất phản đối xứng (chẳng hạn, 2 chia hết -2 và -2 chia hết 2 nhưng $2 \neq -2$).
Quan hệ chia hết trên tập hợp số nguyên là một quan hệ tiền thứ tự, nhưng không phải quan hệ thứ tự.

Ví dụ trên đây chỉ đơn thuần là ví dụ cho sự tồn tại của một quan hệ tiền thứ tự mà không phải quan hệ thứ tự, và dường như không cung cấp nhiều thông tin. Trong Chương 4, chúng ta sẽ định nghĩa một quan hệ tiền thứ tự có ý nghĩa trong việc xây dựng tập hợp số thực.

Định nghĩa 7.17. Cho trước một tập hợp và một quan hệ tiền thứ tự trên tập hợp đó. Nếu hai phần tử bất kì của tập hợp này luôn đặt được vào quan hệ tiền thứ tự đã cho thì chúng ta nói quan hệ thứ tự này là **quan hệ tiền thứ tự toàn phần**.

Định nghĩa 7.18 (Cận trên và Cận dưới)**.** Cho một tập hợp S được định nghĩa một *quan hệ tiền thứ tự bộ phận* $\leq$ và A là một tập hợp con của S.

(i) Một phần tử u của S được gọi là một **cận trên** của A nếu như với mỗi phần tử a của A, chúng ta có $a \leq u$. Chúng ta còn nói A bị chặn trên bởi u.

(ii) Một phần tử ℓ của S được gọi là một **cận dưới** của A nếu như với mỗi phần tử a của A, chúng ta có $\ell \leq a$. Chúng ta còn nói A bị chặn dưới bởi ℓ.

(iii) Tập hợp A được gọi là bị chặn nếu A có cả cận trên và cận dưới.

Định nghĩa 7.19. Cho một tập hợp S được định nghĩa một *quan hệ thứ tự bộ phận* $\leq$ và A là một tập hợp con của S.

(i) Một phần tử x của S được gọi là một **cận trên nhỏ nhất**, hay **cận trên đúng**, hay **supremum** của A nếu như với mỗi cận trên u của A, chúng ta có $x \leq u$. Cận trên nhỏ nhất của A được kí hiệu là $\sup A$.

(ii) Một phần tử y của S được gọi là một **cận dưới lớn nhất**, hay **cận dưới đúng**, hay **infimum** của A

nếu như với mỗi cận dưới ℓ của A, chúng ta có $\ell \leq y$. Cận dưới lớn nhất của A được kí hiệu là $\inf A$.

Khái niệm cận trên, cận dưới, cận trên đúng, cận dưới đúng được áp dụng cho cả quan hệ tiền thứ tự và quan hệ thứ tự.

Chúng ta theo dõi ví dụ sau.

Ví dụ 7.20. Tập hợp
$$S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \text{ là một số nguyên dương}\right\}$$
là một tập hợp con của tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Tập hợp $\mathbb{Q}$ được sắp thứ tự toàn phần.

- S bị chặn trên bởi $1, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$ và bị chặn dưới bởi $0, \frac{-1}{2}, -1, \dots$
- 1 là cận trên nhỏ nhất của S.
- S không có phần tử nhỏ nhất. Bởi vì mỗi phần tử $\frac{1}{m}$ của S, luôn có phần tử nhỏ hơn, chẳng hạn $\frac{1}{m+1}, \frac{1}{2m}, \dots$
- 0 là cận dưới lớn nhất của S. Giả sử phản chứng rằng S có một cận dưới lớn hơn 0. Cận dưới đó (là một số hữu tỉ vì chúng ta đang xét S là tập hợp con của $\mathbb{Q}$). Chúng ta kí hiệu phân số tối giản của cận dưới đó là $\frac{p}{q}$. Nhưng vì $\frac{p}{q} \geq \frac{1}{q} > \frac{1}{2q}$ nên $\frac{p}{q}$ không phải cận dưới của S, dẫn đến giả sử phản chứng là sai. Do đó chúng ta khẳng định 0 là cận dưới lớn nhất của S.
- 1 vừa là cận trên nhỏ nhất, vừa là phần tử lớn nhất của S. Còn 0 là cận dưới lớn nhất của S nhưng không thuộc S, và do đó không phải phần tử nhỏ nhất của S.

Trong một tập hợp con A của một tập hợp S với một quan hệ thứ tự, có thể có phần tử nhỏ nhất, phần tử lớn nhất, cận dưới đúng, cận trên đúng. Những khái niệm này không nên bị nhầm lẫn.

- Nếu A có phần tử lớn nhất thì phần tử đó cũng là cận trên đúng.
- Nếu A có phần tử nhỏ nhất thì phần tử đó cũng là cận dưới đúng.
- Nếu A có cận trên đúng thì cận trên đúng không nhất thiết thuộc A, và không nhất thiết là phần tử lớn nhất của A.
- Nếu A có cận dưới đúng thì cận dưới đúng không nhất thiết thuộc A, và không nhất thiết là phần tử nhỏ nhất của A.

7.5 Bài tập

Bài tập 7.1. Chứng minh quan hệ đồng dư modulo n trong Ví dụ 7.4 là một quan hệ tương đương.

Bài tập 7.2. Với mỗi số nguyên a, chúng ta kí hiệu lớp tương đương theo quan hệ đồng dư modulo n và chứa a là $[a]_n$, hoặc $[a]$ nếu n đã rõ.

(i) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c, d. Nếu $a \equiv_n c$ và $b \equiv_n d$ thì $a + c \equiv_n b + d$.

(ii) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c, d. Nếu $a \equiv_n c$ và $b \equiv_n d$ thì $ac \equiv_n bd$.

Bài tập 7.3. Tập thương của quan hệ đồng dư modulo n trên tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ được kí hiệu là $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Phần (i) và (ii) của bài tập trước là cơ sở để chúng ta định nghĩa phép cộng và phép nhân trên $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ như sau
$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n \qquad [a]_n \cdot [b]_n = [ab]_n.$$

(i) Chứng minh rằng phép cộng trên $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ có tính chất kết hợp và giao hoán.

(ii) Chứng minh rằng phép nhân trên $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ có tính chất kết hợp, giao hoán, và tính chất phân phối với phép cộng.

(iii) Giả sử thêm n là một số nguyên tố. Chứng minh rằng nếu $[a]_n \neq [0]_n$ thì tồn tại số nguyên x sao cho $[a]_n \cdot [x]_n = [1]_n$. [Gợi ý: Sử dụng đồng nhất thức Bézout.]

Nhờ kết quả của Bài tập 7.2 phép cộng và phép nhân trên $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ trong bài tập vừa rồi *không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện của lớp tương đương*.

Bài tập 7.4. Cho tập hợp S và một quan hệ tương đương $\sim$ trên S. Chứng minh rằng tồn tại một toàn ánh $f : S \to S/_\sim$.

Bài tập 7.5. Cho tập hợp S và một quan hệ tiền thứ tự $\lesssim$ toàn phần trên S. Hai phần tử a và b của S được gọi là có quan hệ $\sim$ nếu và chỉ nếu $a \lesssim b$ và $b \lesssim a$.

(i) Chứng minh rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương trên S.

(ii) Nếu $\lesssim$ là một quan hệ tiền thứ tự *không toàn phần* trên S thì kết luận ở phần (i) có còn đúng không?

Bài tập 7.6. Chúng ta đã biết rằng trong tập hợp số thực $\mathbb{R}$, với mọi số thực x, y, z, nếu $x \leq y$ thì $x + z \leq y + z$. Nói cách khác, phép cộng trên tập hợp số thực *tương thích* với quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập hợp số thực. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương $n > 1$, trên tập hợp $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, không tồn tại quan hệ thứ tự toàn phần nào tương thích với phép cộng trên $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Bài tập 7.7. Cho A là tập hợp con khác rỗng của tập hợp S với một quan hệ thứ tự một phần.

(i) Giả sử A có cận trên nhỏ nhất. Chứng minh rằng A có phần tử lớn nhất khi và chỉ khi $\sup A$ là một phần tử của A.

(ii) Giả sử A có cận dưới lớn nhất. Chứng minh rằng A có phần tử nhỏ nhất khi và chỉ khi $\inf A$ là một phần tử của A.

Chương 3

Số tự nhiên, số nguyên, và số hữu tỉ

"God made the natural numbers; all else is the work of man."

---

*Leopold Kronecker (*1823 – 1891*)*

8 Số tự nhiên

8.1 Hệ tiên đề Peano

Cuối thế kỉ 19, nhà toán học người Ý Giuseppe Peano đưa ra một hệ tiên đề về các số tự nhiên. Hệ tiên đề này gồm 9 tiên đề sau.

Tiên đề 8.1. 0 *và S là hai đối tượng không được định nghĩa.*

(PA1) 0 *là một số tự nhiên.*

(PA2) Với mọi số tự nhiên x, có $x = x$.

(PA3) Với mọi số tự nhiên x và y, nếu $x = y$ thì $y = x$.

(PA4) Với mọi số tự nhiên x, y, và z, nếu $x = y$ và $y = z$ thì $x = z$.

(PA5) Với mọi x và y, nếu y là số tự nhiên và $x = y$ thì x cũng là một số tự nhiên.

(PA6) Với mọi số tự nhiên x, $S(x)$ là một số tự nhiên.

(PA7) Với mọi số tự nhiên x và y, nếu $S(x) = S(y)$ thì $x = y$.

(PA8) Với mọi số tự nhiên x, $S(x) \neq 0$.

(PA9) Nếu một tập hợp A thỏa mãn hai điều kiện sau

- $0 \in A$,
- *với mọi số tự nhiên n, $n \in A$ kéo theo $S(n) \in A$,*

thì mọi số tự nhiên đều thuộc A.

Tập hợp (tất cả) các số tự nhiên được kí hiệu là $\mathbb{N}$.

Tiên đề 1 khẳng định tập hợp số tự nhiên không rỗng. Hệ tiên đề ban đầu của Peano chọn 1 làm số tự nhiên "đầu tiên" thay vì 0. Nhưng trong tác phẩm chính thức của mình, ông lại chọn số 0 làm số tự nhiên đầu tiên. Cho đến nay, cộng đồng toán học không thống nhất rằng 0 là số tự nhiên hay không – Đây chỉ là vấn đề quy ước. Vì sự nhập nhằng đó, thay vì viết là "số tự nhiên", nhiều tác giả chọn cách viết là "số nguyên dương", "số nguyên không âm".

Tiên đề 2, 3, 4, 5 nói về quan hệ bằng nhau trên tập hợp số tự nhiên. Ba tiên đề 2, 3, 4 khẳng định quan hệ bằng nhau trên tập hợp số tự nhiên là một quan hệ tương đương. Tiên đề 5 có nghĩa là tập hợp số tự nhiên là *đóng* dưới quan hệ bằng nhau (một số tự nhiên không thể bằng một đối tượng nào đó nằm ngoài tập hợp số tự nhiên).

Đối tượng S không được định nghĩa trong hệ tiên đề trên. S được gọi là hàm successor (có nghĩa là kế tiếp, chúng tôi không dùng tên gọi được dịch). Tiên đề 6 phát biểu rằng tập hợp số tự nhiên đóng dưới hàm successor. Tiên đề 7 có nghĩa là S là một đơn ánh. Tiên đề 8 có nghĩa là không có số tự nhiên nào nhận 0 làm số tự nhiên liền sau nó. Ý nghĩa của hàm successor là nó gán một số tự nhiên với số tự nhiên ngay kế tiếp.

Tuy mang một hình thức khác, nhưng tiên đề 9 chính là nguyên lý quy nạp toán học. Tiên đề 9 còn được gọi là *tiên đề quy nạp*.

Nếu phải xây dựng lại các phép toán và quan hệ thứ tự trên tập hợp số tự nhiên từ hệ tiên đề Peano thì các công cụ duy nhất chúng ta có là những kết quả từ lý thuyết tập hợp, phương pháp phản chứng và phương pháp quy nạp toán học. Dưới đây là chứng minh cho nguyên lý quy nạp toán học.

Chúng ta nhắc lại nội dung nguyên lý quy nạp toán học: Nếu hai điều kiện sau thỏa mãn

(i) mệnh đề $p(0)$ đúng,

(ii) với mọi số tự nhiên $k \geq 0$, $p(k)$ kéo theo $p(k+1)$,

thì $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n.

Chứng minh nguyên lý quy nạp toán học. Chúng ta gọi A là tập hợp các số tự nhiên n sao cho có $p(n)$.

Vì có $p(0)$ nên $0 \in A$.

Vì với mọi số tự nhiên $k \geq 1$, $p(k)$ kéo theo $p(k+1)$ nên với mọi số tự nhiên $k \geq 1$, $k \in A$ kéo theo $(k+1) \in A$.

Theo tiên đề 9, A chứa mọi số tự nhiên. Theo định nghĩa của tập hợp A, có $p(n)$ với mọi số tự nhiên n. □

Có thể bạn đọc đã bỏ qua một câu hỏi: "Ngoài 0, còn số tự nhiên n nào mà không tồn tại số tự nhiên m sao cho $S(m) = n$ không?" Câu trả lời là không. Nhưng chúng ta cần một chứng minh.

Định lý 8.2. *Nếu n là một số tự nhiên khác 0 thì tồn tại một số tự nhiên m sao cho $S(m) = n$.*

Chứng minh. Mệnh đề có phát biểu tương đương như sau: Với mọi số tự nhiên n, nếu n khác 0 thì tồn tại số tự nhiên m sao cho $S(m) = n$.

Khi $n = 0$, tức là mệnh đề n là số tự nhiên khác 0 sai, thì theo tiên đề 8 không có số tự nhiên m nào sao cho $S(m) = n$ (lưu ý rằng mệnh đề kéo theo $P \implies Q$ đúng khi P và Q sai).

Khi $n = 1$, chúng ta có $S(0) = 1$.

Giả sử với số tự nhiên $k \geq 1$, $n = k$ kéo theo tồn tại số tự nhiên m sao cho $S(m) = k$. Khi đó $S(S(m)) = S(k)$.

Vậy, theo nguyên lý quy nạp toán học, với mọi số tự nhiên n khác không, tồn tại số tự nhiên m sao cho $S(m) = n$. □

Với định lý trên, chúng ta kết luận được rằng các số tự nhiên theo hệ tiên đề Peano được sinh ra từ 0 và hàm successor.

8.2 Các phép toán và quan hệ thứ tự trên tập hợp số tự nhiên

Trong mục này, chúng ta sẽ định nghĩa hai phép toán cộng, nhân và quan hệ thứ tự trên tập hợp số tự nhiên theo hệ tiên đề Peano.

Phép cộng hai số tự nhiên được định nghĩa bằng đệ quy như sau.

Định nghĩa 8.3 (Phép cộng số tự nhiên). Phép cộng hai số tự nhiên là một phép toán hai ngôi trên $\mathbb{N}$, kí hiệu là +. Phép cộng hai số tự nhiên a và b cho ra kết quả là một số tự nhiên, được kí hiệu là $a + b$, được gọi là **tổng** của a và b. Với hai số tự nhiên x và y, Chúng ta định nghĩa

$$x + 0 = x,$$
$$x + S(y) = S(x + y).$$

Phép nhân số tự nhiên cũng được định nghĩa bằng đệ quy.

Định nghĩa 8.4 (Phép nhân số tự nhiên)**.** Phép nhân hai số tự nhiên là một phép toán hai ngôi trên $\mathbb{N}$, kí hiệu là $\cdot$. Phép nhân hai số tự nhiên a và b cho ra kết quả là một số tự nhiên, được kí hiệu là $a \cdot b$, được gọi là **tích** của a và b. Với hai số tự nhiên x và y, chúng ta định nghĩa

$$x \cdot 0 = 0,$$
$$x \cdot S(y) = x + (x \cdot y).$$

Chúng tôi sẽ không chứng minh lại các tính chất quen thuộc của phép cộng, nhân, và quan hệ thứ tự trên tập hợp số tự nhiên. Thay vào đó, chúng tôi vạch ra trình tự logic của những tính chất đó để bạn đọc tự kiểm chứng.

Định lý 8.5. *Trong tập hợp số tự nhiên*

(i) *Phép cộng có tính chất kết hợp. Nói cách khác, với mọi số tự nhiên x, y, z, chúng ta có $(x+y)+z = x+(y+z)$.*

(ii) *Với mọi số tự nhiên x, có $0 + x = x$.*

(iii) *Phép cộng có tính chất giao hoán. Nói cách khác, với mọi số tự nhiên x, y, chúng ta có $x + y = y + x$.*

(iv) *Với mọi số tự nhiên x, y, $x + y = x$ kéo theo $y = 0$.*

(v) *Hai số tự nhiên a và b thỏa mãn $a + b = 0$ khi và chỉ khi $a = b = 0$.*

(vi) *Hai số tự nhiên a và b thỏa mãn $a + b = 1$ khi và chỉ khi $a = 0, b = 1$ hoặc $a = 1, b = 0$.*

Định lý 8.6. *Trong tập hợp số tự nhiên*

(i) *Phép nhân có tính chất phân phối (từ bên phải) với phép cộng. Nói cách khác, với mọi số tự nhiên x, y, z, chúng ta có $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.*

(ii) *Phép nhân có tính chất kết hợp. Nói cách khác, với mọi số tự nhiên x, y, z, chúng ta có $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.*

(iii) *Với mọi só tự nhiên x, có $0 \cdot x = 0$.*

(iv) *Với mọi số tự nhiên x, có $x \cdot S(0) = S(0) \cdot x = x$.*

(v) *Phép nhân có tính chất giao hoán. Nói cách khác, với mọi số tự nhiên x, y, chúng ta có $x \cdot y = y \cdot x$.*

(vi) *Với mọi số tự nhiên x, y, $x \cdot y = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $y = 0$.*

(vii) *Với mọi số tự nhiên x, y, $x \cdot y = 1$ khi và chỉ khi $x = y = 1$.*

Quan hệ thứ tự trong tập hợp số tự nhiên được định nghĩa dựa trên phép cộng số tự nhiên.

Định nghĩa 8.7. Số tự nhiên x được gọi là nhỏ hơn hoặc bằng số tự nhiên y nếu và chỉ nếu tồn tại số tự nhiên z sao cho $x + z = y$. Khi đó, chúng ta kí hiệu $x \leq y$. Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ thì chúng ta nói x nhỏ hơn y và kí hiệu $x < y$.

Quan hệ $\leq$ trong định nghĩa trên là một quan hệ thứ tự toàn phần. Điều này được khẳng định trong định lý sau.

Định lý 8.8. *(i) Quan hệ $\leq$ trên tập hợp số tự nhiên thỏa mãn tính chất phản xạ và bắc cầu.*

(ii) Với mọi số tự nhiên x, có $x < S(x)$.

(iii) Quan hệ $\leq$ trên tập hợp số tự nhiên thỏa mãn tính chất phản đối xứng.

(iv) Quan hệ $\leq$ trên tập hợp số tự nhiên là một quan hệ thứ tự toàn phần.

Sự tương thích của quan hệ $\leq$ và hai phép toán cộng và nhân trên tập hợp số tự nhiên được trình bày trong định lý sau.

Định lý 8.9. *(i) Với mọi số tự nhiên x, y, $x \leq y$ thì với mọi số tự nhiên z, có $x + z \leq y + z$.*

(ii) Với mọi số tự nhiên x, y, $x \leq y$ thì với mọi số tự nhiên z, có $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Bằng phương pháp phản chứng, từ định lý trên, chúng ta rút ra hệ quả sau.

Hệ quả 8.10. *Với mọi số tự nhiên x, y, z, nếu $x + z = y + z$ thì $x = y$.*

Định lý sau đây còn được phát biểu rằng "Giữa hai số tự nhiên liên tiếp, không còn số tự nhiên nào khác."

Định lý 8.11. *Với mọi số tự nhiên m, n, nếu $n \leq m$ và $m \leq S(n)$ thì hoặc $m = n$ hoặc $m = S(n)$.*

8.3 Bài tập

Bài tập 8.1. Sử dụng các kết quả phía trước Định lý 8.11, hãy chứng minh định lý này.

Bài tập 8.2. Với mỗi số tự nhiên n, A_n là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng n.

(i) Chứng minh rằng hợp của tất cả các tập hợp A_n là tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$.

(ii) Chứng minh rằng giao của tất cả các tập hợp A_n là tập hợp rỗng.

Bài tập 8.3. Chứng minh rằng

(i) Tồn tại hai tập hợp con có vô hạn phần tử của tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ sao cho hai tập hợp đó rời nhau.

(ii) Tồn tại hai tập hợp con có vô hạn phần tử của tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ sao cho giao của hai tập hợp đó có đúng n phần tử, trong đó n là một số tự nhiên.

(iii) Tồn tại hai tập hợp con A, B có vô hạn phần tử của tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ sao cho các tập hợp $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ có vô hạn phần tử.

9 Số nguyên

9.1 Xây dựng tập hợp số nguyên

Cho đến lúc này, chúng ta chưa định nghĩa phép trừ số tự nhiên. Từ Hệ quả 8.10 và định nghĩa quan hệ $\leq$ trên tập hợp số tự nhiên, chúng ta suy ra rằng: Nếu $x \leq y$ thì *tồn tại duy nhất* số tự nhiên z sao cho $x + z = y$. Đây là cơ sở để chúng ta định nghĩa phép trừ hai số tự nhiên.

Định nghĩa 9.1 (Phép trừ hai số tự nhiên)**.** Cho hai số tự nhiên x, y sao cho $x \leq y$. Số tự nhiên z duy nhất thỏa mãn $x + z = y$ được gọi là **hiệu** của y và x. Chúng ta kí hiệu $z = y - x$.

Nếu hai số tự nhiên x và y không thỏa mãn $x \leq y$ thì $y < x$ (có được lập luận này là nhờ $\leq$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trên tập hợp số tự nhiên). Theo định nghĩa quan hệ $\leq$ trên tập hợp số tự nhiên, phủ định của $x \leq y$ tương đương với việc không tồn tại số tự nhiên z nào sao cho $x + z = y$. Như vậy, có những trường hợp mà chúng ta không thực hiện được phép trừ hai số tự nhiên theo định nghĩa trên. Để định nghĩa được phép trừ hai số tự nhiên bất kì, chúng ta cần bổ sung các đối tượng mới vào tập hợp số tự nhiên — Bởi vì khi đó, hiệu $y - x$ với $y < x$ không phải là một số tự nhiên.

Trước khi đưa ra một định nghĩa như vậy, chúng tôi có một nhận xét: Nếu các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x + z = y$ thì

$$z = z - 0 = y - x = S(y) - S(x) = S(S(y)) - S(S(x)) = \cdots$$

Các đẳng thức trên gợi ý một quan hệ tương đương trên tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Định lý 9.2 (Quan hệ tương đương giữa các cặp số tự nhiên)**.** *Hai cặp có thứ tự số tự nhiên (a, b) và (c, d) được gọi là có quan hệ $\sim$ khi và chỉ khi $a + d = b + c$. Khi đó quan hệ $\sim$ trên tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ là một quan hệ tương đương.*

Bằng quan hệ tương đương trong định lý trên, chúng ta định nghĩa tập hợp số nguyên như sau.

Định nghĩa 9.3. Tập thương $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_\sim$ là tập hợp số nguyên. Chúng ta kí hiệu một số tự nhiên là $[(a, b)]$, trong đó a và b là hai số tự nhiên. Tập hợp số nguyên (tập thương $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_\sim$) được kí hiệu là $\mathbb{Z}$.

Để quen hơn với định nghĩa này, chúng ta theo dõi một ví dụ.

Ví dụ 9.4. Với n là số tự nhiên, chúng ta có

$$\begin{aligned}
&(1, 0) \sim (2, 1) \sim (3, 2) \sim \cdots \sim (n + 1, n) \in [(1, 0)],\\
&(2, 0) \sim (3, 1) \sim (4, 2) \sim \cdots \sim (n + 2, n) \in [(2, 0)],\\
&\quad \cdots\\
&(0, 1) \sim (1, 2) \sim (2, 3) \sim \cdots \sim (n, n + 1) \in [(0, 1)],\\
&(0, 2) \sim (1, 3) \sim (2, 4) \sim \cdots \sim (n, n + 2) \in [(0, 2)].
\end{aligned}$$

9.2 Các phép toán và quan hệ thứ tự trên tập hợp số nguyên

Đầu tiên, chúng ta định nghĩa phép cộng số nguyên.

Định nghĩa 9.5 (Phép cộng số nguyên)**.** Phép cộng số nguyên là một phép toán hai ngôi trên tập hợp số nguyên, kí hiệu là $+$. Với hai số nguyên $[(a, b)]$ và $[(c, d)]$, chúng ta kí hiệu kết quả của phép cộng hai số nguyên này là $[(a, b)] + [(c, d)]$ và định nghĩa

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)].$$

Định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn đại diện của lớp tương đương. Nói cách khác, nếu chúng ta chọn hai phần tử khác nhau $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ từ lớp tương đương $[(a, b)]$ và hai phần tử khác nhau $(c_1, d_1) \sim (c_2, d_2)$ từ lớp tương đương $[(c, d)]$ thì

$$[(a_1, b_1)] + [(c_1, d_1)] = [(a_2, b_2)] + [(c_2, d_2)].$$

Trong tập hợp số tự nhiên, với hai số tự nhiên x, y bất kì, tồn tại số tự nhiên z khi và chỉ khi $x \leq y$. Nói cách khác, phép trừ hai số tự nhiên không phải lúc nào cũng thực hiện được. Định lý sau đây khẳng định rằng luôn thực hiện được phép trừ số nguyên.

Định lý 9.6. *Với mọi số nguyên* $[(a, b)], [(c, d)]$, *có* $[(a, b)] + [(b + c, a + d)] = [(c, d)]$.

Phép cộng số nguyên có các tính chất sau.

Định lý 9.7. *Trong tập hợp số nguyên,*

(i) Phép cộng hai số nguyên có tính chất kết hợp. Nói cách khác, với các số nguyên $[(a, b)], [(c, d)], [(x, y)]$, *chúng ta có*
$$([(a, b)] + [(c, d)]) + [(x, y)] = [(a, b)] + ([(c, d)] + [(x, y)]).$$

(ii) Với mọi số nguyên $[(a, b)]$, *chúng ta có* $[(a, b)] + [(0, 0)] = [(0, 0)] + [(a, b)] = [(a, b)]$.

(iii) Với mọi số nguyên $[(a, b)]$, *chúng ta có* $[(a, b)] + [(b, a)] = [(b, a)] + [(a, b)] = [(0, 0)]$.

(iv) Phép cộng hai số nguyên có tính chất giao hoán. Nói cách khác, với mọi số nguyên $[(a, b)], [(c, d)]$, *chúng ta có*
$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(c, d)] + [(a, b)].$$

Định lý 9.8. *Trong tập hợp số nguyên,*

(i) Tồn tại duy nhất số nguyên được gọi là ***phần tử đồng nhất của phép cộng****. Nói cách khác, tồn tại duy nhất số nguyên* θ *sao cho với mọi số nguyên* α, *có* $\alpha + \theta = \theta + \alpha = \alpha$.

(ii) Với mỗi số nguyên α, *tồn tại duy nhất số nguyên* β *được gọi là* ***phần tử đối****, hay* ***số nguyên đối*** *của* α. *Nói cách khác, với mỗi số nguyên* α, *tồn tại duy nhất số nguyên* β *sao cho* $\alpha + \beta = \beta + \alpha = [(0, 0)]$.

Phần tử đồng nhất của phép cộng số nguyên là $[(0, 0)]$. Phần tử đối của số nguyên $[(a, b)]$ là $[(b, a)]$. Định lý trên là cơ sở cho định nghĩa và kí hiệu sau đây.

Định nghĩa 9.9. (i) Với mỗi số nguyên α, số nguyên đối của α được kí hiệu là $-\alpha$.

(ii) Phép trừ hai số nguyên là một phép toán hai ngôi trên tập hợp số nguyên. Kết quả của phép trừ hai số nguyên α và β là tổng của α và $(-\beta)$. Chúng ta kí hiệu kết quả của phép trừ α cho β là $\alpha - \beta$.

Chúng ta gặp khó khăn trong việc định nghĩa phép nhân hai số nguyên. Để khắc phục điều này, chúng ta định nghĩa số nguyên dương, số nguyên âm, số nguyên không âm.

Định nghĩa 9.10. (i) Một số nguyên $\alpha = [(x, y)]$ được gọi là một **số nguyên dương** nếu *tồn tại* số tự nhiên $n \neq 0$ sao cho $(n, 0) \sim (x, y)$ (nói cách khác, $(n, 0)$ thuộc lớp tương đương $[(x, y)]$).

(ii) Một số nguyên $\alpha = [(x, y)]$ được gọi là một **số nguyên âm** nếu *không tồn tại* số tự nhiên n nào sao cho $(n, 0) \sim (x, y)$.

Theo định nghĩa trên, một số nguyên là không âm nếu số nguyên đó bằng $[(0, 0)]$ hoặc số nguyên đó là số nguyên dương. Định lý sau đây cho phép mô tả số nguyên âm tốt hơn, thay vì sử dụng phủ định như trong định nghĩa trên.

Định lý 9.11. *(i) Số nguyên α là số nguyên không âm khi và chỉ khi tồn tại số tự nhiên n sao cho $\alpha = [(n, 0)]$. Ngoài ra, nếu α là số nguyên không âm thì tồn tại duy nhất số tự nhiên n sao cho $\alpha = [(n, 0)]$.*

(ii) Số nguyên α là số nguyên âm khi và chỉ khi tồn tại số tự nhiên $n \neq 0$ sao cho $\alpha = [(0, n)]$. Ngoài ra, nếu α là số nguyên âm thì tồn tại duy nhất số tự nhiên $n \neq 0$ sao cho $\alpha = [(0, n)]$.

(iii) Số nguyên α là số nguyên dương khi và chỉ khi $(-\alpha)$ là số nguyên âm.

Với định lý trên và định nghĩa phép cộng số nguyên, chúng ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 9.12. *(i) Tổng hai số nguyên dương là một số nguyên dương.*

(ii) Tổng hai số nguyên không âm là một số nguyên không âm.

(iii) Tổng hai số nguyên âm là một số nguyên âm.

Chúng ta bắt đầu định nghĩa phép nhân số nguyên.

Định nghĩa 9.13. Phép nhân hai số nguyên là một phép toán hai nôi trên tập hợp số nguyên. Kết quả của phép nhân hai số nguyên α, β được kí hiệu là $\alpha \cdot \beta$, được gọi là tích hai số nguyên α, β và được định nghĩa cho đủ bốn trường hợp như sau:

- Nếu α và β là các số nguyên không âm thì tồn tại số tự nhiên m, n sao cho $\alpha = [(m, 0)]$ và $\beta = [(n, 0)]$. Chúng ta định nghĩa
$$\alpha \cdot \beta = [(m \cdot n, 0)].$$
- Nếu α là số nguyên không âm, β là số nguyên âm thì chúng ta định nghĩa
$$\alpha \cdot \beta = -\alpha \cdot (-\beta).$$
- Nếu α là số nguyên âm, β là số nguyên không âm thì chúng ta định nghĩa
$$\alpha \cdot \beta = -(-\alpha) \cdot \beta.$$
- Nếu α là số nguyên không âm, β là số nguyên không âm thì chúng ta định nghĩa
$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta).$$

Trong định nghĩa trên, chúng ta lấy định nghĩa phép nhân hai số nguyên không âm làm cơ sở để định nghĩa phép nhân hai số nguyên trong các trường hợp khác. Có một câu hỏi muôn thuở mà nhiều người học toán luôn đặt ra: "Tại sao tích của hai số nguyên âm lại là một số nguyên dương?" Đó là bởi định nghĩa như vậy giúp phép cộng và phép nhân số nguyên có được các tính chất mong muốn — chẳng hạn tính chất phân phối của phép nhân với phép cộng số nguyên.

Định lý ngay dưới đây là hệ quả trực tiếp từ định nghĩa phép nhân số nguyên.

Định lý 9.14. *Với mọi số nguyên α, β*

(i) $[(0,0)] \cdot \alpha = \alpha \cdot [(0,0)] = [(0,0)]$.

(ii) $(-\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (-\beta) = -\alpha \cdot \beta$.

(iii) $\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$.

Định lý 9.15. *Trong tập hợp số nguyên,*

(i) Phép nhân các số nguyên có tính chất kết hợp. Tức là với mọi số nguyên α, β, γ, chúng ta có $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

(ii) Với mọi số nguyên α, chúng ta có $\alpha \cdot [(1,0)] = [(1,0)] \cdot \alpha = \alpha$.

(iii) Phép nhân các số nguyên có tính chất giao hoán. Tức là với mọi số nguyên α, β, chúng ta có $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

(iv) Phép nhân các số nguyên có tính chất phân phối với phép cộng hai số nguyên. Tức là với mọi số nguyên α, β, γ, chúng ta có $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ và $\gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha + \gamma \cdot \beta$.

Tương tự với số tự nhiên, chúng ta có định lý sau cho số nguyên.

Định lý 9.16. *Cho hai số nguyên α, β.*

(i) $\alpha \cdot \beta = [(0,0)]$ *khi và chỉ khi* $\alpha = [(0,0)]$ *hoặc* $\beta = [(0,0)]$.

(ii) $\alpha \cdot \beta = [(1,0)]$ *khi và chỉ khi* $\alpha = \beta = [(1,0)]$ *hoặc* $\alpha = \beta = [(0,1)]$.

Quan hệ thứ tự trên tập hợp số nguyên được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 9.17. Cho hai số nguyên α và β. Chúng ta nói α nhỏ hơn hoặc bằng β, và kí hiệu $\alpha \leq \beta$ nếu và chỉ nếu tồn tại *số nguyên không âm* γ sao cho $\alpha + \gamma = \beta$. Nếu $\alpha \leq \beta$ và $\alpha \neq \beta$ thì chúng ta kí hiệu $\alpha < \beta$.

Định lý 9.18. *Quan hệ $\leq$ trên tập hợp số nguyên là một quan hệ thứ tự toàn phần.*

Với quan hệ $\leq$, và định nghĩa trên cho số nguyên dương, số nguyên âm, chúng ta thu được góc nhìn quen thuộc về số nguyên dương và số nguyên âm.

(i) α là một số nguyên dương khi và chỉ khi $[(0,0)] < \alpha$.

(ii) α là một số nguyên không âm khi và chỉ khi $[(0,0)] \leq \alpha$.

(iii) α là một số nguyên âm khi và chỉ khi $\alpha < [(0,0)]$.

Phép cộng và phép nhân số nguyên cũng tương thích với quan hệ thứ tự $\leq$.

Định lý 9.19. *(i) Với mọi số nguyên α, β, γ, $\alpha \leq \beta$ thì $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.*

(ii) Với mọi số nguyên α, β, nếu $[(0,0)] \leq \alpha$ và $[(0,0)] \leq \beta$ thì $[(0,0)] \leq \alpha \cdot \beta$.

9.3 Số tự nhiên và số nguyên

Định lý sau phát biểu rằng tập hợp số tự nhiên có thể nhúng được vào tập hợp số nguyên.

Định lý 9.20. *Ánh xạ $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ được định nghĩa bởi $\iota : n \mapsto [(n, 0)]$ là một đơn ánh nhưng không phải song ánh. Ngoài ra, với mọi số tự nhiên m, n, chúng ta có*

$$\begin{aligned} \iota(m+n) &= \iota(m) + \iota(n), \\ \iota(m \cdot n) &= \iota(m) \cdot \iota(n), \\ m \leq n &\implies \iota(m) \leq \iota(n). \end{aligned}$$

(Trong đó, phép cộng ở $\iota(m+n)$ là phép cộng hai số tự nhiên, phép cộng ở $\iota(m)+\iota(n)$ là phép cộng hai số nguyên; phép nhân ở $\iota(m \cdot n)$ là phép nhân hai số tự nhiên, phép nhân ở $\iota(m) \cdot \iota(n)$ là phép nhân hai số nguyên; quan hệ $\leq$ ở $m \leq n$ là quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập hợp số tự nhiên, quan hệ $\leq$ ở $\iota(m) \leq \iota(n)$ là quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập hợp số nguyên.)

Chứng minh. Với hai số tự nhiên m, n, $[(m, 0)] = [(n, 0)]$ kéo theo $(m, 0) \sim (n, 0)$. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(m, 0) \sim (n, 0)$ khi và chỉ khi $m + 0 = 0 + n$, tức là $m = n$. Do đó ι là một đơn ánh.

Giả sử phản chứng rằng tồn tại số tự nhiên n sao cho $\iota(n) = [(0, 1)]$. Theo định nghĩa của ι và định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, chúng ta suy ra $(n, 0) \sim (0, 1)$, tức là $n + 1 = 0$, hay $S(n) = 0$, điều này mâu thuẫn với tiên đề Peano thứ 8. Do đó không tồn tại số tự nhiên n nào sao cho $\iota(n) = [(0, 1)]$, nên ι không phải toàn ánh.

Vậy ι là đơn ánh nhưng không phải song ánh.

Theo định nghĩa phép cộng, phép nhân số nguyên và quan hệ $\leq$ trên tập hợp số nguyên

- $\iota(m + n) = [(m + n, 0)] = [(m, 0)] + [(n, 0)] = \iota(m) + \iota(n)$.
- $\iota(m \cdot n) = [(m \cdot n, 0)] = [(m, 0)] \cdot [(n, 0)] = \iota(m) \cdot \iota(n)$.
- Nếu $m \leq n$ thì tồn tại số tự nhiên c sao cho $m + c = n$. Vì $m + c = n$ nên $[(m, 0)] + [(c, 0)] = [(n, 0)]$, dẫn đến $[(m, 0)] \leq [(n, 0)]$ vì $[(c, 0)]$ là một số nguyên không âm. Do đó $[(m, 0)] \leq [(n, 0)]$ kéo theo $\iota(m) \leq \iota(n)$.

□

Đơn ánh $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ trong định lý trên bảo toàn phép toán cộng, nhân, và quan hệ thứ tự. Với định lý trên, chúng ta **đồng nhất** số tự nhiên n với số nguyên $[(n, 0)]$. Với sự đồng nhất đó, tập hợp số tự nhiên là một tập hợp con thực sự của tập hợp số nguyên.

9.4 Bài tập

Bài tập 9.1. Chứng minh Định lý 9.2.

Bài tập 9.2. Bình luận ngay sau Định nghĩa 9.5 cho phép cộng số nguyên nêu lên rằng định nghĩa đó không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện. Bài tập này sẽ làm rõ nhận định đó.

Phép cộng trên tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ được định nghĩa như sau: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ với mọi số tự nhiên a, b, c, d. Chứng minh rằng nếu $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ và $(c_1, d_1) \sim (c_2, d_2)$ thì $(a_1, b_1) + (c_1, d_1) = (a_2, b_2) + (c_2, d_2)$.

Bài tập 9.3. Cho số nguyên n và m. Chứng minh rằng nếu $n \leq m$ và $m \leq n + 1$ thì $m = n$ hoặc $m = n + 1$.

10 Nguyên lý quy nạp toán học

Mục này bàn nhiều hơn về nguyên lý quy nạp toán học cùng các biến thể và nguyên lý thứ tự tốt. Kết quả quan trọng nhất của mục này là nguyên lý thứ tự tốt.

10.1 Nguyên lý quy nạp toán học và các biến thể

Cúng ta có một mở rộng đơn giản sau đây cho nguyên lý quy nạp toán học, và cũng tương đương với nguyên lý quy nạp toán học.

Định lý 10.1 (Nguyên lý quy nạp toán học)**.** *Nếu hai điều kiện sau thỏa mãn*

(i) Mệnh đề $p(n)$ đúng với số nguyên n_0.

(ii) Với mọi số nguyên $n \geq n_0$, $p(n)$ kéo theo $p(n+1)$.

thì $p(n)$ đúng với mọi số nguyên lớn hơn hoặc bằng n_0.

Chứng minh. Chúng ta định nghĩa vị từ q áp dụng cho số tự nhiên n như sau: $q(n)$ là mệnh đề $p(n+n_0)$.

Như vậy

(i) Mệnh đề $q(0)$ đúng.

(ii) Với mọi số tự nhiên n, $q(n)$ kéo theo $q(n+1)$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, có $q(n)$ với mọi số tự nhiên n. Theo định nghĩa của $q(n)$ thì có $p(n)$ với mọi số nguyên n lớn hơn hoặc bằng n_0. □

Với dạng trên của nguyên lý quy nạp toán học, chúng ta có thể bắt đầu với trường hợp cơ sở là một số nguyên bất kì thay vì 0 hay 1. Các biến thể khác của nguyên lý quy nạp toán học dưới đây được phát biểu ở dạng "chuẩn", tức là bắt đầu với trường hợp cơ sở là 0. Thực ra các biến thể này đều có thể bắt đầu với trường hợp cơ sở là số nguyên bất kì.

Nguyên lý quy nạp mạnh cũng là một dạng tương đương của nguyên lý quy nạp toán học. Nguyên lý quy nạp mạnh có thay đổi ở bước quy nạp: Ở bước quy nạp, chúng ta không chỉ cần đến mệnh đề $p(k)$ mà còn cần đến một hay một số, thậm chí tất cả các mệnh đề trước $p(k)$.

Định lý 10.2 (Nguyên lý quy nạp mạnh)**.** *Nếu hai điều kiện sau thỏa mãn*

(i) Mệnh đề $p(0)$ đúng.

(ii) Với mọi số tự nhiên k, $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \leq k$ kéo theo $p(k+1)$.

thì $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên.

Chứng minh. Chúng ta định nghĩa vị từ c áp dụng cho số tự nhiên n bằng đệ quy:

- $c(0)$ là mệnh đề $p(0)$.
- Với mỗi số tự nhiên n, $c(n+1)$ là mệnh đề $c(n) \wedge p(n+1)$.

Mệnh đề $p(0)$ tương đương với mệnh đề $c(0)$.

Mệnh đề "với mọi số tự nhiên k, $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \leq k$ kéo theo $p(k+1)$" tương đương với mệnh đề "với mọi số tự nhiên k, $c(k)$ kéo theo $c(k+1)$".

Theo nguyên lý quy nạp toán học, $c(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n. Theo định nghĩa của mệnh đề $c(n)$, chúng ta suy ra $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n. □

Có những trường hợp mà chúng ta cần chứng minh mệnh đề $p(n)$ với n là số tự nhiên không vượt quá một số tự nhiên n_0 cho trước. Khi đó phương pháp quy nạp toán học có dạng sau.

Định lý 10.3 (Nguyên lý quy nạp toán học hữu hạn)**.** *Cho vị từ p được áp dụng trên các số tự nhiên không vượt quá số tự nhiên n_0. Nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) Mệnh đề $p(0)$ đúng.

*(ii) Với mọi số tự nhiên k **nhỏ hơn** n, $p(k)$ kéo theo $p(k+1)$.*

thì $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên không vượt quá số tự nhiên n_0.

Tuy nguyên lý quy nạp toán học được phát biểu cho số tự nhiên nhưng biến thể trên vẫn hợp lệ. Nguyên nhân là mệnh đề kéo theo $P \implies Q$ *chỉ sai* khi P đúng và Q sai. Còn nếu P sai thì mệnh đề $P \implies Q$ luôn đúng, bất kể giá trị chân lý của Q là gì.

10.2 Nguyên lý thứ tự tốt

Định lý 10.4 (Nguyên lý thứ tự tốt)**.** *Tập hợp con khác rỗng của tập hợp số nguyên dương có phần tử nhỏ nhất.*

Chứng minh. Chúng ta kí hiệu S là tập hợp con khác rỗng của tập hợp số nguyên dương.

Giả sử phản chứng rằng S không có phần tử nhỏ nhất. 1 không thuộc S vì 1 là số nguyên dương nhỏ nhất.

Với mỗi số nguyên dương k, nếu các số nguyên dương n không vượt quá k không thuộc S thì $(k+1)$ không thuộc S (vì nếu $(k+1)$ thuộc S thì $(k+1)$ là phần tử nhỏ nhất của S, trái với giả sử phản chứng).

Theo nguyên lý quy nạp mạnh, mọi số nguyên dương đều không thuộc S. Do đó S là tập hợp rỗng, mâu thuẫn với giả thiết. Do vậy giả sử phản chứng là sai. Vậy tập hợp S có phần tử nhỏ nhất. □

Tương tự với việc của nguyên lý quy nạp toán học có thể được áp dụng với trường hợp cơ sở là số nguyên bất kì, chúng ta có hệ quả sau. Hệ quả này cho phép chúng ta áp dụng nguyên lý thứ tự tốt một cách linh hoạt hơn.

Hệ quả 10.5.

*(i) Tập hợp con khác rỗng của tập hợp số nguyên **lớn hơn hoặc bằng** (hoặc **lớn hơn**) số nguyên n_0 nào đó **có phần tử nhỏ nhất**.*

*(ii) Tập hợp con khác rỗng của tập hợp số nguyên **nhỏ hơn hoặc bằng** (hoặc **nhỏ hơn**) số nguyên n_0 nào đó **có phần tử lớn nhất**.*

Tập hợp con trong phát biểu của nguyên lý thứ tự tốt có thể có vô hạn phần tử. Với một tập hợp hữu hạn và được sắp thứ tự toàn phần, chúng ta có nguyên lý sau.

Định lý 10.6 (Nguyên lý cực hạn)**.** *Tập hợp khác rỗng được sắp thứ tự toàn phần và có hữu hạn phần tử thì tập hợp đó có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.*

Chứng minh. Chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học rằng: Nếu một tập hợp khác rỗng được sắp thứ tự toàn phần và có n phần tử (n là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1) thì tập hợp đó có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

Khi $n = 1$, tập hợp chỉ có một phần tử thì phần tử đó là phần tử nhỏ nhất và cũng là phần tử lớn nhất.

Giả sử với $n = k \geq 1$, tập hợp khác rỗng được sắp thứ tự toàn phần và có k phần tử thì tập hợp đó cũng có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

Chúng ta kí hiệu S là một tập hợp được sắp thứ tự toàn phần và có $(k+1)$ phần tử. Chúng ta chọn ra một phần tử x bất kì của S thì $S \setminus \{x\}$ có k phần tử. Theo giả thiết quy nạp, $S \setminus \{x\}$ có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

- Nếu x nhỏ hơn phần tử nhỏ nhất của $S \setminus \{x\}$ thì x là phần tử nhỏ nhất của S. Ngược lại, phần tử nhỏ nhất của $S \setminus \{x\}$ cũng là phần tử nhỏ nhất của S.
- Nếu x lớn hơn phần tử lớn nhất của $S \setminus \{x\}$ thì x là phần tử lớn nhất của S. Ngược lại, phần tử lớn nhất của $S \setminus \{x\}$ cũng là phần tử lớn nhất của S.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, tập hợp khác rỗng được sắp thứ tự toàn phần và có hữu hạn phần tử thì tập hợp đó có phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất. □

Khi kết hợp nguyên lý thứ tự tốt với phương pháp chứng minh bằng phản chứng, chúng ta có phương pháp chứng minh giảm vô hạn. Phương pháp này còn được gọi là phương pháp giảm vô hạn của Fermat. Nhà toán học Fermat đã sử dụng phương pháp này để chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương a, b, c nào thỏa mãn $a^4 + b^4 = c^2$. Ngược với phương pháp quy nạp toán học, phương pháp giảm vô hạn được sử dụng để chứng minh một mệnh đề $p(n)$ là sai với mọi số tự nhiên n.

Định lý 10.7 (Giảm vô hạn)**.** *Nếu với mỗi số tự nhiên n, $p(n)$ kéo theo tồn tại số tự nhiên $m < n$ sao cho có $p(m)$ thì với mọi số tự nhiên n, không có $p(n)$.*

Chứng minh. Chúng ta kí hiệu S là tập hợp các số tự nhiên n sao cho có $p(n)$.

Giả sử phản chứng rằng S khác rỗng. Theo nguyên lý thứ tự tốt, S có phần tử nhỏ nhất. Chúng ta kí hiệu phần tử nhỏ nhất là n_0. Theo giả thiết, tồn tại số tự nhiên $m < n_0$ sao cho $p(m)$ đúng. Điều này mâu thuẫn với việc n_0 là phần tử nhỏ nhất của S. Do đó giả sử phản chứng là sai, kéo theo S là tập hợp rỗng.

Vậy mệnh đề $p(n)$ sai với mọi số tự nhiên n. □

Nguyên lý thứ tự tốt cung cấp một chứng minh cho nguyên lý quy nạp tiến-lùi, thường được biết đến với tên gọi *quy nạp kiểu Cauchy*. Nguyên lý quy nạp tiến-lùi được Cauchy sử dụng để chứng minh bất đẳng thức trung bình cộng-trung bình nhân: Cauchy chứng minh bất đẳng thức đó cho 2^k số thực không âm và chứng minh rằng nếu bất đẳng thức đúng với n số thực không âm thì cũng đúng với $(n-1)$ số thực không âm.

Định lý 10.8 (Nguyên lý quy nạp tiến-lùi)**.** *Cho vị từ p được áp dụng trên các số tự nhiên. Nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) Với $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n thuộc một tập hợp con vô hạn phần tử của $\mathbb{N}$.

(ii) Với mọi số tự nhiên k lớn hơn 0, $p(k)$ kéo theo $p(k-1)$.

thì $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n.

Chứng minh. Chúng ta kí hiệu A là tập hợp gồm các số tự nhiên n sao cho có $p(n)$, và B là tập hợp gồm các số tự nhiên n sao cho không có $p(n)$.

Giả sử phản chứng rằng tập hợp B khác rỗng. Theo định nghĩa hai tập hợp A và B, hai tập hợp này tạo thành một phân hoạch của $\mathbb{N}$. Theo nguyên lý thứ tự tốt, tập hợp B có phần tử nhỏ nhất. Chúng ta kí hiệu $b = \min B$. Vì tập hợp A có vô hạn phần tử nên trong A tồn tại phần tử a sao cho a lớn hơn b. Vì $p(k)$ kéo theo $p(k-1)$ với mọi số tự nhiên $k > 0$ nên $\neg p(k-1)$ kéo theo $\neg p(k)$ với mọi số tự nhiên $k > 0$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, có $\neg p(n)$ với mọi số tự nhiên $n \geq b$. Do đó, có $\neg p(a)$, điều này mâu thuẫn với việc có $p(a)$. Như vậy giả sử phản chứng là sai, kéo theo B là tập hợp rỗng và A là toàn bộ tập hợp số tự nhiên.

Vậy $p(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n. □

Một nhược điểm của nguyên lý thứ tự tốt và chứng minh của nguyên lý này là *không có tính xây dựng*. Chúng ta chỉ ra sự tồn tại của số nguyên dương nhỏ nhất trong một tập hợp con khác rỗng của tập hợp số nguyên dương, nhưng không biết đó là số nào, hay cách tìm số đó. Có một tư tưởng trong toán học được gọi là *tư tưởng xây dựng* (constructivism). Tư tưởng này khẳng định rằng để chứng minh sự tồn tại của một đối tượng toán học, cần phải đưa ra một ví dụ, hoặc thuật toán (cách) tìm ra ví dụ. Trái với tư tưởng xây dựng, chứng minh bằng phương pháp phản chứng giả sử rằng một đối tượng như vậy không tồn tại và tiếp tục lập luận để đi tới một mâu thuẫn. Tư tưởng xây dựng rất có ích trong việc học và làm toán, bởi quá trình tìm ví dụ và việc có một ví dụ cụ thể là rất giá trị trong việc hiểu một đối tượng toán học. Kĩ năng xây dựng ví dụ là một trong những kĩ năng tối quan trọng trong việc học và làm toán. Tuy vậy, phương pháp phản chứng vẫn luôn tỏ ra là một công cụ mạnh và dễ dàng, thậm chí đôi khi được coi là duy nhất để chứng minh nhiều định lý quan trọng về tính tồn tại.

10.3 Bài tập

Bài tập 10.1. Với mỗi số tự nhiên n, A_n là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng n. I là một tập hợp con khác rỗng của tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên m sao cho $A_m = \bigcup_{n \in I} A_n$.

Bài tập 10.2. Một tập hợp được sắp thứ tự toàn phần được gọi là *tập hợp được sắp thứ tự tốt* khi và chỉ khi mỗi tập hợp con khác rỗng của tập hợp đó đều có phần tử nhỏ nhất. Chứng minh rằng

(i) Tập hợp số tự nhiên (với quan hệ thứ tự thông thường) được sắp thứ tự tốt.

(ii) Tập hợp số nguyên (với quan hệ thứ tự thông thường) không phải tập hợp được sắp thứ tự tốt.

11 Số hữu tỉ

11.1 Xây dựng tập hợp số hữu tỉ

Chúng ta định nghĩa tập hợp số hữu tỉ dựa trên tập hợp số nguyên, cũng bằng một quan hệ tương đương.

Định lý 11.1. *Hai phần tử (a, b) và (c, d) của tập hợp $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ được gọi là có quan hệ $\sim$ khi và chỉ khi $ad - bc = 0$ (hay $ad = bc$). Khi đó quan hệ $\sim$ trên tập hợp $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ là một quan hệ tương đương.*

Định nghĩa 11.2 (Số hữu tỉ)**.** Tập hợp số hữu tỉ là tập thương $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}))/_\sim$. Chúng ta kí hiệu một số hữu tỉ là $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là hai số nguyên và $b \neq 0$.

Tập hợp số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathbb{Q}$. Kí hiệu $\frac{a}{b}$ được gọi là một **phân số**, trong đó số nguyên a là **tử số**, còn số nguyên $b \neq 0$ là **mẫu số**.

Chúng ta hãy điểm qua một số ví dụ về số hữu tỉ.

Ví dụ 11.3.

$$\begin{aligned}
\frac{0}{1} &= \frac{0}{-1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{-2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{-3} = \cdots \\
\frac{1}{1} &= \frac{-1}{-1} = \frac{2}{2} = \frac{-2}{-2} = \frac{3}{3} = \frac{-3}{-3} = \cdots \\
\frac{1}{2} &= \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} = \frac{-3}{-6} = \cdots \\
\frac{-2}{5} &= \frac{2}{-5} = \frac{-4}{10} = \frac{4}{-10} = \frac{-6}{15} = \frac{6}{-15} = \cdots
\end{aligned}$$

Từ định nghĩa số hữu tỉ, chúng ta có định lý sau, thường được gọi là tính chất cơ bản của phân số.

Định lý 11.4. *Nếu a, b, c là các số nguyên và b, c khác 0 thì* $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{ca}{cb}$.

Định lý 11.5 (Phân số tối giản)**.** *Một phân số được gọi là **phân số tối giản** khi và chỉ khi tử số và mẫu số là nguyên tố cùng nhau và mẫu số là một số nguyên dương.*

Với mỗi số hữu tỉ $\frac{a}{b}$, tồn tại duy nhất phân số tối giản $\frac{x}{y}$ sao cho $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.

11.2 Các phép toán và quan hệ thứ tự trên tập hợp số hữu tỉ

Chúng ta định nghĩa phép cộng và phép nhân số hữu tỉ.

Định nghĩa 11.6 (Phép cộng số hữu tỉ)**.** Phép cộng hai số hữu tỉ là một phép toán hai ngôi trên tập hợp số hữu tỉ, kí hiệu là +. Với hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, chúng ta kí hiệu kết quả của phép cộng hai số hữu tỉ này là $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ và

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Định nghĩa 11.7 (Phép nhân số hữu tỉ)**.** Phép nhân hai số hữu tỉ là một phép toán hai ngôi trên tập hợp số hữu tỉ, kí hiệu là ·. Với hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, chúng ta kí hiệu kết quả của phép nhân hai số hữu tỉ này là $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ và định nghĩa

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Bạn đọc lưu ý rằng chúng ta đang sử dụng định nghĩa số hữu tỉ như một lớp tương đương. Định nghĩa trên đây cho phép cộng và phép nhân hai số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện của lớp tương đương.

Phép cộng và phép nhân số hữu tỉ có các tính chất sau.

Định lý 11.8. *Trong tập hợp số hữu tỉ*

(F1) Phép cộng số hữu tỉ có tính chất kết hợp.

(F2) Với mọi số hữu tỉ $\frac{a}{b}$, chúng ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

(F3) Với mọi số hữu tỉ $\frac{a}{b}$, chúng ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{0}{1}.$$

(F4) Phép cộng số hữu tỉ có tính chất giao hoán.

(F5) Phép nhân số hữu tỉ có tính chất kết hợp.

(F6) Phép nhân số hữu tỉ có tính chất phân phối với phép cộng số hữu tỉ.

(F7) Với mỗi số hữu tỉ q, $q \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot q = q$.

(F8) Phép nhân số hữu tỉ có tính chất giao hoán.

(F9) Với mỗi số hữu tỉ $q \neq \frac{0}{1}$*, tồn tại số hữu tỉ* q' *sao cho* $qq' = q'q = \frac{1}{1}$.

Điểm khác biệt cơ bản trong các tính chất của phép nhân số hữu tỉ với phép nhân số nguyên là phần (F9) của định lý trên. Với định lý trên, người ta gọi tập hợp số hữu tỉ với hai phép toán cộng và nhân là trường số hữu tỉ. Từ định lý trên, chúng ta chứng minh được các kết quả sau.

Định lý 11.9. *Trong tập hợp số hữu tỉ*

*(i) Tồn tại đúng một số hữu tỉ là **phần tử đồng nhất của phép cộng**. Nói cách khác, tồn tại duy nhất số hữu tỉ* θ *sao cho với mọi số hữu tỉ* q*, có* $q + \theta = \theta + q = q$.

(ii) Với mỗi số hữu tỉ q*, tồn tại đúng một số hữu tỉ* q_0 *là **phần tử đối**, hay **số hữu tỉ đối** của* q*. Nói cách khác, với mỗi số hữu tỉ* q*, tồn tại duy nhất số hữu tỉ* q_0 *sao cho* $q + q_0 = q_0 + q = \frac{0}{1}$.

(iii) Với mọi số hữu tỉ q*, có* $\frac{0}{1} \cdot q = q \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1}$.

*(iv) Tồn tại đúng một một số hữu tỉ được gọi là **phần tử đồng nhất của phép nhân**. Nói cách khác, tồn tại duy nhất số hữu tỉ* e *sao cho với mọi số hữu tỉ* q*, chúng ta có* $e \cdot q = q \cdot e = q$.

(v) Với mỗi số hữu tỉ q *khác* $\frac{0}{1}$*, tồn tại duy nhất một số hữu tỉ* q_1 *được gọi là **phần tử nghịch đảo**, hay **số hữu tỉ nghịch đảo** của* q*. Nói cách khác, với mỗi số hữu tỉ* q*, tồn tại đúng một số hữu tỉ* q_1 *sao cho* $qq_1 = q_1q = \frac{1}{1}$*. Phần tử nghịch đảo của* q *được kí hiệu là* q^{-1}.

(vi) Nếu hai số hữu tỉ a, b *thỏa mãn* $ab = 0$ *thì ít nhất một trong hai số hữu tỉ* a, b *bằng* 0.

Chúng ta định nghĩa một quan hệ thứ tự trên tập hợp số hữu tỉ.

Định nghĩa 11.10. Với hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$, chúng ta nói $\frac{a}{b}$ nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{c}{d}$ và kí hiệu $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ khi và chỉ khi $abd^2 \leq cdb^2$.

Bạn đọc hẳn sẽ thấy định nghĩa trên không hề tự nhiên và không quen thuộc. Đây là lời giải thích của chúng tôi: Vì $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$ và $\frac{c}{d} = \frac{cd}{d^2}$ nên việc định nghĩa $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ khi và chỉ khi $abd^2 \leq cdb^2$ là tương thích với những gì chúng ta đã học ở chương trình phổ thông. Định nghĩa này cho phép chúng ta làm việc cả với mẫu số là số nguyên âm mà không cần chia làm hai trường hợp.

Định lý 11.11. *Quan hệ* $\leq$ *trên tập hợp số hữu tỉ là một quan hệ thứ tự toàn phần.*

Các phép toán cộng và nhân số hữu tỉ cũng tương thích với quan hệ $\leq$ trên tập hợp số hữu tỉ.

Định lý 11.12. *Trong tập hợp số hữu tỉ*

(i) Nếu các số hữu tỉ q_1, q_2 *thỏa mãn* $q_1 \leq q_2$ *thì với mọi số hữu tỉ* q_3*, có* $q_1 + q_3 \leq q_2 + q_3$.

(ii) Nếu các số hữu tỉ q_1, q_2 *thỏa mãn* $\frac{0}{1} \leq q_1$ *và* $\frac{0}{1} \leq q_2$ *thì* $\frac{0}{1} \leq q_1q_2$.

11.3 Số nguyên và số hữu tỉ

Tương tự, tập hợp số nguyên có thể được nhúng vào tập hợp số hữu tỉ.

Định lý 11.13. *Ánh xạ $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ được định nghĩa bởi $\iota(x) = \frac{x}{1}$ là một đơn ánh nhưng không phải song ánh và thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \iota(x+y) &= \iota(x) + \iota(y), \\ \iota(xy) &= \iota(x)\iota(y), \\ x \le y \implies \iota(x) &\le \iota(y). \end{aligned}$$

(Trong đó, phép cộng ở $\iota(x+y)$ là phép cộng hai số nguyên, phép cộng ở $\iota(x)+\iota(y)$ là phép cộng hai số hữu tỉ; phép nhân ở $\iota(xy)$ là phép nhân hai số nguyên, phép nhân ở $\iota(x)\cdot\iota(y)$ là phép nhân hai số hữu tỉ; quan hệ $\le$ ở $x \le y$ là quan hệ thứ tự $\le$ trên tập hợp số nguyên, quan hệ $\le$ ở $\iota(x) \le \iota(y)$ là quan hệ thứ tự $\le$ trên tập hợp số hữu tỉ.)

Chứng minh. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, chúng ta có $\iota(x) = \iota(y)$ khi và chỉ khi $x = y$. Do đó ι là một đơn ánh.

Giả sử phản chứng rằng tồn tại số nguyên x sao cho $\iota(x) = \dfrac{1}{2}$. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, chúng ta có $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $2 \cdot x = 1$. Vì $2 \cdot x \neq 0$ nên $x \neq 0$. Vì $2 \neq 1$, $2 \neq -1$, và $x \neq 0$ nên $2 \cdot x$ khác 0 và 1. Như vậy giả sử phản chứng là sai. Nói cách khác, không tồn tại số nguyên x sao cho $\iota(x) = \dfrac{1}{2}$, kéo theo ι không phải toàn ánh và do đó ι không phải song ánh.

Theo định nghĩa phép cộng, phép nhân số hữu tỉ và quan hệ $\le$ trên tập hợp số hữu tỉ, chúng ta suy ra

- $\iota(x+y) = \dfrac{x+y}{1} = \dfrac{x \cdot 1 + 1 \cdot y}{1 \cdot 1} = \dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{1} = \iota(x) + \iota(y)$.
- $\iota(xy) = \dfrac{xy}{1} = \dfrac{xy}{1 \cdot 1} = \dfrac{x}{1} \cdot \dfrac{y}{1} = \iota(x)\iota(y)$.
- Nếu $x \le y$ thì $x \cdot 1 \cdot 1^2 \le y \cdot 1 \cdot 1^2$, kéo theo $\dfrac{x}{1} \le \dfrac{y}{1}$ và $\iota(x) \le \iota(y)$.

□

Đơn ánh ι trong định lý trên bảo toàn phép cộng, phép nhân, và quan hệ thứ tự, mặc dù ở tập nguồn và tập đích, các phép toán và quan hệ đó khác nhau. Với cơ sở là định lý này, chúng ta **đồng nhất** số nguyên x với số hữu tỉ $\dfrac{x}{1}$, kéo theo tập hợp số nguyên là một tập hợp con thực sự của tập hợp số hữu tỉ.

11.4 Bài tập

Bài tập 11.1. Chứng minh Định lý 11.1.

Bài tập 11.2. Chứng minh rằng phép cộng và phép nhân số hữu tỉ được định nghĩa trong chương này không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện.

Bài tập 11.3. Tập hợp các số hữu tỉ dương có là tập hợp được sắp thứ tự tốt hay không? (Xem định nghĩa tập hợp được sắp thứ tự tốt trong Bài tập 10.2.)

Bài tập 11.4. Chứng minh rằng với mỗi số hữu tỉ a, b, nếu $a < b$ thì tồn tại số hữu tỉ q sao cho $a < q < b$.

Bài tập 11.5. Cho số hữu tỉ q và A là tập hợp tất cả các số hữu tỉ nhỏ hơn q.

(i) Chứng minh rằng A không có phần tử nhỏ nhất và cũng không có phần tử lớn nhất.

(ii) Chứng minh rằng q là cận trên nhỏ nhất của A.

Bài tập 11.6 (Phần nguyên của số hữu tỉ)**.** Chứng minh rằng với mỗi số hữu tỉ q, tồn tại duy nhất số nguyên n sao cho $n \le q < n + 1$. [Gợi ý: Để chứng minh tính tồn tại, hãy sử dụng thuật toán chia Euclid.]

Chương 4

Số thực và số phức

12 Xây dựng tập hợp số thực

12.1 Hệ tiên đề về số thực

Có ít nhất hai cách hiểu cho câu hỏi "Số thực là gì?" Đầu tiên, chúng ta có thể hiểu rằng người hỏi đang muốn được biết một *định nghĩa toán học* cho số thực. Đó là một định nghĩa hình thức tương tự như định nghĩa số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ, tính chia hết, ... đã được nêu trong tài liệu này. Thứ hai, chúng ta có thể hiểu rằng người hỏi đang muốn liên hệ cái-được-gọi-là-số-thực với thực tế. Nói cách khác, để trả lời cho cách hiểu thứ hai, người trả lời cần định nghĩa số thực như một đối tượng nào đó tương đương trong thực tế hoặc gần thực tế.

Chúng tôi đưa ra một câu trả lời trực giác cho cách hiểu thứ hai như sau: *Hình dung một đường thẳng kéo dài vô tận về hai phía. Mỗi điểm được đánh dấu trên đường thẳng đó tương ứng với một số thực. Nói rõ hơn, trên đường thẳng đó, chúng ta đánh dấu hai điểm khác nhau, lần lượt gọi là* 0 *và* 1*. Các điểm x trên đường thẳng này tương ứng với một số (thực) âm nếu điểm* 0 *nằm giữa x và* 1*. Các điểm x trên đường thẳng này tương ứng với một số (thực) dương nếu hoặc x nằm giữa* 0 *và* 1*, hoặc x trùng* 1*, hoặc* 1 *nằm giữa* 0 *và x.*

Câu trả lời trực giác hình học cho cách hiểu thứ hai có thể làm hài lòng nhiều người nhưng là không đủ tốt đối với một định nghĩa toán học. Với định nghĩa trực giác như vậy, chúng ta khó lòng nói về các phép toán với các số thực như cộng, trừ, nhân, chia. Đối với những người học và làm toán, việc biết các số thực và các phép toán với số thực, quan hệ giữa các số thực có những tính chất gì quan trọng hơn việc biết số thực là gì trong thực tế. Trong chương này, chúng ta định nghĩa số thực bằng một hệ tiên đề (hay tính chất). Chúng ta coi những đối tượng thỏa mãn hệ tiên đề (hay tính chất) này là các số thực.

Tiên đề 12.1. *Tập hợp số thực được kí hiệu là $\mathbb{R}$. Các phần tử của $\mathbb{R}$ thỏa mãn ba nhóm tiên đề sau.*

Các tiên đề về trường. *$\mathbb{R}$ có hai phép toán hai ngôi là phép cộng (được kí hiệu là $+$) và phép nhân (được kí hiệu là $\cdot$) và các phép toán này thỏa mãn các tính chất sau:*

(i) Phép cộng có tính chất kết hợp. Nói cách khác, với mọi số thực x, y, z, chúng ta có

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(ii) Phép cộng có phần tử đồng nhất. Nói cách khác, tồn tại số thực 0 *sao cho với mọi số thực x, chúng ta có*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

(iii) *Mỗi số thực có phần tử đối. Nói cách khác, với mỗi số thực x, tồn tại số thực $(-x)$ thỏa mãn*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(iv) *Phép cộng có tính chất giao hoán. Nói cách khác, với mọi số thực x, y, chúng ta có*

$$x + y = y + x.$$

(v) *Phép nhân có tính chất kết hợp. Nói cách khác, với mọi số thực x, y, z, chúng ta có*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(vi) *Phép nhân có tính chất phân phối với phép cộng. Nói cách khác, với mọi số thực x, y, z, chúng ta có*

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$
$$z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y.$$

(vii) *Phép nhân có phần tử đồng nhất, phần tử này khác 0. Nói cách khác, tồn tại số thực $1 \neq 0$ sao cho với mọi số thực x, chúng ta có*

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

(viii) *Phép nhân có tính chất giao hoán. Nói cách khác, với mọi số thực x, y, chúng ta có*

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(ix) *Mỗi số thực khác 0 có phần tử nghịch đảo. Nói cách khác, với mỗi số thực $x \neq 0$, tồn tại số thực x^{-1} sao cho*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

Các tiên đề về thứ tự. *$\mathbb{R}$ có quan hệ $\leq$ thỏa mãn các tính chất sau:*

(i) *$\leq$ là một quan hệ thứ tự toàn phần.*

(ii) *Với mọi số thực x, y, nếu $x \leq y$ thì với mọi số thực z, chúng ta có $x + z \leq y + z$.*

(iii) *Với mọi số thực x, y, nếu $0 \leq x$ và $0 \leq y$ thì $0 \leq x \cdot y$.*

Tiên đề về cận trên (hay tiên đề về tính đầy đủ). *Nếu một tập hợp con khác rỗng của $\mathbb{R}$ có cận trên thì cũng có cận trên nhỏ nhất.*

Chúng ta bình luận và làm rõ thêm hệ tiên đề vừa nêu. Các tiên đề về trường và các tiên đề về thứ tự có lẽ không có gì xa lạ với bạn đọc. Chúng tôi chỉ lưu ý thêm ba điều về hai nhóm tiên đề này: (1) Các phần tử 0, 1, $(-x)$, và x^{-1} được hiểu như các kí hiệu đơn thuần, ở thời điểm này chúng ta *chưa* coi đó như những số hay phép toán quen thuộc; (2) Tiên đề về sự tồn tại của hai phần tử 0 và 1 không khẳng định tính duy nhất của những phần tử như vậy.

Quay lại với hệ tiên đề về số thực. Trong chương trước, chúng ta đã chỉ ra được tập hợp số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ cùng với hai phép toán cộng, nhân, và quan hệ $\leq$ thỏa mãn các tiên đề về trường và các tiên đề về thứ tự. Mệnh đề dưới đây (xem [Spi08]) cho thấy tập hợp số hữu tỉ không thỏa mãn tiên đề về cận trên, hay chúng ta còn nói rằng tập hợp số hữu tỉ không đầy đủ theo quan hệ thứ tự $\leq$.

Mệnh đề 12.2. *Trong tập hợp số hữu tỉ*

(i) Chứng minh rằng không tồn tại số hữu tỉ x nào thỏa mãn $x^2 = 2$.

(ii) Chứng minh rằng tập hợp

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 < x \text{ và } x^2 < 2\}$$

không có phần tử lớn nhất.

(iii) Chứng minh rằng tập hợp S ở phần (ii) không có cận trên nhỏ nhất.

Chứng minh. (i) Giả sử phản chứng rằng tồn tại số hữu tỉ x sao cho $x^2 = 2$. Chúng ta kí hiệu phân số tối giản của x là $\frac{p}{q}$. Vì $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ nên $p^2 = 2q^2$. Vì 2 là ước của $2q^2$ nên 2 cũng là ước của p^2. Theo bổ đề Euclid, chúng ta suy ra 2 là ước của p, do đó tồn tại số tự nhiên a sao cho $p = 2a$. Cùng với việc $p^2 = 2q^2$, chúng ta suy ra $4a^2 = 2q^2$, kéo theo $2a^2 = q^2$. Một lần nữa, theo bổ đề Euclid, chúng ta suy ra 2 là ước của q. Như vậy 2 là ước chung của p và q, điều này mâu thuẫn với việc $\frac{p}{q}$ là một phân số tối giản.

Vậy không tồn tại số hữu tỉ x nào thỏa mãn $x^2 = 2$.

(ii) Chúng ta chọn một số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ thuộc S (trong đó a, b là các số nguyên dương). Theo định nghĩa của S, chúng ta suy ra $a^2 < 2b^2$. Xét số hữu tỉ $\frac{2a+2b}{a+2b}$.

$$\begin{aligned}(2a+2b)^2 &= 4a^2 + 8ab + 4b^2\\ &< 2a^2 + 8ab + 8b^2\\ &= 2(a^2 + 4ab + 4b^2)\\ &= 2(a+2b)^2\end{aligned}$$

Do đó $\frac{2a+2b}{a+b}$ là một phần tử của S. Bên cạnh đó, $\frac{a}{b} < \frac{2a+2b}{a+2b}$, vì

$$a(a+2b) = a^2 + 2ab < 2ab + 2b^2 = b(2a+2b)$$

Như vậy, với mỗi phần tử x thuộc S, chúng ta luôn tìm được được một phần tử khác của S nhưng lớn hơn x. Do đó tập hợp S không có phần tử lớn nhất.

(iii) Tập hợp S có cận trên. Chẳng hạn, 2 là một cận trên của S, bởi vì với mọi x thuộc S, $x^2 < 2 < 4$, kéo theo $(x-2)(x+2) < 0$, và $x < 2$. Mặt khác, nếu y là một cận trên của S thì $y > 0$.

Tiếp theo, chúng ta chứng minh rằng nếu số hữu tỉ y là một cận trên của S thì $y^2 > 2$. Giả sử phản chứng rằng $y^2 \leq 2$. Theo phần (i), chúng ta suy ra $y^2 < 2$, kéo theo y là một phần tử của S. y là một cận trên của S và là một phần tử của S thì y cũng là phần tử lớn nhất của S. Điều này mâu thuẫn với kết quả đã chứng minh ở phần (ii). Do đó giả sử phản chứng là sai, và chúng ta suy ra $y^2 > 2$.

Chọn y là một cận trên của S. Chúng ta kí hiệu $\frac{a}{b}$ là phân số của y (a, b là các số nguyên dương). Vì $y^2 > 2$ nên $a^2 > 2b^2$. Chúng ta tiếp tục xét số hữu tỉ $\frac{2a+2b}{a+2b}$.

$$\begin{aligned}(2a+2b)^2 &= 4a^2 + 8ab + 4b^2\\ &> 2a^2 + 8ab + 8b^2\\ &= 2(a^2 + 4ab + 4b^2)\\ &= 2(a+2b)^2\end{aligned}$$

Do đó $\frac{2a+2b}{a+b}$ là một cận trên của S. Ngoài ra, $\frac{2a+2b}{a+2b} < \frac{a}{b}$, vì

$$b(2a+2b) = 2ab + 2b^2 < 2ab + a^2 = a(a+2b)$$

Như vậy với mỗi cận trên y của S, chúng ta luôn tìm được một cận trên khác của S và nhỏ hơn y. Do đó tập hợp S không có cận trên nhỏ nhất.

□

Trong hai mục tiếp theo, chúng tôi trình bày về hai mô hình số thực (hai cách xây dựng tập hợp số thực) từ tập hợp số hữu tỉ. Xây dựng tập hợp số thực là gì? Xây dựng tập hợp số thực là việc tạo ra một đối tượng toán học thỏa mãn hệ tiên đề về số thực. Chúng ta so sánh hệ tiên đề về số thực với một bản thiết kế, khi đó việc xây dựng tập hợp số thực chính là tạo ra một tác phẩm giống như bản thiết kế đó. Xây dựng được tập hợp số thực đồng nghĩa với việc *chứng minh được* bản thiết kế là khả thi. Trong logic toán học, chúng ta có thuật ngữ riêng để gọi một công trình tương ứng với một bản thiết kế, đó là *mô hình*. Mô hình là một đối tượng, hay cấu trúc toán học thỏa mãn một hệ tiên đề nào đó.

12.2 Tóm lược về mô hình số thực bằng lát cắt Dedekind

Trước khi đưa ra định nghĩa tổng quát của lát cắt Dedekind, chúng tôi muốn nói về cách hiểu trực giác của ý tưởng lát cắt. Một lần nữa, chúng ta sử dụng mô tả trực quan *đường thẳng thực*: Chúng ta đánh dấu một điểm trên đường thẳng thực, khi đó chúng ta đã phân hoạch đường thẳng thực làm hai phần — phần bên trái không bao gồm điểm đánh dấu và phần bên phải bao gồm điểm đánh dấu.

Định nghĩa 12.3 (Lát cắt Dedekind)**.** Một lát cắt Dedekind trong một tập hợp S được sắp thứ tự toàn phần là một phân hoạch gồm hai tập hợp A, B sao cho

(DC1) A khác rỗng và A không phải toàn bộ tập hợp S.

(DC2) Mọi phần tử của A nhỏ hơn mọi phần tử của B.

(DC3) A không có phần tử lớn nhất.

(DC4) Nếu x thuộc A thì bất cứ phần tử nào nhỏ hơn x và thuộc S cũng thuộc A (đặc điểm này còn được phát biểu là A đóng dưới).

Một lát cắt như vậy được kí hiệu là (A, B), hoặc chỉ là A, bởi vì $B = S \setminus A$ (B hoàn toàn được xác định khi biết A).

Chúng ta kí hiệu tập hợp các lát cắt Dedekind trong tập hợp S là $\mathscr{D}_S$.

Để xây dựng tập hợp số thực bằng lát cắt Dedekind, chúng ta sử dụng các lát cắt trong tập hợp số hữu tỉ. Tập hợp các lát cắt Dedekind trong tập hợp số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathscr{D}_\mathbb{Q}$. Chúng ta cũng dùng cách gọi vắn tắt là lát cắt để chỉ lát cắt Dedekind trên tập hợp số hữu tỉ, trừ khi ngữ cảnh phát biểu khác đi.

Để xây dựng tập hợp số thực bằng lát cắt Dedekind, chúng ta sử dụng các lát cắt trong tập hợp số hữu tỉ. Tập hợp các lát cắt Dedekind trong tập hợp số hữu tỉ được kí hiệu là $\mathscr{D}_\mathbb{Q}$. Chúng ta cũng dùng cách gọi vắn tắt là lát cắt để chỉ lát cắt Dedekind trên tập hợp số hữu tỉ, trừ khi ngữ cảnh phát biểu khác đi.

Để hiểu rõ hơn định nghĩa lát cắt, chúng ta theo dõi các ví dụ và phản ví dụ sau.

Ví dụ 12.4. Tập hợp

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \land x < q\}$$

trong đó q là một số hữu tỉ, là một lát cắt. Chúng ta kiểm tra điều này qua từng điều trong định nghĩa lát cắt.

(DC1) A khác rỗng vì $q-1$ là một phần tử của A. Bên cạnh đó, A cũng không phải toàn bộ tập hợp số hữu tỉ vì q không phải một phần tử của A.

(DC2) $B = \mathbb{Q} - A = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge q \leq x\}$. Mọi phần tử của A nhỏ hơn mọi phần tử của B theo tính chất bắc cầu của quan hệ $\leq$ trên tập hợp số hữu tỉ.

(DC3) A không có phần tử lớn nhất vì với mỗi phần tử x của A, chúng ta luôn tìm được một phần tử khác lớn hơn, chẳng hạn như $\frac{q+x}{2}$.

(DC4) Nếu một số hữu tỉ x thuộc A thì mọi số hữu tỉ nhỏ hơn x cũng thuộc A. Điều này được suy ra từ tính chất bắc cầu của quan hệ $\leq$ trên tập hợp số hữu tỉ.

Ví dụ 12.5. Tập hợp

$$A = \{x \mid x \text{ là số hữu tỉ thỏa mãn } x < 0 \text{ hoặc } x^2 < 2\}$$

là một lát cắt. Điều này được suy ra từ tính chất bắc cầu của quan hệ $\leq$ trên tập hợp số hữu tỉ và Mệnh đề 12.2.

Phản ví dụ 12.6. Tập hợp

$$A = \{x \mid x \text{ là số hữu tỉ thỏa mãn } x > 0 \text{ và } x^2 < 2\}$$

không phải một lát cắt. Bởi vì 1 là phần tử của A nhưng $0 < 1$ lại không phải một phần tử của A.

Phản ví dụ 12.7. Tập hợp

$$A = \left\{\frac{-1}{n} \mid n \text{ là một số nguyên dương}\right\}$$

không phải một lát cắt. Bởi vì -1 là phần tử của A nhưng $-2 < -1$ lại không phải một phần tử của A.

Chúng ta định nghĩa các phép toán và quan hệ giữa các lát cắt như sau.

Định nghĩa 12.8. A và B là hai lát cắt. Chúng ta nói lát cắt A có quan hệ $\leq$ với lát cắt B và kí hiệu là $A \leq B$ nếu và chỉ nếu $A \subseteq B$.

Định lý 12.9. *Quan hệ $\leq$ trên tập hợp các lát cắt $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}}$ ở Định nghĩa 12.8 là một quan hệ thứ tự toàn phần.*

Quan hệ $\leq$ về bản chất chính là quan hệ bao hàm giữa các tập hợp (các lát cắt là các tập hợp). Để nói về các phép toán với lát cắt, chúng ta lưu ý hai lát cắt đặc biệt sau đây.

$$O = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < 0\},$$
$$I = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < 1\}.$$

Với cơ sở là quan hệ thứ tự toàn phần trên tập hợp các lát cắt $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}}$, chúng ta đưa ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 12.10. (i) Một lát cắt A được gọi là lát cắt dương nếu và chỉ nếu $O < A$.

(ii) Một lát cắt A được gọi là lát cắt âm nếu và chỉ nếu $A < O$.

Như vậy, một lát cắt A là không âm nếu và chỉ nếu $O \leq A$, là không dương nếu $A \leq O$.

Phép cộng hai lát cắt được thực hiện bằng cách cộng từng cặp phần tử của hai lát cắt.

Định lý 12.11 (Phép toán cộng lát cắt). *Cho hai lát cắt A và B. Khi đó tập hợp sau*

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

là một lát cắt.

Để định nghĩa phép nhân hai lát cắt, chúng ta cần dùng đến khái niệm lát cắt dương, âm, không âm, và định nghĩa cho từng trường hợp.

Định lý 12.12 (Phép nhân hai lát cắt). *Cho hai lát cắt A và B.*

(i) Nếu $A \geq O$ và $B \geq O$ thì tập hợp sau

$$A \cdot B = \{ab \mid a \in A \wedge b \in B \wedge a \geq 0 \wedge b \geq 0\} \cup O$$

là một lát cắt.

(ii) Nếu $A \geq O$ và $B < O$ thì tập hợp $A \cdot B = -A \cdot (-B)$ là một lát cắt.

(iii) Nếu $A < O$ và $B \geq O$ thì tập hợp $A \cdot B = -(-A) \cdot B$ là một lát cắt.

(iv) Nếu $A < O$ và $B < O$ thì tập hợp $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$ là một lát cắt.

Kiểm tra phép cộng, phép nhân, quan hệ $\leq$ trên tập hợp các lát cắt có thỏa mãn hệ tiên đề về số thực hay không là một công việc cần nhiều thời gian, sự cẩn thận và tỉ mỉ mặc dù không khó. Để biết chi tiết hơn, bạn đọc có thể tham khảo về cách xây dựng tập hợp số thực trong [Spi08] hoặc [Abb15]. Trong tài liệu này, chúng tôi chỉ kiểm tra tiên đề về cận trên.

Định lý 12.13. *Cho tập hợp $\mathscr{D}$ là một tập hợp con khác rỗng của tập hợp các lát cắt Dedekind hữu tỉ $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}}$ và $\mathscr{D}$ có cận trên. Khi đó $\mathscr{D}$ có cận trên nhỏ nhất.*

Chứng minh. Chúng ta xét tập hợp $S = \bigcup_{A \in \mathscr{D}} A$, trong đó A là các phần tử (là các lát cắt) của $\mathscr{D}$. Tập hợp S bao gồm các số hữu tỉ.

Đầu tiên, chúng ta chứng minh S là một lát cắt.

(DC1) S là hợp thành của các lát cắt nên S khác rỗng.

(DC2) Vì $\mathscr{D}$ có cận trên nên mọi phần tử A của $\mathscr{D}$ đều nhỏ hơn hoặc bằng một lát cắt B nào đó. Do đó $S \leq B$, kéo theo S không phải toàn bộ tập hợp số hữu tỉ.

(DC3) Giả sử x là một phần tử của S. Theo định nghĩa của S và phép toán hợp của các tập hợp, tồn tại một lát cắt A (là phần tử của S) sao cho x thuộc A. Vì lát cắt A không có phần tử lớn nhất nên tồn tại phần tử y của A sao cho $x < y$. Do y thuộc A nên y cũng thuộc S. Do đó S không có phần tử lớn nhất.

(DC4) Giả sử x là một phần tử của S và y là một số hữu tỉ nhỏ hơn x. Theo định nghĩa của S và phép toán hợp của các tập hợp, tồn tại một lát cắt A (là phần tử của S) sao cho x thuộc A. Vì lát cắt A đóng dưới nên y thuộc A, kéo theo y cũng thuộc S. Do đó S đóng dưới.

Như vậy S là một lát cắt.

Tiếp theo, chúng ta chứng minh S là cận trên nhỏ nhất của $\mathscr{D}$.

Giả sử X là một cận trên của $\mathscr{D}$. Theo định nghĩa quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}}$, mọi phần tử A (cũng là các lát cắt) của $\mathscr{D}$ thỏa mãn $A \leq X$ ($A \subseteq X$). Do đó, hợp của tất cả các phần tử của $\mathscr{D}$, hay $S = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{D}} A$ thỏa mãn $S \subseteq X$ ($S \leq X$). Do đó S nhỏ hơn hoặc bằng của mọi cận trên của $\mathscr{D}$, điều này có nghĩa là S là cận trên nhỏ nhất của $\mathscr{D}$.

Vậy $\mathscr{D}$ có cận trên nhỏ nhất. □

12.3 Tóm lược về mô hình số thực bằng dãy Cauchy hữu tỉ

Mô hình số thực bằng dãy Cauchy hữu tỉ được đề xuất bởi Charles Méray và Georg Cantor. Mô hình số thực bằng lát cắt được đề xuất sau đó bởi Richard Dedekind. Ý tưởng cho mô hình số thực bằng dãy Cauchy hữu tỉ bắt đầu từ một tính chất của dãy Cauchy thực: Mọi dãy Cauchy thực đều hội tụ đến một số thực. Tuy nhiên điều này lại không đúng cho dãy Cauchy hữu tỉ. Trong mô hình này, chúng ta đưa ra một quan hệ tương đương giữa các dãy Cauchy hữu tỉ, định nghĩa các phép toán và quan hệ giữa các lớp tương đương theo quan hệ này và chỉ ra các lớp tương đương đó thỏa mãn hệ tiên đề về số thực.

Nhiều định nghĩa và kết quả liên quan đến dãy số trong mục này có thể quen thuộc với nhiều bạn đọc. Tuy nhiên, chúng tôi vẫn sẽ nêu lại một cách sơ lược. Trước khi đi đến định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, chúng ta cần định nghĩa về dãy số hữu tỉ và tính hội tụ.

Định nghĩa 12.14 (Dãy số hữu tỉ)**.** Một **dãy số hữu tỉ** là một ánh xạ với tập nguồn là tập hợp số tự nhiên và tập đích là tập hợp số hữu tỉ.

Một dãy số hữu tỉ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ được kí hiệu là $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, và f_n là giá trị được gán với số tự nhiên n bởi f. Ngoài cách kí hiệu trên, nhiều tác giả còn dùng các kí hiệu khác cho dãy số, chẳng hạn

$$(f_n), \quad (f_n)_{n=0}, \quad (f_n)_{n=0}^{\infty}$$

Trong dãy số hữu tỉ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, một số tự nhiên n cụ thể được gọi là một **chỉ số**.

Khi có một dãy số, người ta thường quan tâm đến việc giá trị của dãy số sẽ như thế nào với chỉ số n rất lớn, hay dãy số đó có hội tụ không. Để phát biểu một cách chặt chẽ về đặc điểm này của dãy số, các nhà toán học đã đúc kết lại thành định nghĩa dãy số hội tụ.

Định nghĩa 12.15. Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **hội tụ đến số hữu tỉ** a nếu và chỉ nếu

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N(\varepsilon)\Big(\forall n \geq N(\varepsilon)(|a_n - a| < \varepsilon)\Big)\Big).$$

Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **hội tụ** nếu tồn tại số hữu tỉ a sao cho dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến a. Số hữu tỉ a khi đó được gọi là một **điểm giới hạn**, hay **giới hạn** của dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bằng kí hiệu, chúng ta viết điều kiện cần và đủ để dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **không hội tụ đến số hữu tỉ** a như sau

$$\exists \varepsilon_0 > 0\Big(\forall N\Big(\exists n \geq N(|a_n - a| \geq \varepsilon_0)\Big)\Big).$$

Trên đây là một định nghĩa hình thức cho khái niệm dãy số hữu tỉ hội tụ. Chúng tôi thừa nhận rằng cách định nghĩa này khó hiểu với những người mới học. Nếu bạn đọc cảm thấy đây là một cách định nghĩa phức tạp, thì chúng tôi cho rằng việc nên làm đầu tiên là đọc về vị từ và lượng từ trong Chương 1. Thay cho (nhưng không hoàn toàn thay thế) cách định nghĩa trên, định nghĩa cho dãy số hữu tỉ hội tụ có thể được phát biểu bớt hình thức hơn như sau:

- (Thông dịch trực tiếp logic hình thức thành câu văn) Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là hội tụ đến số hữu tỉ a nếu và chỉ nếu: với mỗi (số hữu tỉ) $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $N(\varepsilon)$ chỉ phụ thuộc vào ε sao cho với mọi chỉ số $n \geq N(\varepsilon)$, chúng ta có $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (Phát biểu không hình thức) Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là hội tụ đến số hữu tỉ a nếu và chỉ nếu: với mỗi (số hữu tỉ) $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại một chỉ số mà từ chỉ số đó trở đi, khoảng cách từ a_n đến a nhỏ hơn ε.

Định lý 12.16. *Nếu một dãy số hữu tỉ hội tụ thì dãy số hữu tỉ đó chỉ có một điểm giới hạn.*

Việc tính toán giới hạn của một số dãy số có thể được đơn giản hóa nhờ kết quả sau và những giới hạn đã biết.

Mệnh đề 12.17. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *và* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *là các dãy số hữu tỉ.*

(i) Nếu $\lim a_n = a$ *và* $\lim b_n = b$ *thì* $\lim s_n = a + b$*, trong đó dãy số hữu tỉ* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *được định nghĩa bởi* $s_n = a_n + b_n$ *với mọi số tự nhiên* n *(Chúng ta còn kí hiệu* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bởi* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*).*

(ii) Nếu $\lim a_n = a$ *thì* $\lim c_n = ca$*, trong đó dãy số hữu tỉ* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *được định nghĩa bởi* $c_n = c \cdot a_n$ *với mọi số tự nhiên* n*, trong đó* c *là một hằng số hữu tỉ (Chúng ta còn kí hiệu* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bởi* $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$*).*

(iii) Nếu $\lim a_n = a$ *và* $\lim b_n = b$ *thì* $\lim p_n = ab$*, trong đó dãy số hữu tỉ* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *được định nghĩa bởi* $p_n = a_n b_n$ *với mọi số tự nhiên* n *(Chúng ta còn kí hiệu* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bởi* $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*).*

Định nghĩa 12.18 (Dãy Cauchy hữu tỉ)**.** Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là một **dãy Cauchy hữu tỉ** nếu và chỉ nếu

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N(\varepsilon)\Big(\forall n \geq N(\varepsilon)\Big(\forall m \geq N(\varepsilon)(|a_m - a_n| < \varepsilon)\Big)\Big)\Big).$$

Điều kiện trên có thể phát biểu dưới dạng tương đương là

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N(\varepsilon)\Big(\forall n \geq N(\varepsilon)\Big(\forall p > 0(\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon)\Big)\Big)\Big).$$

Chúng ta kí hiệu tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ là $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$.

Dãy Cauchy hữu tỉ và tính hội tụ có liên hệ sau.

Định lý 12.19. *Nếu một dãy số hữu tỉ hội tụ thì đó cũng là một dãy Cauchy hữu tỉ.*

Dãy số hữu tỉ hội tụ thì cũng là dãy Cauchy hữu tỉ, nhưng dãy Cauchy hữu tỉ thì có thể không hội tụ đến số hữu tỉ nào.

Mệnh đề 12.20. *Dãy số hữu tỉ* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *được định nghĩa bằng đệ quy như sau*

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 0 \\ \dfrac{2x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 2} & \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *là một dãy Cauchy và không hội tụ đến bất kì số hữu tỉ nào.*

Chứng minh sơ lược. Chúng ta chứng minh mệnh đề này bằng phản chứng, lần lượt qua các bước sau.

Bước 1. $x_n \geq 1$ với mọi số tự nhiên n.

Bước 2. Với mọi số tự nhiên n, $\left|x_n^2 - 2\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Bước 3. Chứng minh rằng $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

Chúng ta chọn ε là một số hữu tỉ dương, $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, nếu số tự nhiên $n \geq N$ thì với mọi số tự nhiên p, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\left|x_{n+p} - x_n\right| &= \frac{\left|x_{n+p}^2 - x_n^2\right|}{\left|x_{n+p} + x_n\right|} = \frac{\left|(x_{n+p}^2 - 2) + (2 - x_n^2)\right|}{\left|x_{n+p} + x_n\right|} \\
&\leq \frac{\left|x_{n+p}^2 - 2\right| + \left|x_n^2 - 2\right|}{\left|x_{n+p} + x_n\right|} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p+1}\right) && \text{(theo \textbf{Bước 1} và \textbf{Bước 2})} \\
&\leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Do đó với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$ và với mọi số tự nhiên p, chúng ta có $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$. Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

Bước 4. Dãy số hữu tỉ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (được định nghĩa bởi $y_n = x_n^2$ với mọi số tự nhiên n) hội tụ đến 2.

Chúng ta chọn ε là một số hữu tỉ dương, $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, nếu số tự nhiên $n \geq N$ thì

$$\left|x_n^2 - 2\right| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} < \varepsilon.$$

Theo định nghĩa dãy số hội tụ, dãy số hữu tỉ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 2.

Bước 5. Chứng minh rằng dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến bất kì số hữu tỉ nào.

Giả sử phản chứng rằng dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ x.

Theo phần (iii) của Mệnh đề 12.17, chúng ta suy ra dãy số $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ x^2. Theo Định lý 12.16, chúng ta suy ra $x^2 = 2$.

Theo Mệnh đề 12.2, không có số hữu tỉ nào có bình phương bằng 2. Do đó $x^2 = 2$ (với x là số hữu tỉ) là một kết quả vô lý. Như vậy giả sử phản chứng là sai, kéo theo dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến số hữu tỉ nào.

□

Khi sử dụng dãy Cauchy hữu tỉ để xây dựng tập hợp số thực, chúng ta gặp một vấn đề: *có nhiều dãy Cauchy hữu tỉ hội tụ đến cùng một số hữu tỉ.* Điều này sẽ được giải quyết bằng quan hệ tương đương trong định lý sau.

Định lý 12.21. *Hai dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là có quan hệ $\sim$, và được kí hiệu là $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi dãy số hữu tỉ $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 0, nói cách khác*

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N\big(\forall n \geq N(|a_n - b_n| < \varepsilon)\big)\Big).$$

(i) *Quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy số hữu tỉ là một quan hệ tương đương. Nói riêng, quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ là một quan hệ tương đương.*

(ii) *Nếu hai dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tương đương theo quan hệ $\sim$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ q khi và chỉ khi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ q.*

(iii) *Nếu hai dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tương đương theo quan hệ $\sim$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy hữu tỉ khi và chỉ khi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy hữu tỉ.*

Chúng ta kí hiệu tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ là $\mathscr{C}_\mathbb{Q}$.

Phép cộng và phép nhân dãy Cauchy hữu tỉ được thực hiện bằng cách cộng và nhân các giá trị của hai dãy Cauchy hữu tỉ tại các chỉ số bằng nhau.

Định lý 12.22 (Phép cộng và phép nhân dãy Cauchy hữu tỉ). *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ thì*

(i) *$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ. Chúng ta cũng kí hiệu $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(ii) *$(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ. Chúng ta cũng kí hiệu $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Định nghĩa 12.23. Chúng ta kí hiệu lớp tương đương gồm các *dãy số hữu tỉ* tương đương với dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

(i) Phép cộng hai phần tử của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ là một phép toán hai ngôi trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, được kí hiệu là + và được xác định như sau
$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$
trong đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ.

(ii) Phép nhân hai phần tử của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ là một phép toán hai ngôi trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, được kí hiệu là $\cdot$ và được xác định như sau
$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$
trong đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ.

Một cách không hình thức, chúng ta có thể diễn đạt định nghĩa trên thành: tổng (tích) của hai lớp tương đương là lớp tương đương của tổng (tích) hai dãy Cauchy. Với định nghĩa trên, phép cộng và phép nhân của hai phần tử trong $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện của lớp tương đương. Định nghĩa này cũng cho phép chúng ta kiểm tra các tiên đề về trường một cách thuận lợi.

Để định nghĩa quan hệ thứ tự như mong muốn trong $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, chúng ta sử dụng một quan hệ tiền thứ tự trong $\mathscr{C}_\mathbb{Q}$.

Định nghĩa 12.24. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy Cauchy hữu tỉ.

(i) Chúng ta nói $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có quan hệ $\lesssim$ nếu và chỉ nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tương đương** với $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hoặc tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n \leq b_n$.

(ii) Chúng ta nói $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có quan hệ < nếu và chỉ nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **không tương đương** với $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Định lý 12.25. *Quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ là một quan hệ tiền thứ tự toàn phần.*

Định lý 12.26. *Nếu hai dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Định nghĩa 12.27. Hai phần tử α, β của tập thương $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ được gọi là có quan hệ $\le$ nếu và chỉ nếu với mỗi dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong α và dãy Cauchy hữu tỉ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong β, chúng ta có $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Định lý 12.28. *Quan hệ $\le$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ là một quan hệ thứ tự toàn phần.*

Với mô hình số thực bằng dãy Cauchy hữu tỉ, việc kiểm tra các tiên đề về trường, các tiên đề về thứ tự có thể được thực hiện rất tự nhiên. Nhưng với tiên đề về cận trên, chứng minh đòi hỏi việc xây dựng một phần tử của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ là cận trên nhỏ nhất. Chi tiết nội dung về việc xây dựng tập hợp số thực, chúng tôi đặt tại phần phụ lục của tài liệu này.

12.4 Tính duy nhất của tập hợp số thực

Định nghĩa 12.29. Số thực là một lát cắt trên tập hợp số hữu tỉ. Tập hợp số thực được kí hiệu là $\mathbb{R}$.

Với việc có nhiều cách xây dựng tập hợp số thực, trong đó, tiêu biểu là mô hình lát cắt Dedekind và mô hình dãy Cauchy hữu tỉ, chúng ta có ít nhất hai cách để định nghĩa số thực — Số thực có thể được định nghĩa là một lát cắt trên tập hợp số hữu tỉ, hoặc một phần tử của tập thương $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$. Tuy nhiên, các nhà toán học đã chứng minh được rằng mọi mô hình số thực là đẳng cấu với nhau.

Định lý 12.30. *Nếu tập hợp R với phép cộng ($+_R$) với phần tử đồng nhất của phép cộng (0_R), phép nhân ($\times_R$) với phần tử đồng nhất của phép nhân (1_R), và quan hệ thứ tự ($\le_R$) thỏa mãn hệ tiên đề về số thực thì tồn tại một song ánh $f : \mathscr{D}_\mathbb{Q} \to R$ sao cho*

- $f(0) = 0_R$, $f(1) = 1_R$.
- $f(x + y) = f(x) +_R f(y)$ *với mọi số thực x, y.*
- $f(xy) = f(x) \times_R f(y)$ *với mọi số thực x, y.*
- $x \le y$ *kéo theo* $f(x) \le_R f(y)$ *với mọi số thực x, y.*

Một chứng minh cho Định lý 12.30 được phác thảo trong [Spi08]. Với định lý này, chúng ta có thể sử dụng khái niệm số thực mà không cần biết rõ là số thực được định nghĩa theo mô hình nào, tương tự với việc có thể sử dụng bất kì phần tử nào của một lớp tương đương để làm phần tử đại diện của lớp tương đương đó.

12.5 Thuộc tính Archimedes

Mục này nói về thuộc tính Archimedes trong tập hợp số thực và các hệ quả. Hệ quả đáng lưu ý nhất trong mục này là tính trù mật của tập hợp số hữu tỉ.

Trong chương trình phổ thông, thuộc tính Archimedes thường được thừa nhận. Chứng minh dưới đây cho thuộc tính Archimedes sử dụng tiên đề về cận trên.

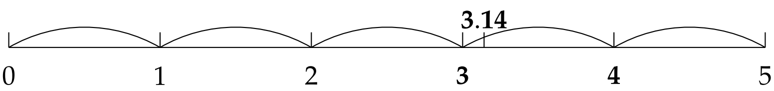
Định lý 12.31 (Thuộc tính Archimedes). *Với mỗi số thực x, tồn tại số nguyên n sao cho $x < n$.*

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng tồn tại số thực x sao cho với mọi số nguyên n, có $n \le x$. Theo giả sử phản chứng, x là một cận trên của tập hợp số nguyên. Theo tiên đề về cận trên, tập hợp số nguyên có cận trên nhỏ nhất, chúng ta kí hiệu cận trên nhỏ nhất đó là s. Do đó $n \leq s$ với mọi số nguyên n. Vì s là cận trên nhỏ nhất của tập hợp số nguyên nên $s - 1$ không phải một cận trên của tập hợp số nguyên, do đó tồn tại số nguyên m sao cho $s - 1 < m$, kéo theo $s < m + 1$. Điều này mâu thuẫn với việc s là cận trên của tập hợp số nguyên, nên giả sử phản chứng là sai.

Vậy với mỗi số thực x, tồn tại số nguyên n sao cho $x < n$. □

Hệ quả 12.32. *Với mọi số thực x, y, nếu $y > 0$ thì tồn tại số nguyên n sao cho $x < ny$.*

Hệ quả trên được rút ra từ việc áp dụng thuộc tính Archimedes cho số thực $\frac{x}{y}$. Trong nhiều tài liệu khác, hệ quả trên được coi là thuộc tính Archimedes.



HÌNH 4.1. Minh họa thuộc tính Archimedes với $x = 3.14$.

Định lý 12.33 (Phần nguyên của số thực)**.** *Với mọi số thực x, tồn tại duy nhất số nguyên n sao cho $n \leq x < n+1$. Nói riêng, số nguyên n như vậy được gọi là* ***phần nguyên của số thực*** *x và được kí hiệu là $\lfloor x \rfloor$.*

Chứng minh. Theo thuộc tính Archimedes, tồn tại số nguyên a và b sao cho $x < b$ và $-x < a$, kéo theo $-a < x < b$.

Theo tính chất bắc cầu của quan hệ thứ tự trên tập hợp số thực, nếu một số nguyên c thỏa mãn $c \leq x$ thì $c \leq b$. Theo nguyên lý thứ tự tốt, tập hợp các số nguyên nhỏ hơn hoặc bằng x có phần tử lớn nhất, chúng ta kí hiệu phần tử đó là n. Vì $n < n+1$ và $n+1$ là một số nguyên nên theo định nghĩa của n, chúng ta có $n \leq x < n+1$.

Giả sử số nguyên m thỏa mãn $m \leq x < m + 1$. Giả sử phản chứng rằng $m < n$, khi đó $m + 1 \leq n$, kéo theo $m + 1 \leq x$, mâu thuẫn với $x < m + 1$. Giả sử phản chứng rằng $n < m$, khi đó $n + 1 \leq m$, kéo theo $n + 1 \leq x$, mâu thuẫn với $x < n + 1$. Do đó $m = n$.

Vậy với mọi số thực x, tồn tại duy nhất số nguyên n sao cho $n \leq x < n + 1$. □

Định lý 12.34 (Tính trù mật của tập hợp số hữu tỉ)**.** *Với mọi số thực x, y sao cho $x < y$, tồn tại số hữu tỉ q sao cho $x < q < y$.*

Chứng minh. Theo thuộc tính Archimedes, tồn tại số nguyên n sao cho $1 < n(y - x)$. Do đó $1 + nx < ny$. Theo định nghĩa phần nguyên của số thực, chúng ta có $nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \leq nx + 1 < ny$.

Do đó, với số nguyên $m = \lfloor nx \rfloor + 1$, chúng ta có $nx < m < ny$. Bên cạnh đó, vì $y - x > 0$ và $n(y - x) > 1 > 0$ nên $n > 0$. Do đó $x < \frac{m}{n} < y$.

Vậy, với mọi số thực x, y sao cho $x < y$, tồn tại số hữu tỉ q sao cho $x < q < y$. □

12.6 Bài tập

Bài tập 12.1. A là một lát cắt trên $\mathbb{Q}$. Chứng minh rằng $\mathbb{Q} \setminus A$ chỉ gồm tất cả các cận trên hữu tỉ của A.

Bài tập 12.2. A là một lát cắt trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\mathbb{R} \setminus A$ có phần tử nhỏ nhất. Các lát cắt trên tập hợp số hữu tỉ có gì khác với các lát cắt trên tập hợp số thực?

Bài tập 12.3. Chứng minh rằng nếu một tập hợp con khác rỗng của tập hợp số thực bị chặn dưới thì có cận dưới lớn nhất.

Bài tập 12.4. A là tập hợp con khác rỗng của tập hợp số thực. Tập hợp $-A$ được định nghĩa như sau

$$-A = \{-x \mid x \in A\}.$$

(i) Chứng minh rằng nếu A có cận trên nhỏ nhất thì $-A$ có cận dưới lớn nhất, và khi đó $\sup A = -\inf(-A)$.

(ii) Chứng minh rằng nếu A có cận dưới lớn nhất thì $-A$ có cận trên nhỏ nhất, và khi đó $\inf A = -\sup(-A)$.

Bài tập 12.5. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy. Chứng minh rằng

(i) Tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $|a_n - a_N| < 1$.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn. Nói cách khác, tồn tại số thực dương A sao cho $|a_n| \leq A$ với mọi số tự nhiên n.

Kết quả trong bài tập trên vẫn đúng với dãy Cauchy hữu tỉ và là cần thiết để chứng minh phần (ii) của Định lý 12.22.

Bài tập 12.6. Chứng minh rằng với mỗi số thực a, b thỏa mãn $a < b$, tồn tại số vô tỉ x sao cho $a < x < b$. [Gợi ý: Tồn tại số hữu tỉ nằm giữa $a - \sqrt{2}$ và $b - \sqrt{2}$.]

Bài tập 12.7. Chứng minh rằng với mỗi số thực x và số thực dương ε, tồn tại số hữu tỉ q sao cho $\left|q - x\right| < \varepsilon$.

Bài tập 12.8. Chứng minh rằng với hai số thực x, y thỏa mãn $x < y$, tồn tại số nguyên m và số tự nhiên n sao cho $x < \frac{m}{2^n} < y$. [Gợi ý: Áp dụng cách lập luận của chứng minh tính trù mật của tập hợp số hữu tỉ.]

Bài tập 12.9. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a < b$. Chứng minh rằng

(i) Tồn tại song ánh từ khoảng mở $(0, 1)$ đến khoảng mở (a, b).

(ii) Tồn tại song ánh từ khoảng đóng $[0, 1]$ đến khoảng đóng $[a, b]$.

Trong đó (a, b) là tập hợp $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $[a, b]$ là tập hợp $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Bài tập 12.10. Cho c là một số thực dương. Hai số thực x và y được gọi là có quan hệ $\sim$ nếu và chỉ nếu tồn tại số nguyên n sao cho $x - y = nc$. Chứng minh rằng

(i) $\sim$ là một quan hệ tương đương.

(ii) Tồn tại một song ánh từ $\mathbb{R}/_\sim$ đến tập hợp $[0, c)$.

Trong đó $[a, b)$ là tập hợp $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b]$ là tập hợp $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Trong bài tập trên, quan hệ $\sim$ được gọi là **quan hệ đồng dư modulo** c.

Bài tập 12.11. (i) Hợp của hai khoảng mở có phải một khoảng mở không? Tương tự, hợp của hai khoảng đóng có phải một khoảng đóng không? Hãy đưa ra ví dụ và phản ví dụ.

(ii) Chứng minh rằng giao của hai khoảng mở hoặc là tập hợp rỗng, hoặc là một khoảng mở.

(iii) Chứng minh rằng giao của hai khoảng đóng hoặc là tập hợp rỗng, hoặc gồm đúng một phần tử, hoặc là một khoảng đóng.

Bài tập 12.12 (Nguyên lý Cantor về các khoảng đóng lồng nhau)**.** Với mỗi số nguyên dương n, chúng ta định nghĩa $I_n = [a_n, b_n]$. Giả sử với mỗi số nguyên dương n, có $I_n \supseteq I_{n+1}$.

(i) Chứng minh rằng tập hợp các số thực a_n có cận trên nhỏ nhất (chúng ta sẽ kí hiệu là a), và tập hợp các số thực b_n có cận dưới lớn nhất (chúng ta sẽ kí hiệu là b).

(ii) Chứng minh rằng giao của tất cả các khoảng đóng I_n khác rỗng.

(iii) Chứng minh rằng nếu $a = b$ thì giao của tất cả các khoảng đóng I_n chỉ gồm đúng một phần tử.

Thực tế, trong phát biểu của nguyên lý Cantor, điều kiện $a = b$ được thay bởi điều kiện tương đương là $\lim(a_n - b_n) = 0$. Nguyên lý Cantor cho thấy giao của dãy các khoảng đóng lồng nhau khác rỗng. Tuy nhiên điều này không còn đúng nếu chúng ta thay khoảng đóng bởi khoảng mở. Hai bài tập dưới đây làm rõ nhận định này.

Bài tập 12.13. Với mỗi số nguyên dương n, chúng ta định nghĩa $I_n = (0, \frac{1}{n})$. Chứng minh rằng

(i) Với mỗi số nguyên dương n, $I_n \supset I_{n+1}$.

(ii) Giao của tất cả các khoảng mở I_n là tập hợp rỗng.

Bài tập 12.14. Cho khoảng đóng $[a, b]$. Với mỗi số nguyên dương n, chúng ta định nghĩa $a_n = a - \dfrac{1}{n}$ và $b_n = b + \dfrac{1}{n}$. Chứng minh rằng

(i) $a_n \leq b_n$ với mọi số nguyên dương n.

(ii) a là cận trên đúng của tập hợp các số thực a_n, và b là cận dưới đúng của tập hợp các số thực b_n.

(iii) $[a, b]$ là giao của tất cả các khoảng mở (a_n, b_n), với n là số nguyên dương.

Bài tập 12.15. Cho khoảng mở (a, b). Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, chúng ta định nghĩa $a_n = a + \dfrac{b-a}{n}$ và $b_n = b - \dfrac{b-a}{n}$. Chứng minh rằng

(i) $a_n \leq b_n$ với mọi số nguyên dương $n > 1$.

(ii) a là cận dưới đúng của tập hợp các số thực a_n, và b là cận trên đúng của tập hợp các số thực b_n.

(iii) (a, b) là hợp của tất cả các khoảng đóng $[a_n, b_n]$, với các số nguyên dương $n > 1$.

13 Số phức

13.1 Xây dựng tập hợp số phức

Không tồn tại số thực nào có bình phương bằng -1. Trong chương trình phổ thông, chúng ta đã được giới thiệu khái niệm đơn vị ảo $\imath$ (thỏa mãn $\imath^2 = -1$) và tập hợp số phức. Tuy nhiên cách tiếp cận đó không thỏa đáng. Bởi với cách tiếp cận như vậy, $\imath$ có nguồn gốc không rõ ràng, hay chúng ta không trả lời được $\imath$ là gì, hay số phức là gì với cách tiếp cận đó. Để khắc phục điều này, số phức và tập hợp số phức được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 13.1. Tập hợp số phức là tập hợp gồm tất cả các cặp (có thứ tự) số thực. Tập hợp số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Theo định nghĩa trên, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ và mỗi số phức đều có dạng (a, b), trong đó a và b là các số thực.

Định nghĩa 13.2 (Phép cộng và phép nhân số phức)**.** Với mỗi số phức (a, b), (c, d), chúng ta định nghĩa tổng và tích hai số phức (a, b), (c, d) như sau

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - db, da + bc).$$

Với định nghĩa trên, chúng ta chứng minh được kết quả sau.

Mệnh đề 13.3. *Ánh xạ $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, với $\iota(x) = (x, 0)$ là một đơn ánh. Đơn ánh này bảo toàn phép cộng và phép nhân, nói cách khác, $\iota(x, y) = \iota(x) + \iota(y)$ và $\iota(xy) = \iota(x)\iota(y)$.*

Phép nhân số phức được định nghĩa như trên sẽ đảm bảo[1] rằng phép nhân số phức có tính chất phân phối với phép cộng số phức. Chúng ta *đồng nhất* số thực a với $(a, 0)$ (Mệnh đề trên là cơ sở cho việc đồng nhất này). Áp dụng kí hiệu này và định nghĩa phép nhân số phức, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
(a, b) &= (a, 0) + (0, b),\\
a(b, c) &= (a, 0)(b, c) = (ab, ac),\\
(0, 1)^2 &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0)\\
&= (-1, 0)\\
&= -1.
\end{aligned}$$

trong đó a, b, c là các số thực. Các kết quả trên đây là cơ sở để chúng ta định nghĩa $\iota = (0, 1)$. Cũng từ các kết quả này, thay cho cách viết (a, b), chúng ta viết $a + b\iota$ hoặc $a + \iota b$. Nói riêng, khi $a = 0$, chúng ta viết $b\iota$ hoặc ιb thay vì $0 + b\iota$.

Định lý 13.4. *Hai số phức $a + b\iota$ và $c + d\iota$ bằng nhau khi và chỉ khi $a = c$, $b = d$.*

Đến hiện tại, chúng ta đã xây dựng nhiều tập hợp số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Việc mở rộng tập hợp số tự nhiên thành tập hợp số nguyên bắt nguồn từ mong muốn thực hiện được phép trừ hai số tự nhiên bất kì.
- Việc mở rộng tập hợp số nguyên thành tập hợp số hữu tỉ bắt nguồn từ mong muốn thực hiện được phép chia một số nguyên cho một số nguyên khác 0.
- Việc mở rộng tập hợp số hữu tỉ thành tập hợp số thực là một quá trình đầy đủ hóa, để cho mọi tập hợp con khác rỗng và bị chặn trên đều có cận trên nhỏ nhất.

Song hành với mỗi tập hợp số là các phép toán và quan hệ. Những hạn chế của các phép toán hay quan hệ là động lực để mở rộng tập hợp số đã có thành tập hợp số rộng hơn, khắc phục hạn chế của tập hợp số trước. Trong tài liệu này, bạn đọc có thể thấy việc định nghĩa các tập hợp số, cũng như các phép toán và quan hệ trên chúng có thể không được tự nhiên. Đó là bởi chúng ta đang sử dụng phương pháp tiên đề nhằm tổ chức lại một cách chặt chẽ cho hệ thống lý thuyết với các định nghĩa và định lý, và phương pháp tiên đề được thực hiện sau cùng — Khi mà hệ thống lý thuyết được xem là đã chín muồi. Bên cạnh đó, với các tập hợp số, điều mà những người học và làm toán quan tâm là các số đó (cùng các phép toán, quan hệ) có những tính chất gì. Qua định nghĩa của các tập hợp số, cũng như các phép toán, quan hệ trên chúng, có thể đưa ra nhận định rằng: Chính các phép toán, quan hệ và các tính chất của chúng là những điều quyết định chúng ta nên định nghĩa các tập hợp số như thế nào.

Định lý 13.5 (Trường số phức)**.** *Tập hợp số phức với phép toán cộng và nhân là một trường. Nói cách khác*

(F1) Phép cộng có tính chất kết hợp. Nói cách khác, với mọi số phức z_1, z_2, z_3, chúng ta có

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

[1] Có thể đây không phải cách duy nhất, nhưng chúng ta chỉ quan tâm đến phép nhân số phức theo định nghĩa này.

(F2) Phép cộng có phần tử đồng nhất. Nói cách khác, với mọi số phức z, chúng ta có

$$z + 0 = 0 + z = z.$$

(F3) Mỗi số thực có phần tử đối. Nói cách khác, với mỗi số phức z, tồn tại số phức $(-z)$ thỏa mãn

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

(F4) Phép cộng có tính chất giao hoán. Nói cách khác, với mọi số phức z_1, z_2, chúng ta có

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

(F5) Phép nhân có tính chất kết hợp. Nói cách khác, với mọi số phức z_1, z_2, z_3, chúng ta có

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

(F6) Phép nhân có tính chất phân phối với phép cộng. Nói cách khác, với mọi số phức z_1, z_2, z_3, chúng ta có

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3,$$
$$z_3 \cdot (z_1 + z_2) = z_3 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_2.$$

(F7) Phép nhân có phần tử đồng nhất. Nói cách khác, với mọi số phức z, chúng ta có

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

(F8) Phép nhân có tính chất giao hoán. Nói cách khác, với mọi số phức z_1, z_2, chúng ta có

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

(F9) Mỗi số thực khác 0 có phần tử nghịch đảo. Nói cách khác, với mỗi số thực $z \neq 0$, tồn tại số thực x^{-1} sao cho

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1.$$

Chúng tôi để bạn đọc tự kiểm tra các tính chất (F1) – (F8). Còn với tính chất (F9), chúng ta có

$$(a + b\imath)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}\imath\right) = 1.$$

Với tính chất (F6), chúng ta có thể thực hiện phép nhân hai số phức mà không cần ghi nhớ định nghĩa ban đầu của phép nhân số phức.

13.2 Phần thực, phần ảo, liên hợp và dạng lượng giác của số phức

Định nghĩa 13.6. Với mỗi số phức $z = a + b\imath$, a được gọi là **phần thực** của z, b được gọi là **phần ảo** của z, và $a - b\imath$ được gọi là **liên hợp** của z.

Phần thực, phần ảo, liên hợp của số phức z lần lượt được kí hiệu là $\Re(z)$ (hoặc $\mathrm{Re}(z)$), $\Im(z)$ (hoặc $\mathrm{Im}(z)$), $\bar{z}$. Ba khái niệm này có liên hệ như sau.

Định lý 13.7. *Với mỗi số phức z,*

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Phép lấy liên hợp của số phức có tính chất đối hợp.

Định lý 13.8. *Với mỗi số phức z, $\overline{\overline{z}} = z$.*

Phép lấy liên hợp của số phức tương thích với phép cộng và phép nhân số phức.

Định lý 13.9. *Với mọi số phức z_1, z_2,*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Định nghĩa 13.10. **Giá trị tuyệt đối**, **modulus**, hay **độ lớn** của số phức $z = a + b\imath$ là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$. Độ lớn của số phức z được kí hiệu là $|z|$.

Từ định nghĩa trên, chúng ta rút ra kết quả sau.

Định lý 13.11. *Với mỗi số phức $z = a + b\imath$*

(i) $|z|^2 = (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2 = a^2 + b^2$.

(ii) $|z|^2 = z\overline{z}$.

Trong trường hợp số phức $z \neq 0$, chúng ta có nhận xét sau

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\Re(z)}{|z|} + \frac{\Im(z)}{|z|}\imath.$$

và theo Định lý 13.11

$$\left(\frac{\Re(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\Im(z)}{|z|}\right)^2 = 1.$$

Như vậy, tồn tại số thực ϕ sao cho

$$\cos(\phi) = \frac{\Re(z)}{|z|}, \qquad \sin(\phi) = \frac{\Im(z)}{|z|}.$$

Khi đó, chúng ta thu được dạng lượng giác của số phức z.

$$z = |z|(\cos(\phi) + \imath \sin(\phi)).$$

Định lý 13.12. *Với mỗi số phức $z \neq 0$, tồn tại duy nhất số thực ϕ thuộc $(-\pi, \pi]$ sao cho*

$$z = |z|(\cos(\phi) + \imath \sin(\phi)).$$

*Trong đó, ϕ được gọi là **argument** của số phức $z \neq 0$, và được kí hiệu là* $\arg(z)$.

Hoàn toàn có thể đưa ra một công thức để xác định $\arg(z)$. Tuy nhiên một công thức như vậy đòi hỏi phải xem xét nhiều trường hợp khác nhau của $\Re(z)$ và $\Im(z)$. Trong thực tế, để được linh hoạt hơn, thay vì sử dụng $\arg(z)$, chúng ta dùng các giá trị trong tập hợp sau

$$\left\{\arg(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

hay nói cách khác là bất cứ số thực nào đồng dư modulo 2π với $\arg(z)$.

Với dạng lượng giác của số phức, việc thực hiện phép nhân, và lũy thừa trở nên dễ dàng.

Định lý 13.13. *(i) Với mỗi số phức $z_1 = |z_1|(\cos(\phi_1) + \imath\sin(\phi_1))$ và $z_2 = |z_2|(\cos(\phi_2) + \imath\sin(\phi_2))$, chúng ta có*

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + \imath\sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

(ii) Với mỗi số phức $z = |z|(\cos(\phi) + \imath\sin(\phi))$ khác 0, chúng ta có

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\phi) + \imath\sin(-\phi)).$$

(iii) (Công thức Moivre) Với mỗi số phức $z = |z|(\cos(\phi) + \imath\sin(\phi))$, với mọi số nguyên n, chúng ta có

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + \imath\sin(n\phi)).$$

Định lý 13.14 (Căn bậc n của số phức)**.** *Tồn tại đúng n số phức có lũy thừa bậc n bằng một số phức z_0 khác 0 cho trước.*

Chứng minh. Nếu số phức z thỏa mãn $z^n = z_0$ thì $z \neq 0$. Bằng dạng lượng giác của số phức z, z_0 và công thức Moivre, chúng ta thu được

$$|z|^n(\cos(n\phi) + \imath\sin(n\phi)) = |z_0|(\cos(\phi_0) + \imath\sin(\phi_0)).$$

Do đó

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|z_0|}, \\ \cos(n\phi) = \cos(\phi_0), \\ \sin(n\phi) = \sin(\phi_0). \end{cases}$$

$\cos(n\phi) = \cos(\phi_0)$ kéo theo $n\phi \equiv \phi_0 \pmod{2\pi}$ hoặc $n\phi \equiv -\phi_0 \pmod{2\pi}$. $\sin(n\phi) = \sin(\phi_0)$ kéo theo $n\phi \equiv \phi_0 \pmod{2\pi}$ hoặc $n\phi \equiv \pi - \phi_0 \pmod{2\pi}$. Vì $\cos(n\phi) = \cos(\phi_0)$ và $\sin(n\phi) = \sin(\phi_0)$ nên $n\phi \equiv \phi_0 \pmod{2\pi}$.

Từ đồng dư thức $n\phi \equiv \phi_0 \pmod{2\pi}$, chúng ta suy ra n khả năng: $\phi \equiv \frac{\phi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \pmod{2\pi}$ với $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Vậy mỗi số phức khác 0 có đúng n cặn bậc n, đó là

$$\sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\left(\frac{\phi_0 + 2k\pi}{n}\right) + \imath\sin\left(\frac{\phi_0 + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

□

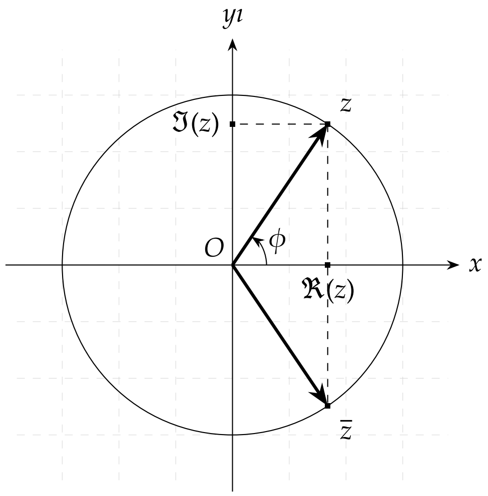
Nói riêng, số 1 có n căn bậc n là

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \imath\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Trong nội dung tiếp theo về biểu diễn hình học của số phức, chúng ta sẽ chỉ ra ý nghĩa hình học của từng khái niệm về số phức đã được đề cập đến giờ trong tài liệu này.

13.3 Biểu diễn hình học của số phức

Tập hợp số thực có thể được trực quan hóa bằng một đường thẳng (trục số thực). Tập hợp số phức được trực quan hóa thành một mặt phẳng tọa độ (mặt phẳng phức[2]), trong đó mỗi số phức tương ứng với một điểm trong mặt phẳng tọa độ (Xem Hình 4.2). Trong mặt phẳng phức, trục Ox được gọi là trục thực, trục Oy được gọi là trục ảo.



HÌNH 4.2. Mặt phẳng phức.

Để được súc tích trong diễn đạt, thay vì nói "điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức", chúng ta nói "điểm z". Gốc tọa độ tương ứng với số phức 0.

Với mỗi số phức $z \neq 0$, chúng ta viết z dưới dạng lượng giác

$$z = |z| (\cos(\phi) + \imath \sin(\phi))$$

trong đó $\phi = \arg(z)$.

Thông qua mặt phẳng phức, các thuộc tính của số phức z được gán cho các ý nghĩa hình học. Độ lớn của số phức z chính là khoảng cách từ điểm z đến gốc tọa độ O. Phần thực của z là hoành độ của điểm z, phần ảo của z là tung độ của điểm z. Điểm $\overline{z}$ biểu diễn cho số phức liên hợp của z là điểm đối xứng với z qua trục thực. Argument của z là số đo của góc định hướng (Ox, Oz) với tia đầu là tia Ox, tia cuối là tia Oz.

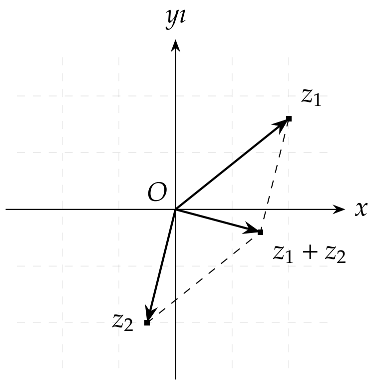
Phép cộng hai số phức tương ứng với phép cộng vector (Xem Hình 4.3.)

Phép nhân một số phức z_0 với số phức $z \neq 0$ tương ứng với một phép vị tự-quay f. Bằng kí hiệu ánh xạ, chúng ta viết

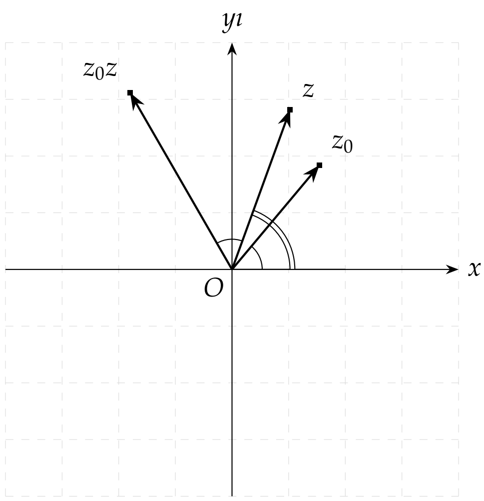
$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto z_0 z \end{aligned}$$

Bạn đọc xem Hình 4.4. Phép vị tự-quay này là hợp thành của phép quay tâm O góc $\theta \equiv \arg(z_0) \pmod{2\pi}$ và phép vị tự tâm O tỉ số $|z_0|$.

[2]Các nhà toán học Caspar Wessel, Jean-Robert Argand, Carl Friedrich Gauß là những người đầu tiên đề xuất biểu diễn số phức lên mặt phẳng tọa độ theo cách này. Trong đó, Argand là người đưa ra chứng minh chặt chẽ đầu tiên cho định lý cơ bản của đại số, định lý đó được phát biểu rằng "Mọi đa thức khác hằng số với hệ số phức có ít nhất một nghiệm phức".

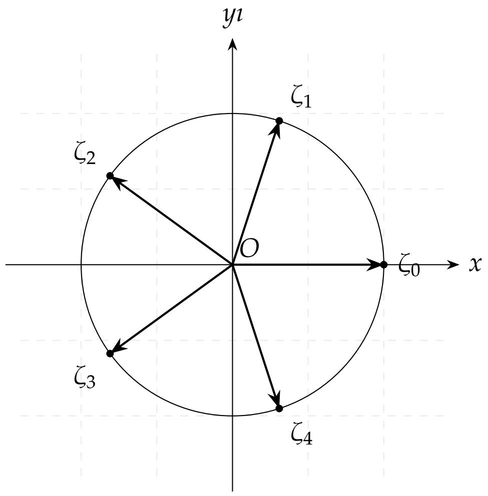


HÌNH 4.3. Phép cộng hai số phức.



HÌNH 4.4. Phép nhân hai số phức.

Biểu diễn hình học của các căn bậc n của một số phức z khác không cho trước là n điểm. n điểm này thuộc đường tròn với tâm là gốc tọa độ, bán kính $|z|$. Khi $n \geq 3$, n điểm này còn là n đỉnh của một n-giác đều với tâm là gốc tọa độ (Xem Hình 4.5.)



HÌNH 4.5. Biểu diễn hình học cho các căn bậc 5 của 1.

13.4 Bài tập

Bài tập 13.1. Chứng minh Định lý 13.5.

Bài tập 13.2. Cho z là một số phức nhưng không phải số thực. Chứng minh rằng $\mathbb{C} = \{a + bz \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.

Bài tập 13.3. Chứng minh rằng không tồn tại một quan hệ thứ tự toàn phần $\leq$ trên tập hợp số phức $\mathbb{C}$ mà tương thích với phép cộng và phép nhân số phức. [Gợi ý: Chứng minh bằng phản chứng, xem xét 6 thứ tự có thể có của ba số phức $0, 1, \imath$.]

Bài tập 13.4. (i) Hãy đưa ra một ví dụ về quan hệ thứ tự không toàn phần trên tập hợp số phức [Gợi ý: Chỉ định nghĩa quan hệ thứ tự trên một tập con của $\mathbb{C}$.]

(ii) Hãy đưa ra một ví dụ về quan hệ tiền thứ tự toàn phần trên tập hợp số phức.

Bài tập 13.5. Với mọi số phức z_1, z_2, chứng minh rằng

(i) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(ii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(iii) nếu $z_1 \neq 0$ và $z_2 \neq 0$ thì $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$.

Bài tập 13.6. Chúng ta kí hiệu U là tập hợp các số phức có độ lớn bằng 1.

(i) Chứng minh rằng tồn tại một song ánh giữa U và $[0, 2\pi)$.

(ii) Hãy đưa ra một quan hệ tương đương $\sim$ trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$ sao cho tồn tại một song ánh $f : \mathbb{R}/_\sim \to U$.

Bài tập 13.7. Chứng minh rằng tồn tại một song ánh giữa $U \setminus \{1\}$ và $\mathbb{R}$.

Bài tập 13.8 (Căn nguyên thủy). n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng trong U_n, tồn tại phần tử mà mọi phần tử khác đều là lũy thừa của phần tử đó.

Phần tử như vậy được gọi là căn bậc n nguyên thủy của đơn vị. Chứng minh rằng ζ_k là một căn bậc n nguyên thủy khi và chỉ khi n và k nguyên tố cùng nhau.

Bài tập 13.9. n là một số nguyên dương. U_n là tập hợp tất cả các căn bậc n của 1. $\mathbb{Z}_n$ là tập hợp gồm n số nguyên $0, 1, \ldots n-1$. Phép cộng $+_n$ trên tập hợp $\mathbb{Z}_n$ được định nghĩa như sau

$$a +_n b = \begin{cases} a+b & \text{nếu } a+b < n, \\ a+b-n & \text{nếu } n \leq a+b. \end{cases}$$

(i) Chứng minh rằng ánh xạ $\tau : U_n \to \mathbb{Z}_n$, với $\tau(\zeta_k) = k$ là một song ánh và $\tau(\zeta_k \zeta_\ell) = \tau(\zeta_k) +_n \tau(\zeta_\ell)$ với mọi $k, \ell \in \mathbb{Z}_n$.

(ii) Với $n > 2$, chứng minh rằng tồn tại ít nhất một song ánh khác từ U_n đến $\mathbb{Z}_n$ cũng có tính chất như τ.

Bài tập 13.10 (Quaternion)**.** Tập hợp số bộ bốn (quaternion) được định nghĩa là $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Nói cách khác, đây là tập hợp gồm tất cả các cặp (có thứ tự) số phức. Trong bài tập này, chúng ta kí hiệu quaternion bởi các chữ cái in đậm, kí hiệu số phức bởi các chữ cái in thường.

Liên hợp của quaternion $\mathbf{z} = (a, b)$ được kí hiệu là $\mathbf{z}^*$ và được xác định như sau

$$\mathbf{z}^* = (\overline{a}, -b)$$

Phép cộng quaternion và phép nhân quaternion được định nghĩa như sau

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}).$$

Tương tự như khi định nghĩa số phức như một cặp số thực, chúng ta *đồng nhất* số phức a với quaternion $(a, 0)$. Như vậy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

(i) Chứng minh rằng phép nhân quaternion có tính chất kết hợp.

(ii) Hãy đưa ra một ví dụ để cho thấy rằng phép nhân quaternion không có tính chất giao hoán.

(iii) Chứng minh rằng với mọi quaternion $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, $(\mathbf{z_1 z_2})^* = \mathbf{z_2}^* \mathbf{z_1}^*$ và $\mathbf{z_1 z_1}^* = \mathbf{z_1}^* \mathbf{z_1}$.

(iv) Chứng minh rằng với mọi quaternion $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}^*\mathbf{z}$ là một số thực không âm.

(v) $\mathcal{N} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ là ánh xạ cho bởi biểu thức $\mathcal{N}(\mathbf{z}) = \sqrt{\mathbf{z}^*\mathbf{z}}$. Chứng minh rằng với mọi quaternion $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$, có $\mathcal{N}(\mathbf{z_1 z_2}) = \mathcal{N}(\mathbf{z_1})\mathcal{N}(\mathbf{z_2})$.

Trong chương này, cách định nghĩa số phức như một cặp số thực, cách định nghĩa quaternion như một cặp số phức là một phần của **phép dựng Cayley-Dickson**. Phép dựng này tiếp tục được sử dụng để tạo ra các tập hợp số rộng hơn, chẳng hạn như octonion (số bộ 8), sedenion (số bộ 16), trigintaduonion (số bộ 32), ... Nói chung, càng tiếp tục mở rộng với phép dựng Cayley-Dickson, tập hợp số mới sẽ mất đi tính chất nào đó: tập hợp số phức không được sắp thứ tự hoàn toàn (xem Bài tập 13.3), phép nhân quaternion không có tính chất giao hoán, phép nhân octonion không có tính chất kết hợp, ...

Chương 5

Số p-adic

14 Dẫn nhập không hình thức về số p-adic

14.1 Số và biểu diễn số

Trong các Chương 3 và 4 của tài liệu này, quá trình xây dựng các tập hợp số $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ đã được trình bày lại một cách sơ lược. Khác với cách tiếp cận với số ở chương trình phổ thông, trong tài liệu này, các tập hợp số được định nghĩa và xây dựng theo phương pháp tiên đề, nghĩa là hoàn toàn trừu tượng. Bên cạnh đó, chúng ta cũng sử dụng hệ thống kí hiệu để có thể viết và tính toán với các số một cách thuận tiện. Kí hiệu cho một số được gọi là biểu diễn số.

Bạn đọc hẳn đã hoàn toàn quen thuộc với biểu diễn số thực trong hệ thập phân. Chúng tôi dẫn lại đây một số ví dụ.

$$\begin{aligned}
1512 &= \mathbf{1}\cdot 10^3 + \mathbf{5}\cdot 10^2 + \mathbf{1}\cdot 10^1 + \mathbf{2}\cdot 1 \\
&= \frac{\mathbf{1}}{10^{-3}} + \frac{\mathbf{5}}{10^{-2}} + \frac{\mathbf{1}}{10^{-1}} + \frac{\mathbf{2}}{10^{0}}, \\
\frac{1}{16} = 0.0625 &= \mathbf{0}\cdot 1 + \mathbf{0}\cdot 10^{-1} + \mathbf{6}\cdot 10^{-2} + \mathbf{2}\cdot 10^{-3} + \mathbf{5}\cdot 10^{-4} \\
&= \frac{\mathbf{0}}{10^0} + \frac{\mathbf{0}}{10^1} + \frac{\mathbf{6}}{10^2} + \frac{\mathbf{2}}{10^3} + \frac{\mathbf{5}}{10^4}, \\
\frac{-4}{25} = -0.16 &= -(\mathbf{1}\cdot 10^{-1} + \mathbf{6}\cdot 10^{-2}) \\
&= -\left(\frac{\mathbf{1}}{10^1} + \frac{\mathbf{6}}{10^2}\right), \\
\frac{1}{11} = 0.090909\ldots = 0.\overline{09} &= \mathbf{0}\cdot 1 + \mathbf{0}\cdot 10^{-1} + \mathbf{9}\cdot 10^{-2} + \mathbf{0}\cdot 10^{-3} + \mathbf{9}\cdot 10^{-4} + \cdots \\
&= \frac{\mathbf{0}}{10^0} + \frac{\mathbf{0}}{10^1} + \frac{\mathbf{9}}{10^2} + \frac{\mathbf{0}}{10^3} + \frac{\mathbf{9}}{10^4} + \cdots, \\
\pi = 3.1415926\ldots &= \mathbf{3}\cdot 1 + \mathbf{1}\cdot 10^{-1} + \mathbf{4}\cdot 10^{-2} + \mathbf{1}\cdot 10^{-3} + \mathbf{5}\cdot 10^{-4} + \mathbf{9}\cdot 10^{-5} + \mathbf{2}\cdot 10^{-6} + \mathbf{6}\cdot 10^{-7} + \cdots \\
&= \frac{\mathbf{3}}{10^0} + \frac{\mathbf{1}}{10^1} + \frac{\mathbf{4}}{10^2} + \frac{\mathbf{1}}{10^3} + \frac{\mathbf{5}}{10^4} + \frac{\mathbf{9}}{10^5} + \frac{\mathbf{2}}{10^6} + \frac{\mathbf{6}}{10^7} + \cdots
\end{aligned}$$

Các ví dụ trên đây phần nào giải thích cho ý nghĩa của các chữ số trong biểu diễn thập phân của một số thực. Tương tự, chúng ta cũng có thể biểu diễn các số thực theo hệ cơ số b (trong đó b là một số nguyên lớn hơn 1). Với một số thực không âm x, biểu diễn của x theo hệ cơ số b được xác định bằng cách ghép biểu diễn thập phân của phần nguyên của x với phần lẻ của x.

Đối với phần nguyên của x.

- a_0 là số dư khi thực hiện phép chia (thuật toán Euclid) số nguyên $\lfloor x \rfloor$ cho b, và thương là q_0.
- a_1 là số dư khi thực hiện phép chia số nguyên q_0 cho b, và thương là q_1.
- a_2 là số dư khi thực hiện phép chia số nguyên q_1 cho b, và thương là q_2.
- a_n là số dư khi thực hiện phép chia số nguyên q_{n-1} cho b, và thương là q_n.

trong quá trình trên, đến một lúc nào đó, số dư thu được chỉ là 0. Biểu diễn trong hệ cơ số b của $\lfloor x \rfloor$ là $a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1 a_0$.

Đối với phần lẻ của x.

- a_{-1} là số dư khi chia $\lfloor bx \rfloor$ cho b.
- a_{-2} là số dư khi chia $\left\lfloor b^2 x \right\rfloor$ cho b.
- a_{-n} là số dư khi chia $\lfloor b^n x \rfloor$ cho b.

Biểu diễn trong hệ cơ số b của phần lẻ của x là $a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots$

Biểu diễn trong hệ cơ số b của x là $a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots$

Để biểu diễn số thực âm trong hệ cơ số b, chúng ta tìm biểu diễn của số đối của số đó, và thêm kí hiệu "-" phía trước để biểu thị số âm.

Biểu diễn trong hệ cơ số b của một số thực không âm x nói chung không duy nhất. Chẳng hạn, trong hệ thập phân, chúng ta có

$$\begin{aligned}
1 &= 1.0000\ldots = 1.\overline{0} \\
&= 0.9999\ldots = 0.\overline{9}, \\
2.52 &= 2.5200\ldots = 2.52\overline{0} \\
&= 2.5199\ldots = 2.51\overline{9}.
\end{aligned}$$

14.2 Số n-adic

Trong mục trước, chúng ta đã nêu một số ví dụ về biểu diễn số thực dương trong hệ thập phân và định nghĩa biểu diễn số thực dương trong hệ cơ số bất kì. Với định nghĩa như vậy, mỗi số thực dương $x = a_m \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots$ là giới hạn (hay tổng) của một chuỗi số

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a_m}{b^{-m}} + \cdots + \frac{a_1}{b^{-1}} + \frac{a_0}{b^0} + \frac{a_{-1}}{b^1} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \cdots \\
&= \sum_{k \geq m} \frac{a_k}{b^k}
\end{aligned}$$

trong đó a_k là các số nguyên thuộc tập hợp $\{0, 1, \dots, b-1\}$.

14.3 Bài tập

15 Tập hợp số p-adic

15.1 Định giá p-adic

15.2 Xây dựng tập hợp số p-adic

15.3 Bài tập

Chương 6

Lực lượng của tập hợp và lý thuyết tập hợp theo tiên đề

Cho đến thời điểm này, mặc dù chúng ta đã bắt gặp và làm việc cùng sự vô hạn (chẳng hạn như các tập hợp có vô hạn phần tử), nhưng chúng ta chưa hề định nghĩa thế nào là vô hạn. Mục tiêu của chương này không phải là trả lời vô hạn là gì, mà là giới thiệu khái niệm lực lượng của tập hợp để từ đó tìm ra một số đặc điểm của các tập hợp có vô hạn phần tử.

16 Các định nghĩa

16.1 Lực lượng và so sánh lực lượng giữa các tập hợp

16.2 Tập hợp lũy thừa

16.3 Bài tập

17 Lý thuyết tập hợp theo tiên đề

17.1 Nghịch lý Russell và nghịch lý Cantor

17.2 Lý thuyết tập hợp ZF và ZFC

18 Lực lượng đếm được và lực lượng không đếm được

18.1 Lực lượng đếm được

18.2 Lực lượng không đếm được

18.3 Bài tập

19 Một số thông tin về lực lượng của tập hợp

19.1 Lực lượng của tập hợp số thực

19.2 Định lý Cantor-Schröder-Bernstein

19.3 Giả thuyết continuum

Phụ lục A

Mô hình số thực bằng dãy Cauchy hữu tỉ

Phần phụ lục này cung cấp đầy đủ các chi tiết kĩ thuật trong việc xây dựng tập hợp số thực bằng dãy Cauchy hữu tỉ. Để phục vụ cho Chương 5 về số p-adic, bạn đọc chỉ cần xem mục 1 và 2 của chương này với lưu ý rằng chứng minh trong hai mục này vẫn hợp lệ khi thay giá trị tuyệt đối thông thường bởi giá trị tuyệt đối p-adic.

1 Dãy số hữu tỉ và dãy Cauchy hữu tỉ

Khái niệm dãy số có thể được mô tả một cách trực giác: Một dãy số là một danh sách số và *mỗi số tự nhiên được gán với đúng một số trong danh sách*. Dãy số tự nhiên $0, 1, 2, \ldots$, dãy số lẻ $1, 3, 5, \ldots$ là những ví dụ về dãy số. Tuy nhiên, để tuân thủ tiêu chuẩn của toán học hiện đại, các khái niệm cần được định nghĩa hình thức. Dãy số được định nghĩa như một ánh xạ, như trong định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.1 (Dãy số hữu tỉ). Một **dãy số hữu tỉ** là một ánh xạ với tập nguồn là tập hợp số tự nhiên và tập đích là tập hợp số hữu tỉ.
Một dãy số hữu tỉ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ được kí hiệu là $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, và f_n là giá trị được gán với số tự nhiên n bởi f.
Ngoài cách kí hiệu trên, nhiều tác giả còn dùng các kí hiệu khác cho dãy số, chẳng hạn

$$(f_n), \quad (f_n)_{n=0}, \quad (f_n)_{n=0}^{\infty}$$

Trong dãy số hữu tỉ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, một số tự nhiên n cụ thể được gọi là một **chỉ số**.

Giống như việc người ta vẫn hay tranh cãi 0 có phải một số tự nhiên không, có những tài liệu định nghĩa dãy số bắt đầu bằng chỉ số 1 thay vì 0. Nhưng đây cũng chỉ là vấn đề quy ước, và giống như phương pháp quy nạp toán học, dãy số có thể bắt đầu bằng bất cứ chỉ số n_0 nào, với n_0 là một số nguyên. Tuy nhiên, để thuận theo tinh thần của tài liệu này, chúng ta sẽ luôn để dãy số bắt đầu với chỉ số 0.

Chúng ta theo dõi một số ví dụ về dãy số hữu tỉ và định nghĩa một số kiểu dãy số đặc biệt.

Ví dụ 1.2. Dãy số Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bằng quy nạp

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 0, \\ 1 & \text{khi } n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{khi } n > 1. \end{cases}$$

Ví dụ 1.3 (Dãy hằng số)**.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa $a_n = 0$ với mọi số tự nhiên n là một dãy số. Đây được gọi là một dãy hằng số, vì giá trị của dãy số tại mọi số tự nhiên n là bằng nhau.

Ví dụ 1.4 (Dãy dừng)**.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_n = 0$ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1 là một dãy số. Đây được gọi là một dãy dừng, vì giá trị của dãy số này tại mọi số tự nhiên n là bằng nhau, bắt đầu từ một chỉ số nào đó (trong ví dụ này, chỉ số đó là 2).

Ví dụ 1.5 (Dãy đơn điệu)**.**

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là một dãy số tăng (đơn điệu tăng, tăng thực sự) khi và chỉ khi $a_{n+1} > a_n$ kể từ một chỉ số $n = n_0$ nào đó trở đi.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là một dãy số giảm (đơn điệu giảm, giảm thực sự) khi và chỉ khi $a_{n+1} < a_n$ kể từ một chỉ số $n = n_0$ nào đó trở đi.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là một dãy số không giảm (đơn điệu không giảm) khi và chỉ khi $a_{n+1} \geq a_n$ kể từ một chỉ số $n = n_0$ nào đó trở đi.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là một dãy số không tăng (đơn điệu không tăng) khi và chỉ khi $a_{n+1} \leq a_n$ kể từ một chỉ số $n = n_0$ nào đó trở đi.

Khi có một dãy số, người ta thường quan tâm đến việc giá trị của dãy số sẽ như thế nào với chỉ số n rất lớn, hay dãy số đó có hội tụ không. Để phát biểu một cách chặt chẽ về đặc điểm đó của dãy số, các nhà toán học đã đúc kết lại thành định nghĩa dãy số hội tụ. Trước khi đưa ra định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, chúng ta cần định nghĩa giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ.

Định nghĩa 1.6 (Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ)**.** Ánh xạ $|\cdot| : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ được định nghĩa bởi

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0, \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

được gọi là **ánh xạ giá trị tuyệt đối**, hay **hàm giá trị tuyệt đối** của số hữu tỉ. Số hữu tỉ không âm $|x|$ được gọi là giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ x.

Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ cũng có các tính chất tương tự như giá trị tuyệt đối của số nguyên.

Định lý 1.

(i) Với mọi số hữu tỉ x, có $0 \leq |x|$. Bên cạnh đó, $|x| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

(ii) Với mọi số hữu tỉ x, có $-|x| \leq x \leq |x|$.

(iii) Với mọi số hữu tỉ x, y, có $\left|xy\right| = |x|\left|y\right|$.

(iv) Với mọi số hữu tỉ x, y, có $\left|x+y\right| \leq |x| + \left|y\right|$.

Định nghĩa 1.7. Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **hội tụ đến số hữu tỉ** a nếu và chỉ nếu

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N(\varepsilon)\Big(\forall n \geq N(\varepsilon)(|a_n - a| < \varepsilon)\Big)\Big).$$

Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **hội tụ** nếu tồn tại số hữu tỉ a sao cho dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến

a. Số hữu tỉ a khi đó được gọi là một **điểm giới hạn**, hay **giới hạn** của dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **phân kì** nếu dãy này không hội tụ.

Bằng kí hiệu, chúng ta viết điều kiện cần và đủ để dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **không hội tụ đến số hữu tỉ** a như sau

$$\exists\varepsilon_0 > 0\Big(\forall N\Big(\exists n \geq N(|a_n - a| \geq \varepsilon_0)\Big)\Big).$$

Trên đây là một định nghĩa hình thức cho khái niệm dãy số hữu tỉ hội tụ. Chúng tôi thừa nhận rằng cách định nghĩa này khó hiểu với những người mới học. Nếu bạn đọc cảm thấy đây là một cách định nghĩa phức tạp, thì chúng tôi cho rằng việc nên làm đầu tiên là đọc về vị từ và lượng từ trong Chương 1. Thay cho (nhưng không hoàn toàn thay thế) cách định nghĩa trên, định nghĩa cho dãy số hữu tỉ hội tụ có thể được phát biểu bớt hình thức hơn như sau:

- (Thông dịch trực tiếp logic hình thức thành câu văn) Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là hội tụ đến số hữu tỉ a nếu và chỉ nếu: với mỗi (số hữu tỉ) $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $N(\varepsilon)$ chỉ phụ thuộc vào ε sao cho với mọi chỉ số $n \geq N(\varepsilon)$, chúng ta có $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (Phát biểu không hình thức) Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là hội tụ đến số hữu tỉ a nếu và chỉ nếu: với mỗi (số hữu tỉ) $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý, luôn tồn tại một chỉ số mà từ chỉ số đó trở đi, khoảng cách từ a_n đến a nhỏ hơn ε.

Sau đây chúng tôi đưa ra một số ví dụ và phản ví dụ nhằm minh họa khái niệm dãy số hữu tỉ hội tụ và cách chứng minh hay bác bỏ sự hội tụ của một dãy số hữu tỉ.

Ví dụ 1.8. Mọi dãy số hữu tỉ dừng đều hội tụ.

Một cách tổng quát, chúng ta xét dãy hữu tỉ dừng $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thoả mãn $a_n = a$ (a là một số hữu tỉ) với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Với định nghĩa này, chúng ta suy ra $|a_n - a| = 0$ với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Bên cạnh đó

$$\forall\varepsilon > 0\Big(\exists N = n_0\Big(\forall n \geq N(|a_n - a| < \varepsilon)\Big)\Big).$$

Do đó dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ a.

Dãy số hữu tỉ hằng số là trường hợp riêng của dãy số hữu tỉ dừng nên mọi dãy hữu tỉ hằng số đều hội tụ.

Phản ví dụ 1.9. Dãy số tự nhiên không hội tụ đến bất kì số hữu tỉ nào.

Giả sử phản chứng rằng dãy số tự nhiên hội tụ đến một số hữu tỉ q nào đó.

Chúng ta chọn $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi $n \geq N$, chúng ta có $\left|n - q\right| < \frac{1}{2}$. Tiếp tục sử dụng số tự nhiên N và số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$1 = |(n+1) - n| = \left|(n+1) - q + (q - n)\right| \leq \left|n + 1 - q\right| + \left|n - q\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

là một mâu thuẫn. Do đó giả sử phản chứng là sai, kéo theo dãy số tự nhiên không hội tụ đến bất kì số hữu tỉ nào.

Ví dụ 1.10. Dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi $a_n = \frac{n}{n+1}$ hội tụ đến 1.

Chọn một số hữu tỉ $\varepsilon > 0$, chúng ta sẽ tìm số tự nhiên $N(\varepsilon)$ để sử dụng định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ.

$|a_n - 1| < \varepsilon$ khi và chỉ khi $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Bên cạnh đó, nếu $n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ (đây là kí hiệu phần nguyên của số hữu tỉ), theo định nghĩa phần nguyên của số hữu tỉ thì

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Như vậy

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\exists N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \left(\forall n \geq N (|a_n - 1| < \varepsilon) \right) \right).$$

Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, chúng ta kết luận dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 1.

Phản ví dụ 1.11. Dãy số $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi $b_n = (-1)^n$ (với mọi số tự nhiên n) không hội tụ đến số hữu tỉ nào.

Giả sử phản chứng rằng dãy số $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một số hữu tỉ q. Chúng ta chọn $\varepsilon = 1$. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $\left|b_n - q\right| < 1$. Vẫn là với số $\varepsilon = 1$, số tự nhiên N và $n \geq N$, chúng ta có

$$2 = |b_n - b_n| = \left|(b_{n+1} - q) + (q - b_n)\right| \leq \left|b_{n+1} - q\right| + \left|b_n - q\right| < 1 + 1 = 2$$

là một mâu thuẫn. Do đó giả sử phản chứng là sai, kéo theo dãy số $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến bất kì số hữu tỉ nào.

Định lý 2. *Nếu một dãy số hữu tỉ hội tụ thì dãy số hữu tỉ đó chỉ có một điểm giới hạn.*

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến hai số hữu tỉ khác nhau là a và b. Chọn $\varepsilon = |a - b|$.

Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ

- Tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_a$, chúng ta có $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Tồn tại số tự nhiên N_b sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_b$, chúng ta có $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Chúng ta chọn N là số tự nhiên lớn nhất trong hai số N_a và N_b (nói cách khác, $N = \max\{N_a, N_b\}$). Nếu số tự nhiên $n \geq N$ thì $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ và $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, từ đó chúng ta có

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = |a - b|$$

là một điều vô lí. Do đó giả sử phản chứng là sai. Vậy nếu dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một số hữu tỉ thì đó là số hữu tỉ duy nhất mà $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến. □

Nếu dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ a thì chúng ta kí hiệu $\lim a_n = a$, hoặc $\lim_n a_n = a$ khi cần nhấn mạnh chỉ số.

Đối với dãy số, chúng ta cũng có khái niệm dãy số bị chặn.

Định nghĩa 1.12 (Dãy số hữu tỉ bị chặn)**.** Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **bị chặn** nếu và chỉ nếu tồn tại số hữu tỉ dương A sao cho $|a_n| \leq A$ (hoặc $|a_n| < A$) với mọi số tự nhiên n.

Một cách trực giác, việc một dãy số hữu tỉ hội tụ đến một số hữu tỉ a có thể được mô tả như sau: Từ một chỉ số n nào đó trở đi, các giá trị của dãy số sẽ chụm quanh điểm giới hạn. Mô tả này cho thấy sẽ thật không hợp lý nếu như "khoảng cách" từ một giá trị nào đó của dãy số đến a có thể lớn tùy ý. Chúng ta có kết quả sau đây.

Định lý 3. *Nếu dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số hữu tỉ bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một số hữu tỉ a nào đó.

Chúng ta chọn $\varepsilon = 1$. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, tồn tại số tự nhiên N nào đó sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n - a| < 1$. Với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Theo nguyên lý cực hạn, tập hợp $\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$ có phần tử lớn nhất. Chúng ta kí hiệu phần tử đó là A. A là một số hữu tỉ dương vì các phần tử trong tập hợp trên đều là số hữu tỉ, và $1 + |a| > 0$. Do đó, $|a_n| \leq A$ với mọi số tự nhiên n, đồng nghĩa với việc dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn. □

Việc tính toán giới hạn của một số dãy số có thể được đơn giản hóa nhờ kết quả sau và những giới hạn đã biết.

Định lý 4. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy số hữu tỉ.*

(i) Nếu $\lim a_n = a$ và $\lim b_n = b$ thì $\lim s_n = a + b$, trong đó dãy số hữu tỉ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi $s_n = a_n + b_n$ với mọi số tự nhiên n (Chúng ta còn kí hiệu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bởi $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

(ii) Nếu $\lim a_n = a$ thì $\lim c_n = ca$, trong đó dãy số hữu tỉ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi $c_n = c \cdot a_n$ với mọi số tự nhiên n, trong đó c là một hằng số hữu tỉ (Chúng ta còn kí hiệu $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bởi $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

(iii) Nếu $\lim a_n = a$ và $\lim b_n = b$ thì $\lim p_n = ab$, trong đó dãy số hữu tỉ $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi $p_n = a_n b_n$ với mọi số tự nhiên n (Chúng ta còn kí hiệu $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bởi $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Chứng minh. (i) Chúng ta lấy ε là một số hữu tỉ dương bất kì.

Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, với số hữu tỉ dương $\dfrac{\varepsilon}{2}$

- tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_a$, có $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
- tồn tại số tự nhiên N_b sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_b$, có $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_a, N_b\}$. Nếu số tự nhiên $n \geq N$ thì $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ và $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Khi đó chúng ta có

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Những điều trên có nghĩa là: với mọi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, chúng ta suy ra $\lim s_n = a + b$.

(ii) Nếu $c = 0$ thì $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy hằng số, vì $c_n = c \cdot a_n = 0$ với mọi số tự nhiên n. Khi đó $\lim c_n = 0 = ca$.

Nếu $c \neq 0$, chúng ta lấy ε là một số hữu tỉ dương bất kì. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, với số hữu tỉ dương $\dfrac{\varepsilon}{|c|}$, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|c|}$. Cũng là số tự nhiên N, nếu số tự nhiên $n \geq N$ thì chúng ta có

$$|ca_n - ca| = |c(a_n - a)| = |c|\,|a_n - a| \leq |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, chúng ta kết luận $\lim c_n = ca$.

(iii) Chúng ta có

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\le |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b|\end{aligned}$$

Dựa trên bất đẳng thức vừa thu được, chúng ta tìm số tự nhiên "N" để có thể áp dụng được định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ. Vì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến a và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến b nên hai dãy số này bị chặn, kéo theo tồn tại hai số hữu tỉ dương A, B sao cho $|a_n| \le A$ và $|b_n| \le B$ với mọi số tự nhiên n.

Chúng ta chọn ε là một số hữu tỉ dương bất kì. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ

- với số hữu tỉ dương $\dfrac{\varepsilon}{2B}$, tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N_a$, chúng ta có $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2B}$
- với số hữu tỉ dương $\dfrac{\varepsilon}{2A}$, tồn tại số tự nhiên N_b sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N_b$, chúng ta có $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_a, N_b\}$. Nếu số tự nhiên $n \ge N$ thì $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2B}$ và $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$. Khi đó chúng ta có

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\le |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2B}\cdot B + \frac{\varepsilon}{2A}\cdot A \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Như vậy, với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N$, chúng ta có $|a_nb_n - ab| < \varepsilon$. Theo định nghĩa giới hạn dãy số hữu tỉ, chúng ta kết luận $\lim p_n = ab$.

□

Đến lúc này, chúng ta đã chuẩn bị đủ để định nghĩa và chứng minh các kết quả về dãy Cauchy hữu tỉ.

Định nghĩa 1.13 (Dãy Cauchy hữu tỉ)**.** Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là một **dãy Cauchy hữu tỉ** nếu và chỉ nếu

$$\forall\varepsilon > 0\Big(\exists N(\varepsilon)\big(\forall n \ge N(\varepsilon)\big(\forall m \ge N(\varepsilon)(|a_m - a_n| < \varepsilon)\big)\big)\Big).$$

Điều kiện trên có thể phát biểu dưới dạng tương đương là

$$\forall\varepsilon > 0\Big(\exists N(\varepsilon)\big(\forall n \ge N(\varepsilon)\big(\forall p > 0(\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon)\big)\big)\Big).$$

Chúng ta kí hiệu tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ là $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$.

Chúng ta cũng có thể phát biểu định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ theo cách bớt hình thức hơn.

- (Thông dịch trực tiếp từ định nghĩa hình thức) Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là một dãy Cauchy hữu tỉ nếu và chỉ nếu: Với mọi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên $N(\varepsilon)$ sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \ge N(\varepsilon)$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \varepsilon$.
- (Mô tả trực giác) Dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là một dãy Cauchy hữu tỉ nếu và chỉ nếu: Với mọi số hữu tỉ dương ε nhỏ tùy ý, từ một chỉ số nào đó trở đi, khoảng cách giữa các giá trị của dãy số nhỏ hơn ε.

Dãy số hữu tỉ hội tụ là một trường hợp riêng của dãy Cauchy hữu tỉ.

Định lý 5. *Nếu một dãy số hữu tỉ hội tụ thì đó cũng là một dãy Cauchy hữu tỉ.*

Chứng minh. Giả sử dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ a. Chúng ta chọn ε là một số hữu tỉ dương bất kì.

Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Vẫn là số tự nhiên N, nếu các số tự nhiên n, m thỏa mãn $n, m \geq N$ thì chúng ta có

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Như vậy, với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $m, n \geq N$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Do đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ. □

Tương tự với dãy số hữu tỉ hội tụ, dãy Cauchy hữu tỉ cũng bị chặn.

Định lý 6. *Nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số hữu tỉ bị chặn.*

Chứng minh. Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, với số hữu tỉ dương 1, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có $|a_m - a_n| < 1$. Do đó $|a_n - a_N| < 1$ với mọi số tự nhiên $n \geq N$. Bên cạnh đó, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$|a_n| = |(a_n - a_N) + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Theo nguyên lý cực hạn, tập hợp $\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$ có phần tử lớn nhất. Chúng ta kí hiệu phần tử này là A, A còn là một số hữu tỉ dương, vì A thuộc tập hợp trên (gồm các số hữu tỉ) và $A \geq 1 + |a_N|$.

Với hai điều trên, chúng ta suy ra $|a_n| \leq A$ với mọi số tự nhiên n, điều này đồng nghĩa với việc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số hữu tỉ bị chặn. □

Dãy số hữu tỉ hội tụ thì cũng là dãy Cauchy hữu tỉ nhưng điều ngược lại nói chung không đúng. Mệnh đề dưới đây đưa ra một dãy Cauchy hữu tỉ nhưng không hội tụ đến một số hữu tỉ nào.

Định lý 7. *Dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bằng đệ quy như sau*

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 0 \\ \dfrac{2x_{n-1} + 2}{x_{n-1} + 2} & \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy và không hội tụ đến bất kì số hữu tỉ nào.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh mệnh đề này bằng phản chứng, lần lượt qua các bước sau.

Bước 1. $x_n \geq 1$ với mọi số tự nhiên n.

Khi $n = 0$, chúng ta có $x_0 = 1$, do đó $x_0 \geq 1$.

Giả sử với số tự nhiên $n = k \geq 0$, chúng ta có $x_k \geq 1$. Khi đó theo giả thiết quy nạp

$$x_{k+1} = \frac{2x_{k-1} + 2}{x_{k-1} + 2} = 1 + \frac{x_{k-1}}{x_{k-1} + 2} \geq 1$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, $x_n \geq 1$ với mọi số tự nhiên n.

Bước 2. Với mọi số tự nhiên n, $\left|{x_n}^2 - 2\right| \le \dfrac{1}{n+1}$.

Khi $n = 0$, chúng ta có $x_0 = 1$, do đó $\left|{x_0}^2 - 1\right| = 1 \le \dfrac{1}{0+1}$.

Giả sử với số tự nhiên $n = k \ge 0$, chúng ta có $\left|{x_k}^2 - 2\right| \le \dfrac{1}{k+1}$.

$$\begin{aligned}
\left|{x_{k+1}}^2 - 2\right| &= \left|\frac{4(x_k+1)^2}{(x_k+2)^2} - 2\right| = \left|\frac{2x_k^2 - 4}{(x_k+2)^2}\right| = \left|\frac{2}{(x_k+2)^2}\right|\left|{x_k}^2 - 2\right| \\
&\le \frac{1}{2}\left|{x_k}^2 - 2\right| && \text{(vì } x_k > 0\text{)} \\
&\le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+1} && \text{(theo giả thiết quy nạp)} \\
&= \frac{1}{2k+2} \le \frac{1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, $\left|{x_n}^2 - 2\right| \le \dfrac{1}{n+1}$ với mọi số tự nhiên n.

Bước 3. Chứng minh rằng $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

Chúng ta chọn ε là một số hữu tỉ dương, $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, nếu số tự nhiên $n \ge N$ thì với mọi số tự nhiên p, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\left|x_{n+p} - x_n\right| &= \frac{\left|{x_{n+p}}^2 - {x_n}^2\right|}{\left|x_{n+p} + x_n\right|} = \frac{\left|({x_{n+p}}^2 - 2) + (2 - {x_n}^2)\right|}{\left|x_{n+p} + x_n\right|} \\
&\le \frac{\left|{x_{n+p}}^2 - 2\right| + \left|{x_n}^2 - 2\right|}{\left|x_{n+p} + x_n\right|} \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p+1}\right) && \text{(theo \textbf{Bước 1} và \textbf{Bước 2})} \\
&\le \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Do đó với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N$ và với mọi số tự nhiên p, chúng ta có $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$. Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

Bước 4. Dãy số hữu tỉ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (được định nghĩa bởi $y_n = {x_n}^2$ với mọi số tự nhiên n) hội tụ đến 2.

Chúng ta chọn ε là một số hữu tỉ dương, $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, nếu số tự nhiên $n \ge N$ thì

$$\left|{x_n}^2 - 2\right| \le \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} < \varepsilon.$$

Như vậy, với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N$, chúng ta có $\left|{x_n}^2 - 2\right| < \varepsilon$. Theo định nghĩa dãy số hội tụ, dãy số hữu tỉ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 2.

Bước 5. Chứng minh rằng dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến bất kì số hữu tỉ nào.

Giả sử phản chứng rằng dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ x.

Theo phần (iii) của Mệnh đề 4, chúng ta suy ra dãy số $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ x^2. Theo Định lý 2, chúng ta suy ra $x^2 = 2$.

Vì không có số hữu tỉ nào có bình phương bằng 2 nên $x^2 = 2$ (với x là số hữu tỉ) là một kết quả vô lý. Như vậy giả sử phản chứng là sai, kéo theo dãy số hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến số hữu tỉ nào.

□

Khi sử dụng dãy Cauchy hữu tỉ để xây dựng tập hợp số thực, chúng ta gặp một vấn đề: *có nhiều dãy Cauchy hữu tỉ hội tụ đến cùng một số hữu tỉ*. Điều này sẽ được giải quyết bằng một quan hệ tương đương như sau.

Định lý 8. *Hai dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là có quan hệ $\sim$, và được kí hiệu là $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi dãy số hữu tỉ $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 0, nói cách khác*

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N\big(\forall n \geq N(|a_n - b_n| < \varepsilon)\big)\Big).$$

(i) Quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy số hữu tỉ là một quan hệ tương đương. Nói riêng, quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ là một quan hệ tương đương.

(ii) Nếu hai dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tương đương theo quan hệ $\sim$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ q khi và chỉ khi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ q.

(iii) Nếu hai dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tương đương theo quan hệ $\sim$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy hữu tỉ khi và chỉ khi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy hữu tỉ.

Chứng minh. (i) Dãy số hữu tỉ $(a_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy hữu tỉ hằng số, giá trị của dãy này tại mọi số tự nhiên n bằng 0, kéo theo dãy số hữu tỉ $(a_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 0. Do đó quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy số hữu tỉ có tính chất phản xạ.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N\big(\forall n \geq N(|a_n - b_n| < \varepsilon)\big)\Big).$$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N\big(\forall n \geq N(|b_n - a_n| < \varepsilon)\big)\Big).$$

Mặt khác, vì $|a_n - b_n| = |b_n - a_n|$ với mọi số tự nhiên n nên hai điều kiện dưới đây tương đương

$$\forall \varepsilon > 0\Big(\exists N\big(\forall n \geq N(|a_n - b_n| < \varepsilon)\big)\Big) \quad \longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\Big(\exists N\big(\forall n \geq N(|b_n - a_n| < \varepsilon)\big)\Big).$$

Do đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, điều này có nghĩa là quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy số hữu tỉ có tính chất đối xứng.

Nếu các dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp dãy số hữu tỉ, với mỗi số hữu tỉ dương ε

- Tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, chúng ta có $|a_n - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- Tồn tại số tự nhiên N_{bc} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{bc}$, chúng ta có $|b_n - c_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Chúng ta định nghĩa số tự nhiên N là số tự nhiên lớn nhất trong hai số N_{ab}, N_{bc}. Nếu số tự nhiên $n \geq N$ thì $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, và

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Từ điều trên, chúng ta suy ra rằng với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n - c_n| < \varepsilon$. Do đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, điều này có nghĩa là quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy số hữu tỉ có tính chất bắc cầu.

Vậy quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy số hữu tỉ là một quan hệ tương đương. Vì tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ là tập hợp con của tập hợp các dãy số hữu tỉ nên quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ cũng là một quan hệ tương đương.

(ii) $(\Rightarrow)$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ q.

Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_a$, chúng ta có $\left|a_n - q\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp dãy số hữu tỉ, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kéo theo tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, chúng ta có $|a_n - b_n| < \varepsilon$.

Chúng ta chọn số tự nhiên $N = \max\{N_a, N_{ab}\}$. Khi đó, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$\left|b_n - q\right| = \left|(b_n - a_n) + (a_n - q)\right| \leq |b_n - a_n| + \left|a_n - q\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, dãy số hữu tỉ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ q.

$(\Leftarrow)$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ q.

Hoàn toàn tương tự, chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_b$, chúng ta có $\left|b_n - q\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp dãy số hữu tỉ, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, chúng ta có $|a_n - b_n| < \varepsilon$.

Chúng ta chọn số tự nhiên $N = \max\{N_b, N_{ab}\}$. Khi đó, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$\left|a_n - q\right| = \left|(a_n - b_n) + (b_n - q)\right| \leq |a_n - b_n| + \left|b_n - q\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số hữu tỉ q.

(iii) $(\Rightarrow)$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy hữu tỉ.

Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì. Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N_a$, chúng ta có $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp dãy số hữu tỉ, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kéo theo tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, chúng ta có $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Chúng ta chọn số tự nhiên $N = \max\{N_a, N_{ab}\}$. Khi đó, với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
|b_m - b_n| &= |(b_m - a_m) + (a_m - a_n) + (a_n - b_n)| \\
&\leq |b_m - a_m| + |a_m - a_n| + |a_n - b_n| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Từ điều trên, chúng ta suy ra rằng với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Do đó $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

($\Leftarrow$) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy hữu tỉ.

Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì. Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, tồn tại số tự nhiên N_b sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N_b$, chúng ta có $|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{3}$. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp dãy số hữu tỉ, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kéo theo tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, chúng ta có $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Chúng ta chọn số tự nhiên $N = \max\{N_b, N_{ab}\}$. Khi đó, với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - b_m) + (b_m - b_n) + (b_n - a_n)| \\ &\leq |a_m - b_m| + |b_m - b_n| + |b_n - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Từ điều trên, chúng ta suy ra rằng với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Do đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

□

Chúng ta kí hiệu tập thương gồm các lớp tương đương của quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ là $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$. Trong nội dung tiếp theo của mục này, chúng ta chỉ làm việc với dãy Cauchy hữu tỉ và các lớp tương đương của các dãy Cauchy hữu tỉ.

2 Các phép toán với dãy Cauchy hữu tỉ

Định lý 9 (Phép cộng và phép nhân dãy Cauchy hữu tỉ). *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ thì*

(i) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ. Chúng ta cũng kí hiệu $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ. Chúng ta cũng kí hiệu $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chứng minh. (i) Chúng ta chọn ε là một số hữu tỉ dương.

Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, với số hữu tỉ dương $\frac{\varepsilon}{2}$

- tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N_a$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
- tồn tại số tự nhiên N_b sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N_b$, chúng ta có $|b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_a, N_b\}$. Với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ và $|b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, và

$$|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| = |(a_m - a_n) + (b_m - b_n)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Từ những điều trên, chúng ta suy ra rằng với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có $|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| < \varepsilon$. Như vậy $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ. Theo Định lý 6, tồn tại hai số hữu tỉ dương A, B sao cho $|a_n| \leq A$ và $|b_n| \leq B$ với mọi số tự nhiên n.

Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì. Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ

- với số hữu tỉ dương $\dfrac{\varepsilon}{2B}$, tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N_a$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2B}$
- với số hữu tỉ dương $\dfrac{\varepsilon}{2A}$, tồn tại số tự nhiên N_b sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N_b$, chúng ta có $|b_m - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_a, N_b\}$. Nếu các số tự nhiên $n, m \geq N$ thì $|a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2B}$ và $|b_m - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$. Khi đó chúng ta có

$$\begin{aligned}
|a_m b_m - a_n b_n| &= |a_m(b_m - b_n) + b_n(a_m - a_n)| \\
&\leq |a_m(b_m - b_n)| + |b_n(a_m - a_n)| \\
&= |a_m|\,|b_m - b_n| + |b_n|\,|a_m - a_n| \\
&< A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Từ những điều trên, chúng ta suy ra rằng với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có $|a_m b_m - a_n b_n| < \varepsilon$. Như vậy $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

□

Hệ quả 2.1. *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ thì $(xa_n + yb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cũng là một dãy Cauchy hữu tỉ, trong đó x, y là hai hằng số hữu tỉ.*

Chứng minh. Theo phần (ii) của Định lý 9, $(xa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(yb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ.

Theo phần (i) của Định lý 9, $(xa_n + yb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ. □

Để định nghĩa phép cộng và phép nhân hai *lớp tương đương của các dãy Cauchy hữu tỉ* (nói cách khác là hai phần tử của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$) theo cách tương tự như với *dãy Cauchy hữu tỉ*, chúng ta cần một định nghĩa không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện của lớp tương đương.

Định lý 10. *Nếu các dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì*

(i) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chứng minh. (i) Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì.

Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy Cauchy hữu tỉ, với số hữu tỉ dương $\dfrac{\varepsilon}{2}$

- tồn tại số tự nhiên N_{ac} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ac}$, chúng ta có $|a_n - c_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,
- tồn tại số tự nhiên N_{bd} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{bd}$, chúng ta có $|b_n - d_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_{ac}, N_{bd}\}$. Với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - d_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, và

$$|(a_n + b_n) - (c_n + d_n)| = |(a_n - c_n) + (b_n - d_n)| \leq |a_n - c_n| + |b_n - d_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Từ những điều trên, chúng ta suy ra rằng với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|(a_n + b_n) - (c_n + d_n)| < \varepsilon$. Như vậy $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì.

Theo Định lý 6, vì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ nên tồn tại hai số hữu tỉ dương A, D sao cho $|a_n| < A$ và $|d_n| < D$ với mọi số tự nhiên n.

Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp dãy Cauchy hữu tỉ

- với số hữu tỉ dương $\frac{\varepsilon}{2D}$, tồn tại số tự nhiên N_{ac} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ac}$, chúng ta có $|a_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2D}$,
- với số hữu tỉ dương $\frac{\varepsilon}{2A}$, tồn tại số tự nhiên N_{bd} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{bd}$, chúng ta có $|b_n - d_n| < \frac{\varepsilon}{2A}$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_{ac}, N_{bd}\}$. Với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2D}$, $|b_n - d_n| < \frac{\varepsilon}{2A}$ và

$$\begin{aligned}|a_n b_n - c_n d_n| &= |a_n(b_n - d_n) + d_n(a_n - c_n)| \\ &\leq |a_n(b_n - d_n)| + |d_n(a_n - c_n)| \\ &= |a_n|\,|b_n - d_n| + |d_n|\,|a_n - c_n| \\ &< A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + D \cdot \frac{\varepsilon}{2D} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Từ những điều trên, chúng ta suy ra rằng với mỗi số hữu tỉ dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n b_n - c_n d_n| < \varepsilon$. Như vậy $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Định nghĩa 2.2. Chúng ta kí hiệu lớp tương đương gồm các *dãy số hữu tỉ* tương đương với dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

(i) Phép cộng hai phần tử của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ là một phép toán hai ngôi trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, được kí hiệu là $+$ và được xác định như sau

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

trong đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ.

(ii) Phép nhân hai phần tử của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ là một phép toán hai ngôi trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, được kí hiệu là $\cdot$ và được xác định như sau

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

trong đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ.

Một cách không hình thức, chúng ta có thể diễn đạt định nghĩa trên thành: tổng (tích) của hai lớp tương đương là lớp tương đương của tổng (tích) hai dãy Cauchy. Với định nghĩa trên, phép cộng và phép nhân của hai phần tử trong $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ không phụ thuộc vào việc chọn phần tử đại diện của lớp tương đương. Định nghĩa này cũng cho phép chúng ta chứng minh các tính chất của phép cộng, phép nhân trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ theo cách dễ dàng.

Định lý 11. *(i) Phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có tính chất kết hợp.*

(ii) Phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có phần tử đồng nhất.

(iii) Mỗi phần tử của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có phần tử đối.

(iv) Phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có tính chất giao hoán.

Chứng minh. (i) Với mỗi phần tử $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, theo định nghĩa phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ và tính chất kết hợp của phép cộng số hữu tỉ, chúng ta có

$$\begin{aligned}
([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]) + [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\
&= [((a_n + b_n) + c_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\
&= [(a_n + (b_n + c_n))_{n\in\mathbb{N}}] \\
&= [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(b_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\
&= [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + ([(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}])
\end{aligned}$$

Vậy phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có tính chất kết hợp.

(ii) $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ là một phần tử của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$. Với mọi phần tử $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, theo định nghĩa phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(0)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n + 0)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], \\
[(0)_{n\in\mathbb{N}}] + [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(0 + a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}].
\end{aligned}$$

Vậy $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ là một phần tử đồng nhất của phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$.

(iii) Với mỗi phần tử $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n + (-a_n))_{n\in\mathbb{N}}] = [(0)_{n\in\mathbb{N}}], \\
[(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [((-a_n) + a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(0)_{n\in\mathbb{N}}].
\end{aligned}$$

Vậy mỗi phần tử của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có phần tử đối.

(iv) Với mỗi phần tử $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, theo định nghĩa phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ và tính chất giao hoán của phép cộng số hữu tỉ, chúng ta có

$$\begin{aligned}
[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\
&= [(b_n + a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\
&= [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}].
\end{aligned}$$

Vậy phép cộng trên $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có tính chất giao hoán.

□

Định lý 12. *(i) Phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ có tính chất kết hợp.*

(ii) Phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ có tính chất phân phối với phép cộng trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$.

(iii) Phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ có phần tử đồng nhất, và phần tử này khác với phần tử đồng nhất của phép cộng trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$.

(iv) Phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ có tính chất giao hoán.

Chứng minh. (i) Với mỗi phần tử $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, theo định nghĩa phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ và tính chất kết hợp của phép nhân số hữu tỉ, chúng ta có

$$\begin{aligned}
([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}])\cdot[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\
&= [((a_nb_n)c_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\
&= [(a_n(b_nc_n))_{n\in\mathbb{N}}]\\
&= [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(b_nc_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\
&= [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot([(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}])
\end{aligned}$$

Vậy phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ có tính chất kết hợp.

(ii) Với mỗi phần tử $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, theo định nghĩa phép nhân và phép cộng trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ và tính chất phân phối của phép nhân với phép cộng số hữu tỉ, chúng ta có

$$\begin{aligned}
([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]+[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}])\cdot[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\
&= [((a_n+b_n)c_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\
&= [(a_nc_n+b_nc_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\
&= [(a_nc_n)_{n\in\mathbb{N}}]+[(b_nc_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\
&= [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]+[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}].
\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự, chúng ta cũng chứng minh được rằng

$$[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot([(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]+[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]+[(c_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Vậy phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ có tính chất phân phối với phép cộng trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$.

(iii) $[(1)_{n\in\mathbb{N}}]$ là một phần tử của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$. Với mọi phần tử $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, theo định nghĩa phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, chúng ta có

$$\begin{aligned}
[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(1)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(a_n\cdot 1)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}],\\
[(1)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(1\cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}].
\end{aligned}$$

Vậy $[(1)_{n\in\mathbb{N}}]$ là một phần tử đồng nhất của phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$.

Giả sử phản chứng rằng $[(1)_{n\in\mathbb{N}}] = [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, chúng ta có $(1)_{n\in\mathbb{N}} \sim (0)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 8, hai dãy số hữu tỉ $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến cùng một số hữu tỉ. Điều này là vô lý vì $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 1, còn $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 0 và $0 \neq 1$.

Do đó $[(1)_{n\in\mathbb{N}}] \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$.

(iv) Với mỗi phần tử $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$, theo định nghĩa phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ và tính chất giao hoán của phép nhân số hữu tỉ, chúng ta có

$$\begin{aligned}[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\ &= [(b_na_n)_{n\in\mathbb{N}}]\\ &= [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]\cdot[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}].\end{aligned}$$

Vậy phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ có tính chất giao hoán.

□

Trên đây chúng ta đã chứng minh được rằng tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ cùng hai phép toán cộng và nhân thỏa mãn 8 tiên đề đầu tiên trong các tiên đề về trường. Để chứng minh rằng tiên đề thứ 9 cũng được thỏa mãn, chúng ta sử dụng định lý sau.

Định lý 13. *Nếu dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0 thì tồn tại số hữu tỉ dương ε sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n| \geq \varepsilon$.*

Chứng minh. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0 khi và chỉ khi tồn tại số hữu tỉ dương ε_0 sao cho với mọi số tự nhiên N_a, tồn tại số tự nhiên $n \geq N_a$, chúng ta có $|a_n| \geq \varepsilon_0$. ($\star$)

Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, với số hữu tỉ dương $\frac{\varepsilon_0}{2}$, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. ($\star\star$)

Vì ($\star$) nên với số tự nhiên N, tồn tại số tự nhiên $N' \geq N$ sao cho $|a_{N'}| \geq \varepsilon_0$. Cùng với ($\star\star$), chúng ta suy ra rằng với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$|a_n| = |a_{N'} - (a_{N'} - a_n)| \geq |a_{N'}| - |a_{N'} - a_n| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} > 0.$$

Do đó, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n| \neq 0$. Vì giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ bằng 0 khi và chỉ khi số hữu tỉ đó bằng 0 nên với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $a_n \neq 0$.

Vậy, với số hữu tỉ dương $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$, tồn tại tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n| \geq \varepsilon$. □

Định lý 14. *Với mỗi phần tử $\alpha \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ trong $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$, tồn tại phần tử β trong $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ sao cho $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$.*

Chứng minh. Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, mọi phần tử của lớp tương đương α đều không tương đương với dãy số hữu tỉ $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo mọi phần tử của lớp tương đương α đều không hội tụ đến 0.

Chúng ta chọn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một phần tử của lớp tương đương α. Vì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0 nên theo Định lý 13, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $a_n \neq 0$. Chúng ta định nghĩa dãy số hữu tỉ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ như sau.

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n < N \\ \dfrac{1}{a_n} & \text{nếu } n \geq N \end{cases}$$

Chúng ta chứng minh $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì. Theo Định lý 13, tồn tại số hữu tỉ dương ε_0 sao cho tồn tại số tự nhiên N' sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N'$, chúng ta có $|a_n| \geq \varepsilon_0$. Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, với số hữu tỉ dương $\varepsilon \cdot {\varepsilon_0}^2$, tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N_a$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \varepsilon \cdot {\varepsilon_0}^2$.

Chúng ta định nghĩa $N'' = \max\{N_a, N'\}$. Với mọi số tự nhiên $n, m \geq N''$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \varepsilon \cdot {\varepsilon_0}^2$, $|a_n| \geq \varepsilon_0$, và

$$|b_m - b_n| = \left|\frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_m - a_n}{a_m a_n}\right| = \frac{|a_m - a_n|}{|a_m|\,|a_n|} < \frac{\varepsilon \cdot {\varepsilon_0}^2}{{\varepsilon_0}^2} = \varepsilon.$$

Do đó $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ.

Mặt khác, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số hữu tỉ dừng, vì với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $a_n b_n = 1$. Do đó, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến 1. Theo định nghĩa của phép nhân trong $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$, chúng ta suy ra

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(1)_{n\in\mathbb{N}}],\\ \beta \cdot \alpha &= [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(b_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(1)_{n\in\mathbb{N}}].\end{aligned}$$

Vậy, với mỗi phần tử $\alpha \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ trong $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$, tồn tại phần tử β trong $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ sao cho $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$. □

Đến lúc này, chúng ta đã chứng minh được rằng tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ cùng hai phép toán cộng và nhân thỏa mãn các tiên đề về trường.

3 Quan hệ tiền thứ tự giữa các dãy Cauchy hữu tỉ

Trong nội dung này, chúng ta định nghĩa một *quan hệ tiền thứ tự* giữa các dãy Cauchy hữu tỉ để từ đó định nghĩa một *quan hệ thứ tự* giữa các phần tử của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$.

Định nghĩa 3.1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy Cauchy hữu tỉ.

(i) Chúng ta nói $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có quan hệ $\lesssim$ nếu và chỉ nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tương đương** với $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hoặc tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n \leq b_n$.

(ii) Chúng ta nói $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có quan hệ $<$ nếu và chỉ nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **không tương đương** với $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Theo định nghĩa trên, quan hệ $<$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ là trường hợp riêng của quan hệ $\lesssim$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$.

Để chứng minh các tính chất của quan hệ $<, \lesssim$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, chúng ta mở rộng Định lý 13 thành định lý sau. Chứng minh của định lý sau là chứng minh của Định lý 13 sau khi được bổ sung.

Định lý 15. *Nếu dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0 thì có đúng một trong hai khả năng sau*

- *Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n \geq q$.*
- *Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n \leq -q$.*

Chứng minh. Theo định nghĩa dãy số hữu tỉ hội tụ, dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0 khi và chỉ khi tồn tại số hữu tỉ dương ε_0 sao cho với mọi số tự nhiên N_a, tồn tại số tự nhiên $n \geq N_a$, chúng ta có $|a_n| \geq \varepsilon_0$. (⋆)

Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, với số hữu tỉ dương $\frac{\varepsilon_0}{2}$, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. (⋆⋆)

Vì (⋆) nên với số tự nhiên N, tồn tại số tự nhiên $N' \geq N$ sao cho $|a_{N'}| \geq \varepsilon_0$. Cùng với (⋆⋆), chúng ta suy ra rằng với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$|a_n| = |a_{N'} - (a_{N'} - a_n)| \geq |a_{N'}| - |a_{N'} - a_n| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} > 0.$$

Do đó, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $|a_n| \neq 0$. Vì giá trị tuyệt đối của một số hữu tỉ bằng 0 khi và chỉ khi số hữu tỉ đó bằng 0 nên với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $a_n \neq 0$.

Theo định nghĩa dãy Cauchy hữu tỉ, với số hữu tỉ dương $\frac{\varepsilon_0}{4}$, tồn tại số tự nhiên N'' sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N''$, chúng ta có $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon_0}{4}$. Chúng ta chọn $N_0 = \max\{N, N''\}$. Khi đó, với mọi số tự nhiên $n, m \geq N_0$, có $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ và $|a_n| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Vì $\left|a_{N_0}\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$ và $a_{N_0} \neq 0$ nên chỉ có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1. $a_{N_0} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Với mọi $n \geq N_0$, chúng ta có

$$a_n = (a_n - a_{N_0}) + a_{N_0} \geq -\left|a_n - a_{N_0}\right| + \frac{\varepsilon_0}{2} \geq -\frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Do đó, với số hữu tỉ dương $q = \frac{\varepsilon_0}{4}$, tồn tại số tự nhiên N_0 sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_0$, có $a_n \geq q$.

Khả năng 2. $a_{N_0} \leq -\frac{\varepsilon_0}{2}$.

Với mọi $n \geq N_0$, chúng ta có

$$a_n = (a_n - a_{N_0}) + a_{N_0} \leq \left|a_n - a_{N_0}\right| + \left(-\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon_0}{4} + \left(-\frac{\varepsilon_0}{2}\right) = -\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Do đó, với số hữu tỉ dương $q = \frac{\varepsilon_0}{4}$, tồn tại số tự nhiên N_0 sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_0$, có $a_n \leq -q$.

□

Bằng định lý trên, chúng ta chứng minh được điều kiện cần và đủ để hai dãy Cauchy hữu tỉ có quan hệ <.

Định lý 16. *Hai dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n - b_n \leq -q$. Bằng kí hiệu hình thức, điều kiện trên được viết như sau:*

$$\exists q > 0\Big(\exists N\big(\forall n \geq N(a_n - b_n \leq -q)\big)\Big).$$

Chứng minh. ($\Rightarrow$) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Theo định nghĩa quan hệ < trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, hai dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không tương đương. Theo định nghĩa quan hệ tương đương giữa các dãy số hữu tỉ, dãy số hữu tỉ $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0. Theo Định lý 15, chỉ có một trong hai khả năng sau

Khả năng 1. Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n - b_n \geq q$.

Khả năng 2. Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n - b_n \leq -q$.

Giả sử phản chứng rằng **Khả năng 1** xảy ra: Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n - b_n \geq q$.

Mặt khác, theo định nghĩa quan hệ < trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, vì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nên tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, có $a_n \leq b_n$.

Chúng ta chọn m là một số tự nhiên lớn hơn N và N_{ab}, khi đó $a_m > b_m$ (vì $a_m - b_m \geq q$) và $a_m \leq b_m$. Đây là một điều vô lý vì chỉ có đúng một trong hai mệnh đề $a_m > b_m$ và $a_m \leq b_m$ là đúng. Do đó giả sử phản chứng là sai.

Như vậy chỉ có **Khả năng 2**: Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n - b_n \leq -q$.

($\Leftarrow$) Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n - b_n < -q$.

Từ điều trên, chúng ta suy ra rằng với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n \leq b_n$ (vì $a_n - b_n < -q < 0$). Theo định nghĩa quan hệ $\lesssim$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mặt khác, với số hữu tỉ dương q, với mọi số tự nhiên N', tồn tại số tự nhiên $n \geq N'$ sao cho $|a_n - b_n| \geq q$ (một số tự nhiên n như vậy chính là $\max\{N, N'\}$). Bằng kí hiệu hình thức, phát biểu vừa rồi được viết là

$$\exists \varepsilon > 0\Big(\forall N'\big(\exists n \geq N'(|a_n - b_n| \geq \varepsilon)\big)\Big)$$

Điều trên có nghĩa là dãy số hữu tỉ $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0, kéo theo hai dãy số hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không tương đương.

Theo định nghĩa quan hệ $<$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vậy hai dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n - b_n \leq -q$. □

Định lý 17. *Quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ là một quan hệ tiền thứ tự toàn phần.*

Chứng minh. Với mỗi dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta có $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo định nghĩa quan hệ $\lesssim$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Do đó quan hệ $\lesssim$ có tính chất phản xạ.

Nếu các dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì chúng ta xét đủ các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vì quan hệ $\sim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ là một quan hệ tương đương nên theo tính chất bắc cầu, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo định nghĩa quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Trường hợp 2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} < (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Theo Định lý 16, tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N_{bc} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{bc}$, có $b_n - c_n \leq -q$.

Theo định nghĩa quan hệ tương đương giữa các dãy số hữu tỉ, vẫn là với số hữu tỉ dương q, tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, có $|a_n - b_n| < q$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_{bc}, N_{ab}\}$. Khi đó, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $b_n - c_n \leq -q$, $|a_n - b_n| < q$, và

$$a_n - c_n = (a_n - b_n) + (b_n - c_n) \leq |a_n - b_n| + (b_n - c_n) \leq q + (-q) = 0$$

hay nói cách khác, $a_n \leq c_n$ với mọi số tự nhiên $n \geq N$.

Theo định nghĩa quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Trường hợp 3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chúng ta thực hiện hoàn toàn tương tự **Trường hợp 2**.

Theo Định lý 16, tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, có $a_n - b_n \leq -q$.

Theo định nghĩa quan hệ tương đương giữa các dãy số hữu tỉ, vẫn là với số hữu tỉ dương q, tồn tại số tự nhiên N_{bc} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{bc}$, có $|b_n - c_n| < q$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_{ab}, N_{bc}\}$. Khi đó, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $a_n - b_n \leq -q$, $|b_n - c_n| < q$, và

$$a_n - c_n = (a_n - b_n) + (b_n - c_n) \leq (a_n - b_n) + |b_n - c_n| \leq (-q) + q = 0$$

hay nói cách khác, $a_n \le c_n$ với mọi số tự nhiên $n \ge N$.

Theo định nghĩa quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Trường hợp 4. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} < (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Theo Định lý 16

- tồn tại số hữu tỉ dương q_{ab} sao cho tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N_{ab}$, có $a_n - b_n \le -q_{ab}$,
- tồn tại số hữu tỉ dương q_{bc} sao cho tồn tại số tự nhiên N_{bc} sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N_{bc}$, có $b_n - c_n \le -q_{bc}$.

Chúng ta định nghĩa $q = q_{ab} + q_{bc}$, $N = \max\{N_{ab}, N_{bc}\}$. Với mọi số tự nhiên $n \ge N$, chúng ta có

$$a_n - c_n = (a_n - b_n) + (b_n - c_n) \le (-q_{ab}) + (-q_{bc}) = -q.$$

Theo Định lý 16, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Các trường hợp khẳng định rằng quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ có tính chất bắc cầu. Đến lúc này, chúng ta đã chứng minh quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ là một quan hệ tiền thứ tự.

Xét hai dãy Cauchy hữu tỉ bất kì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Hệ quả 2.1, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ. Chúng ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tương đương.

Theo định nghĩa quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Trường hợp 2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không tương đương.

Khi đó, dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không hội tụ đến 0. Theo Định lý 15, chỉ có một trong hai khả năng sau:

- Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N$, có $a_n - b_n \ge q$.
  Theo Định lý 16, khả năng này tương đương với $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} < (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \ge N$, có $a_n - b_n \le -q$.
  Theo Định lý 16, khả năng này tương đương với $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cả hai trường hợp đều kéo theo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hoặc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Như vậy, quan hệ $\lesssim$ trên tập hợp các dãy số Cauchy hữu tỉ là một quan hệ tiền thứ tự toàn phần. □

Hệ quả 3.2. *Nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là sai thì $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} < (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Tuy quan hệ $\lesssim$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ không phải một quan hệ thứ tự vì thiếu tính chất phản đối xứng, nhưng quan hệ này có một tính chất gần với tính chất phản đối xứng, được nêu trong định lý sau.

Định lý 18. *Nếu hai dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng hai dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không tương đương.

Cùng với giả thiết $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} < (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 16, chúng ta suy ra

- Tồn tại số hữu tỉ dương q_1 sao cho tồn tại số tự nhiên N_1 sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_1$, có $a_n - b_n \leq -q_1$.
- Tồn tại số hữu tỉ dương q_2 sao cho tồn tại số tự nhiên N_2 sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_2$, có $b_n - a_n \leq -q_2$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_1, N_2\}$. Khi đó, $a_N - b_N \leq -q_1$ và $b_N - a_N \leq -q_2$, kéo theo $a_N < b_N$ và $b_N < a_N$. Đây là một điều vô lý vì $a_N < b_N$ và $b_N < a_N$ không thể xảy ra đồng thời. Do đó giả sử phản chứng là sai.

Vậy nếu hai dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Với các định lý trên, chúng ta đã có đủ cơ sở và công cụ để định nghĩa và chứng minh các tính chất của quan hệ thứ tự trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$: đó là một quan hệ thứ tự toàn phần và tương thích với hai phép toán cộng và nhân trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$.

Định lý 19. *Nếu các dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ khi và chỉ khi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Chứng minh. Do tính đối xứng trong phát biểu, chúng ta chỉ cần chứng minh $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kéo theo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Trường hợp 1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tương đương.

Vì quan hệ $\sim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ là một quan hệ tương đương nên theo tính chất bắc cầu, chúng ta suy ra $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo định nghĩa quan hệ $\lesssim$ giữa các dãy Cauchy hữu tỉ, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Trường hợp 2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không tương đương.

Cùng với $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 16, tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N_{ac} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ac}$, có $a_n - c_n \leq -q$.

Vì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nên theo định nghĩa quan hệ $\sim$ giữa các dãy số hữu tỉ, chúng ta suy ra

- Với số hữu tỉ dương $\frac{q}{3}$, tồn tại số tự nhiên N_{ab} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{ab}$, có $|a_n - b_n| < \frac{q}{3}$.
- Với số hữu tỉ dương $\frac{q}{3}$, tồn tại số tự nhiên N_{cd} sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_{cd}$, có $|c_n - d_n| < \frac{q}{3}$.

Chúng ta định nghĩa $N = \max\{N_{ac}, N_{ab}, N_{cd}\}$. Với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$b_n - d_n = (b_n - a_n) + (a_n - c_n) + (c_n - d_n) \leq |b_n - a_n| + (a_n - c_n) + |c_n - d_n| \leq \frac{q}{3} + (-q) + \frac{q}{3} = -\frac{q}{3}$$

Theo Định lý 16, chúng ta suy ra $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} < (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Như vậy, nếu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy Cauchy hữu tỉ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kéo theo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tương tự, theo chiều ngược lại, chúng ta cũng có $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kéo theo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Định lý trên được sử dụng làm cơ sở cho định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.3. Hai phần tử α, β của tập thương $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ được gọi là có quan hệ $\leq$ nếu và chỉ nếu với mỗi dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong α và dãy Cauchy hữu tỉ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong β, chúng ta có $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Định lý 20. *Nếu hai dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \leq [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.*

Chứng minh. Giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ tương đương với $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, và $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ tương đương với $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Theo Định lý 19, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kéo theo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vì chúng ta đang xét các dãy Cauchy hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bất kì từ hai lớp tương đương $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ và $[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ nên theo định nghĩa quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, chúng ta suy ra $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \leq [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. □

Định lý 21. *Quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ là một quan hệ thứ tự toàn phần.*

Chứng minh. Với mỗi phần tử α của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$, chúng ta có $\alpha \leq \alpha$ vì hai phần tử bất kì của lớp tương đương α đều tương đương với nhau (và vì vậy có quan hệ $\lesssim$). Do đó quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có tính chất phản xạ.

Nếu các phần tử α, β của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ thỏa mãn $\alpha \leq \beta$ và $\beta \leq \alpha$ thì với mỗi phần tử $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong lớp tương đương α và phần tử $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong lớp tương đương β, chúng ta có $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 18, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $\alpha = \beta$. Do đó quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có tính chất phản đối xứng.

Nếu các phần tử α, β, γ của $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ thỏa mãn $\alpha \leq \beta$ và $\beta \leq \gamma$ thì với mỗi phần tử $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong lớp tương đương α, phần tử $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong lớp tương đương β, phần tử $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong lớp tương đương γ, chúng ta có $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vì quan hệ $\lesssim$ trong tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có tính chất bắc cầu nên $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 20, chúng ta suy ra $\alpha \leq \gamma$. Do đó quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ có tính chất bắc cầu.

Như vậy quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ là một quan hệ thứ tự.

Xét hai phần tử bất kì α và β trong $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$. Với mỗi phần tử $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong lớp tương đương α, phần tử $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong lớp tương đương β, chúng ta có $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hoặc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vì quan hệ $\lesssim$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ là một quan hệ thứ tự toàn phần. Theo Định lý 20, chúng ta suy ra $\alpha \leq \beta$ hoặc $\beta \leq \alpha$.

Vậy quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_\mathbb{Q}/_\sim$ là một quan hệ thứ tự toàn phần. □

Định lý 22. *(i) Nếu các dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì với mọi dãy Cauchy hữu tỉ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta có $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(ii) Nếu các dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì chúng ta có $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chứng minh. (i) Chúng ta xét đủ hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tương đương.

Cùng với $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, theo Định lý 10, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Điều này kéo theo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Trường hợp 2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không tương đương.

Vì $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không tương đương nên $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 16, tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $a_n - b_n \leq -q$. Từ điều này, chúng ta suy ra rằng: với số hữu tỉ dương q, với số tự nhiên N thì với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $(a_n + c_n) - (b_n + c_n) = a_n - b_n \leq -q$. Một lần nữa, cũng theo Định lý 16, chúng ta suy ra $(a_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mặt khác, theo định nghĩa phép cộng dãy Cauchy hữu tỉ trong Định lý 9, chúng ta có

$$(a_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (b_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Do đó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Chúng ta xét đủ hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $(0)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hoặc $(0)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ít nhất một trong hai mệnh đề này đúng).

Không mất tính tổng quát, giả sử $(0)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì.

Vì $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ nên theo Định lý 6, tồn tại một số hữu tỉ dương B sao cho $|b_n| \leq B$ với mọi số tự nhiên n. Mặt khác, $(0)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, do đó, theo định nghĩa quan hệ $\sim$ giữa các dãy số hữu tỉ, với số hữu tỉ dương $\frac{\varepsilon}{B}$, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $|a_n| < \frac{\varepsilon}{B}$. Do đó, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{B} \cdot B = \varepsilon.$$

Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ giữa các dãy số hữu tỉ, chúng ta suy ra $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (0)_{n\in\mathbb{N}}$. Bên cạnh đó, theo định nghĩa phép nhân dãy Cauchy hữu tỉ trong Định lý 9, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Do vậy $(0)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Trường hợp 2. $(0)_{n\in\mathbb{N}} < (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(0)_{n\in\mathbb{N}} < (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Theo Định lý 16, chúng ta suy ra

- tồn tại số hữu tỉ dương a sao cho tồn tại số tự nhiên N_a sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_a$, có $-a_n \leq -a$,
- tồn tại số hữu tỉ dương a sao cho tồn tại số tự nhiên N_b sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N_b$, có $-b_n \leq -b$.

Chúng ta định nghĩa $q = ab$ và $N = \max\{N_a, N_b\}$. Với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ và $a_n b_n \geq a_n b \geq ab$, kéo theo $-a_n b_n \leq -ab = -q$. Theo Định lý 16, chúng ta suy ra $(0)_{n\in\mathbb{N}} < (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo định nghĩa phép nhân dãy Cauchy hữu tỉ trong Định lý 9, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Do vậy $(0)_{n\in\mathbb{N}} < (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Như vậy, nếu các dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Định lý 23. *(i) Nếu các phần tử α, β của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ thỏa mãn $\alpha \leq \beta$ thì với mọi phần tử γ của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, chúng ta có $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.*

(ii) Nếu các phần tử α, β của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ thỏa mãn $[(0)_{n\in\mathbb{N}}] \leq \alpha$ và $[(0)_{n\in\mathbb{N}}] \leq \beta$ thì chúng ta có $[(0)_{n\in\mathbb{N}}] \leq \alpha \cdot \beta$.

Chứng minh. (i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lần lượt là hai phần tử của hai lớp tương đương $\alpha + \gamma$ và $\beta + \gamma$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lần lượt là các phần tử của các lớp tương đương α, β, γ. Khi đó

$$\alpha + \gamma = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}}],$$
$$\beta + \gamma = [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(c_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(b_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Theo định nghĩa quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, chúng ta có $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 22, chúng ta suy ra $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Với những điều trên, theo Định lý 20, chúng ta suy ra $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Như vậy, với hai phần tử $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bất kì của hai lớp tương đương $\alpha + \gamma$ và $\beta + \gamma$, chúng ta có $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, điều này có nghĩa là $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lần lượt là các phần tử của các lớp tương đương α, β. Theo định nghĩa quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, chúng ta có $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 22 và định nghĩa phép nhân dãy Cauchy hữu tỉ, chúng ta suy ra $(0)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mặt khác, theo Định lý 20 và định nghĩa phép nhân dãy Cauchy hữu tỉ và phép nhân trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$, chúng ta có

$$[(0)_{n\in\mathbb{N}}] \leq [(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] = \alpha \cdot \beta.$$

Vậy nếu các phần tử α, β của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ thỏa mãn $[(0)_{n\in\mathbb{N}}] \leq \alpha$ và $[(0)_{n\in\mathbb{N}}] \leq \beta$ thì chúng ta có $[(0)_{n\in\mathbb{N}}] \leq \alpha \cdot \beta$.

□

4 Dãy Cauchy hữu tỉ và tiên đề về cận trên

Chúng ta chứng minh $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ cùng các phép toán và quan hệ thứ tự đã chỉ ra trên đây thỏa mãn tiên đề về cận trên. Để kiểm chứng sự thỏa mãn tiên đề về cận trên, chúng ta cũng thực hiện theo hai bước giống như với các tiên đề về trường và các tiên đề về thứ tự: Chứng minh phát biểu dành cho dãy Cauchy hữu tỉ trước, sau đó chứng minh cho lớp tương đương của các các Cauchy hữu tỉ. Tuy nhiên, chúng tôi phát biểu định lý cho lớp tương đương của các các Cauchy hữu tỉ trước.

Định lý 24. *S là một tập hợp con khác rỗng của tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_{\sim}$ và S bị chặn trên thì S có cận trên nhỏ nhất.*

Định lý 25. *S là một tập hợp khác rỗng với các phần tử là các dãy Cauchy hữu tỉ. S có cận trên là một dãy Cauchy hữu tỉ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Khi đó, tồn tại một dãy Cauchy hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho*

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một cận trên của S.*
- *Nếu dãy Cauchy hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} < (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không phải một cận trên của S.*

Chứng minh dưới đây cho định lý trên mang tư tưởng xây dựng. Đây là một chứng minh dài, bạn đọc có thể tạm gác lại phần chứng minh cho các tính chất của hai dãy số hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong chứng minh dưới đây.

Chứng minh. Chúng ta chọn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một phần tử của S. Vì các dãy Cauchy hữu tỉ bị chặn nên tồn tại các số hữu tỉ dương A và A' sao cho với mọi số tự nhiên n, có $|a_n| \leq A$ và $|b_n| \leq A'$. Chúng ta chọn số hữu tỉ dương B sao cho $A' < B$.

Chúng ta định nghĩa *đồng thời* hai dãy số hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bằng quy nạp như sau

- $u_0 = A, \ell_0 = -B$.
- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\dfrac{u_k + \ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là cận trên của S thì $u_{k+1} = \dfrac{u_k + \ell_k}{2}$ và $\ell_{k+1} = \ell_k$.
- Còn nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\dfrac{u_k + \ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S thì $u_{k+1} = u_k$ và $\ell_{k+1} = \dfrac{u_k + \ell_k}{2}$.

Mục tiêu của chúng ta là chỉ ra $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy hữu tỉ thỏa mãn. Trước đó, chúng ta chứng minh một số tính chất của hai dãy số hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Tính chất 1. Với mỗi số tự nhiên m cố định, dãy số hữu tỉ dừng $(u_m)_{n\in\mathbb{N}}$ là một cận trên của S, dãy số hữu tỉ dừng $(\ell_m)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S.

Khi $m = 0$, $(u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ là một cận trên của S, vì $u_0 = A$ và $|a_n| \le A$ (với mọi số tự nhiên n) trong khi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một cận trên của S. $(\ell_0)_{n\in\mathbb{N}}$ không phải một cận trên của S, vì $\ell_0 = -B$ và $(-B)_{n\in\mathbb{N}} < (-A')_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Giả sử khi $m = k \ge 0$, $(u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ là một cận trên của S và $(\ell_k)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S. Theo định nghĩa hai dãy số hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta có

- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\frac{u_k + \ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là cận trên của S thì $u_{k+1} = \frac{u_k + \ell_k}{2}$, $\ell_{k+1} = \ell_k$.

  Điều này có nghĩa là $(u_{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ là cận trên của S. Mặt khác, theo giả thiết quy nạp, $(\ell_k)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S.
- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\frac{u_k + \ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S thì $u_{k+1} = u_k$, $\ell_{k+1} = \frac{u_k + \ell_k}{2}$.

  Điều này có nghĩa là $(\ell_{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S. Mặt khác, theo giả thiết quy nạp, $(u_{k+1})_{n\in\mathbb{N}}$ là một cận trên của S.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, với mỗi số tự nhiên m cố định, dãy số hữu tỉ dừng $(u_m)_{n\in\mathbb{N}}$ là một cận trên của S, dãy số hữu tỉ dừng $(\ell_m)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S.

Tính chất 2. Với mọi số tự nhiên n, có $\ell_n \le u_n$.

Với $n = 0$, vì $u_0 = A$ (một số hữu tỉ dương) và $\ell_0 = -B$ (một số hữu tỉ âm) nên $\ell_0 \le u_0$.

Giả sử với $n = k \ge 0$, $\ell_k \le u_k$. Theo định nghĩa hai dãy số hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta có

- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\frac{u_k + \ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là cận trên của S thì $u_{k+1} = \frac{u_k + \ell_k}{2}$ và $\ell_{k+1} = \ell_k$. Theo giả thiết quy nạp, chúng ta suy ra $\ell_{k+1} \le u_{k+1}$.
- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\frac{u_k + \ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S thì $u_{k+1} = u_k$ và $\ell_{k+1} = \frac{u_k + \ell_k}{2}$. Theo giả thiết quy nạp, chúng ta suy ra $\ell_{k+1} \le u_{k+1}$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, với mọi số tự nhiên n, có $\ell_n \le u_n$.

Tính chất 3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy không tăng và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy không giảm.

Theo định nghĩa hai dãy số hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta có

- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\frac{u_k + \ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là cận trên của S thì $u_{k+1} = \frac{u_k + \ell_k}{2}$ và $\ell_{k+1} = \ell_k$.

  Vì $\ell_{k+1} = \ell_k$ nên $\ell_k \le \ell_{k+1}$. Mặt khác, theo **Tính chất 2**, $\ell_k \le u_k$, kéo theo $u_{k+1} = \frac{u_k + \ell_k}{2} \le u_k$.
- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\frac{u_k + \ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S thì $u_{k+1} = u_k$ và $\ell_{k+1} = \frac{u_k + \ell_k}{2}$.

  Vì $u_{k+1} = u_k$ nên $u_{k+1} \le u_k$. Mặt khác, theo **Tính chất 2**, $\ell_k \le u_k$, kéo theo $\ell_{k+1} = \frac{u_k + \ell_k}{2} \ge \ell_k$.

Vậy với mọi số tự nhiên n, có $u_{n+1} \le u_n$ và $\ell_{n+1} \ge \ell_n$, kéo theo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy không tăng và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy không giảm.

Tính chất 4. Với mọi số tự nhiên m, n, có $\ell_m \le u_n$.

Theo **Tính chất 2 và 3**, nếu $m \le n$ thì $\ell_m \le \ell_n \le u_n$, còn nếu $m > n$ thì $\ell_m \le u_m \le u_n$.

Vậy với mọi số tự nhiên m, n, có $\ell_m \le u_n$.

Tính chất 5. Với mọi số tự nhiên n, có $u_n - \ell_n = \frac{u_0 - \ell_0}{2^n}$.

Khi $n = 0$, $u_0 - \ell_0 = u_0 - \ell_0$.

Giả sử với $n = k \ge 0$, $u_k - \ell_k = \frac{u_0 - \ell_0}{2^k}$. Theo định nghĩa hai dãy số hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta có

- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\frac{u_k+\ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ là cận trên của S thì $u_{k+1}=\frac{u_k+\ell_k}{2}$ và $\ell_{k+1}=\ell_k$.
  Cùng với giả thiết quy nạp, chúng ta suy ra $u_{k+1}-\ell_{k+1}=\frac{u_k-\ell_k}{2}=\frac{u_0-\ell_0}{2^{k+1}}$.
- Nếu dãy số hữu tỉ dừng $\left(\frac{u_k+\ell_k}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S thì $u_{k+1}=u_k$ và $\ell_{k+1}=\frac{u_k+\ell_k}{2}$.
  Cùng với giả thiết quy nạp, chúng ta suy ra $u_{k+1}-\ell_{k+1}=\frac{u_k-\ell_k}{2}=\frac{u_0-\ell_0}{2^{k+1}}$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, với mọi số tự nhiên n, $u_n-\ell_n=\frac{u_0-\ell_0}{2^n}$.

Tính chất 6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy Cauchy hữu tỉ tương đương.

Theo **Tính chất 5** và bất đẳng thức $n+1\leq 2^n$, chúng ta suy ra $u_n-\ell_n\leq\frac{u_0-\ell_0}{n+1}=\frac{A+B}{N+1}$ với mọi số tự nhiên n. Chúng ta chọn số hữu tỉ dương ε bất kì.

Chúng ta định nghĩa $N=\left\lfloor\frac{A+B}{\varepsilon}\right\rfloor$. Với mọi số tự nhiên $n\geq N$, chúng ta có

$$|u_n-\ell_n|\leq\frac{A+B}{n+1}\leq\frac{A+B}{\left\lfloor\frac{A+B}{\varepsilon}\right\rfloor+1}<\frac{A+B}{\frac{A+B}{\varepsilon}}=\varepsilon.$$

Theo định nghĩa quan hệ $\sim$ trên tập hợp các dãy số hữu tỉ, chúng ta suy ra $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy số hữu tỉ tương đương.

Vẫn là với số tự nhiên N được định nghĩa trên, khi đó với mọi số tự nhiên $n\geq N$, với mọi số tự nhiên p, và theo **Tính chất 4**, chúng ta có

$$\left|u_{n+p}-u_n\right|=u_n-u_{n+p}\leq u_n-\ell_n<\varepsilon,$$
$$\left|\ell_{n+p}-\ell_n\right|=\ell_{n+p}-\ell_n\leq u_n-\ell_n<\varepsilon.$$

Do đó $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy Cauchy hữu tỉ.

Như vậy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy Cauchy hữu tỉ tương đương.

Tiếp theo, chúng ta chứng minh $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các cận trên của S.

Giả sử phản chứng rằng $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không phải cận trên của S. Khi đó, tồn tại dãy Cauchy hữu tỉ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thuộc S sao cho $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}<(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 16, tồn tại số hữu tỉ dương q sao cho tồn tại số tự nhiên N_0 sao cho với mọi số tự nhiên $n\geq N_0$, có $u_n-s_n\leq -q$. Mặt khác, vì $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ nên với số hữu tỉ dương $\frac{q}{2}$, tồn tại số tự nhiên N_s sao cho với mọi số tự nhiên $n,m\geq N_s$, có $|s_m-s_n|<\frac{-q}{2}$. Chúng ta định nghĩa $N=\max\{N_0,N_s\}$, khi đó với mọi số tự nhiên $n\geq N$, chúng ta có

$$u_N-s_n=(u_N-s_N)+(s_N-s_n)\leq(-q)+|s_N-s_n|\leq(-q)+\frac{q}{2}=\frac{-q}{2}$$

Theo Định lý 16, dãy số hữu tỉ dừng $(u_N)_{n\in\mathbb{N}}<(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tuy nhiên, điều này mâu thuẫn với **Tính chất 1** nên giả sử phản chứng là sai. Do đó $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một cận trên của S. Mặt khác, vì $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hai dãy Cauchy hữu tỉ tương đương nên $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các cận trên của S.

Giả sử dãy Cauchy hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}<(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cùng với việc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\sim(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta suy ra $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}<(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 16, tồn tại số hữu tỉ dương q' sao cho tồn tại số tự nhiên N_1 sao cho với mọi số tự nhiên $n\geq N_1$, có $x_n-\ell_n\leq -q'$. Mặt khác, vì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ nên với số hữu tỉ dương $\frac{q'}{2}$, tồn tại số tự nhiên N_x sao cho với mọi số tự nhiên $n,m\geq N_x$, có $|x_m-x_n|<\frac{-q'}{2}$. Chúng ta định nghĩa

$N' = \max\{N_1, N_x\}$, khi đó với mọi số tự nhiên $n \geq N'$, chúng ta có

$$x_n - \ell_{N'} = (x_n - x_{N'}) + (x_{N'} - \ell_{N'}) \leq |x_n - x_{N'}| + (-q') \leq \frac{q'}{2} + (-q') = \frac{-q'}{2}$$

Theo Định lý 16, dãy số hữu tỉ dừng $(\ell_{N'})_{n\in\mathbb{N}} > (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo **Tính chất 1**, $(\ell_{N'})_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S. Do đó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không là cận trên của S.

Như vậy, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy hữu tỉ và là cận trên của S, và với mọi dãy Cauchy hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} < (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không phải một cận trên của S. □

Chứng minh Định lý 24. Chúng ta định nghĩa tập hợp S' như sau

$$S' = \bigcup_{\xi \in S} \xi$$

Các phần tử của S là các lớp tương đương trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ theo quan hệ $\sim$, các phần tử của các lớp tương đương này là các dãy Cauchy hữu tỉ. Do đó ξ trong định nghĩa trên là phần tử của $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$, và tất cả các phần tử của S' là các dãy Cauchy hữu tỉ.

Giả sử α là một cận trên của S và $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một phần tử của lớp tương đương α. Vì α là cận trên của S nên theo định nghĩa quan hệ $\leq$ trên tập hợp $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$, mỗi phần tử $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ của S' đều thỏa mãn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Do đó S' bị chặn trên. Theo Định lý 25, tồn tại dãy Cauchy hữu tỉ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sao cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là cận trên của S', và với mọi dãy Cauchy hữu tỉ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} < (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không phải một cận trên của S'. Theo Định lý 20, $[(u_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ là một cận trên của S.

Giả sử β là một cận trên của S, khi đó mỗi phần tử $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ của lớp tương đương β là một cận trên của S'. Theo Định lý 25, không thể có $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} < (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Do đó $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Theo Định lý 20, $[(u_n)_{n\in\mathbb{N}}] \leq \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$. Như vậy $[(u_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ là cận trên nhỏ nhất của S.

Vậy S có cận trên nhỏ nhất. □

5 Liên hệ lớp tương đương các dãy Cauchy hữu tỉ với số hữu tỉ

Định lý 26. *Ánh xạ $\iota : \mathbb{Q} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ được định nghĩa bởi $\iota(q) = \left[(q)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ là một đơn ánh nhưng không phải một song ánh. Bên cạnh đó, với mọi số hữu tỉ q_1, q_2, chúng ta có*

$$\begin{aligned}
\iota(q_1 + q_2) &= \iota(q_1) + \iota(q_2), \\
\iota(q_1 q_2) &= \iota(q_1)\iota(q_2), \\
q_1 \leq q_2 \implies \iota(q_1) &\leq \iota(q_2).
\end{aligned}$$

Chứng minh. Nếu $\iota(q_1) = \iota(q_2)$ thì $\left[(q_1)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(q_2)_{n\in\mathbb{N}}\right]$, kéo theo $(q_1)_{n\in\mathbb{N}} \sim (q_2)_{n\in\mathbb{N}}$, dẫn đến $q_1 = q_2$. Do đó ι là một đơn ánh. Mặt khác, ι không phải toàn ánh vì không tồn tại số hữu tỉ q nào để lớp tương đương $\iota(q)$ chứa dãy Cauchy hữu tỉ trong Mệnh đề 7, kéo theo ι không phải một toàn ánh. Vì vậy ι là một đơn ánh nhưng không phải song ánh.

Theo định nghĩa phép cộng, phép nhân trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ và $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$

$$\begin{aligned}
\iota(q_1 + q_2) &= \left[(q_1 + q_2)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(q_1)_{n\in\mathbb{N}}\right] + \left[(q_2)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \iota(q_1) + \iota(q_2), \\
\iota(q_1 q_2) &= \left[(q_1 q_2)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(q_1)_{n\in\mathbb{N}}\right] \cdot \left[(q_2)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \iota(q_1)\iota(q_2).
\end{aligned}$$

Theo định nghĩa quan hệ $\lesssim$ trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, quan hệ $\leq$ trên $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}/_\sim$ và Định lý 20, chúng ta có

$$q_1 \leq q_2 \implies (q_1)_{n\in\mathbb{N}} \lesssim (q_2)_{n\in\mathbb{N}} \implies \left[(q_1)_{n\in\mathbb{N}}\right] \leq \left[(q_2)_{n\in\mathbb{N}}\right] \implies \iota(q_1) \leq \iota(q_2).$$

□

Định lý trên được hiểu là đơn ánh ι bảo toàn phép cộng, phép nhân, và quan hệ thứ tự. Vì điều này, chúng ta có thể đồng nhất số hữu tỉ q với lớp tương đương $\left[(q)_{n\in\mathbb{N}}\right]$.

6 Tính đầy đủ-Cauchy

Mục tiêu của mục này là chứng minh "Mọi dãy Cauchy đều hội tụ".

Định nghĩa 6.1 (Giá trị tuyệt đối của số thực). Ánh xạ $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ được định nghĩa bởi

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0, \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

được gọi là **ánh xạ giá trị tuyệt đối**, hay **hàm giá trị tuyệt đối** của số thực. Số thực không âm $|x|$ được gọi là giá trị tuyệt đối của số thực x.

Trong Mục 1, khi chuẩn bị cho việc xây dựng mô hình số thực bằng dãy Cauchy hữu tỉ, chúng ta đã đưa ra khái niệm dãy số hữu tỉ và một số định nghĩa liên quan. Dưới đây, chúng ta đưa ra các định nghĩa tương tự và dành cho dãy số thực (chỉ thay số hữu tỉ thành số thực).

Định nghĩa 6.2 (Dãy số thực). Ánh xạ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ được gọi là một **dãy số thực**, hay **dãy số**, **dãy**.

(i) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **dãy hằng số** nếu và chỉ nếu giá trị tại mọi chỉ số n của dãy này là như nhau.

(ii) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **dãy dừng** nếu và chỉ nếu tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho giá trị tại mọi chỉ số $n \geq n_0$ là như nhau.

(iii) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **dãy tăng**, hay **dãy tăng thực sự** nếu và chỉ nếu tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $f_{n+1} > f_n$ với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

(iv) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **dãy giảm**, hay **dãy giảm thực sự** nếu và chỉ nếu tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $f_{n+1} < f_n$ với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

(v) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **dãy không giảm** nếu và chỉ nếu tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $f_{n+1} \geq f_n$ với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

(vi) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **dãy không tăng** nếu và chỉ nếu tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $f_{n+1} \leq f_n$ với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

(vii) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **dãy bị chặn** nếu và chỉ nếu tồn tại số thực A sao cho với mọi số tự nhiên n, có $\left|f_n\right| \leq A$ (hoặc $\left|f_n\right| < A$).

(viii) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là **dãy Cauchy** nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε, tồn tại số tự nhiên $N(\varepsilon)$ sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N(\varepsilon)$, có $\left|f_m - f_n\right| < \varepsilon$. Bằng logic hình thức, chúng ta viết

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m \geq N(\varepsilon)\ \left|f_n - f_m\right| < \varepsilon.$$

(ix) Dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được gọi là hội tụ đến số thực a nếu và chỉ nếu với mọi số thực dương ε, tồn tại số tự nhiên $N(\varepsilon)$ sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N(\varepsilon)$, có $\left|f_n - a\right| < \varepsilon$. Bằng logic hình thức, chúng ta viết

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geq N(\varepsilon)\ \left|f_n - a\right| < \varepsilon.$$

(x) Nếu tồn tại số thực a sao cho dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến a thì a được gọi là một điểm giới hạn (hay giới hạn) của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và chúng ta nói dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ.

Tương tự với dãy số hữu tỉ, chúng ta có các kết quả sau, với chứng minh hoàn toàn tương tự.

Định lý 27. *Dãy Cauchy là dãy bị chặn.*

Định lý 28. *Nếu một dãy hội tụ thì điểm giới hạn của dãy đó là duy nhất.*

Để biểu thị số thực a là giới hạn của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta kí hiệu $\lim f_n = a$.

Định lý 29. *Nếu* $\lim a_n = a$ *và* $\lim b_n = b$ *thì*

(i) $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

(ii) $\lim(a_n b_n) = ab$.

Với các định lý dưới đây, sự khác biệt (tiên đề về cận trên, hay tiên đề về tính đầy đủ) giữa tập hợp số thực và tập hợp số hữu tỉ được nhấn mạnh thêm nhiều lần.

Định lý 30 (Định lý về dãy đơn điệu và bị chặn)**.** *Dãy đơn điệu không giảm và bị chặn trên thì hội tụ. Dãy đơn điệu không tăng và bị chặn dưới thì hội tụ*[a].

[a]Định lý này còn có phát biểu ngắn gọn hơn: Dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

Chứng minh. (i) Giả sử dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không giảm và bị chặn. Như vậy tập hợp tất cả các giá trị của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là khác rỗng và bị chặn trên. Theo tiên đề về cận trên, tập hợp tất cả các giá trị của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có cận trên nhỏ nhất. Chúng ta kí hiệu cận trên nhỏ nhất này là a.

Dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không giảm nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $a_{n+1} \geq a_n$ với mọi $n \geq n_0$.

Theo định nghĩa cận trên nhỏ nhất, với mọi số thực dương ε, $a - \varepsilon$ không phải cận trên của tập hợp tất cả các giá trị của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Do đó, với mỗi số thực dương ε, tồn tại số tự nhiên n_1 sao cho $a_{n_1} > a - \varepsilon$. Vì dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không giảm nên $a - a_n \leq a - a_{n_1} < \varepsilon$ với mọi số tự nhiên $n \geq N = \max\{n_0, n_1\}$. Bên cạnh đó, $|a - a_n| = a - a_n$ với mọi số tự nhiên n vì a là cận trên nhỏ nhất của tập hợp tất cả các giá trị của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Như vậy, với mỗi số thực dương ε, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $|a_n - a| < \varepsilon$. Do đó, dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ.

(ii) Giả sử dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ không tăng và bị chặn. Khi đó dãy $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi $b_n = -a_n$ với mọi số tự nhiên n là một dãy không giảm và bị chặn. Theo phần (i), dãy $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ. Theo Định lý 29, dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ.

□

Trong phần (ii) của chứng minh trên, thay vì áp dụng phần (i), chúng ta có thể chứng minh tương tự phần (i) bằng cách chỉ ra giới hạn của dãy số là cận dưới lớn nhất của tập hợp tất cả các giá trị của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Định nghĩa 6.3. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a \leq b$. Chúng ta định nghĩa **khoảng mở** (a, b) và **khoảng**

đóng $[a, b]$ là hai tập hợp sau.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}.$$

Nói riêng, nếu hai số thực a, b thỏa mãn $a = b$ thì $(a, b) = \varnothing$ và $[a, b] = \{a\}$.

Định lý 31 (Định lý Cantor về các khoảng đóng lồng nhau)**.** *Hai dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ và $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thỏa mãn $a_n \le b_n$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ với mọi số tự nhiên n.*

(i) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \varnothing$.

(ii) Nếu $\lim(a_n - b_n) = 0$ *thì tập hợp* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ *có đúng một phần tử.*

Chứng minh. (i) Vì $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ với mọi số tự nhiên n nên $a_n \le a_{n+1}$ và $b_n \ge b_{n+1}$ với mọi số tự nhiên n. Vì $a_n \le a_{n+1}$ và $b_n \ge b_{n+1}$ với mọi số tự nhiên n nên $a_0 \le a_n$ và $b_n \le b_0$ với mọi số tự nhiên n (điều này được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học). Vì $a_n \le b_n$ với mọi số tự nhiên n nên $a_n \le b_n \le b_0$ và $a_0 \le a_n \le b_n$ với mọi số tự nhiên n. Do đó dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn trên, dãy số $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn dưới. Kí hiệu $a = \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ và $b = \inf\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Giả sử phản chứng rằng $a > b$, khi đó b không phải cận trên nhỏ nhất của $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo tồn tại số tự nhiên m sao cho $a_m > b$. Mà $b_0 \le b$ nên chúng ta suy ra $b_0 < a_m$, điều này mâu thuẫn với mệnh đề vừa chứng minh "$a_n \le b_0$ với mọi số tự nhiên n". Do đó, $a \le b$. Chọn một phần tử x bất kì từ khoảng đóng $[a, b]$, chúng ta có $a_n \le a \le x \le b \le b_n$ với mọi số tự nhiên n. Do đó, x thuộc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. Như vậy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \varnothing$.

(ii) Với các giá trị a, b ở phần (i), chúng ta chứng minh rằng

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = [a, b].$$

Giả sử x thuộc $[a, b]$ thì x thuộc $[a_n, b_n]$ với mọi số tự nhiên n vì $a_n \le a$ và $b \le b_n$ với mọi số tự nhiên n. Do đó x thuộc $[a_n, b_n]$ với mọi số tự nhiên n, kéo theo x thuộc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. Như vậy $[a, b] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$.

Giả sử x thuộc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ (chúng ta giả sử được như vậy vì $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \varnothing$). Theo định nghĩa khoảng đóng, $a_n \le x \le b_n$ với mọi số tự nhiên n. Do đó x là cận trên của $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ và là cận dưới của $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kéo theo $a \le x \le b$, hay x thuộc $[a, b]$. Như vậy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \subseteq [a, b]$.

Vậy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = [a, b]$. Nếu $\lim(a_n - b_n) = 0$ thì $a = b$, kéo theo $[a, b]$ có đúng một phàn tử, do đó $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ có đúng một phần tử.

□

Nói chung, định lý trên sẽ không còn đúng nếu chúng ta thay khoảng đóng bởi khoảng mở.

Định lý 32 (Định lý Bolzano-Weierstraß cho số thực)**.** *Mọi dãy bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ.*

Trước tiên, chúng ta làm rõ hơn khái niệm dãy con. Với một dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chúng ta lần lượt chọn vô hạn các số tự nhiên n_k (trong đó $k \in \mathbb{N}$) sao cho $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ thì $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ là một dãy con của $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Chứng minh. Giả sử $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn. Theo định nghĩa dãy bị chặn, tồn tại số thực dương A sao cho $|x_n| \le A$ với mọi số tự nhiên n. Chúng ta định nghĩa $a_0 = -A$, $b_0 = A$. Chúng ta định nghĩa a_n, b_n với mọi số tự nhiên n và xây dựng một dãy con của $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bằng quy nạp như sau

- Chọn một số tự nhiên n_0 thuộc $[a_0, b_0]$.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} & f_{11} & f_{12} & \\ & & & & & & & & & & & & & \longrightarrow \\ & & f_{n_0} & f_{n_1} & & f_{n_2} & & f_{n_3} & f_{n_4} & & & f_{n_5} & & \end{array}$$

HÌNH A.1. Minh họa các giá trị đầu tiên của một dãy con $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ của dãy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Ít nhất một trong hai khoảng đóng $\left[a_0, \frac{1}{2}(a_0+b_0)\right]$ và $\left[\frac{1}{2}(a_0+b_0), b_0\right]$ thỏa mãn: có vô hạn số tự nhiên n sao cho x_n thuộc khoảng đóng đó. Nếu khoảng đóng đó là $\left[a_0, \frac{1}{2}(a_0+b_0)\right]$ thì chúng ta định nghĩa $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)$. Nếu khoảng đóng đó là $\left[\frac{1}{2}(a_0+b_0), b_0\right]$ thì chúng ta định nghĩa $a_1 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)$, $b_1 = b_0$. Như vậy, $[a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0]$. Chọn một số tự nhiên n_1 thuộc $[a_1, b_1]$ sao cho $n_1 > n_0$.
- Ít nhất một trong hai khoảng đóng $\left[a_k, \frac{1}{2}(a_k+b_k)\right]$ và $\left[\frac{1}{2}(a_k+b_k), b_k\right]$ thỏa mãn: có vô hạn số tự nhiên n sao cho x_n thuộc khoảng đóng đó. Nếu khoảng đóng đó là $\left[a_k, \frac{1}{2}(a_k+b_k)\right]$ thì chúng ta định nghĩa $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k+b_k)$. Nếu khoảng đóng đó là $\left[\frac{1}{2}(a_k+b_k), b_k\right]$ thì chúng ta định nghĩa $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k+b_k)$, $b_{k+1} = b_k$. Như vậy, $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$. Chọn một số tự nhiên n_{k+1} thuộc $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ sao cho $n_{k+1} > n_k$.

Từ cách xây dựng trên, chúng ta suy ra $a_n - b_n = \frac{1}{2^n}(a_0 - b_0)$ với mọi số tự nhiên n. Với mọi số thực dương ε, với số tự nhiên $N = \left\lfloor (b_0 - a_0)\frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, với mọi số tự nhiên $n \geq N$, chúng ta có

$$|a_n - b_n| = \left|\frac{1}{2^n}(a_0 - b_0)\right| \leq \frac{1}{n+1}|a_0 - b_0| \leq \frac{1}{N+1}|a_0 - b_0| < \varepsilon.$$

Trong đó, $2^n \geq 1 + n$ theo bất đẳng thức Bernoulli và $N + 1 > (b_0 - a_0)\frac{1}{\varepsilon}$ theo định nghĩa phần nguyên của số thực.

Do đó $\lim(a_n - b_n) = 0$. Theo định lý Cantor về các khoảng đóng lồng nhau, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ có đúng một phần tử. Chúng ta kí hiệu phần tử này là x. Với mọi số thực dương ε, với số tự nhiên $N = \left\lfloor (b_0 - a_0)\frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$, với mọi số tự nhiên $k \geq N$, chúng ta có x, x_{n_k} thuộc $[a_k, b_k]$, kéo theo

$$\left|x_{n_k} - x\right| \leq |a_k - b_k| < \varepsilon.$$

Do đó, $\lim x_{n_k} = x$. Như vậy mọi dãy bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ. □

Một dãy Cauchy hữu tỉ thì có thể hội tụ về một số hữu tỉ hoặc không. Nhưng dãy Cauchy thực thì hội tụ về một số thực.

Định lý 33 (Tính đầy đủ-Cauchy). *Một dãy số hội tụ khi và chỉ khi đó là dãy Cauchy.*

Chứng minh. Cho $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số.

($\Rightarrow$) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về một số thực x.

ε là một số thực dương bất kì. Theo định nghĩa dãy số hội tụ, với số thực dương $\frac{\varepsilon}{2}$, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N$, có $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, chúng ta có

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x - x_n)| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Do đó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy.

($\Leftarrow$) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy.

Vì dãy Cauchy cũng là dãy bị chặn nên $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn. Theo định lý Bolzano-Weierstraß cho số thực, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ có một dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một số thực x.

ε là một số thực dương bất kì. Vì $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy và dãy con $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến một số thực x nên

- Tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi số tự nhiên $n, m \geq N$, có $|x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- Tồn tại số tự nhiên K sao cho với mọi số tự nhiên $k \geq K$, có $\left|x_{n_k} - x\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Do đó, với mọi số tự nhiên $k \geq N' = \max\{N, K\}$, chúng ta có $n_k \geq k \geq N'$ và

$$|x_k - x| = \left|(x_k - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)\right| \leq \left|x_k - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Như vậy, với mỗi số thực dương ε, tồn tại số tự nhiên N' sao cho với mọi số tự nhiên $n \geq N'$, chúng ta có $|x_n - x| < \varepsilon$. Do đó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến số thực x.

Vậy một dãy số hội tụ khi và chỉ khi đó là dãy Cauchy. $\square$

Phụ lục B

Đọc thêm

Chỉ mục

Tài liệu tham khảo

[Spi08] Michael Spivak. *Calculus*. 4th ed. Publish or Perish, 2008.

[Abb15] Stephen Abbott. *Understanding Analysis*. 2nd ed. Springer, 2015.