Một số bài toán hình học phẳng

Ngô Quý Dương

Ngày 9 tháng 12 năm 2025

Phần I
Lý thuyết

1 Giới thiệu về độ dài đại số

Khi giải những bài toán hình học, người ta nhận thấy việc dịch chuyển một hoặc hai hoặc nhiều điểm có thể ảnh hưởng đến hình vẽ, từ đó ảnh hưởng đến cách giải của bài toán. Có những lời giải, chỉ đúng với một hình vẽ, có những lời giải lại đúng với mọi hình vẽ. Để khắc phục điều này, khái niệm **độ dài đại số** được sinh ra nhằm giải các bài toán một cách tổng quát mà không phụ thuộc vào hình vẽ.

Cho trước đường thẳng d trên mặt phẳng. Lấy các điểm A, B, C phân biệt theo thứ tự từ trái sang phải trên d. Gọi $\vec{v}$ là vector chỉ phương của đường thẳng d. Ta định nghĩa độ dài đại số như sau.

Định nghĩa 1.1. *Độ dài đại số của đoạn thẳng AB, kí hiệu là $\overline{AB}$, được định nghĩa như sau*

- $\overline{AB} = AB$ nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{v}$.

- $\overline{AB} = -AB$ nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\overrightarrow{v}$.

Độ dài đại số khác với độ dài hình học ở chỗ là nó có thể nhận giá trị âm, còn độ dài hình học thì luôn nhận giá trị dương.

Chẳng hạn, chọn $\overrightarrow{v}$ là vector chỉ phương của d có hướng từ trái sang phải. Lúc đó thì

$$\overline{AB} = AB,\ \overline{AC} = AC,\ \overline{BC} = BC,\ \overline{BA} = -BA,\ \overline{CA} = -CA,\ \overline{CB} = -CB.$$

Từ đó tính được

1) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC$.

2) $\overline{BC} \cdot \overline{BA} = -BC \cdot BA$.

3) $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = CA \cdot CB$.

Ngược lại, nếu ta chọn $\vec{v}$ có hướng ngược lại, độ dài đại số của các đoạn thẳng sẽ đổi dấu, do đó các tích vừa tính sẽ giữ nguyên dấu.

Nhận xét. Thông thường, chúng ta chỉ quan tâm đến độ dài đại số đối với các điểm thẳng hàng.

Ví dụ, xin giới thiệu với bạn đọc hai định lý nổi tiếng sau ở dưới dạng độ dài đại số.

Định lý 1.2. *(Định lý Ceva) Cho tam giác ABC với các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Lúc đó AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi*

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1.$$

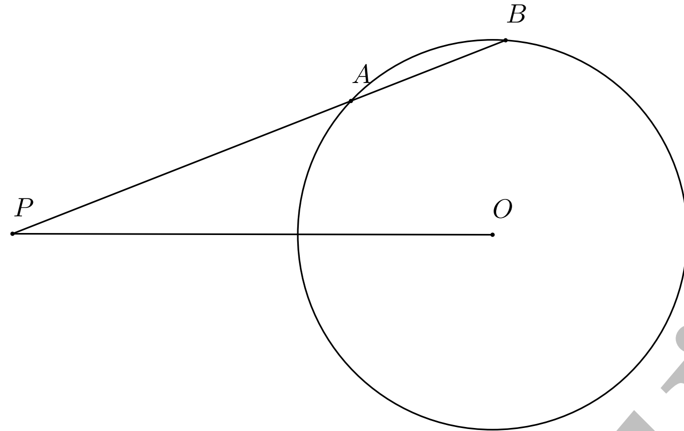
Định lý 1.3. *(Định lý Menelaus) Cho tam giác ABC với các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Lúc đó D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi*

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

Ở đây, chúng tôi viết ra hai định lý này ở dạng độ dài đại số chỉ để nhằm mục đích giới thiệu với bạn đọc, còn ở phần sau của cuốn sách, phần lớn các bài toán sử dụng định lý này ở dạng độ dài hình học để cho quen thuộc với bạn đọc.

2 Trục đẳng phương

2.1 Các định nghĩa cơ bản



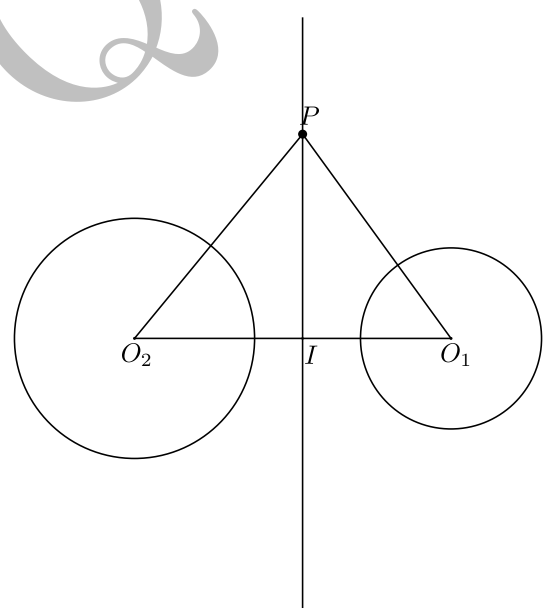
Cho trước một điểm P và đường tròn (O, R) trong mặt phẳng. Qua P kẻ đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm A và B. Chúng ta biết rằng khi đường thẳng d thay đổi qua P, tích $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ không thay đổi và bằng $OP^2 - R^2$. Từ đó ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 2.1. *Giá trị $OP^2 - R^2$ được gọi là phương tích của điểm P đối với đường tròn (O). Kí hiệu $\mathcal{P}_{P/(O)}$.*

Bây giờ với hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) phân biệt cho trước, bài toán đặt ra là tìm tất cả các điểm có cùng phương tích với hai đường tròn này. Tất nhiên, ta không cần quan tâm đến trường hợp nếu (O_1), (O_2) trùng nhau.

Trả lời cho bài toán này, ta có định lý sau.

Định lý 2.2. *Tập hợp các điểm có cùng phương tích đến hai đường tròn phân biệt là một đường thẳng vuông góc với đường nối tâm. Đường thẳng này được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.*



Chứng minh. Xét điểm I nằm trên O_1O_2 thỏa mãn $O_1I^2 - R_1^2 = O_2I^2 - R_2^2$. Gọi d là đường thẳng qua I vuông góc với O_1O_2.
Xét điểm P có cùng phương tích đến hai đường tròn. Sử dụng định lý 4 điểm, ta thu được $PI \perp O_1O_2$, hay P thuộc d.
Ngược lại, với điểm P thuộc d, theo định lý 4 điểm ta có $O_1P^2 - O_2P^2 = O_1I^2 - O_2I^2$. Suy ra $O_1P^2 - R_1^2 = O_2P^2 - R_2^2$. Vậy P có cùng phương tích đến hai đường tròn.
Tóm lại, tập hợp các điểm có cùng phương tích đến hai đường tròn là đường thẳng qua I vuông góc với O_1O_2, hay chính là d. □

Nhận xét. Một câu hỏi tự nhiên là nếu đường thẳng O_1O_2 không xác định thì thế nào? Trong trường hợp đó, hay O_1 trùng O_2, nếu như tồn tại điểm P có cùng phương tích đến hai đường tròn thì ta có $O_1P^2 - R_1^2 = O_2P^2 - R_2^2$, tức là $R_1 = R_2$. Nhưng ở đây, ta không xét đến trường hợp đó.
Tóm lại, đối với hai đường tròn đồng tâm, không tồn tại trục đẳng phương của hai đường tròn này.

Đối với một số trường hợp đặc biệt, ta có thể xác định trục đẳng phương của hai đường tròn như sau.

1) Nếu hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì đường thẳng AB chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

2) Nếu hai đường tròn tiếp xúc trong (ngoài) tại A thì tiếp tuyến chung tại A chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

3) Nếu hai đường tròn (O_1), (O_2) ngoài nhau, đường thẳng nối trung điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

Vậy còn trường hợp một đường tròn chứa trong đường tròn còn lại? Trong trường hợp này, chúng ta cần đén định lý sau.

Định lý 2.3. *Với ba đường tròn có tâm không thẳng hàng, ba trục đẳng phương của mỗi cặp đường tròn đồng quy tại một điểm. Điểm đó được gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn.*

Chứng minh. Xét (O_1), (O_2), (O_3) là ba đường tròn có tâm không thẳng hàng. Gọi d_{12}, d_{23}, d_{31} lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O_1) và (O_2), (O_2) và (O_3), (O_3) và (O_1).
Ta có $d_{12} \perp O_1O_2$, $d_{23} \perp O_2O_3$. Do O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng nên d_{12} không song song với d_{23}. Vậy ta có thể gọi M là giao điểm của hai đường thẳng này.
Do M nằm trên d_{12} nên M có cùng phương tích với (O_1) và (O_2), M nằm trên d_{23} nên M co cùng phương tích với (O_2) và (O_3). Suy ra M có cùng phương tích với (O_3) và (O_1). Vậy M thuộc d_{31} và ta được d_{12}, d_{23}, d_{31} đồng quy tại M. □

Với định lý trên, bây giờ ta có thể xây dựng trục đẳng phương của hai đường tròn bất kì.

Xét hai đường tròn (O_1) và (O_2) bất kì không đồng tâm. Rõ ràng tồn tại một đường tròn ω mà đều cắt (O_1), (O_2) tại hai điểm phân biệt.
Gọi ω là đường tròn như vậy có tâm không nằm trên O_1O_2. ω cắt (O_1) tại A và B, cắt (O_2) tại C và D, P là giao điểm của AB và CD.
Ta có AB và CD lần lượt là trục đẳng phương của ω và (O_1), ω và (O_2). Theo định lý 2.3, trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) đi qua P. Vậy ta có thể dựng trục đẳng phương của hai đường tròn bằng cách kẻ đường thẳng qua P vuông góc với O_1O_2.

Ở định lý 2.3, ta có nhắc về việc các trục đẳng phương của các cặp đường tròn đồng quy tại một điểm, nhưng chỉ ở trong trường hợp ba tâm không nằm trên một đường thẳng.
Vậy nếu ba đường tròn có tâm thẳng hàng thì sao? Trong trường hợp đó, ta có thể dễ dàng nhận thấy các trục đẳng phương sẽ đôi một song song với nhau.
Ngoài ra, cũng có thể xảy ra trường hợp các trục đẳng phương trùng nhau. Nếu điều đó xảy ra, chúng ta gọi các đường tròn đó là một bộ đường tròn đồng trục.

Định nghĩa 2.4. *Một bộ đường tròn đồng trục là một bộ gồm các đường tròn có chung trục đẳng phương.*

Nếu có một bộ đường tròn đồng trục, ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng tâm của chúng phải thẳng hàng.

2.2 Đường tròn điểm

Trong một số bài toán, đôi khi, chúng ta sẽ phải dùng đến khái niệm "đường tròn điểm". Cho trước một điểm A. Đường tròn tâm A bán kính 0, hay $(A, 0)$ được gọi là đường tròn điểm A.

Tất nhiên, không phải tự nhiên chúng ta xây dựng định nghĩa của đường tròn điểm. Chúng cũng có một số tính chất về trục đẳng phương như các đường tròn bình thường. Chẳng hạn, đối với một đường tròn điểm và một đường tròn khác, cũng tồn tại trục đẳng phương của chúng.

Xét đường tròn (O, R) và điểm A trên mặt phẳng. Tương tự như định nghĩa của trục đẳng phương của hai đường tròn, tập hợp các điểm có cùng phương tích đến (O) và $(A, 0)$ là một đường thẳng. Cụ thể, đường thẳng đó là tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn

$$MO^2 - R^2 = MA^2.$$

Tiếp tục có một câu hỏi đặt ra, là làm thế nào để dựng trục đẳng phương của một đường tròn và một đường tròn điểm? Cách dựng rất đơn giản, tương tự như cách dựng đối với hai đường tròn như nêu trên.

1) Nếu điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O). Lúc đó đường nối trung điểm của AB và AC là trục đẳng phương của (O) và đường tròn điểm A.

2) Nếu điểm A nằm trên (O), tiếp tuyến tại A của (O) chính là trục đẳng phương của (O) và đường tròn điểm A.

3) Đối với trường hợp A nằm trong (O), tương tự như trên, ta dựng đường tròn ω có tâm không nằm trên AO đi qua A và tiếp xúc với (O). Lấy P là giao điểm của tiếp tuyến chung của (O) và ω và tiếp tuyến tại A của ω. Đường thẳng qua P vuông góc với AO chính là trục đẳng phương của (O) và đường tròn điểm A.

Chúng ta đến với một ví dụ đơn giản để thấy được tính ứng dụng của đường tròn điểm.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao BE và CF. Gọi đường thẳng qua A song song với BC cắt EF tại P. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại Q, M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $AM \perp PQ$.

Lời giải. Ý tưởng của bài toán khá đơn giản, chúng ta sẽ đi chứng minh PQ là trục đẳng phương của một đường tròn tâm A và một đường tròn tâm M. Một cách tự nhiên, ta sẽ chọn đường tròn điểm A và đường tròn đường kính BC.
Ta có $QA^2 = \overline{QB} \cdot \overline{QC} =$ nên Q thuộc trục đẳng phương của $(A, 0)$ và (BC).
Lại có $\angle PAC = \angle ACB = \angle AFE$ nên $PA^2 = PE \cdot PF$, suy ra P cũng thuộc trục đẳng phương của $(A, 0)$ và (BC).
Vậy PQ là trục đẳng phương của $(A, 0)$ và (BC) và ta được $PQ \perp AM$. □

2.3 Tỉ số phương tích

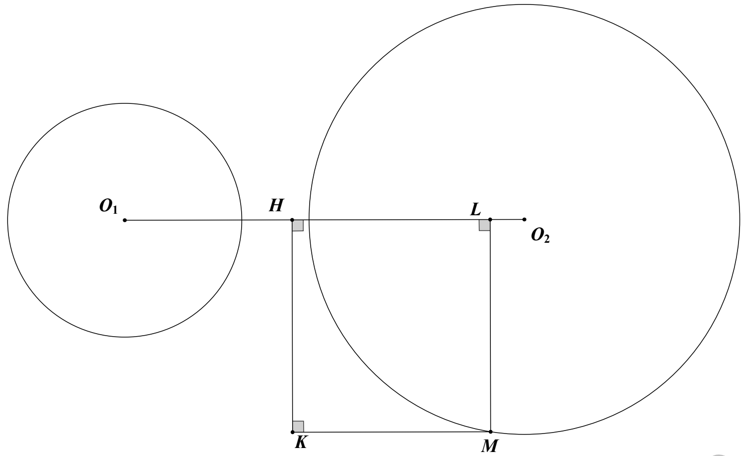
Mở đầu phần này, ta có định lý sau.

Định lý 2.5. *Cho trước hai đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2) không đồng tâm và một hằng số k. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\dfrac{\mathcal{P}_{M/(O_1)}}{\mathcal{P}_{M/(O_2)}} = k$ là một đường tròn đồng trục với (O_1) và (O_2).*

Để chứng minh định lý này, ta cần đến một số kết quả sau.

Bổ đề 2.6. *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) không đồng tâm. Gọi d là trục đẳng phương của hai đường tròn. Một điểm M di chuyển trên (O_2) và K là hình chiếu của M lên d. Lúc đó*

$$\mathcal{P}_{M/(O_1)} = 2\overline{O_1O_2} \cdot \overline{KM}.$$



Chứng minh. Gọi H, L lần lượt là hình chiếu của K, M lên đường thẳng O_1O_2.
Ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{M/(O_1)} = MO_1^2 - R_1^2 &= MO_1^2 - R_1^2 - (MO_2^2 - R_2^2)\\
&= (LO_1^2 - LO_2^2) - (R_1^2 - R_2^2)\\
&= (LO_1^2 - LO_2^2) - (HO_1^2 - HO_2^2)\\
&= (\overrightarrow{LO_1} + \overrightarrow{LO_2})((\overrightarrow{LO_1} - \overrightarrow{LO_2}) - (\overrightarrow{HO_1} + \overrightarrow{HO_2})(\overrightarrow{HO_1} - \overrightarrow{HO_2})\\
&= \overrightarrow{O_2O_1}((\overrightarrow{LO_1} + \overrightarrow{LO_2}) - (\overrightarrow{HO_1} + \overrightarrow{HO_2}))\\
&= \overrightarrow{O_2O_1} \cdot 2\overrightarrow{LH} = \overline{O_1O_2} \cdot \overline{KM}.
\end{aligned}$$

Như vậy, bổ đề được chứng minh. □

Từ bổ đề này, ta rút ra hệ quả sau.

Hệ quả 2.7. *Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đồng trục. Khi đó, với điểm M nằm trên (O_3) thì*

$$\frac{\mathcal{P}_{M/(O_1)}}{\mathcal{P}_{M/(O_2)}} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_2O_3}}.$$

Trở lại với định lý 2.5, với điểm M thỏa mãn điều kiện đã cho, dựng đường tròn (O_3) đi qua M mà đồng trục với (O_1) và (O_2). Vậy thì từ hệ quả trên, ta thu được $\dfrac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_2O_3}} = k$.

Do đó, O_3 là một điểm cố định nằm trên O_1O_2, với mọi điểm M thỏa mãn điều kiện của bài toán. Từ đó, đường tròn (O_3) là cố định nên điểm M thuộc đường tròn cố định chính là đường tròn (O_3).

3 Tỉ số kép - Hàng điểm điều hòa

Trước hết, ta cần biết định nghĩa về tỉ số kép.

Định nghĩa 3.1. *(Tỉ số kép) Với 4 điểm A, B, C, D nằm trên một đường thẳng, tỉ số kép của 4 điểm này được kí hiệu là (AB, CD), xác định bởi công thức*

$$(AB, CD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

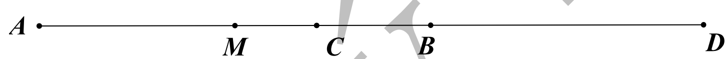
Từ định nghĩa này, ta dễ dàng có tính chất sau

Tính chất 3.2. $(AB, CD) = (BA, DC) = (CD, AB)$.

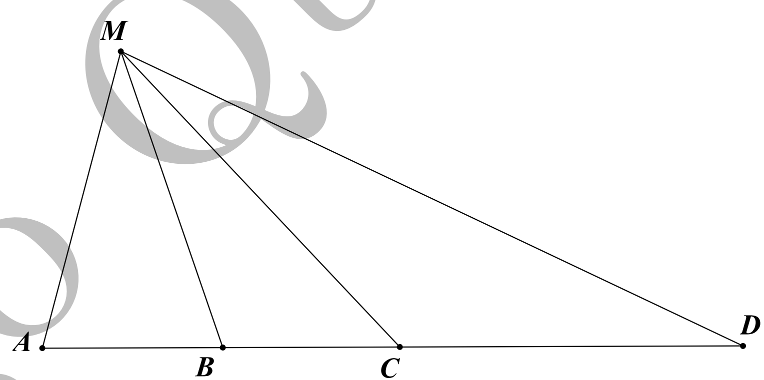
Định nghĩa 3.3. *(Hàng điểm điều hòa) Bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D tạo thành hàng điểm điều hòa nếu $(AB, CD) = -1$.*

Với hàng điểm A, B, C, D, và M là trung điểm AB, ta có các điều kiện sau là tương đương

1. $(AB, CD) = -1$.
2. (Hệ thức Descartes) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$.
3. (Hệ thức Newton) $MA^2 = MB^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$.
4. (Hệ thức Maclaurin) $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CM} \cdot \overline{CD}$.



Bây giờ, cho trước một điểm M trên mặt phẳng và bốn đường thẳng a, b, c, d cùng đi qua M. Cho đường thẳng $\triangle$ cắt a, b, c, d lần lượt tại A, B, C, D.



Chú ý rằng, ta có công thức sau

$$\begin{aligned}(AB, CD) &= \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \\ &= \frac{MA}{MB} \cdot \frac{\sin CMA}{\sin CMB} : \left(\frac{MA}{MB} \cdot \frac{\sin DMA}{\sin DMB}\right) \\ &= \frac{\sin CMA}{\sin CMB} : \frac{\sin DMA}{\sin DMB}\end{aligned}$$

là một hằng số.

Do đó, với đường thẳng $\triangle$ thay đổi, tỉ số (AB, CD) không đổi, và tỉ số này được gọi là tỉ số kép của chùm đường thẳng a, b, c, d, hoặc $M(ab, cd)$.

Ta có một số tính chất phổ biến hay dùng như sau.

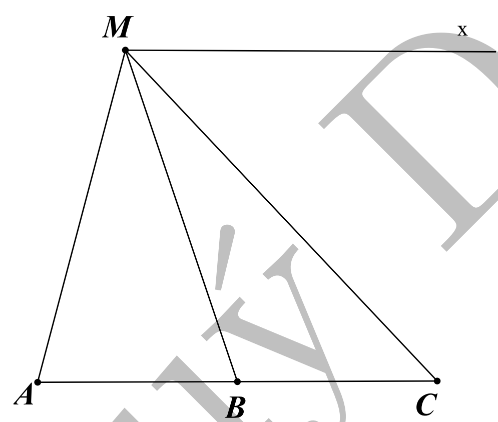
Tính chất 3.4. *(Chùm tương ứng vuông góc) Hai chùm tương ứng vuông góc thì tỉ số kép bằng nhau.*

Cụ thể, với hai chùm $M(x_1x_2, x_3x_4)$ và $N(y_1y_2, y_3y_4)$ thỏa mãn

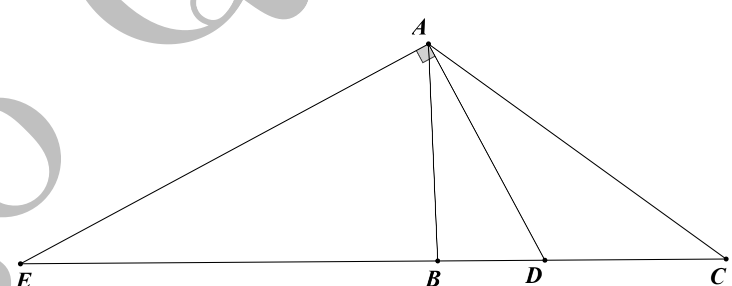
$$Mx_1 \perp Ny_1,\ Mx_2 \perp Ny_2,\ Mx_3 \perp Ny_3,\ Mx_4 \perp Ny_4,$$

thì $M(x_1x_2, x_3x_4) = N(y_1y_2, y_3y_4)$.

Tính chất 3.5. *(Chùm trung điểm) Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng với B là trung điểm AC và điểm M nằm ngoài đường thẳng. Khi đó, nếu Mx là đường thẳng qua M song song với đường thẳng đi qua A, B, C thì $M(Bx, AC) = -1$.*

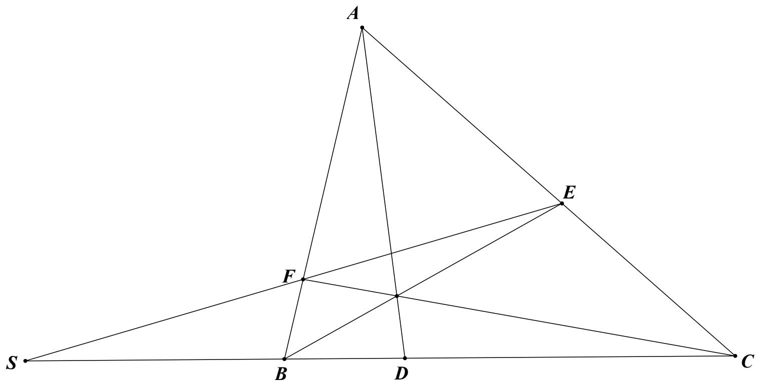


Tính chất 3.6. *(Chùm phân giác) Cho tam giác ABC với đường phân giác trong AD và phân giác ngoài AE. Khi đó $A(BC, DE) = -1$.*



Chứng minh. Theo tính chất đường phân giác, ta có $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$.
Từ đây ta dễ dàng suy ra $(BC, DE) = -1$. □

Tính chất 3.7. *Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB thỏa mãn AD, BE, CF đồng quy. Giả sử EF cắt BC tại S. Khi đó $(SD, BC) = -1$.*



Chứng minh. Áp dụng định lý Ceva, ta có

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1.$$

Áp dụng định lý Menalaus, ta có

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

Chia hai đẳng thức trên, ta thu được điều phải chứng minh. □

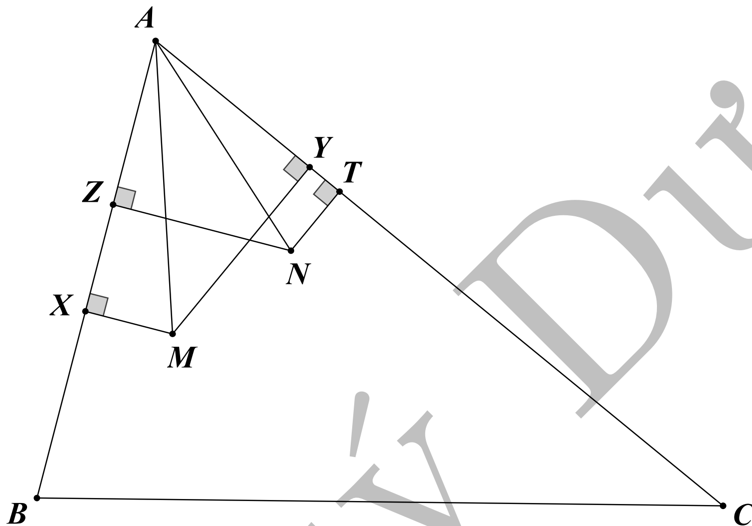
4 Điểm liên hợp đẳng giác

Trước hết, ta đến với định nghĩa về hai đường đẳng giác.

Định nghĩa 4.1. *Hai đường thẳng Ax, Ay được gọi là đẳng giác trong góc BAC nếu chúng đối xứng nhau qua đường phân giác của góc BAC.*

Xét góc BAC và hai đường thẳng AM, AN đẳng giác trong góc này. Khi đó, ta có bổ đề quan trọng sau.

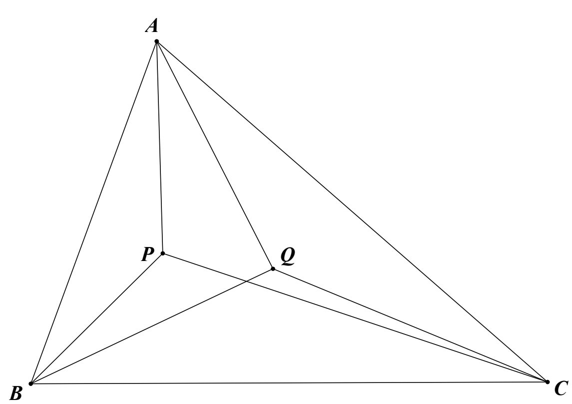
Bổ đề 4.2. *Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu của M lên AB, AC, và Z, T lần lượt là hình chiếu của N lên AB, AC. Khi đó X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn.*



Chứng minh. Sử dụng góc, ta chứng minh được $\triangle AMX \sim \triangle ANT$, $\triangle AMY \sim \triangle ANZ$.
Từ đó, ta suy ra $\dfrac{AZ}{AY} = \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AT}{AX}$, hay $AT \cdot AY = AZ \cdot AX$. Do đó, X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn. □

Tiếp theo, ta đến với định lý sau, cũng là định nghĩa về điểm liên hợp đẳng giác.

Định lý 4.3. *Cho tam giác ABC và điểm P nằm trên mặt phẳng. Khi đó, các đường đẳng giác với AP, BP, CP lần lượt trong các góc A, B, C đồng quy tại một điểm Q. Điểm Q được gọi là điểm liên hợp đẳng giác của điểm P ứng với tam giác ABC.*



Chứng minh. Gọi Ax, By, Cz lần lượt là các đường đẳng giác với AP, BP, CP trong các góc A, B, C.
Sử dụng định lý Ceva-sin, ta có $\prod \dfrac{\sin PAB}{\sin PAC} = 1$.

Chú ý rằng ta có $\begin{cases} \angle PAB = \angle xAC, \\ \angle PCA = \angle zCB, \\ \angle PBC = \angle yBA. \end{cases}$

Do đó, kết hợp các đẳng thức trên, ta thu được $\prod \dfrac{\sin xAC}{\sin xAB} = 1$, hay Ax, By, Cz đồng quy tại Q theo định lý Ceva-sin. □

Từ định nghĩa trên, sử dụng các phép cộng góc đơn giản, ta thu được các hệ quả quan trọng sau.

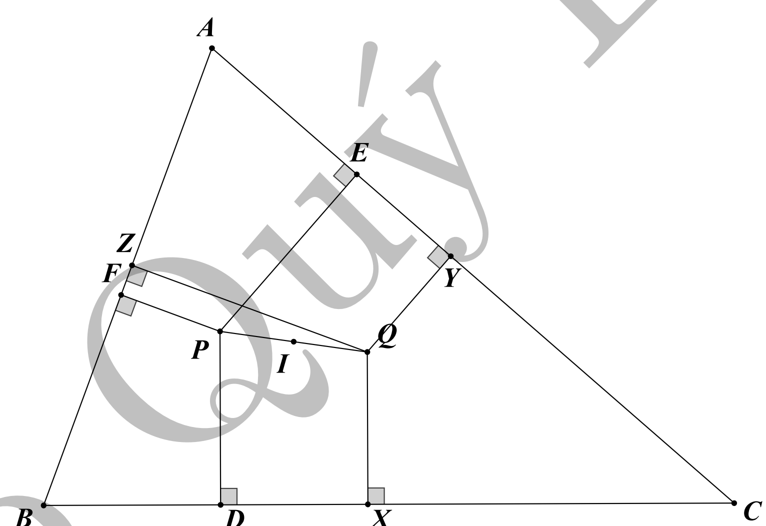
Hệ quả 4.4. *1. Trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp là hai điểm liên hợp đẳng giác.*

2. Tâm đường tròn nội tiếp, các tâm đường tròn bảng tiếp là điểm liên hợp đẳng giác của chính nó.

3. Trọng tâm và điểm Lemoine là hai điểm liên hợp đẳng giác.

Bây giờ, ta đến với định lý về đường tròn pedal.

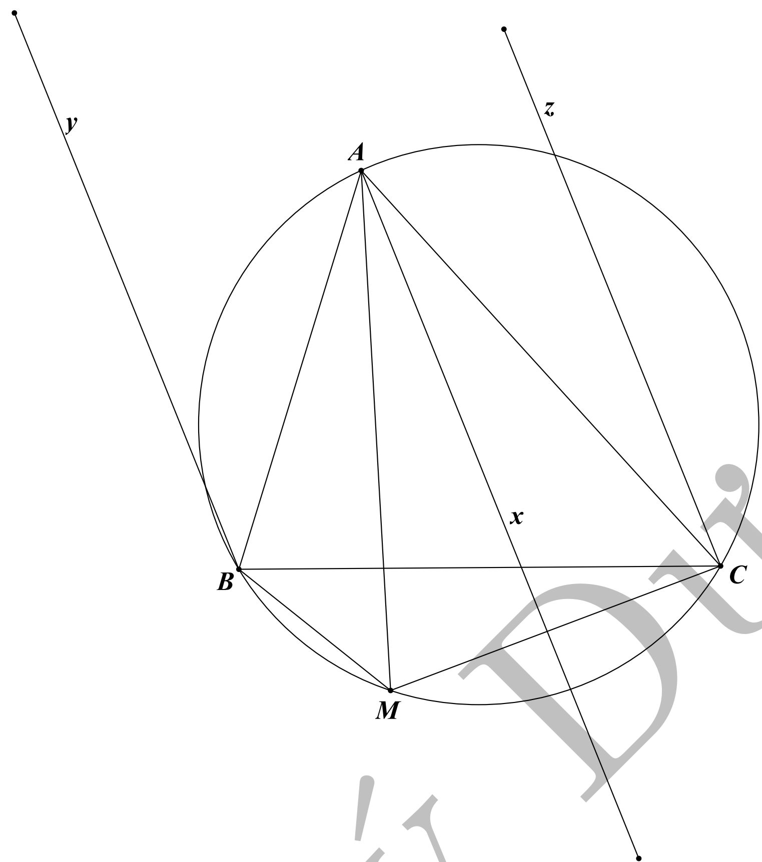
Định lý 4.5. *Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB, và X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của Q lên BC, CA, AB. Khi đó các điểm D, E, F, X, Y, Z cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm PQ. Đường tròn này được gọi là đường tròn pedal của hai điểm P, Q ứng với tam giác ABC.*



Chứng minh. Theo bổ đề 4.2, ta có các bộ điểm sau đồng viên: $(D, X, E, Y), (E, Y, F, Z), (F, Z, D, X)$.
Do đó, 6 điểm D, E, F, X, Y, Z cùng thuộc một đường tròn.
Gọi I là trung điểm PQ thì áp dụng bổ đề hình thang vuông, ta thấy I nằm trên trung trực của các đoạn thẳng DX, EY, FZ. Do đó, I là tâm đường tròn đi qua các điểm D, E, F, X, Y, Z. □

Bây giờ, cho trước tam giác ABC và một điểm M. Câu hỏi đặt ra là có khi nào thì không tồn tại điểm liên hợp đẳng giác của M không? Câu trả lời là có, điều này xảy ra khi và chỉ khi M thuộc (ABC), và ta có định lý sau.

Định lý 4.6. *Cho tam giác ABC và điểm M. Khi đó, các đường đẳng giác của AM, BM, CM trong các góc A, B, C đôi một song song khi và chỉ khi M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*



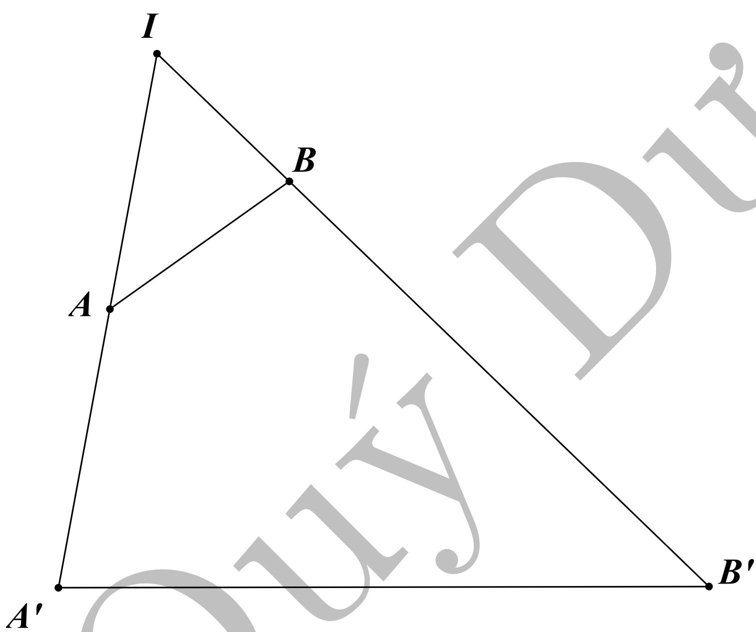
Chứng minh. Xét điểm M thuộc (ABC). Gọi Ax, By, Cz lần lượt là các đường đẳng giác với AM, BM, CM trong góc A, B, C. Không mất tính tổng quát, xét thế hình như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.
Ta có $\angle zCA = \angle MCB = \angle MAB = \angle CAx$ nên $Ax \parallel Cz$.
Tương tự cũng có $\angle xAB = \angle MAC = \angle MBC = \angle zBA$ nên $Ax \parallel By$.
Vậy $Ax \parallel By \parallel Cz$.
Bây giờ, giả sử $Ax \parallel By \parallel Cz$. Khi đó, ta có $\angle MBC = \angle zBA = \angle BAx = \angle MAC$ nên $M \in (ABC)$. Vậy ta hoàn tất chứng minh định lý này. $\square$

5 Phép nghịch đảo

Định nghĩa 5.1. *Cho trước một điểm I và một số thực $k \neq 0$. Khi đó, phép nghịch đảo tâm I tỉ số k được định nghĩa như sau: Với mỗi điểm M, phép nghịch đảo tâm I tỉ số k biến điểm M thành điểm M' thỏa mãn $\overline{IM} \cdot \overline{IM'} = k$. Phép nghịch đảo này được kí hiệu là $\mathcal{I}_I^k$. Ta kí hiệu $\mathcal{I}_I^k : M \mapsto M'$.*

Tuy nhiên, lưu ý rằng nếu phép nghịch đảo biến M thành M' thì cũng biến M' thành M. Do đó, ta nói phép nghịch đảo có tính chất **đối nghịch**. Vậy nên từ giờ, nếu phép nghịch đảo tâm I phương tích k biến M thành M' thì ta kí hiệu $\mathcal{I}_I^k : M \leftrightarrow M'$. Ta có tính chất sau về phép nghịch đảo.

Tính chất 5.2. *Nếu $\mathcal{I}_I^k : A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B'$ thì $A'B' = \dfrac{|k| \cdot AB}{IA \cdot IB}$.*

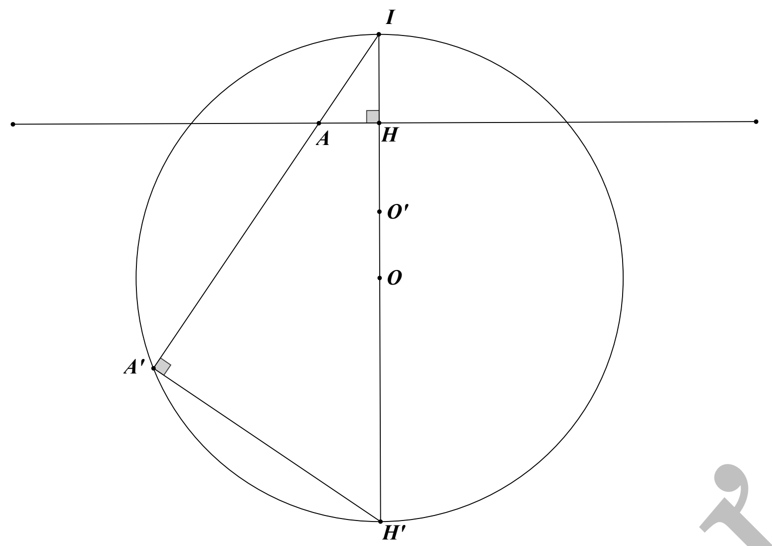


Chứng minh. Điều cần chứng minh tương đương với $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{|k|}{IA \cdot IB}$.
Chú ý rằng $\triangle IAB \sim \triangle IB'A'$, do đó $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{IA'}{IB} = \dfrac{IA' \cdot IA}{IB \cdot IA} = \dfrac{|k|}{IA \cdot IB}$.
Như vậy, bổ đề được chứng minh. □

Bây giờ, câu hỏi đặt ra là tìm ảnh của các đường đặc biệt qua một phép nghịch đảo, trước hết là đường thẳng. Nếu đường thẳng đó đi qua tâm nghịch đảo, ta dễ dàng nhận thấy phép nghịch đảo biến đường thẳng thành chính nó. Vậy còn nếu đường thẳng không đi qua tâm thì sao? Trả lời cho câu hỏi này, ta có định lý sau.

Định lý 5.3. *Ảnh của đường thẳng không đi qua tâm nghịch đảo là đường tròn đi qua tâm nghịch đảo.*

Chứng minh. Xét phép nghịch đảo tâm I phương tích k và đường thẳng d không đi qua I. Gọi H là hình chiếu của I lên d và H' là ảnh của H qua phép nghịch đảo $\mathcal{I}_I^k$.
Xét điểm A nằm trên d bất kì. Gọi A' là ảnh của A qua phép nghịch đảo. Ta có $\overline{IH} \cdot \overline{IH'} = \overline{IA} \cdot \overline{IA'}$ nên $AHH'A'$ là tứ giác nội tiếp.
Do đó, $\angle IA'H' = \angle IHA = 90^\circ$. Như vậy, ảnh của một điểm nằm trên d bất kì là một điểm nằm trên (IH'), ta có điều phải chứng minh. □



Tiếp đến là đường tròn, ảnh của đường tròn qua phép nghịch đảo được xác định thế nào. Trước hết là đường tròn đi qua tâm nghịch đảo. Chú ý là từ định lý 5.3 cùng tính chất đối nghịch của phép nghịch đảo, ta nhận thấy rằng ảnh của đường tròn đi qua tâm nghịch đảo sẽ là một đường thẳng không đi qua tâm nghịch đảo, hay nói ngắn gọn như sau.

Định lý 5.4. *Qua phép nghịch đảo, ảnh của đường tròn đi qua tâm là đường thẳng không đi qua tâm.*

Chú ý rằng từ chứng minh của định lý 5.3, nếu ta gọi O là trung điểm IH' và O' là điểm đối xứng của I qua d thì O là tâm của đường tròn, đồng thời ta có

$$\overline{IO'} \cdot \overline{IO} = 2\overline{IH} \cdot \frac{1}{2}\overline{IH'} = \overline{IH} \cdot \overline{IH'}.$$

Do đó, ta thu được O và O' chính là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo trên. Vậy ta thu được tính chất sau.

Tính chất 5.5. *Qua phép nghịch đảo, ảnh của tâm đường tròn là điểm đối xứng với tâm nghịch đảo qua đường thẳng ảnh.*

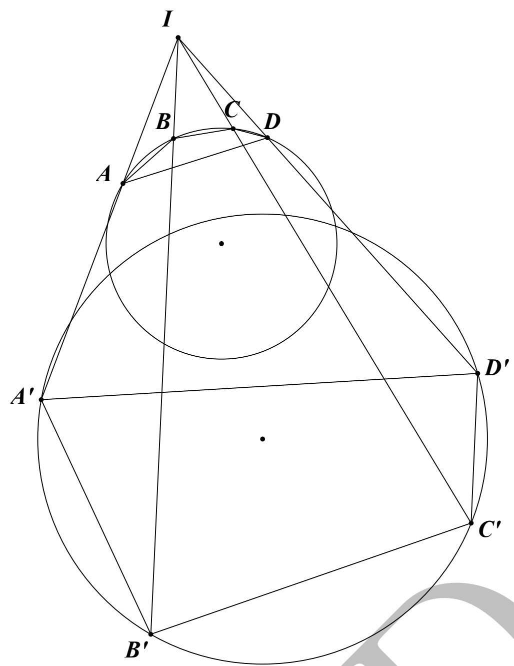
Bây giờ, ta quan tâm đến ảnh của đường tròn không đi qua tâm nghịch đảo. Ta có định lý sau.

Định lý 5.6. *Qua phép nghịch đảo, ảnh của đường tròn không đi qua tâm là đường tròn không đi qua tâm.*

Chứng minh. Xét phép nghịch đảo tâm I phương tích k và ba điểm A, B, C không thẳng hàng, (ABC) không đi qua I.
Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép nghịch đảo $\mathcal{I}_I^k$. Ta sẽ chứng minh rằng cứ mỗi điểm $D \in (ABC)$ thì ảnh D' của D sẽ thuộc $(A'B'C')$.
Không mất tính tổng quát, ta xét thế hình như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.
Sử dụng các tứ giác nội tiếp, ta có $\angle A'B'C' = \angle A'B'I + \angle C'B'I = \angle IAB + \angle ICB$.
Lại có $\angle A'D'C' = \angle ID'C' - \angle ID'A' = \angle ICD - \angle IAD$.
Do đó, ta được

$$\begin{aligned}
\angle A'B'C' + \angle A'D'C' &= \angle IAB + \angle ICB + \angle ICD - \angle IAD \\
&= \angle ICB + \angle ICD - \angle BAD \\
&= \angle ICB + \angle ICD - (180^\circ - \angle BCD) \\
&= 180^\circ.
\end{aligned}$$

Vậy ta có $D' \in (A'B'C')$ và có điều phải chứng minh. □



Lưu ý rằng ta còn một tính chất của định lý này đó là đường thẳng nối tâm hai đường tròn đi qua tâm nghịch đảo. Chứng minh điều này khá đơn giản, chỉ cần dùng một vài phép cộng góc, tôi xin nhường lại cho bạn đọc.
Đến với các tính chất tiếp theo, ta cần các định nghĩa sau.

Định nghĩa 5.7. *Cho đường thẳng $\triangle$ và đường tròn (O) cắt nhau tại điểm A. Kẻ tiếp tuyến Ax của (O). Khi đó, góc giữa $\triangle$ và (O) được định nghĩa là góc không vượt quá 90° giữa Ax và $\triangle$.*

Định nghĩa 5.8. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A. Khi đó, góc giữa hai đường tròn (O_1) và (O_2) được định nghĩa là góc không vượt quá 90° giữa hai tiếp tuyến kẻ tại A của hai đường tròn.*

Ví dụ, ta có một số tính chất sau.

1. Cho đường tròn (O) và đường thẳng $\triangle$ tiếp xúc với (O). Khi đó góc giữa $\triangle$ và (O) là 0°.

2. Cho đường tròn (O) và đường thẳng $\triangle$ đi qua (O). Khi đó, góc giữa $\triangle$ và (O) là 90°.

3. Cho đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc nhau tại A. Khi đó, góc giữa (O_1) và (O_2) là 0°.

4. Cho đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A thỏa mãn $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$. Khi đó, góc giữa (O_1) và (O_2) là 90°. Lúc đó, ta còn gọi (O_1) và (O_2) là *hai đường tròn trực giao.*

Lúc này, ta thừa nhận định lý quan trọng sau.

Định lý 5.9. *Phép nghịch đảo có tính chất bảo toàn góc.*

Lúc này, ta thu được một số hệ quả sau.

Hệ quả 5.10. *1. Cho đường tròn (O) và đường thẳng $\triangle$ tiếp xúc với (O) tại A. Khi đó, ảnh của (O) và ảnh của $\triangle$ qua phép nghịch đảo tâm A là hai đường thẳng song song với nhau. (Nói khác đi, ảnh của (O) là một đường thẳng song song với $\triangle$).*
Nếu tâm nghịch đảo là một điểm thuộc (O) khác A, ảnh của $(O)'$ và ảnh của $\triangle$ là một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.
Nếu tâm nghịch đảo là không thuộc (O) và $\triangle$, ảnh của (O') và ảnh của $\triangle$ là hai đường tròn tiếp xúc.

2. *Cho hai đường tròn* (O_1) *và* (O_2) *trực giao tại* A*. Khi đó, ảnh của* (O_1) *và* (O_2) *qua phép nghịch đảo tâm* A *là hai đường thẳng vuông góc.*
   Nếu tâm nghịch đảo là một điểm thuộc (O_1) *và không thuộc* (O_2)*, ảnh của* (O_1) *và* (O_2) *là một đường thẳng đi qua tâm của đường tròn kia.*
   Nếu tâm nghịch đảo là một điểm không thuộc cả hai đường tròn, ảnh của (O_1) *và* (O_2) *là hai đường tròn trực giao.*

Cuối cùng, ta có định lý sau.

Định lý 5.11. *Phép nghịch đảo bảo toàn tỉ số kép.*

6 Cực và đối cực

Mở đầu phần này, ta cần các định nghĩa sau.

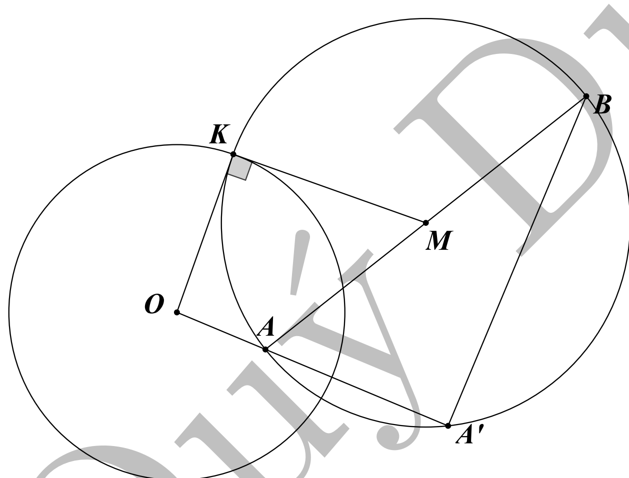
Định nghĩa 6.1. *Phép nghịch đảo qua đường tròn (O, R) là phép nghịch đảo tâm O, phương tích R^2.*

Định nghĩa 6.2. *(Đường tròn trực giao) Hai đường tròn (O_1) và (O_2) được gọi là trực giao nếu góc giữa hai đường tròn bằng 90°.*

Định nghĩa 6.3. *Cho đường tròn (O) và điểm $A \neq O$. Khi đó, một điểm B được gọi là liên hợp với A nếu đường tròn đường kính AB trực giao với (O).*

Ta có định lý sau, cũng là định nghĩa về cực và đối cực.

Định lý 6.4. *Cho đường tròn (O) và điểm $A \neq O$. Khi đó, tập hợp các điểm B liên hợp với A là một đường thẳng d vuông góc với OA. Đường thẳng d được gọi là đường đối cực của A ứng với đường tròn (O). Điểm A được gọi là cực của đường thẳng d ứng với đường tròn (O).*



Chứng minh. Gọi A' là ảnh của A qua phép nghịch đảo qua đường tròn (O), d là đường thẳng qua A' vuông góc với OA.
Xét điểm B liên hợp với A. Khi đó, gọi K là giao điểm của (AB) với (O), M là trung điểm AB.
Vì (O) và (AB) trực giao nên ta có $\angle MKO = 90^\circ$, hay OK là tiếp tuyến của (AB).
Do đó, ta có $OK^2 = \mathcal{P}_{O/(AB)}$. Mà $OK^2 = OA \cdot OA'$ nên $A' \in (AB)$, hay $\angle AA'B = 90^\circ$.
Từ đó, $B \in d$.
Bây giờ, xét một điểm B thuộc d bất kì. Khi đó ta có $\angle AA'B = 90^\circ$ và $\mathcal{P}_{O/(AB)} = OA \cdot OA' = R^2$.
Từ đây, ta dễ dàng suy ra (O) và (AB) trực giao, hay B liên hợp với A.
Như vậy, tập hợp tất cả các điểm B liên hợp với A chính là đường thẳng d. □

Chú ý rằng từ chứng minh trên, ta suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 6.5. *Đường đối cực của A ứng với đường tròn (O) là đường thẳng vuông góc với OA tại ảnh nghịch đảo của A qua phép nghịch đảo qua đường tròn (O).*

Hệ quả 6.6. *Nếu A thuộc (O), đường đối cực của A ứng với đường tròn (O) chính là tiếp tuyến tại A của (O).*

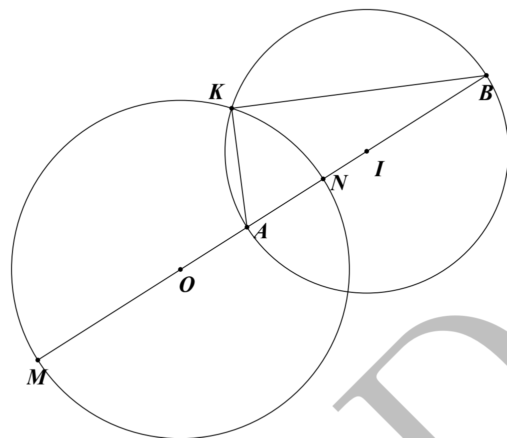
Hơn nữa, ta cũng có định lý sau.

Định lý 6.7. *(La Hire) M thuộc đường đối cực của N khi và chỉ khi N thuộc đường đối cực của M.*

Chứng minh. Chứng minh cho định lý này khá đơn giản, chỉ cần để ý rằng M thuộc đường đối cực của N tương đương với (MN) trực giao với (O), và tương đương N thuộc đường đối cục của M. □

Ta đến với ví dụ sau để thấy được ứng dụng của cực và đối cực. Nhưng trước hết, ta cần tới bổ đề sau.

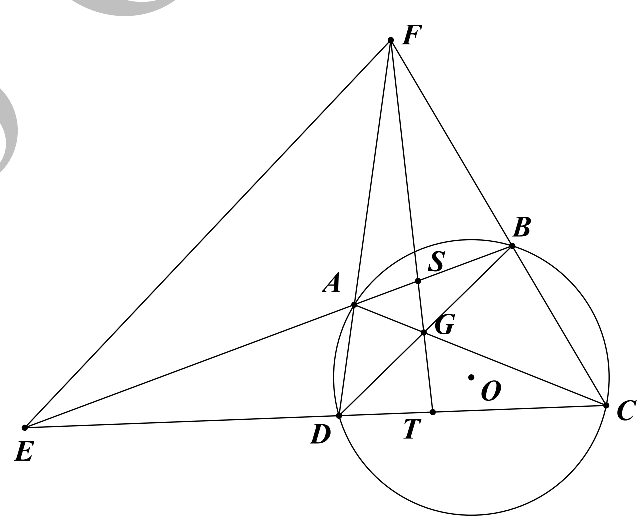
Bổ đề 6.8. *Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Đường thẳng AB cắt (O) tại hai điểm M, N. Khi đó, (AB) trực giao với (O) khi và chỉ khi $(MN, AB) = -1$.*



Chứng minh. Giả sử (AB) trực giao với (O). Gọi (AB) cắt (O) tại K, I là trung điểm AB. Khi đó, ta có IK là tiếp tuyến của (O).
Do đó, ta được $IK^2 = \overline{IM} \cdot \overline{IN}$, hay $IA^2 = IB^2 = \overline{IM} \cdot \overline{IN}$. Theo hệ thức Newton, $(MN, AB) = -1$.
Giả sử $(MN, AB) = -1$. Theo hệ thức Newton, ta có $OM^2 = ON^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$, suy ra $R^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$, tức là R^2 là phương tích từ (O) tới (AB).
Từ đây, ta suy ra (O) và (AB) trực giao. □

Ta quay lại với bài toán dưới đây.

Ví dụ. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), AC giao BD tại G, AB giao CD tại E, AD giao BC tại F. Chứng minh rằng EF là đường đối cực của G, FG là đường đối cực của E, GE là đường đối cực của F.



Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh FG là đường đối cực của E, còn lại chứng minh tương tự.
Gọi FG cắt AB và CD tại S và T. Khi đó, ta có $(ET, DC) = (ES, AB) = -1$ nên theo bổ đề trên, S và T đều liên hợp với E, tức là ST là đường đối cực của E, hay FG là đường đối cực của E.
Chứng minh tương tự, ta thu được EG là đường đối cực của F.
Như vậy, ta có G thuộc đường đối cực của E và F. Theo định lý La Hire, E và F đều thuộc đường đối cực của G, tức là EF là đường đối cực của G. Ta có điều phải chứng minh. □

Vậy kết quả thu được từ bài toán là gì? Chú ý rằng từ hệ quả 6.5, ta thu được $OF \perp EG$, $OE \perp GF$ và $OG \perp EF$. Từ đó, ta rút ra được định lý nổi tiếng sau.

Định lý 6.9. *(Định lý Brocard) O là trực tâm của tam giác EGF.*

Phần II

Bài tập

Bài toán 1. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Dựng các đường kính EE_1, EE_2, FF_1, FF_2 của các đường tròn $(EAD), (EBC), (FAB), (FCD)$. Chứng minh rằng E_1, E_2, F_1, F_2 thẳng hàng và $E_1F_1 = E_2F_2$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Đường đối trung kẻ từ A của tam giác ABC cắt (O) tại D. DH cắt (O) lần thứ hai tại K. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HA, HK. Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. (AI) cắt (O) tại G khác A. Trung trực AI cắt GD tại R. Tia AO cắt BC và (O) tại các điểm X, Y.

(a) Chứng minh rằng $OR \parallel DY$.

(b) Chứng minh rằng R, I, X thẳng hàng.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Lấy điểm P trên mặt phẳng sao cho $AP \perp BC$. Q, R lần lượt đối xứng với P qua CA, AB. Y, Z lần lượt là hình chiếu của Q, R trên AB, AC. Giả sử $H \neq O, Y \neq Z$. Chứng minh rằng $YZ \perp OH$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với đường tròn nội tiếp (I) và tâm bàng tiếp góc A là I_a. (I) lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại P và X là trung điểm của PD. Chứng minh rằng $XI \perp DI_a$.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Một đường thẳng bất kì đi qua O cắt CA, AB tại các điểm B_0, C_0. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của B_0, C_0 lên AB, AC.

(a) Chứng minh rằng B_1C_1 đi qua trung điểm AH.

(b) Gọi B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của B_0, C_0 trên BC. X, Y tương ứng là trung điểm của B_1B_2, C_1C_2. Chứng minh rằng XY đi qua trung điểm OH.

Bài toán 7. Cho tam giác nhọn ABC với tâm ngoại tiếp O và hai đường cao BE, CF. Lấy các điểm M, N nằm trên cạnh BC sao cho $BM = CN$. BE cắt đường tròn (MBF) lần thứ hai tại P. CF cắt đường tròn (NCE) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng PE, QF, AO đồng quy.

Bài toán 8. Cho hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $AB = BC = CD$. Đường tròn C-mixtilinear của tam giác ABC tiếp xúc với (O) tại P. Chứng minh rằng $PB + PD = 2PA$.

Bài toán 9. Cho P là một điểm nằm bên trong $\triangle ABC$. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của các cung BPC. CPA, APB của các đường tròn (BPC), (CPA), (APB) . Chứng minh rằng P, X, Y, Z cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). AD là đường phân giác trong của $\angle BAC$. M là điểm chính giữa cung lớn BC của O. Đường thẳng qua M song song với OD cắt BC tại E. Gọi F là hình chiếu của O trên đường thẳng qua E song song với AD. Chứng minh rằng O, F, B, C cùng nằm trên một đường tròn.

Bài toán 11. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi X là hình chiếu của D lên EF. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle IBC$. Chứng minh rằng H, X, K thẳng hàng.

Bài toán 12. Cho tam giác ABC với trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp (O, R). A' là điểm đối xứng của A qua BC. N, P là trung điểm của $A'B$, $A'C$. AN, AP cắt BC tại L, J.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một điểm P bất kì không nằm trên cạnh AB, AC. Đường đối trung đỉnh A của tam giác PAB cắt (O) tại U. Đường đối trung đỉnh A của tam giác PAC cắt (O) tại V. Chứng minh rằng CU, BV, AP đồng quy.

Bài toán 14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và trực tâm H. Lấy các điểm E, F tương ứng nằm trên CA và AB sao cho (ABE) và (ACF) tiếp xúc với BC, EF. Gọi EF cắt BC tại D. Chứng minh rằng $AD \perp OH$.

Bài toán 15. Trong tam giác ABC, biết rằng đường phân giác trong của $\angle BAC$, đường $B-$ trung tuyến và đường trung trực của AB đồng quy tại X. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $\angle BXH = 90°$.

Bài toán 16. Cho tam giác ABC với đường phân giác AD. Hai đường tiếp tuyến chung của (BAD) và (CAD) cắt nhau tại điểm A'. Các điểm B', C' dựng tương tự. Chúng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và tâm nội tiếp I. OI cắt BC tại K. Đường tròn $A-$ mixtilinear của tam giác ABC tiếp xúc với (O) tại T. Gọi ℓ là đường tiếp tuyến tại K của đường tròn (ITK). Chứng minh rằng $\ell \parallel AI$.

Bài toán 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. EF cắt (O) tại P, Q. QD cắt (O) tại điểm thứ hai là R. Chứng minh rằng nếu $\angle BAR = \angle CAD$ thì $AP^2 = AB \cdot AC$.

Bài toán 19. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Lấy 2 điểm P, Q trên BC sao cho AP, AQ đẳng giác trong $\angle BAC$. Kẻ đường phân giác AD của $\angle BAC$, $D \in BC$. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt I_aP và AQ tại X, Y. Chứng minh rằng $DX = DY$.

Bài toán 20. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. CH cắt (O) tại T. AT cắt BC tại I. M, N là trung điểm CH, EH. Đường thẳng qua M song song với DE cắt EF tại P. Chứng minh rằng $PN \parallel EI$.

Bài toán 21. Cho tam giác ABC không cân, nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác ngoài của các góc B, C lần lượt cắt CA, AB tại E, F và cắt (O) tại các điểm M, N khác B, C. Đường thẳng qua M vuông góc với BM cắt đường thẳng qua N vuông góc với CN tại J. Chứng minh rằng $OJ \perp EF$.

Bài toán 22. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) với trực tâm H. AH cắt BC tại D. OH cắt BC tại X. Các đường tròn (BDH) và (CDH) cắt (O) tại P và Q. Chứng minh rằng P, D, Q, X cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 23. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Dựng một đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC và cắt BC tại X, Y. Đường thẳng qua I vuông góc với Bc cắt đường thẳng qua A song song với BC tại Z. Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc (O).

Bài toán 24. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc BC tại D. Một đường tròn đi qua A, D và tiếp xúc với BC cắt (O) tại K khác A. Gọi M là trung điểm của ID. Chứng minh rằng $\angle AKM = 90°$.

Bài toán 25. Cho tam giác ABC nhọn có H và O lần lượt là trực tâm và đường tròn ngoại tiếp. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $OE \parallel BC$. OE cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ tại F. Tiếp tuyến tại F của (EBC) cắt BC, AH tại P, Q.

a) Chứng minh đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác BPQ đi qua trung điểm M của AH.

b) PA, PH cắt (K) tại S, T. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến của S, T cắt nhau tại một điểm trên ME.

Bài toán 26. Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì nằm trong tam giác. Một đường thẳng bất kì đi qua P cắt (BPC), (CPA), (APB) lần lượt tại D, E, F. Gọi ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 lần lượt là đường thẳng qua D song song với BC, đường thẳng qua E song song với CA, đường thẳng qua F song song với AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba đường ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tiếp xúc với (ABC).

Bài toán 27. Cho tam giác ABC với điểm X nằm trên cạnh BC. Gọi U là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AXC, W là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, V là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác ABX. Chứng minh rằng trực tâm $\triangle UVW$ nằm trên BC.

Bài toán 28. Cho $\triangle ABC$ với tâm nội tiếp I và tâm đường tròn bàng tiếp (I_a). (I_a) tiếp xúc với BC tại D. Gọi N là điểm chính giữa cung BAC của (O). NI cắt (O) tại T. Gọi K là tâm (AID). Chứng minh rằng $TI_a \perp KI$.

Bài toán 29. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) với $\angle A = 60°$ và hai đường cao BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Trung tuyến AM của ABC cắt lại (O) tại K. Gọi L là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O). B_1C_1 cắt BC tại E. Chứng minh rằng $\angle EHL = \angle ABK$.

Bài toán 30. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Gọi M là trung điểm BC. Giả sử $OI \parallel BC$. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng MI.

Bài toán 31. Cho tam giác ABC. Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C. T là hình chiếu của X lên BC. Gọi Y' đối xứng với Y qua trung điểm AC, Z' đối xứng với Z qua trung điểm AB. Chứng minh rằng $AT \perp Y'Z'$.

Bài toán 32. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. EF cắt $(O) = (ABC)$ tại X, Y sao cho F nằm giữa X và E. Gọi G, H là hình chiếu của A lên IX, IY. Chứng minh rằng $\angle GDF = \angle HDE$.

Bài toán 33. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Gọi M là trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông góc với MH cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng $\angle AOE = \angle AOF$.

Bài toán 34. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Đường tròn B, C tiếp xúc với (I) tại P. AI cắt BC tại X. Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến qua X của (I) (khác BC) và tiếp tuyến của (I) tại P. AS cắt (O) tại T. Chứng minh rằng $\angle ATI = 90°$.

Bài toán 35. Cho tam giác ABC có đường cao AH. Gọi X, Y lần lượt là chân đường góc hạ từ H xuống AC, AB. Gọi Z là giao của BX và CY. Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (A, AH).

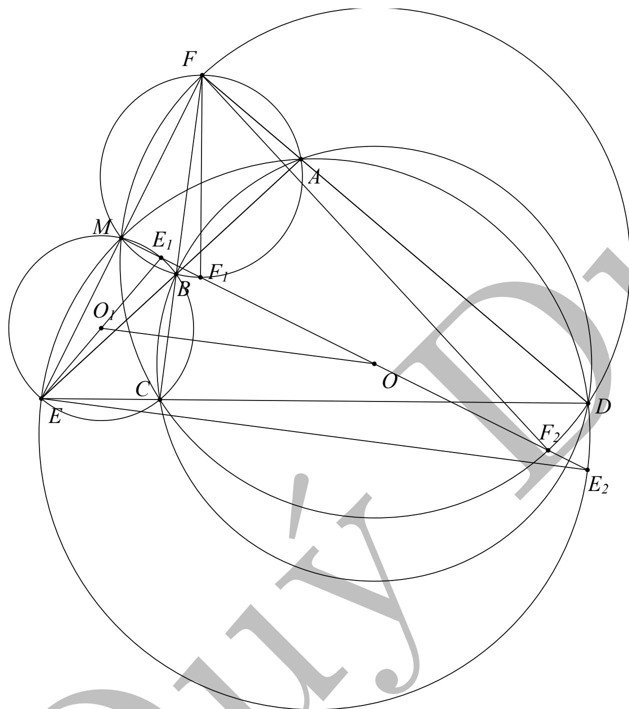
Bài toán 36. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi M_{ac}, M_{bd} lần lượt là trung điểm của AC và BD. Gọi H_a là trực tâm tam giác BCD, P_a là hình chiếu của H_a lên CM_{bd}. Tương tự xác định P_b, P_c, P_d. Chứng minh rằng P_a, P_b, P_c, P_d đồng viên.

Bài toán 37. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). E là giao điểm của AC và BD. Đường tròn ω qua A, E tiếp xúc với BD cắt lại AB tại P. Gọi M là trung điểm BC. ME cắt lại ω tại Q. Chứng minh rằng B, D, P, Q đồng viên.

Phần III

Lời giải các bài toán

Bài toán 1. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Dựng các đường kính EE_1, EE_2, FF_1, FF_2 của các đường tròn $(EAD), (EBC), (FAB), (FCD)$. Chứng minh rằng E_1, E_2, F_1, F_2 thẳng hàng và $E_1F_1 = E_2F_2$.



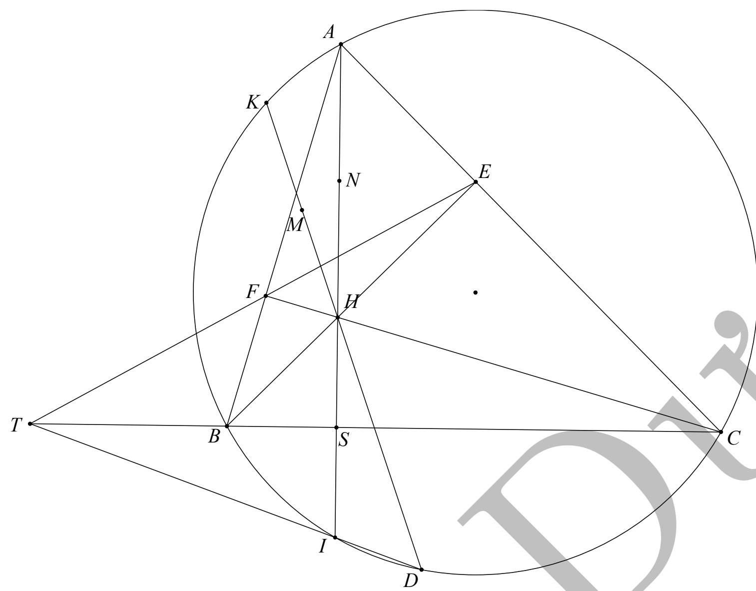
Lời giải. Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$, ta có M nằm trên 4 đường tròn $(EAD), (EBC), (FAB), (FCD)$ nên

$$\angle EME_1 = \angle EME_2 = \angle FMF_1 = \angle FMF_2 = 90^\circ.$$

Mà từ kết quả quen thuộc, E, M, F thẳng hàng và $MO \perp EF$ nên E_1, E_2, F_1, F_2, O thẳng hàng do chúng cùng nằm trên đường thẳng qua M vuông góc với EF.

Gọi O_1 là tâm của (EAD) thì $OO_1 \perp AD$ và $90^\circ = \angle MEE_2 + \angle ME_2E = \angle MEE_2 + \angle MBE_2 = \angle MEE_2 + \angle EFD$ nên $AD \perp EE_2$, từ đó $OO_1 \parallel EE_2$. Mà O_1 là trung điểm EE_1 nên O là trung điểm E_1E_2, chứng minh tương tự O là trung điểm của F_1F_2 và thu được $E_1F_1 = E_2F_2$. □

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Đường đối trung kẻ từ A của tam giác ABC cắt (O) tại D. DH cắt (O) lần thứ hai tại K. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HA, HK. Chứng minh rằng B, C, M, N cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Gọi BE, CF là các đường cao của tam giác ABC, AH cắt $BC, (O)$ tại S, I khác A, EF cắt BC tại T.

Ta có kết quả quen thuộc là

$$\overline{HE} \cdot \overline{HB} = \overline{HF} \cdot \overline{HC} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{H/(O)} = \overline{HN} \cdot \overline{HI} = \overline{HM} \cdot \overline{HD} = k.$$

Lại có $(TS, BC) = -1$ nên $I(TS, BC) = -1$, mà $(AB, CD) = -1$ nên chiếu lên (O) qua tâm I ta thu được T, I, D thẳng hàng. Từ đó thì $\overline{TF} \cdot \overline{TE} = \overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TI} \cdot \overline{TD}$ nên E, F, I, D đồng viên.

Phép nghịch đảo tâm H, phương tích k lần lượt biến B, C, M, N thành E, F, D, I, mà E, F, D, I đồng viên nên B, C, M, N cũng đồng viên và có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. (AI) cắt (O) tại G khác A. Trung trực AI cắt GD tại R. Tia AO cắt BC và (O) tại các điểm X, Y.

(a) Chứng minh rằng $OR \parallel DY$.

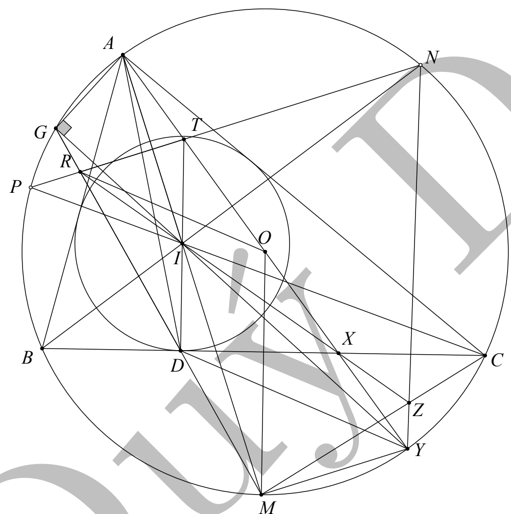
(b) Chứng minh rằng R, I, X thẳng hàng.

Lời giải. Trước hết, ta có hai bổ đề quen thuộc như sau.

Bổ đề 6.10. ?? *Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$. Lấy các điểm E, F lần lượt nằm trên AD, BC sao cho $AF \parallel CE$. Lúc đó sẽ có $BE \parallel CF$.*

Bổ đề 6.11. *Với các điểm như ở trong bài toán, GD đi qua điểm chính giữa cung BC không chứa A.*

Phần chứng minh đầy đủ xin nhường lại cho bạn đọc. Chứng minh bổ đề 1 sử dụng định lý Thales bằng cách gọi giao điểm của AD và BC. Còn bổ đề 2 chúng ta chỉ cần để ý rằng $\triangle TFB \sim \triangle TEC$ và sử dụng tính chất của đường phân giác, ta có điều phải chứng minh.



(a) Gọi T là giao điểm của trung trực AI với AO, M là điểm chính giữa cung BC. Lúc này có $RT \parallel MY$ nên để chứng minh $OR \parallel DY$ thì áp dụng **??**, ta quy về chứng minh $TD \parallel OM$, hay T, I, D thẳng hàng. Từ bổ đề 6.11, GD đi qua M nên $MI^2 = MD \cdot MG$, từ đó thì $\angle MID = \angle MGY$. Ta có biến đổi góc sau
$$\angle AIT + \angle AID = \angle TAI + 180^\circ - \angle MID = \angle TAI - \angle MGY + 180^\circ = 180^\circ.$$
Vì vậy T, I, D thẳng hàng và có điều phải chứng minh.

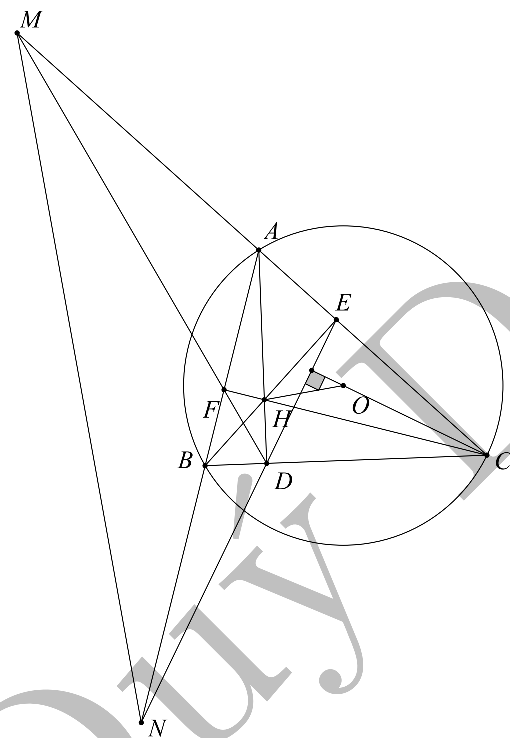
(b) Gọi N, P là giao điểm của BI, CI với (O). Ta có NP là trung trực AI nên N, P, R, T thẳng hàng, đồng thời dễ thấy G, I, Y thẳng hàng.
Từ đó, áp dụng định lý Pascal cho bộ điểm $\begin{pmatrix} G & N & C \\ P & M & Y \end{pmatrix}$ ta có R, I, Z thẳng hàng, với Z là giao điểm của MC và NY. Tiếp tục áp dụng định lý Pascal cho bộ điểm $\begin{pmatrix} N & C & A \\ M & Y & B \end{pmatrix}$ ta thu được I, X, Z thẳng hàng. Vậy R, I, X thẳng hàng và ta có điều phải chứng minh

□

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Lấy điểm P trên mặt phẳng sao cho $AP \perp BC$. Q, R lần lượt đối xứng với P qua CA, AB. Y, Z lần lượt là hình chiếu của Q, R trên AB, AC. Giả sử $H \neq O, Y \neq Z$. Chứng minh rằng $YZ \perp OH$.

Lời giải. Trước hết, ta đi chứng minh một bổ đề như sau.

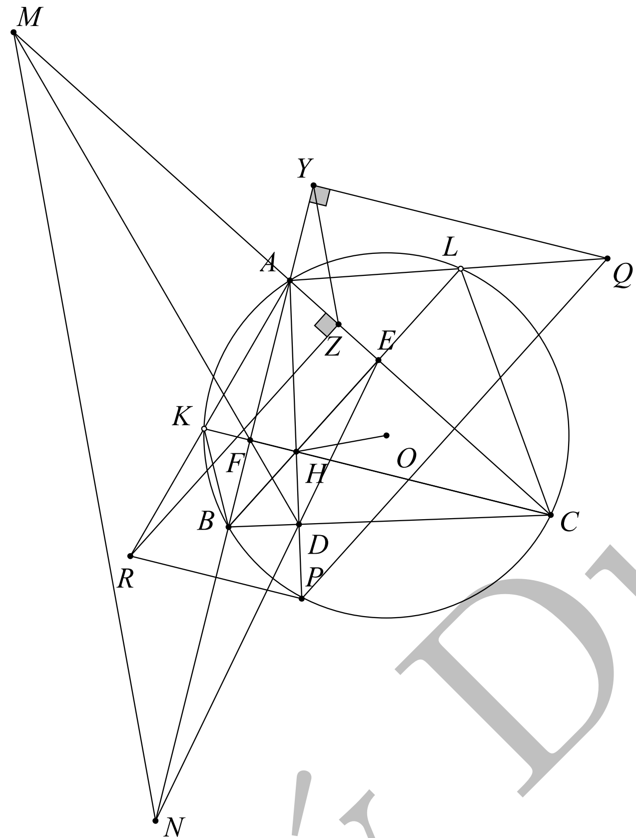
Bổ đề 6.12. *Cho tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Giả sử DF cắt AC tại N, DE cắt AB tại N. Khi đó* $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{\sin OCH}{\sin OBH}$.



Chứng minh. Từ định lý sin ta có $\dfrac{AM}{AF} = \dfrac{\sin AFM}{\sin AMF}, \dfrac{AN}{AE} = \dfrac{\sin AEN}{\sin ANE}$. Chia 2 phân số cho nhau, ta được

$$\frac{AM}{AN} \cdot \frac{AE}{AF} = \frac{\sin AFM}{\sin AMF} \cdot \frac{\sin ANE}{\sin AEN} = \frac{\sin ANE}{\sin AMF} \cdot \frac{\sin AFM}{\sin AEN} = \frac{\sin ANE}{\sin AMF} \cdot \frac{\sin ACB}{\sin ABC} = \frac{\sin ANE}{\sin AMF} \cdot \frac{AB}{AC}.$$

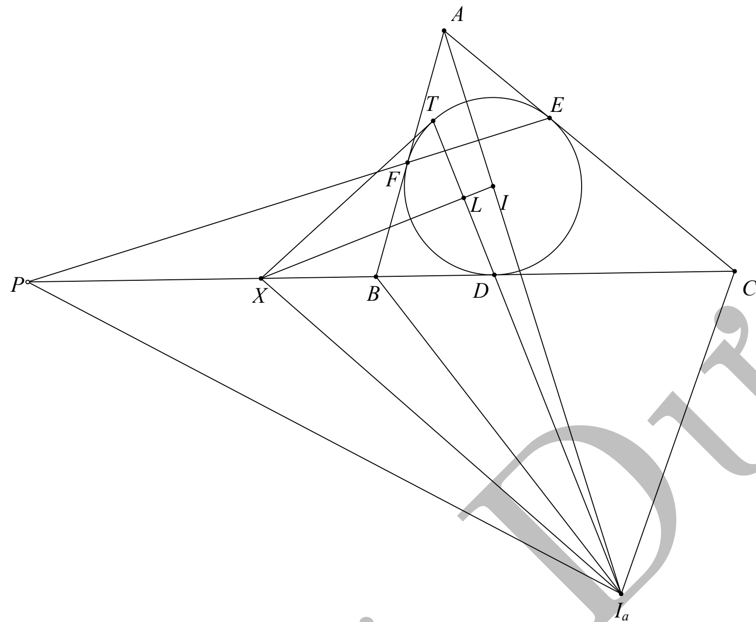
Mà $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$ nên $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{\sin ANE}{\sin AMF}$. Cũng lại có $CO \perp DE$ nên ta dễ thấy là $\angle OCH = \angle ANE$, tương tự $\angle OBH = \angle AMF$. Vậy $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{\sin OCH}{\sin OBH}$ và bổ đề được chứng minh xong. $\square$



Trở lại bài toán, gọi M là giao điểm của DF và AC, N là giao điểm của DE và AB, K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của CH và BH với (O).
Ta có AK, AH đối xứng nhau qua AB nên A, K, R thẳng hàng, tương tự A, L, Q thẳng hàng. Lại có $AZ = AR \cdot \cos RAC, AY = AQ \cdot \cos YAQ$, và $AR = AQ = AP$ nên $\dfrac{AZ}{AY} = \dfrac{\cos KAC}{\cos LAB} = \dfrac{\cos KAC}{\cos LCB}$.
Mà $\angle KAC = 90^\circ - \angle OCH, \angle LCB = 90^\circ - \angle OBH$ nên $\dfrac{AZ}{AY} = \dfrac{\sin OCH}{\sin OBH}$. Vậy theo bổ đề trên ta được $\dfrac{AZ}{AY} = \dfrac{AM}{AN}$, từ đó thì $YZ \parallel MN$.
Mà MN là trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler của tam giác ABC nên $MN \perp OH$, từ đó $YZ \perp OH$ và ta có điều phải chứng minh.

□

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với đường tròn nội tiếp (I) và tâm bàng tiếp góc A là I_a. (I) lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại P và X là trung điểm của PD. Chứng minh rằng $XI \perp DI_a$.

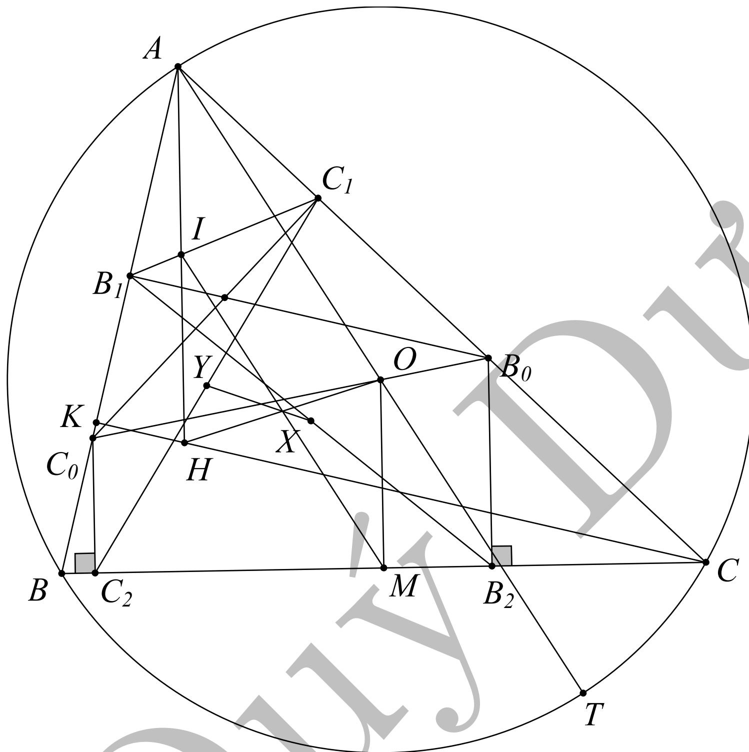


Lời giải. Kẻ tiếp tuyến XT khác BC đến (I) với T là tiếp điểm, gọi L là giao điểm của XI và LD.
Do AD, BE, CF đồng quy nên $(PD, BC) = -1$, từ đó theo hệ thức Newton, ta có $XT^2 = XD^2 = XB \cdot XC$.
Mà $XT^2 = XD^2 = XL \cdot XI$ nên $XL \cdot XI = XB \cdot XC$, vì vậy B, C, I, L đồng viên.
Mà $BICJ$ nội tiếp (II_a) nên $L \in (II_a)$, hay $\angle ILI_a = 90^\circ$. Mà cũng có $\angle ILD = 90^\circ$ nên I_a, D, L thẳng hàng, hay $XI \perp DI_a$. $\square$

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Một đường thẳng bất kì đi qua O cắt CA, AB tại các điểm B_0, C_0. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của B_0, C_0 lên AB, AC.

(a) Chứng minh rằng B_1C_1 đi qua trung điểm AH.

(b) Gọi B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của B_0, C_0 trên BC. X, Y tương ứng là trung điểm của B_1B_2, C_1C_2. Chứng minh rằng XY đi qua trung điểm OH.



Lời giải. (a) Gọi I là trung điểm AH, kẻ đường kính AT của (O), gọi CH cắt AB tại K.

Ta có $\triangle AKH \sim \triangle ACT$ nên $\dfrac{AH}{AT} = \dfrac{AK}{AC} = \cos BAC$. Do đó $\dfrac{AI}{AO} = \cos BAC = \dfrac{AB_1}{AB_0}$.

Từ đó $\triangle AB_1I \sim \triangle AB_0O$. Tương tự $\triangle AC_1I \sim \triangle AC_0O$.

Vậy ta có $\angle AIB_1 + \angle AIC_1 = \angle AOB_0 + \angle AOC_0 = 180^\circ$, nên B_1, I, C_1 thẳng hàng.

(b) Gọi M là trung điểm BC. Ở câu (a) ta đã chứng minh được $\triangle AIB_1 \sim \triangle AOB_0$, $\triangle AIC_1 \sim \triangle AOC_0$.

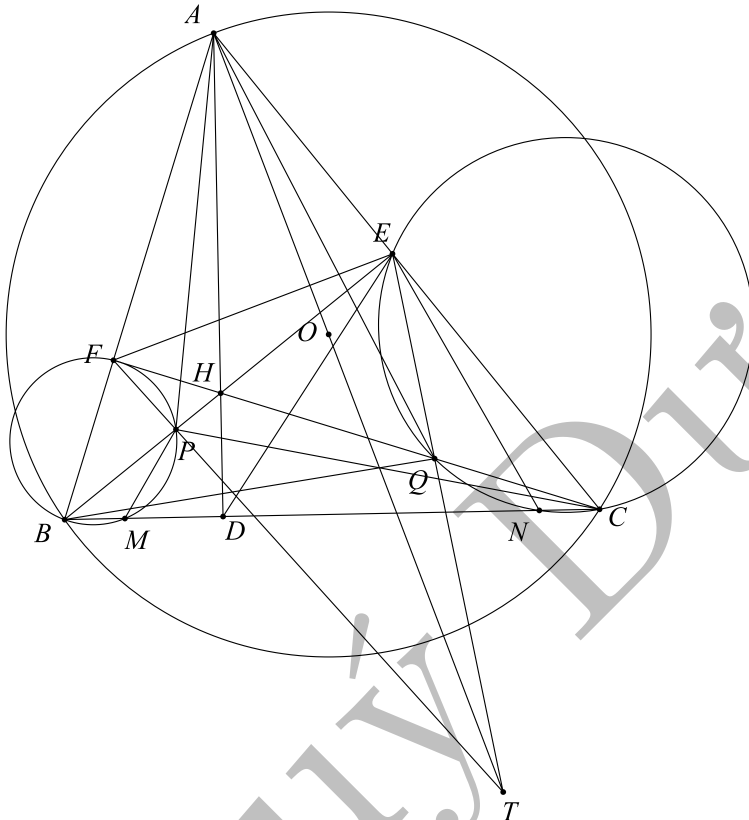
Vì thế ta có $\dfrac{IB_1}{IC_1} = \dfrac{OB_0}{OC_0} = \dfrac{MB_2}{MC_2}$.

Theo định lý ERIQ, trung điểm IM, trung điểm B_1B_2, trung điểm C_1C_2 thẳng hàng, hay XY đi qua trung điểm của IM.

Mà $IHMO$ là hình bình hành nên XY đi qua trung điểm OH.

□

Bài toán 7. Cho tam giác nhọn ABC với tâm ngoại tiếp O và hai đường cao BE, CF. Lấy các điểm M, N nằm trên cạnh BC sao cho $BM = CN$. BE cắt đường tròn (MBF) lần thứ hai tại P. CF cắt đường tròn (NCE) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng PE, QF, AO đồng quy.

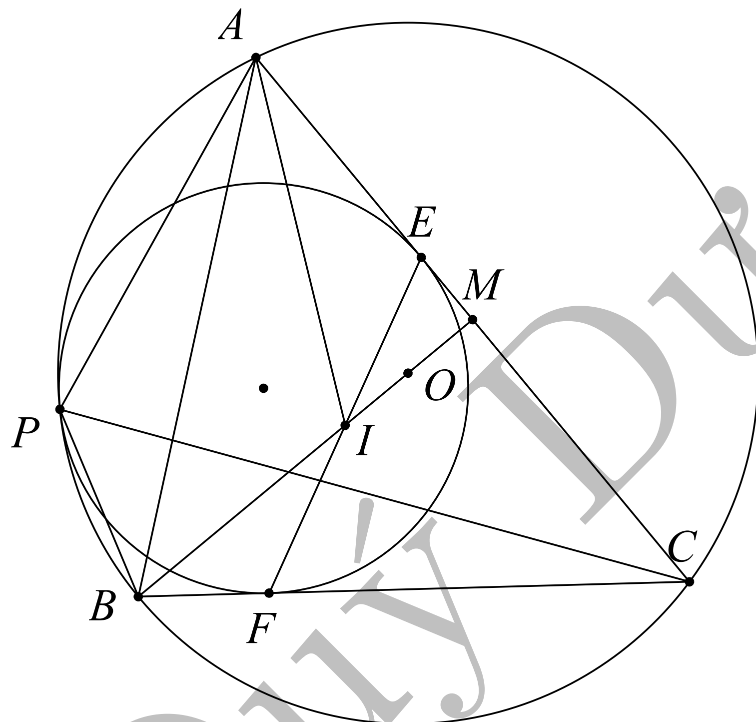


Lời giải. Trước hết ta có bổ đề quen thuộc sau.
Bổ đề. Cho tam giác ABC. 2 điểm P, Q thỏa mãn AP, AQ đẳng giác trong $\angle BAC$. Gọi BP cắt CQ tại X, BQ cắt CP tại Y. Lúc đó AX, AY đẳng giác trong $\angle BAC$.
Còn với bài toán, ta dễ thấy rằng $\triangle FPE \sim \triangle FMC$, $\triangle EQF \sim \triangle ENB$.
Vì vậy ta có $\dfrac{EF}{EP} = \dfrac{CF}{CM}$, $\dfrac{FE}{FQ} = \dfrac{BE}{BN}$. Chia 2 phân số cho nhau ta được $\dfrac{EP}{FQ} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AB}{AC}$.
Mà $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$ nên $\dfrac{AE}{EP} = \dfrac{AF}{FQ}$. Do đó $\triangle AEP \sim \triangle AFQ$, nên AP, AQ đẳng giác trong $\angle AEF$.
Gọi T là giao điểm của FP và EQ, áp dụng bổ đề trên ta được AH, AT đẳng giác trong $\angle BAC$. Mà AH, AO đẳng giác trong $\angle BAC$ nên A, O, T thẳng hàng. hay PE, QF, AO đồng quy. $\square$

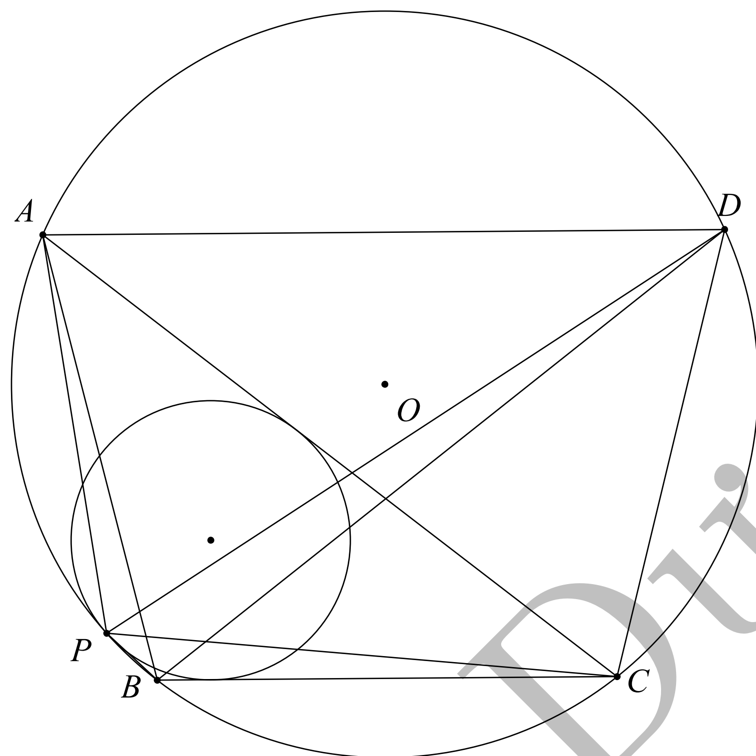
Bài toán 8. Cho hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $AB = BC = CD$. Đường tròn C-mixtilinear của tam giác ABC tiếp xúc với (O) tại P. Chứng minh rằng $PB + PD = 2PA$.

Lời giải. Để giải bài toán này, ta cần đến bổ đề sau.

Bổ đề 6.13. *Cho tam giác ABC cân tại B. Gọi P là tiếp điểm của đường tròn C-mixtilinear của tam giác ABC với (O). Khi đó* $\dfrac{2PA}{PC} = \dfrac{AC}{AB}$.



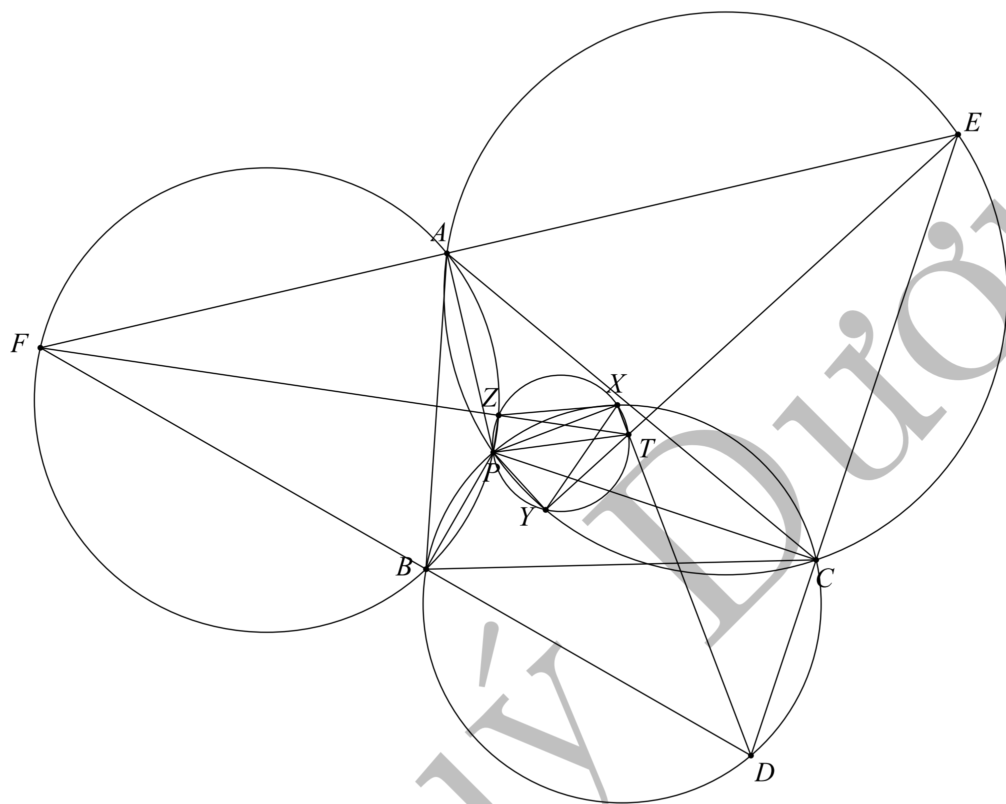
Chứng minh. Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn C-mixtilinear với AC, BC, M là trung điểm BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Theo bổ đề Sawayama, I là trung điểm EF.
Từ kết quả quen thuộc ta có PE là phân giác $\angle APC$, nên ta quy về chứng minh $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{AM}{AB}$.
Ta có $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{\sin AIE}{\sin EIC} = \sin \dfrac{B}{2}$ và $\dfrac{AM}{AB} = \sin \dfrac{B}{2}$ nên ta có điều phải chứng minh. □



Trở lại bài toán, áp dụng định lí Ptolemy ta có $PB \cdot CD + PD \cdot BC = PC \cdot BD$. Vì vậy ta có $(PB + PD) \cdot BC = PC \cdot BD$, hay $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{PB + PD}{PC}$
Mà theo bổ đề trên thì $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2PA}{PC}$ nên ta được $PB + PD = 2PA$.

$\square$

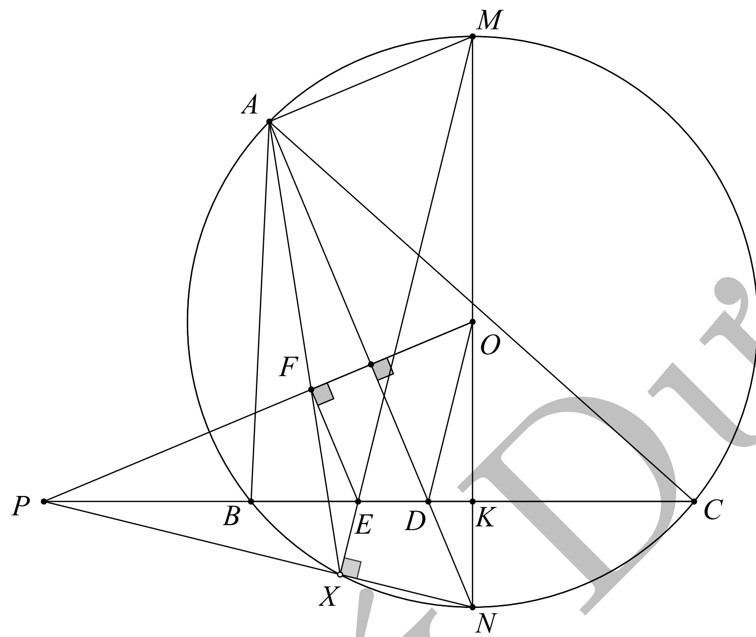
Bài toán 9. Cho P là một điểm nằm bên trong $\triangle ABC$. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của các cung BPC. CPA, APB của các đường tròn (BPC), (CPA), (APB) . Chứng minh rằng P, X, Y, Z cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Kẻ các đường kính PD, PE, PF của các đường tròn (BPC), (CPA), (APB) thì ta có F, A, E thẳng hàng, E, C, D thẳng hàng, D, B, F thẳng hàng.
Ta có DX, EY, FZ lần lượt là phân giác trong của các góc EDF, DEF, EFD nên chúng đồng quy tại tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DEF, gọi là điểm T.
Lúc này thì $\angle PXT = \angle PYT = \angle PZT = 90^\circ$ nên P, X, Y, Z cùng thuộc đường tròn đường kính PT.

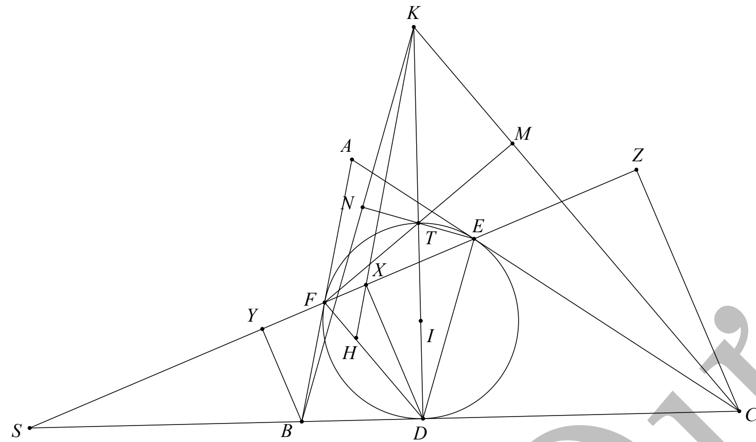
□

Bài toán 10. Cho tam giác AB nhọn với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). AD là đường phân giác trong của $\angle BAC$. M là điểm chính giữa cung lớn BC của O. Đường thẳng qua M song song với OD cắt BC tại E. Gọi F là hình chiếu của O trên đường thẳng qua E song song với AD. Chứng minh rằng O, F, B, C cùng nằm trên một đường tròn.



Lời giải. Gọi N là điểm chính giữa cung nhỏ BC, X là giao điểm thứ 2 của ME với (O), P là giao điểm của OF và BC, K là trung điểm BC.
Ta có $\angle MXN = 90°$ và $OD \parallel XM$ nên $OD \perp XN$. Mà nhận thấy rằng D là trực tâm $\triangle PON$ nên $OD \perp PN$, từ đó suy ra P, X, N thẳng hàng.
Vậy thì có $(PE, BC) = X(PE, BC) = (NM, BC) = -1$ nên theo hệ thức Maclaurin, $\overline{PF} \cdot \overline{PO} = \overline{PE} \cdot \overline{PK} = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$. Suy ra O, F, B, C đồng viên. $\square$

Bài toán 11. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC lần lượt tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi X là hình chiếu của D lên EF. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle IBC$. Chứng minh rằng H, X, K thẳng hàng.



Lời giải. Gọi S là giao điểm của EF và BC, Y, Z là hình chiếu của B, C lên EF, T là điểm đối xứng của D qua I, ET cắt KB tại N, FT cắt KC tại M.
Do AD, BE, CF đồng quy nên $(SD, BC) = -1$. Mà $\angle DXS = 90^\circ$ nên XD là phân giác $\angle BXC$. Từ đó suy ra $\triangle XFB \sim \triangle XEC$ và có được $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{XB}{XC} = \dfrac{XF}{XE}$, hay $\dfrac{XF}{XE} = \dfrac{XY}{XZ}$.
Vậy $XZ \cdot XF = XE \cdot XY$, nên X thuộc trục đẳng phương của (BE) và (CF).
Ta có $DF \perp BI$ nên $DF \parallel KM$, nên $\angle KMT = 90^\circ$. Tương tự $\angle KNT = 90^\circ$.
Từ đó có $KM \cdot KC = KT \cdot KD = KN \cdot KB$, hay K thuộc trục đẳng phương của (BE) và (CF).
Mặt khác, dễ thấy H cũng thuộc trục đẳng phương của (BE) và (CF) nên H, X, K thẳng hàng và có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 12. Cho tam giác ABC với trực tâm H và đường tròn ngoại tiếp (O, R). A' là điểm đối xứng của A qua BC. N, P là trung điểm của $A'B$, $A'C$. AN, AP cắt BC tại L, J.

(a) Chứng minh rằng (ABJ) và (ACL) cắt nhau tại một điểm trên AH. Gọi điểm đó là X.

(b) Gọi O_A là tâm của (ANP). Chứng minh rằng XO_A đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

(c) Chứng minh rằng $GO_A = \dfrac{R}{6}$.

Lời giải. (a) Gọi D là giao điểm của AH với BC thì D là trung điểm AA' nên ta được L, J lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABA'$, $\triangle ACA'$.
Từ đó thì $\dfrac{DL}{DB} = \dfrac{DJ}{DC} = \dfrac{1}{3}$ nên $DL \cdot DC = DB \cdot DJ$, hay D thuộc trục đẳng phương của (ABJ) và (ACL).
Vậy AD là trục đẳng phương của (ABJ) và (ACL), từ đó suy ra (ABJ) và (ACL) cắt nhau trên AH.

(b)

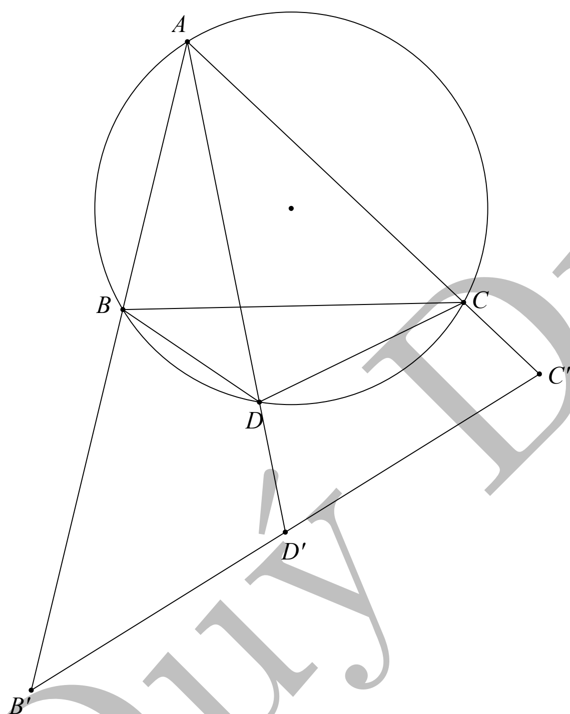
(c) Với đường tròn ω, ta kí hiệu R_ω là bán kính của ω.
Gọi M là trung điểm của BC thì ta có $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{AJ}{AP} = \dfrac{2}{3}$ nên $GJ \parallel PM \parallel A'B$. Tương tự $GL \parallel A'C$ và cũng dễ thấy $\dfrac{GJ}{A'B} = \dfrac{GL}{A'C} = \dfrac{1}{3}$.
Vậy $\triangle GJL \sim \triangle A'BC$, từ đó suy ra $R_{(GLJ)} = \dfrac{1}{3}R$.
Mặt khác, bằng phép một số phép cộng góc đơn giản, ta chứng minh được GX là đường kính của (GLJ) nên $GX = \dfrac{2}{3}R$.
Từ đó, ta quy về chứng minh $GO_A = \dfrac{1}{4}GX$.

□

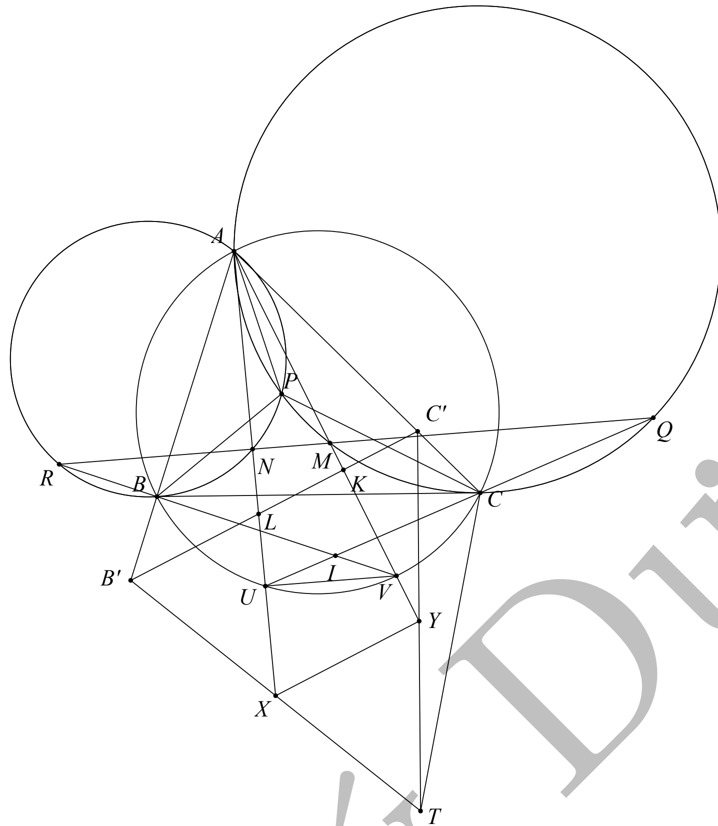
Bài toán 13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một điểm P bất kì không nằm trên cạnh AB, AC. Đường đối trung đỉnh A của tam giác PAB cắt (O) tại U. Đường đối trung đỉnh A của tam giác PAC cắt (O) tại V. Chứng minh rằng CU, BV, AP đồng quy.

Lời giải. Trước hết, ta cần đến bổ đề sau

Bổ đề 6.14. *Cho tứ giác $ABDC$ điều hòa nội tiếp đường tròn (O). Xét phép nghịch đảo tâm A phương tích k bất kì. Gọi B', C', D' lần lượt là ảnh của B, C, D qua phép nghịch đảo này. Khi đó D' là trung điểm $B'C'$.*



Chứng minh. Do A, B, D, C đồng viên nên qua phép nghịch đảo, B', D', C' thẳng hàng
Ta có $AB \cdot AB' = AD \cdot AD' = AC \cdot AC'$ nên $\triangle ABD \sim \triangle AD'B'$, $\triangle ACD \sim \triangle AD'C'$.
Từ đó $\dfrac{AD'}{D'B'} = \dfrac{BA}{BD} = \dfrac{CA}{CD}\dfrac{D'A}{D'C}$ nên $D'B = D'C$ và bổ đề được chứng minh. ☐



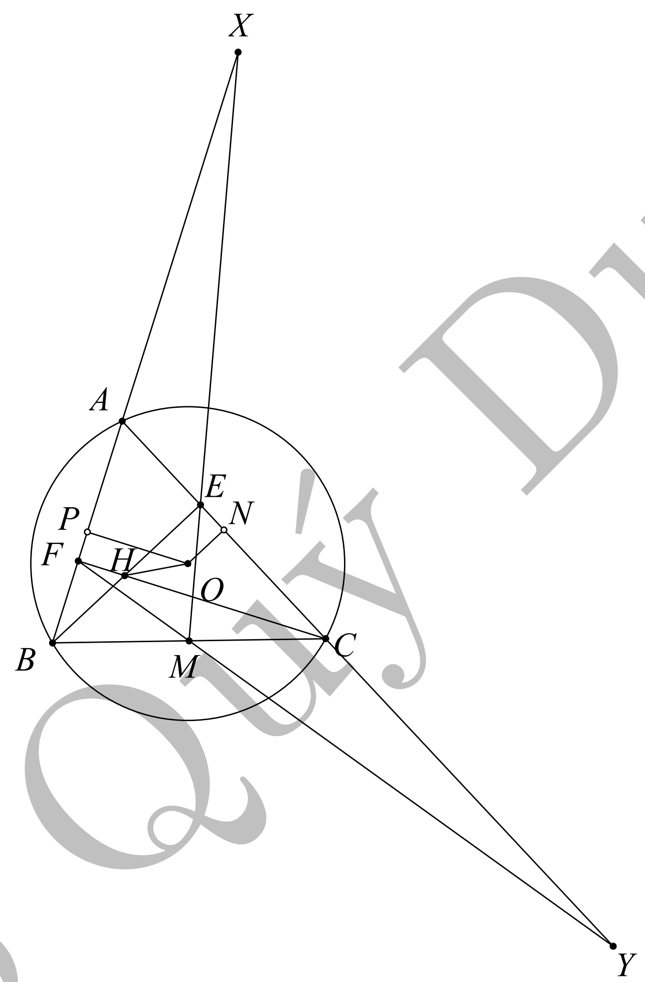
Trở lại bài toán, gọi B', C' lần lượt là điểm đối xứng của B, C qua phân giác góc BAC. Gọi I là giao điểm của BV và CU. Điều phải chứng minh tương đương với I thuộc trục đẳng phương của (APB) và (APC).
Xét phép nghịch đảo $\mathcal{F}$ tâm A, phương tích $AB \cdot AC$.
Có $\mathcal{F} : B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C', (O) \leftrightarrow B'C'$. Từ đó suy ra U biến thành L là giao điểm của AU với $B'C'$, V biến thành K là giao điểm của AV bởi $B'C'$.
Gọi T là ảnh của P qua $\mathcal{F}$. Theo bổ đề trên, N biến thành X là trung điểm $B'T$, M biến thành Y là trung điểm $C'T$.
Vậy ta có $\mathcal{F} : MN \leftrightarrow (AXY), UV \leftrightarrow (ALK)$. Mà $XY \parallel KL$ nên (AKL) tiếp xúc với (AXY), từ đó suy ra $MN \parallel UV$.
Bây giờ, gọi MN cắt (APB), (APC) tại các điểm R, Q khác N, M. Ta có
$\angle ABR + \angle ABV = \angle ANR + \angle AUV = \angle ANR + \angle ANM = 180^\circ$ nên R, B, V thẳng hàng. Tương tự U, C, D thẳng hàng.
Ta có $UVCB$ nội tiếp, $UV \parallel RQ$ nên theo định lý Reim, $BCQR$ nội tiếp. Suy ra $IC \cdot IQ = IB \cdot IR$, hay I thuộc trục đẳng phương (APB), (APC).

$\square$

Bài toán 14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và trực tâm H. Lấy các điểm E, F tương ứng nằm trên CA và AB sao cho (ABE) và (ACF) tiếp xúc với BC, EF. Gọi EF cắt BC tại D. Chứng minh rằng $AD \perp OH$.

Lời giải. Trước hết, ta đi chứng minh bổ đề sau

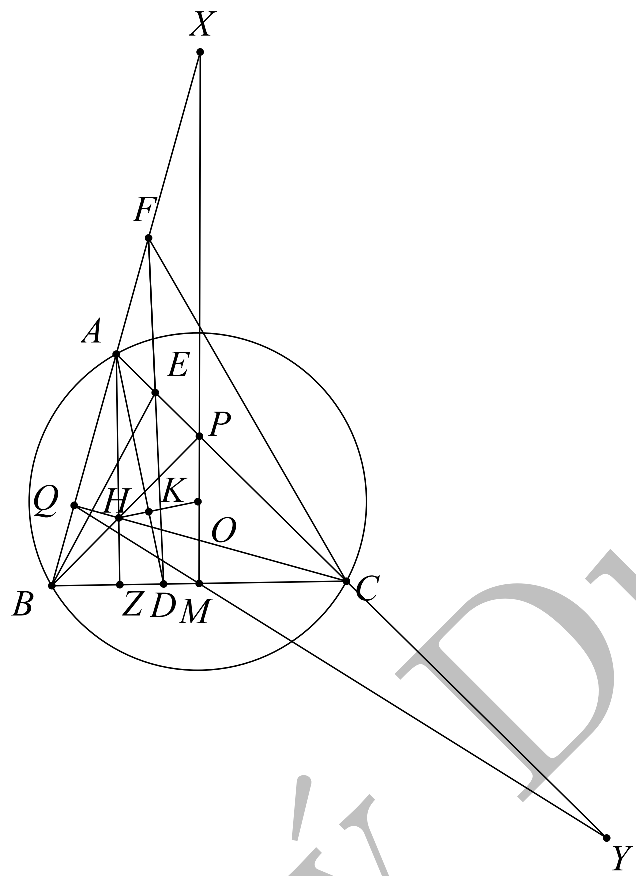
Bổ đề 6.15. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC. MF cắt AB tại X, MF cắt AC tại Y. Gọi K là hình chiếu của A trên OH. Khi đó A, K, X, Y đồng viên.*



Chứng minh. Trước hết, ta đi chứng minh $\dfrac{XP}{XF} = \dfrac{YN}{YE}$.
Ta có M, N, P, E, F cùng thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC nên theo bổ đề cát tuyến ta có

$$\frac{XP}{XF} = \frac{EP}{EF} \cdot \frac{MP}{MF} = \frac{AB}{2EF} \cdot \frac{AC}{BC}, \quad \frac{YN}{YE} = \frac{MN}{ME} \cdot \frac{FN}{FE} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{2EF}.$$

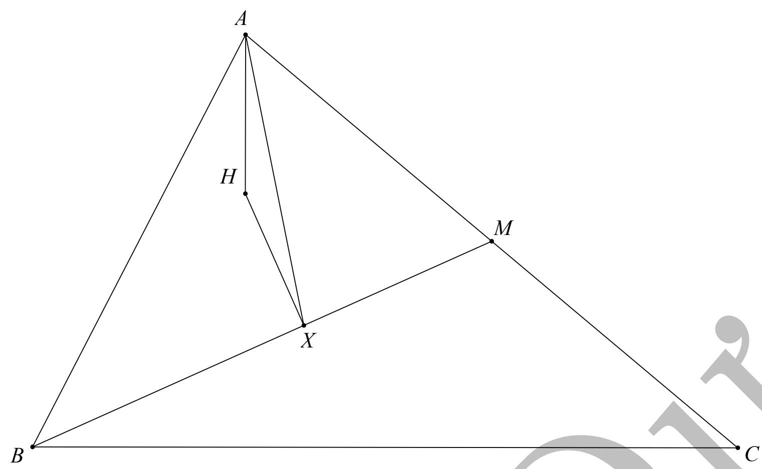
Từ đó suy ra $\dfrac{XP}{XF} = \dfrac{YN}{YE}$.
Vậy ta $\dfrac{XP \cdot XA}{XF \cdot XA} = \dfrac{YN \cdot YA}{YE \cdot YA}$, hay $\dfrac{\mathcal{P}_{X/(AO)}}{\mathcal{P}_{X/(AH)}} = \dfrac{\mathcal{P}_{Y/(AO)}}{\mathcal{P}_{Y/(AH)}}$.
Suy ra X, Y thuộc một đường tròn đồng trục với (AH) với (AO). Mà (AH) cắt (AO) tại K nên A, K, X, Y đồng viên. $\square$



Trở lại bài toán, định nghĩa lại D là giao điểm của đường thẳng qua A vuông góc với OH với BC. Ta chứng minh D, E, F thẳng hàng.
Gọi K là giao điểm của AD với OH, kẻ đường cao AZ, BP, CQ cắt nhau tại H của tam giác ABC. Đặt $AQ \cdot AB = AE \cdot AC = AH \cdot AZ = AK \cdot AD = k$.
Xét phép nghịch đảo $\mathcal{F}$ tâm A phương tích k. Ta có $\mathcal{F} : (AH) \leftrightarrow BC$ và do MQ tiếp xúc với (AH) nên MQ biến thành một đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với BC, hay MQ biến thành (AEB).
Vậy $\mathcal{F} : E = (AEB) \cap AC \leftrightarrow MQ \cap AC = Y$. Tương tự $\mathcal{F} : F \leftrightarrow X$. Mà $K \leftrightarrow D$ và A, K, X, Y đồng viên nên D, E, F thẳng hàng và ta có điều phải chứng minh.

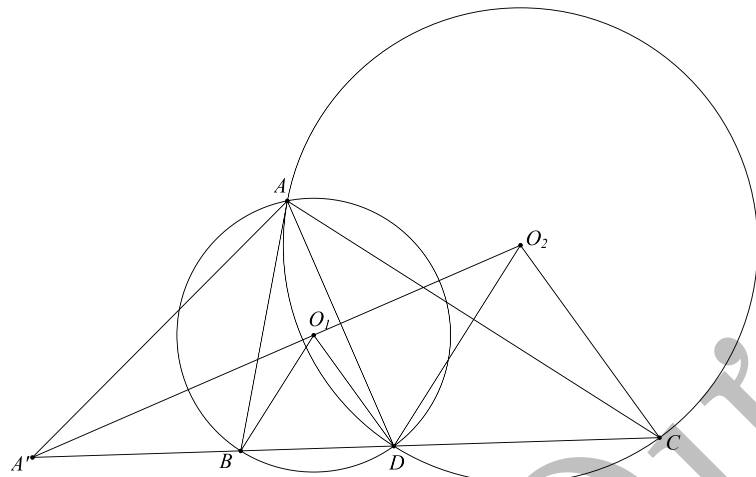
$\square$

Bài toán 15. Trong tam giác ABC, biết rằng đường phân giác trong của $\angle BAC$, đường $B-$ trung tuyến và đường trung trực của AB đồng quy tại X. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $\angle BXH = 90°$.



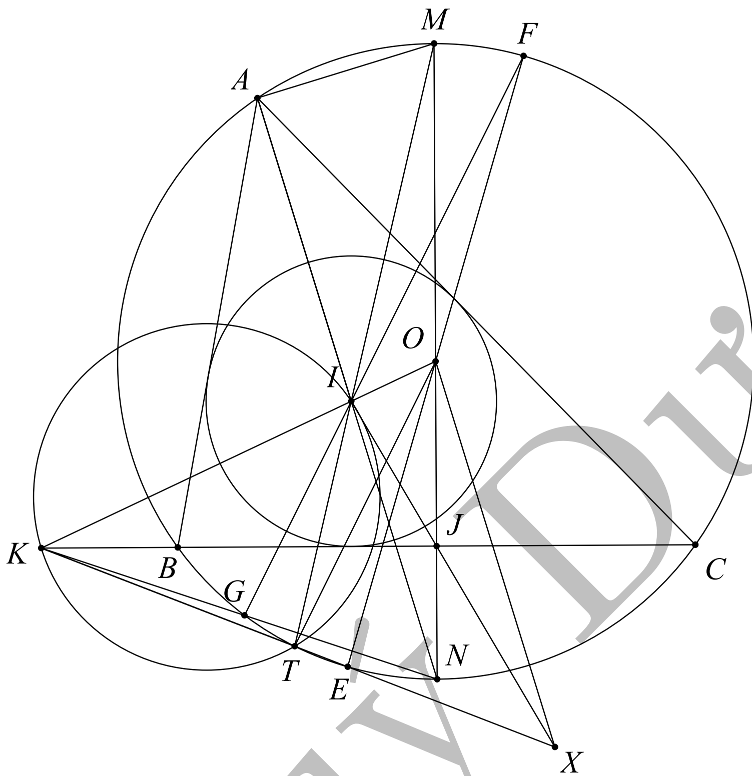
Lời giải. Ta có $\angle XAM = \angle XAB = \angle XBA$ nên $MC^2 = MA^2 = MX \cdot MB$. Từ đây suy ra X là điểm $B-$ Humpty của tam giác ABC, và theo tính chất quen thuộc, X là hình chiếu của H lên BM, hay $\angle BXH = 90°$. □

Bài toán 16. Cho tam giác ABC với đường phân giác AD. Hai đường tiếp tuyến chung của (BAD) và (CAD) cắt nhau tại điểm A'. Các điểm B', C' dựng tương tự. Chúng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.



Lời giải. Định nghĩa lại A' là giao điểm của tiếp tuyến tại tại A của ABC với BC. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của (ABD) và (ACD).
Ta có tính chất quen thuộc là $A'D = A'A$ nên A', O_1, O_2 thẳng hàng.
Có $\angle DAB = \angle DAC$ nên $\angle BO_1D = \angle CO_2D$. Suy ra $\triangle BO_1D \sim \triangle CO_2D$ vì 2 tam giác này cân. Vậy ta có $\angle O_1DB = \angle O2CD$, nên $O_1D \parallel O_2C$.
Từ đó ta có $\dfrac{A'O_1}{A'O_2} = \dfrac{O_1D}{O_2C}$, hay A' là tâm vị tự ngoài của (BAD) và (CAD).
Vậy với điểm A đã cho, ta đã chứng minh được A' là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đường tròn (ABC) với BC.
Chứng minh tương tự và áp dụng định lý Pascal cho bộ điểm $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ ta có A', B', C' thẳng hàng. $\square$

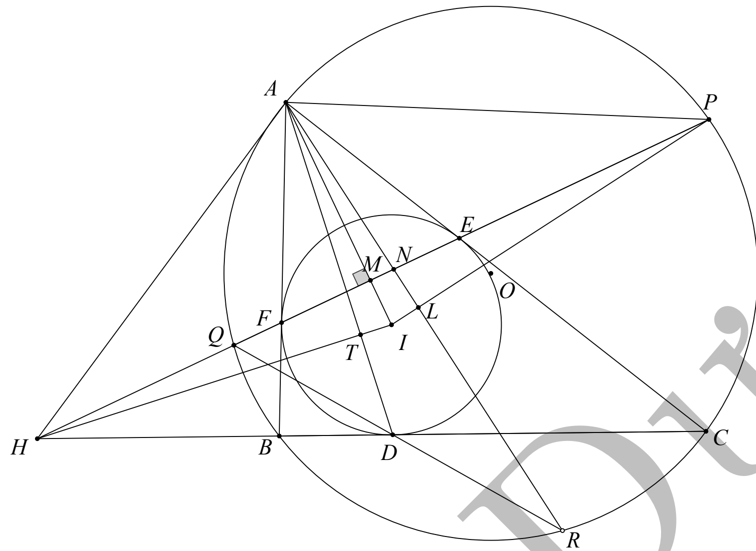
Bài toán 17. Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và tâm nội tiếp I. OI cắt BC tại K. Đường tròn $A-$ mixtilinear của tam giác ABC tiếp xúc với (O) tại T. Gọi ℓ là đường tiếp tuyến tại K của đường tròn (ITK). Chứng minh rằng $\ell \parallel AI$.



Chứng minh. Điều cần chứng minh tương đương với $\angle KTI + \angle AIK = 180°$.
Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa cung BC chứa A và không chứa A của (O), KN cắt lại (O) tại G, GI cắt lại (O) tại F, kẻ đường kính FE của (O).

Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm E, G, M, N, T, F, ta thu được E, T, K thẳng hàng.
Vì $NI^2 = NG.NK$ nên $\angle NIK = \angle NGF$, do đó ta có $\angle XIO = \angle NIO - \angle NIJ = \angle NGF - \angle NMT = \angle NEO - \angle NMT = \angle NEO - 90° + \angle TNM = 90° - \angle NME - 90° + \angle TNM = \angle TNM - \angle NME = \angle TNM + \angle TMN - \angle TME = 90° - \angle TME = \angle OTE = \angle OTX$. Vậy O, I, T, X đồng viên.
Từ đó suy ra $\angle NIJ = \angle NMI = \angle OTI = \angle OXI$, hay $OX \parallel IN$.
Vậy ta có $\angle KTI + \angle AIK = \angle OIX + \angle OIN = 180°$, hay có điều phải chứng minh. □

Bài toán 18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. EF cắt (O) tại P, Q. QD cắt (O) tại điểm thứ hai là R. Chứng minh rằng nếu $\angle BAR = \angle CAD$ thì $AP^2 = AB \cdot AC$.

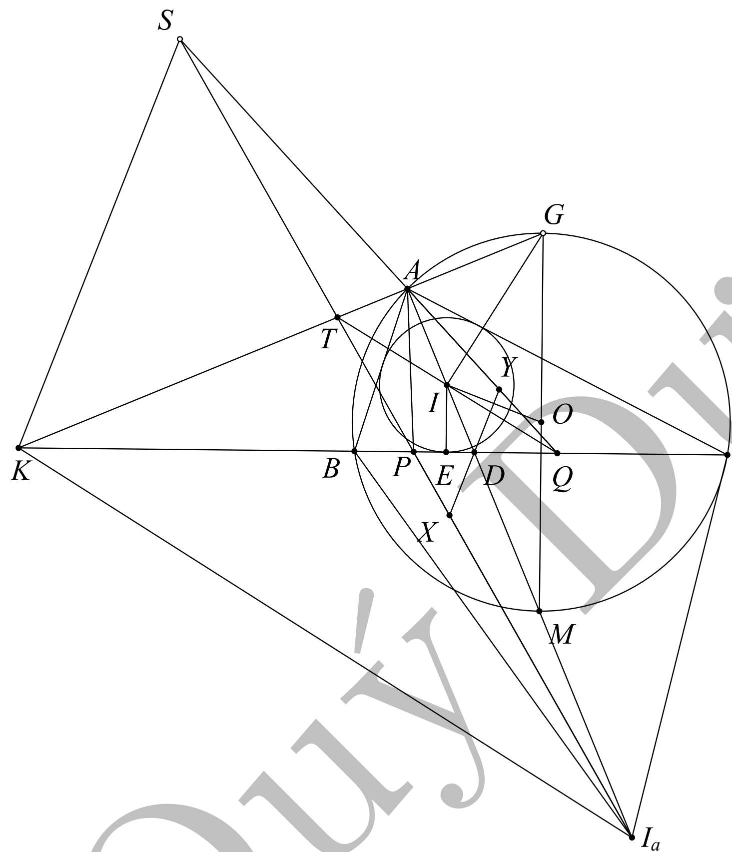


Lời giải. Gọi EF cắt BC tại H thì ta có $(PR, BC) = Q(PR, BC) = (HD, BC) = -1$ nên $PBRC$ là tứ giác điều hòa.
Xét phép nghịch đảo đối xứng $\mathcal{F}$ là hợp của phép nghịch đảo tâm A, phương tích $AB \cdot AC$ và phép lấy đối xứng qua phân giác góc BAC

$$\mathcal{F} : B \leftrightarrow C, D \leftrightarrow R, P \leftrightarrow P'.$$

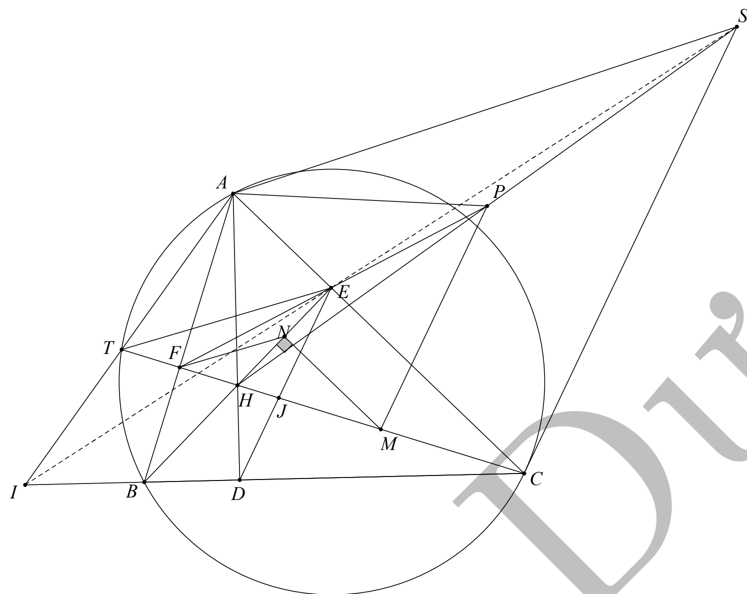
Do P, R, B, C đồng viên nên P', B, C, D thẳng hàng. Mà phép nghịch đảo bảo toàn tỉ số kép nên $(P'D, BC) = (PR, CB) = -1$, hay P' trùng H.
Gọi M là giao điểm của AI và EF, N là giao điểm của AR và EF, L là giao điểm của AR và IP, T là giao điểm của AD và IH.
Ta có $-1 = (PR, BC) = A(PR, BC) = (PN, FE)$ nên theo hệ thức Newton, $MA \cdot MI = ME^2 = MF^2 = MN \cdot MP$. Từ đó suy ra N là trực tâm $\triangle AIP$. Vậy ta có $IE^2 = IM \cdot IA = IL \cdot IP$.
Mặt khác, AD là đường đối cực của H đối với (I) nên $HI \perp AD$, từ đó ta cũng có $IE^2 = IM \cdot IA = IT \cdot IH$.
Mà AD, AR đẳng giác trong $\angle BAC$ nên $IT = IL$, từ đó suy ra $IH = IP$.
Mà $AI \perp HP$ nên $AH = AP$. Và theo chứng minh phía trên thì $\mathcal{F} : P \leftrightarrow H$ nên $AP \cdot AH = AB \cdot AC$, hay $AP^2 = AB \cdot AC$. □

Bài toán 19. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Lấy 2 điểm P, Q trên BC sao cho AP, AQ đẳng giác trong $\angle BAC$. Kẻ đường phân giác AD của $\angle BAC$, $D \in BC$. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt I_aP và AQ tại X, Y. Chứng minh rằng $DX = DY$.



Lời giải. Gọi G là điểm chính giữa cung BAC, S là giao điểm của AQ và I_aP, K là giao điểm của AG với BC, T là giao điểm của AK với SX, M là điểm chính giữa cung BC không chứa A, E là tiếp điểm của (I) với BC.
Có $AB \cdot AC = AI \cdot AI_a = AK \cdot AG$ nên I là trực tâm $\triangle KGI_a$, suy ra $IG \perp KI_a$.
Vậy có $IE \perp KB$, $IG \perp KI_a$, $IA \perp KA$ và $I(EG, AO) = I(EG, MO) = -1 = (PI_a, TS) = K(BI_a, AS)$ nên suy ra $IO \perp KS$, hay $KS \parallel XY$.
Mà $(KD, PQ) = -1$ nên $S(KD, PQ) = -1$, hay $S(KD, XY) = -1$. Từ đây suy ra D là trung điểm XY. $\square$

Bài toán 20. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với 3 đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. CH cắt (O) tại T. AT cắt BC tại I. M, N là trung điểm CH, EH. Đường thẳng qua M song song với DE cắt EF tại P. Chứng minh rằng $PN \parallel EI$.

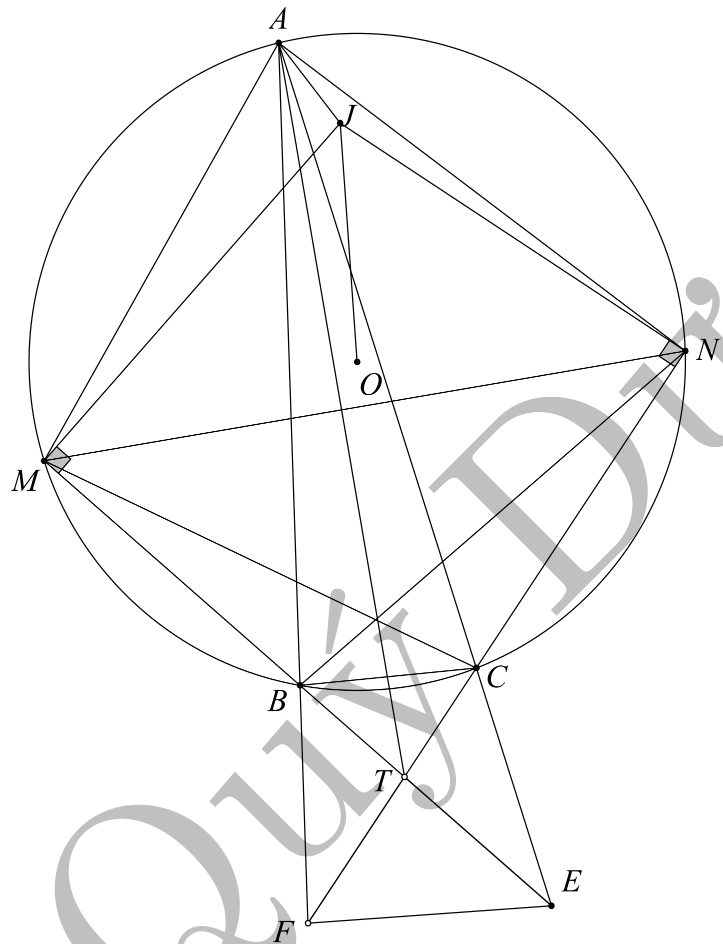


Lời giải. Gọi S là điểm đối xứng của H qua P, J là giao điểm của CH và DE. Lúc này ta có $NP \parallel ES$ nên ta quy về chứng minh I, E, S thẳng hàng, hay là đi chứng minh $\dfrac{ID}{IC} = \dfrac{ED}{SC}$.
Bằng phép cộng góc đơn giản ta chứng minh được $\angle IAD = 2\angle DAB$. Sử dụng định lý sin và công thức lượng giác $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, điều cần chứng minh tương đương

$$
\begin{aligned}
& \frac{ED}{2PM} = \frac{ID}{IC} \\
\iff & \frac{ED}{EJ} \cdot \frac{EJ}{EM} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ID}{IC} \\
\iff & \frac{ED}{EJ} \cdot \frac{FJ}{FM} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ID}{IC} \\
\iff & \frac{FD}{FJ} \cdot \frac{\sin EFD}{\sin EFJ} \cdot \frac{EJ}{EM} \cdot \frac{\sin FEJ}{\sin FEM} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ID}{IC} \\
\iff & \frac{\sin EFD}{\sin EFJ} \cdot \frac{\sin FEJ}{\sin FEM} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ID}{IC} \\
\iff & \frac{\sin 2DAC}{\sin DAC} \cdot \frac{\sin 2DAB}{\sin FEM} \cdot \frac{1}{2} = \frac{IC}{ID} \\
\iff & \cos DAC \cdot \frac{\sin IAD}{\sin IAC} = \frac{IC}{ID}.
\end{aligned}
$$

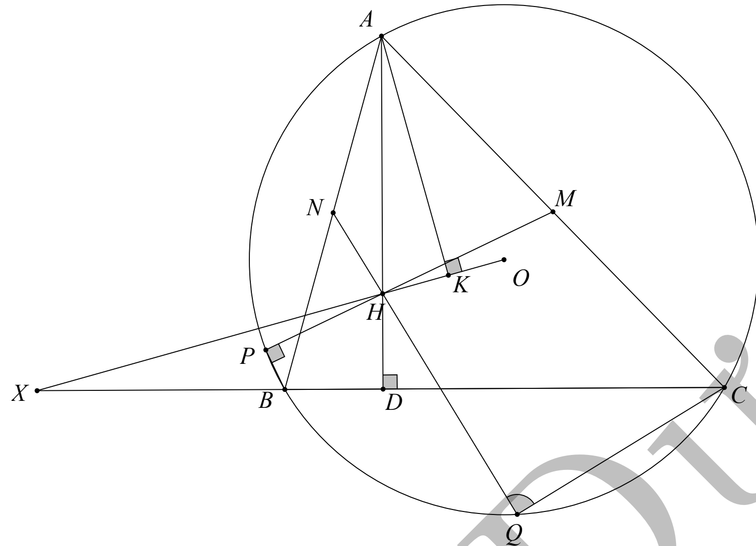
Điều này rõ ràng đúng do ta có $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{ID}{IC} \cdot \dfrac{\sin IAC}{\sin IAD}$ nên có điều phải chứng minh. ☐

Bài toán 21. Cho tam giác ABC không cân, nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác ngoài của các góc B, C lần lượt cắt CA, AB tại E, F và cắt (O) tại các điểm M, N khác B, C. Đường thẳng qua M vuông góc với BM cắt đường thẳng qua N vuông góc với CN tại J. Chứng minh rằng $OJ \perp EF$.



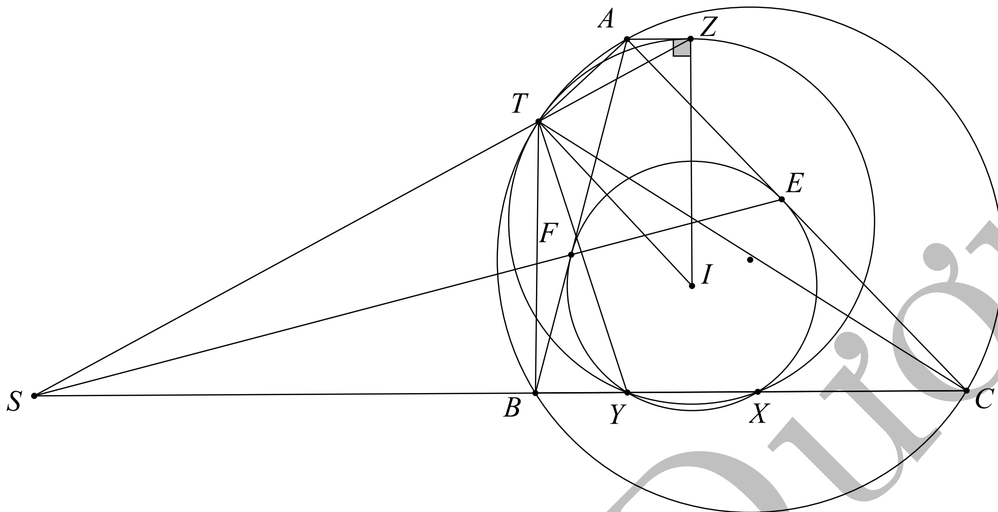
Chứng minh. Gọi T là giao điểm của BM với CN thì có T là tâm bàng tiếp góc A.
Bằng vài phép cộng góc ta chứng minh được $AT \perp MN$.
Từ đó theo định lý 4 điểm, ta được $AM^2 - AN^2 = TM^2 - TN^2$. Vậy nên có $AM^2 - AN^2 = JN^2 - JM^2 = JF^2 - FN^2 - JE^2 + EM^2$.
Mà $AM^2 = MB \cdot ME, AN^2 = NC \cdot NF$ nên ta có $ME^2 - MB.ME - (NF^2 - NC \cdot NF) = JE^2 - JF^2$, hay $EM \cdot EB - FN \cdot FC = JE^2 - JF^2$. Từ đó $OE^2 - OF^2 = JE^2 - JF^2$ và theo định lý 4 điểm ta có điều phải chứng minh. ☐

Bài toán 22. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O) với trực tâm H. AH cắt BC tại D. OH cắt BC tại X. Các đường tròn (BDH) và (CDH) cắt (O) tại P và Q. Chứng minh rằng P, D, Q, X cùng thuộc một đường tròn.



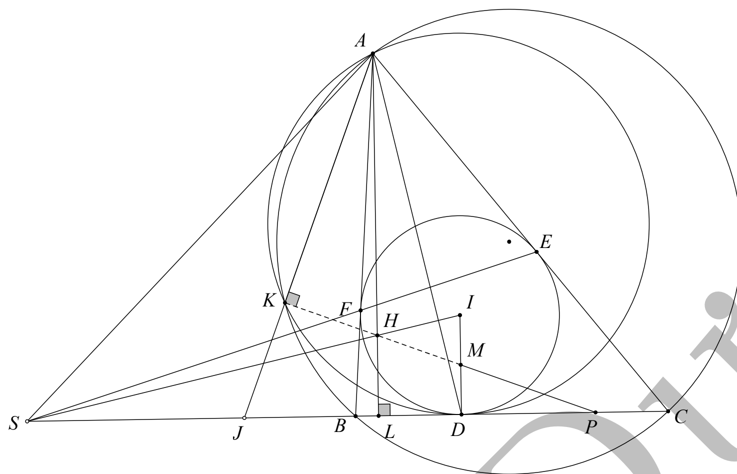
Lời giải. Do $\angle HQC = \angle HPB = 90^\circ$ nên ta có các kết quả quen thuộc là HQ đi qua trung điểm N của AB, HP đi qua trung điểm M của AC. Đồng thời $\overline{HP}\cdot\overline{HM} = \overline{HQ}\cdot\overline{HN} = \dfrac{1}{2}\mathcal{P}_{H/(O)} = \overline{HA}\cdot\overline{HD} = k$.
Gọi K là hình chiếu của A lên OH. Phép nghịch đảo tâm H phương tích K lần lượt biến X, P, D, Q thành K, M, A, N. Mà K, M, A, N cùng thuộc (AO) nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 23. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Dựng một đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC và cắt BC tại X, Y. Đường thẳng qua I vuông góc với Bc cắt đường thẳng qua A song song với BC tại Z. Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc (O).



Lời giải. Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với AC, AB, S là giao điểm của EF và BC. T là điểm Miquel của tứ giác $BFEC.AT$.
Ta có A, Z, E, F cùng thuộc (AI) và $STFB$ nội tiếp nên $\angle STF + \angle ZTF = \angle ABC + \angle ZAB = 180°$, nên S, T, Z thẳng hàng.
Từ đó $SY \cdot SX = SE \cdot SF = ST \cdot SZ$, nên X, Y, Z, T đồng viên.
Lại có $\triangle TFB \sim \triangle TEC$ nên $\dfrac{TB^2}{TC^2} = \dfrac{BF^2}{CE^2} = \dfrac{BY \cdot BX}{CX \cdot CY}$. Vậy theo định lý Steiner, TX, TY đẳng giác trong $\angle BTC$, từ đó suy ra (TXY) tiếp xúc với (TBC), hay (XYZ) tiếp xúc (O). □

Bài toán 24. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc BC tại D. Một đường tròn đi qua A, D và tiếp xúc với BC cắt (O) tại K khác A. Gọi M là trung điểm của ID. Chứng minh rằng $\angle AKM = 90°$.



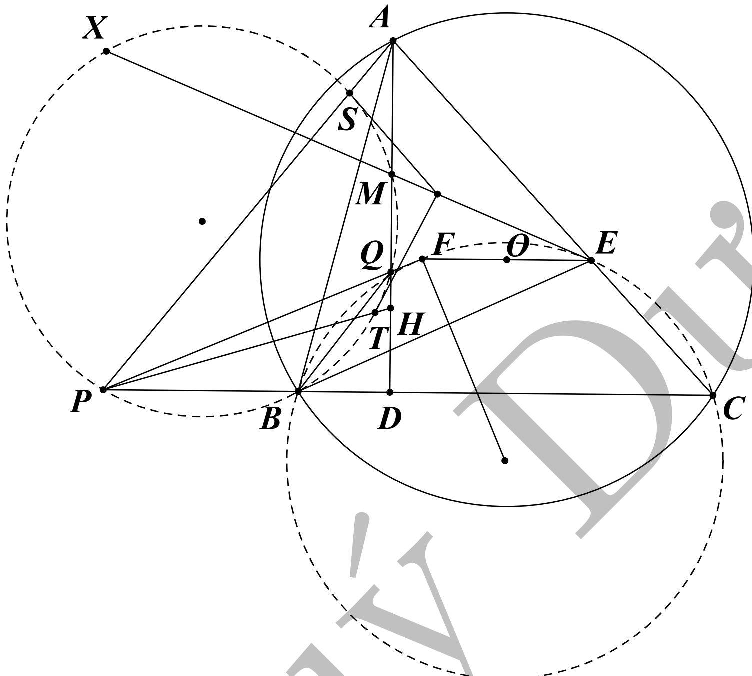
Lời giải. Trước hết ta có kết quả sau: Cho tam giác ABC với trực tâm H là K là điểm A-Humpty. HK cắt BC tại X. AH cắt BC tại D thì $(BC, DX) = -1$.
Để chứng minh kết quả này, ta chỉ cần để ý rằng X sẽ nằm trên đường nối 2 chân đường cao hạ từ B và C.

Trở lại bài toán, gọi E, F là tiếp điểm của (I) với BC, EF cắt BC tại S, AK cắt BC tại J, H là trực tâm $\triangle ADS$, HM cắt BC tại P.
Xét cực và đối cực ứng với đường tròn (I). Ta có S thuộc BC nên S thuộc đường đối cực của D, S thuộc EF nên S thuộc đường đối cực của A. Từ đó theo định lý La Hire, AD là đường đối cực của S, hay ta được $SI \perp AD$, và suy ra H, I, S thẳng hàng.
Lại có (AKD) tiếp xúc BC nên $JD^2 = JK \cdot JA = JB \cdot JC$. Mà $(SD, BC) = -1$ nên theo hệ thức Newton, J là trung điểm SD. Vậy ta có $JS^2 = JD^2 = JK \cdot JA$ và theo tính chất quen thuộc, K là điểm A-Humpty của $\triangle ADS$.
Do $HL \parallel ID$ nên $H(LM, ID)$. Chiếu lên BC ta được $(SD, LP) = -1$. Từ đó theo kết quả nêu trên, P là giao điểm của đường HK với BC. Vậy nên H, K, M, P thẳng hàng và ta được $\angle AKM = 90°$. □

Bài toán 25. Cho tam giác ABC nhọn có H và O lần lượt là trực tâm và đường tròn ngoại tiếp. Điểm E thuộc cạnh AC sao cho $OE \parallel BC$. OE cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle EBC$ tại F. Tiếp tuyến tại F của (EBC) cắt BC, AH tại P, Q.

a) Chứng minh đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác BPQ đi qua trung điểm M của AH.

b) PA, PH cắt (K) tại S, T. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến của S, T cắt nhau tại một điểm trên ME.



Lời giải. a) Bằng một vài phép cộng góc đơn giản, ta chứng minh được $\triangle CEO \sim \triangle AHB$.
Mà M là trung điểm AD và O là trung điểm EF nên ta cũng có $\triangle MHB \sim \triangle CEF$, từ đây được $\angle BMH = \angle FCE$.
Mặt khác, do PF là tiếp tuyến của (EBC) nên $\angle PFB = \angle FCB$, mà $EF \parallel BC$ hay tứ giác $BFEC$ là hình thang cân nên $\angle PFB = \angle FBE$.
Lại có $\angle FBE + \angle EBC = \angle FPB + \angle PFB$ nên $\angle QPB = \angle FCE = \angle BMH$ hay tứ giác $BQMP$ nội tiếp.

b) Kéo dài ME cắt (K) tại X, ta được $\angle PXM = \angle MBC$.
Theo bổ đề ta có ME vuông góc với MB, mà AD vuông góc PD và $\angle QPD = \angle BMD$ nên ta được $\angle DME = \angle PQD = \angle PXM$ hay $PX \parallel QA$. Mặt khác, do M là trung điểm AH nên $P(XM, AH) = (XM, ST) = -1$ hay tứ giác $XSMT$ là tứ giác điều hòa. Vậy 2 tiếp tuyến tại S, T cắt nhau trên ME.

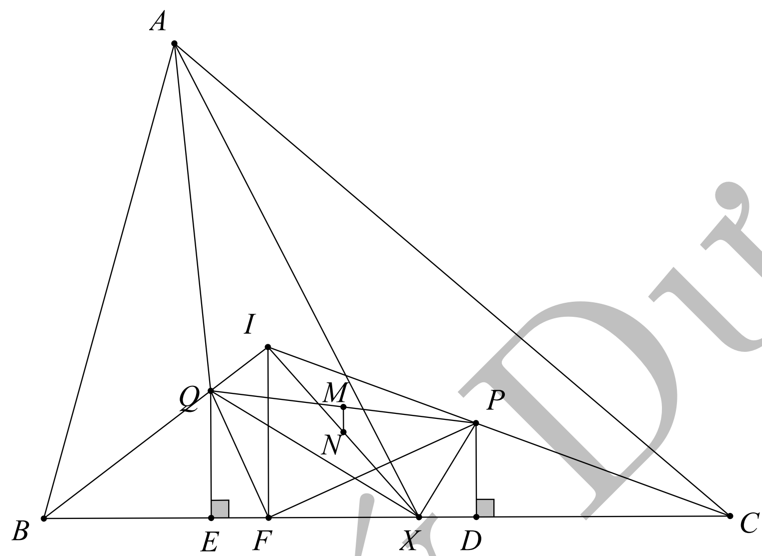
□

Bài toán 26. Cho tam giác ABC và một điểm P bất kì nằm trong tam giác. Một đường thẳng bất kì đi qua P cắt (BPC), (CPA), (APB) lần lượt tại D, E, F. Gọi ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 lần lượt là đường thẳng qua D song song với BC, đường thẳng qua E song song với CA, đường thẳng qua F song song với AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi ba đường ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tiếp xúc với (ABC).

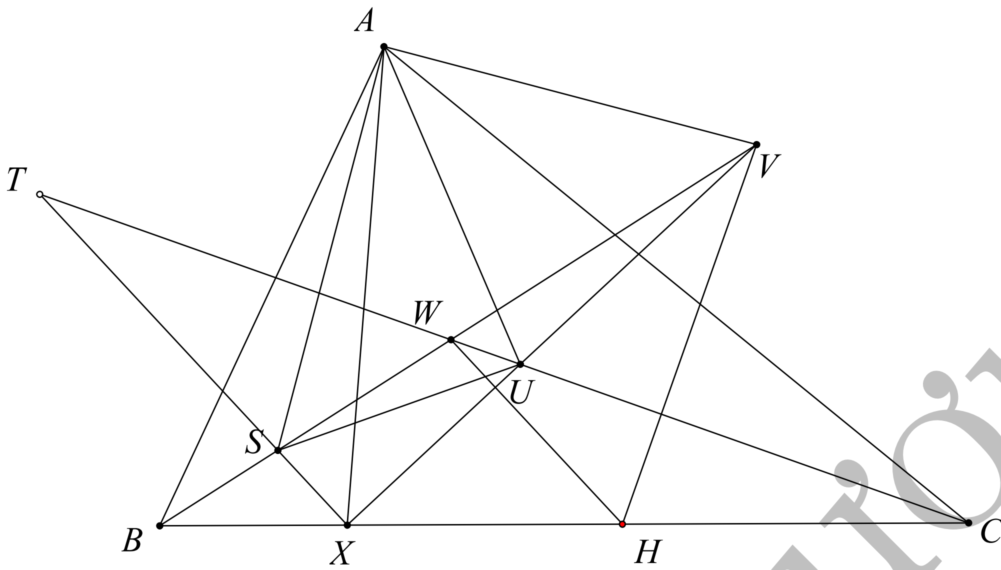
Bài toán 27. Cho tam giác ABC với điểm X nằm trên cạnh BC. Gọi U là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AXC, W là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, V là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác ABX. Chứng minh rằng trực tâm $\triangle UVW$ nằm trên BC.

Lời giải. Để giải bài toán này, ta đi chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 6.16. *Cho tam giác ABC với điểm X trên cạnh BC. Gọi I, P, Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, AXC, AXB. Lúc đó đường nối trung điểm IX, trung điểm PQ vuông góc với BC.*



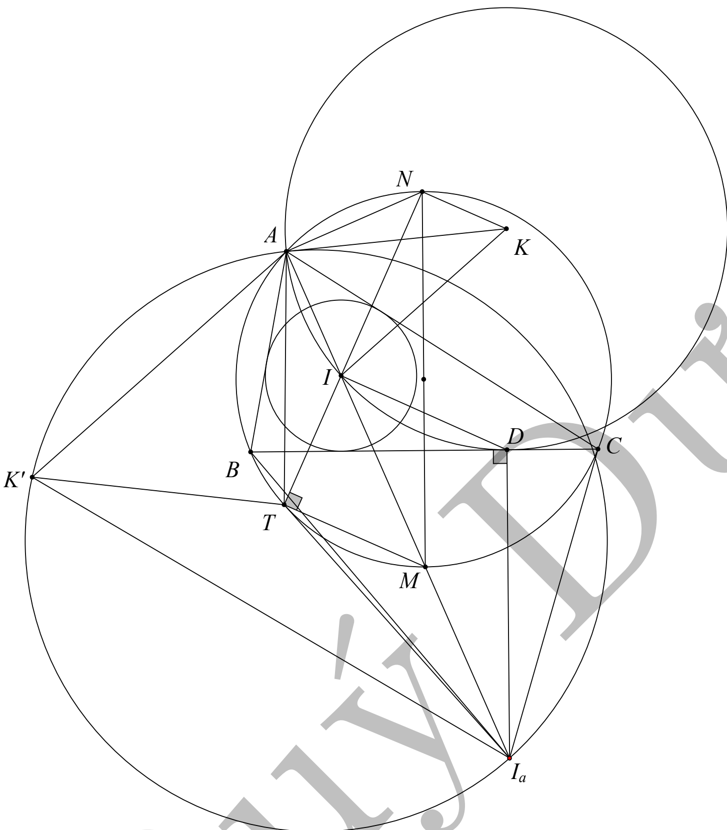
Chứng minh. Gọi D, E, F là hình chiếu của P, Q, I lên BC, M, N là trung điểm PQ, IX.
Ta có $XD = \dfrac{XA + XC - AC}{2}$, $EF = BF - BE = \dfrac{BA + BC - AC}{2} - \dfrac{BA + BX - AX}{2} = \dfrac{XA + XC - AC}{2} = XD$, từ đó suy ra $FE \cdot FD = XD \cdot XE$.
Lại có $\angle PXQ = 90^\circ$ nên $\triangle PXD \sim \triangle XQE$ nên $QE \cdot PD = XE \cdot XD = FE \cdot FD$. Vậy nên $\triangle QEF \sim \triangle FDP$, và có $\angle QFP = 90^\circ$.
Vậy ta có $QFXP$ nội tiếp (QP), suy ra $MF = MX$, mà $NF = NX$ nên ta có $MN \perp FX$, hay $MN \perp BC$. $\square$



Trở lại bài toán, gọi S là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AXB, T là giao điểm của CU và SX.
Trong tứ giác toàn phần $XUWS.VT$ ta có tính chất là các trực tâm của các tam giác VUW, VSX, TWS, TUX thẳng hàng.
Mà $\angle VXT = 90^\circ$ nên trực tâm tam giác VSX và trực tâm tam giác TUX là X. Vì thế nên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần trên sẽ là đường thẳng qua X vuông góc với đường thẳng Gauss của tứ giác đó, và theo bổ đề trên, đường thẳng đó chính là BC, hay ta được BC là đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần $UWSX.TV$.
Từ đó suy ra trực tâm H của $\triangle UVW$ nằm trên BC, điều phải chứng minh.

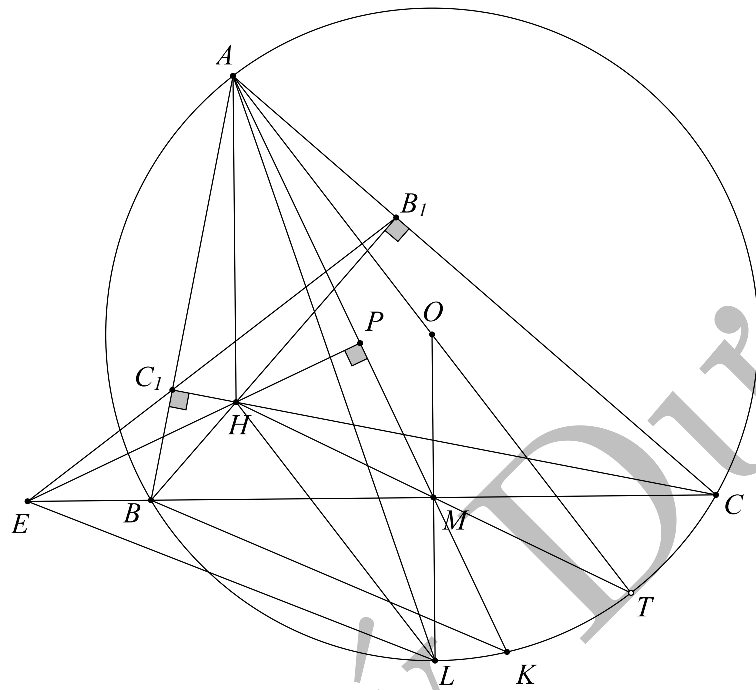
$\square$

Bài toán 28. Cho $\triangle ABC$ với tâm nội tiếp I và tâm đường tròn bàng tiếp (I_a). (I_a) tiếp xúc với BC tại D. Gọi N là điểm chính giữa cung BAC của (O). NI cắt (O) tại T. Gọi K là tâm (AID). Chứng minh rằng $TI_a \perp KI$.



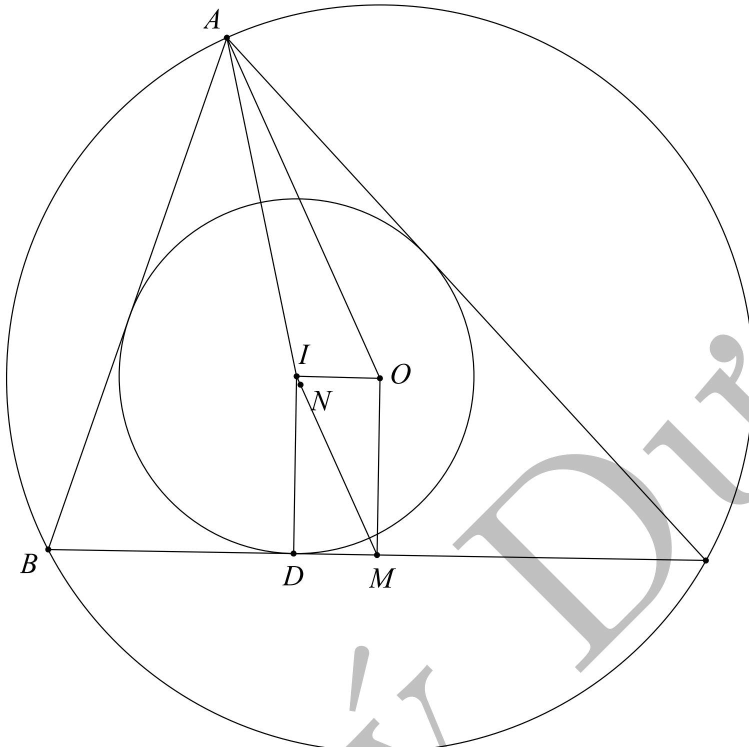
Lời giải. Gọi K' là điểm đối xứng của A qua I_aT. Từ tính chất quen thuộc ta có T là tiếp điểm của đường tròn $A-$mixtilinear với (ABC).
Xét phép nghịch đảo $\mathcal{F}$ là hợp của phép nghịch đảo tâm A phương tích $AB \cdot AC$ và phép đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.
Ta có $\mathcal{F} : T \leftrightarrow D, I \leftrightarrow I_a$ nên $(AID) \leftrightarrow I_aT$. Từ đây suy ra $K \leftrightarrow K'$.
Lúc này ta có $\angle KAI_a = \angle K'AI_a = \angle AK'I_a$ nên KA tiếp xúc $(AK'I_a)$, hay $(AK'I_a)$ trực giao với (AID).
Mà $(AK'I_a) \leftrightarrow KI$, $(AID) \leftrightarrow I_aT$ nên $KI \perp I_aT$ và ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 29. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) với $\angle A = 60^\circ$ và hai đường cao BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Trung tuyến AM của ABC cắt lại (O) tại K. Gọi L là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O). B_1C_1 cắt BC tại E. Chứng minh rằng $\angle EHL = \angle ABK$.



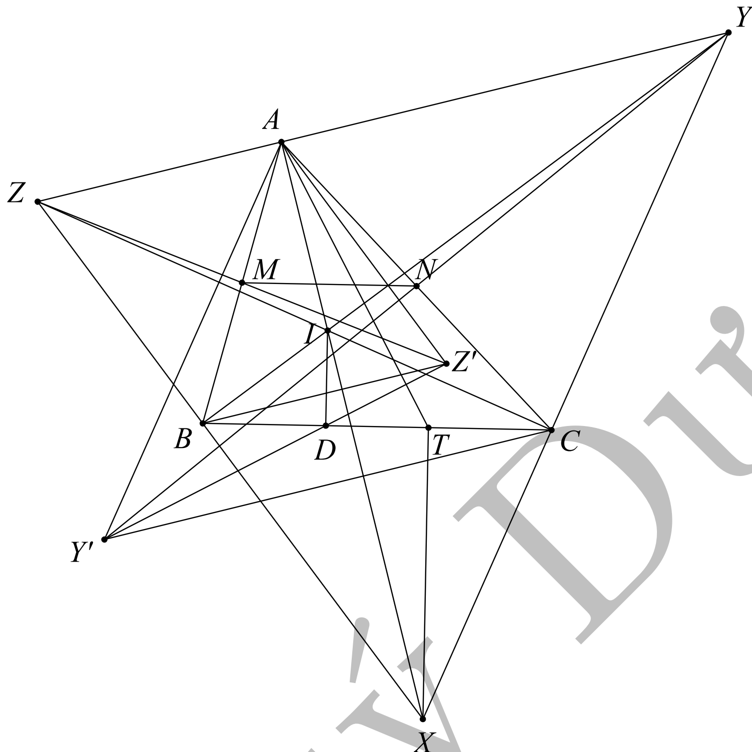
Lời giải. Gọi EH cắt AM tại P, kẻ đường kính AT của (O).
Ta có kết quả quen thuộc P là điểm A-Humpty nên có $MB^2 = MC^2 = MK \cdot MA = MP \cdot MA$. Suy ra $MK = MP$.
Mà $\angle BAC = 90^\circ$ nên $MO = ML$ và $MH = MT$.
Từ đó suy ra $\angle EHL = 180^\circ - \angle PHL = 180^\circ - \angle OTK = \angle ABK$ và có điều phải chứng minh. □

Bài toán 30. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và ngoại tiếp (I). Gọi M là trung điểm BC. Giả sử $OI \parallel BC$. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler nằm trên đường thẳng MI.



Lời giải. Gọi R là bán kính của (O) và r là bán kính của (I), D là hình chiếu của I lên BC.
Ta có NM là bán kính của đường tròn Euler lên $NM = \dfrac{R}{2}$.
Theo định lý Feuerbach, (I) tiếp xúc với đường tròn Euler của ABC nên ta có $NI = \dfrac{R}{2} - r$.
Lại có $OIDM$ là hình chữ nhật nên theo công thức Euler thì $IM^2 = OM^2 + OI^2 = r^2 + OI^2 = r^2 + R^2 - 2rR = (R-r)^2$.
Tức là có $IM = R - r$. Vậy ta có $IM = R - r = \dfrac{R}{2} - r + \dfrac{R}{2} = NI + NM$ nên N, I, M thẳng hàng và có điều phải chứng minh. □

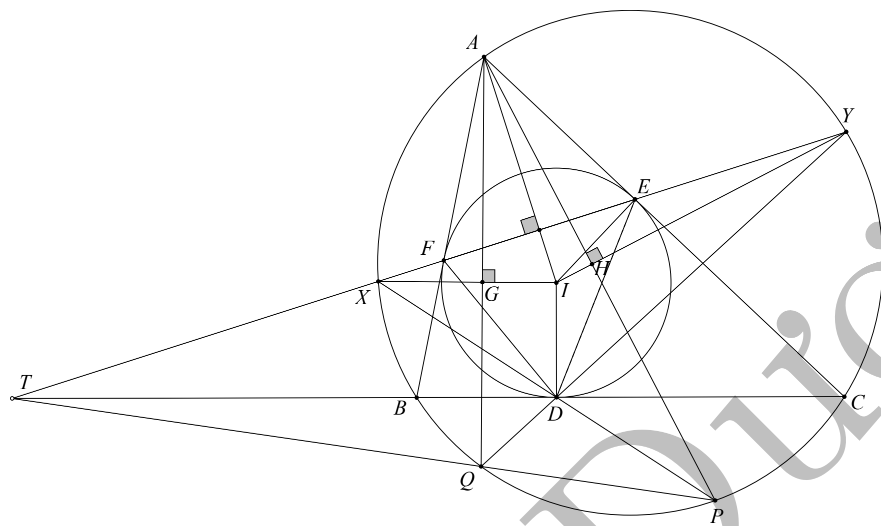
Bài toán 31. Cho tam giác ABC. Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C. T là hình chiếu của X lên BC. Gọi Y' đối xứng với Y qua trung điểm AC, Z' đối xứng với Z qua trung điểm AB. Chứng minh rằng $AT \perp Y'Z'$.



Lời giải. Gọi D' là hình chiếu của (I) lên BC. Ta có $\triangle XAZ \sim \triangle XTC$, $\triangle XAY \sim \triangle XTB$, nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{TC}{TB} = \dfrac{AZ}{AY} = \dfrac{BZ'}{CY'}$ nên ta được Y', Z', D thẳng hàng.

Để ý rằng $IX \perp BZ'$ nên ta có $\angle Z'BD = \angle AXT$. Mà $\dfrac{XT}{XA} = \dfrac{TC}{AZ} = \dfrac{BD}{AZ} = \dfrac{BD}{BZ'}$ nên $\triangle BDZ' \sim \triangle XTA$. Mà $BD \perp XT$, $BZ' \perp XA$ nên ta được $DZ' \perp AT$, hay $Y'Z' \perp AT$. $\square$

Bài toán 32. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. EF cắt $(O) = (ABC)$ tại X, Y sao cho F nằm giữa X và E. Gọi G, H là hình chiếu của A lên IX, IY. Chứng minh rằng $\angle GDF = \angle HDE$.



Lời giải. Từ chứng minh của bài 18, nếu ta gọi AG, AH cắt (O) tại Q, P thì sẽ có P nằm trên DX và Q nằm trên DY.
Gọi XY cắt BC tại T thì do $(TD, BC) = -1$ nên $(PY.BC) = X(PY.BC) = (DT, BC) = -1$. Vậy nên $Q(PY, BC) = -1$, và ta được P, Q, T thẳng hàng.
Dễ thấy $ID^2 = IG \cdot IX = IH \cdot IY$, từ đó nên có

$$\angle FDG = \angle FDI - \angle IDG = \frac{\angle ABC}{2} - \angle IXD, \angle EDH = \frac{\angle ACB}{2} - \angle IYD.$$

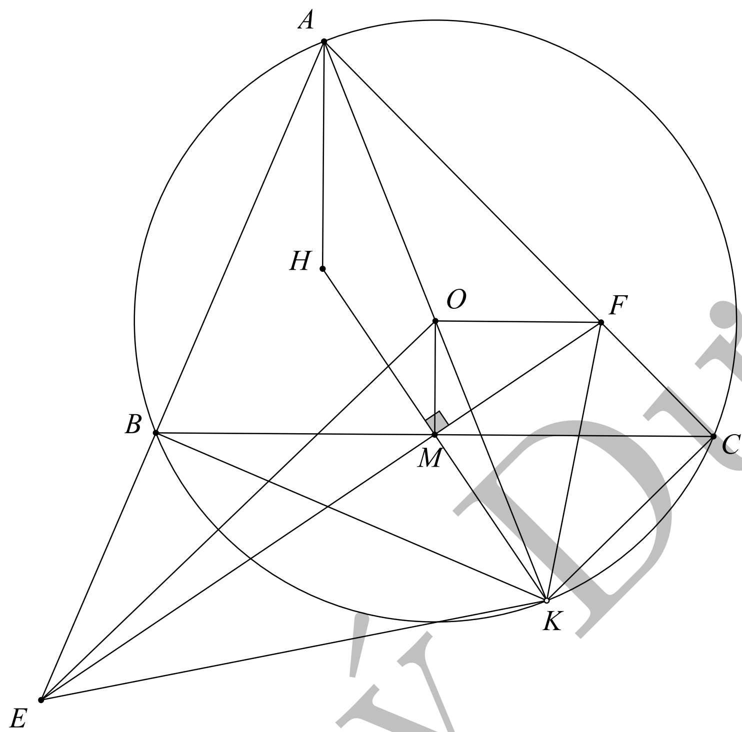
Ta quy về chứng minh $\angle IXD - \angle IYD = \dfrac{\angle ABC}{2} - \dfrac{\angle ACB}{2}$.

Ta có $\angle IXD = \angle YXD - \angle YXI = \angle YQP - \angle IAQ = \angle YQP - \left(\dfrac{\angle BAC}{2} - \angle BAQ\right)$. Tương tự $\angle IYD = \angle XPQ - \left(\dfrac{\angle BAC}{2} - \angle CAP\right)$.

Vì vậy nên $\angle IXD - \angle IYD = \angle YXP + \angle BAQ - \angle XYQ - \angle CAP = \angle CAY - \angle BAX = \angle CBY - \angle BYX = \angle XTB$.

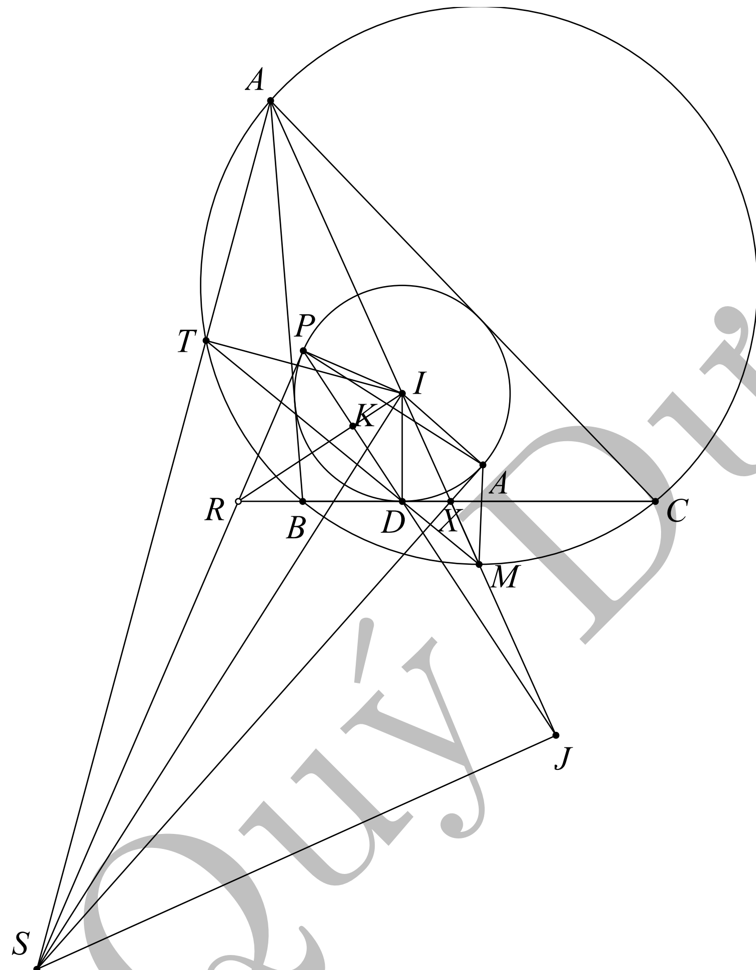
Mà $\angle XTB = \angle ABC - \angle AFE = \angle ABC - \left(90^\circ - \dfrac{\angle BAC}{2}\right) = \dfrac{\angle ABC}{2} - \dfrac{\angle ACB}{2}$ nên ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 33. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. Gọi M là trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông góc với MH cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng $\angle AOE = \angle AOF$.



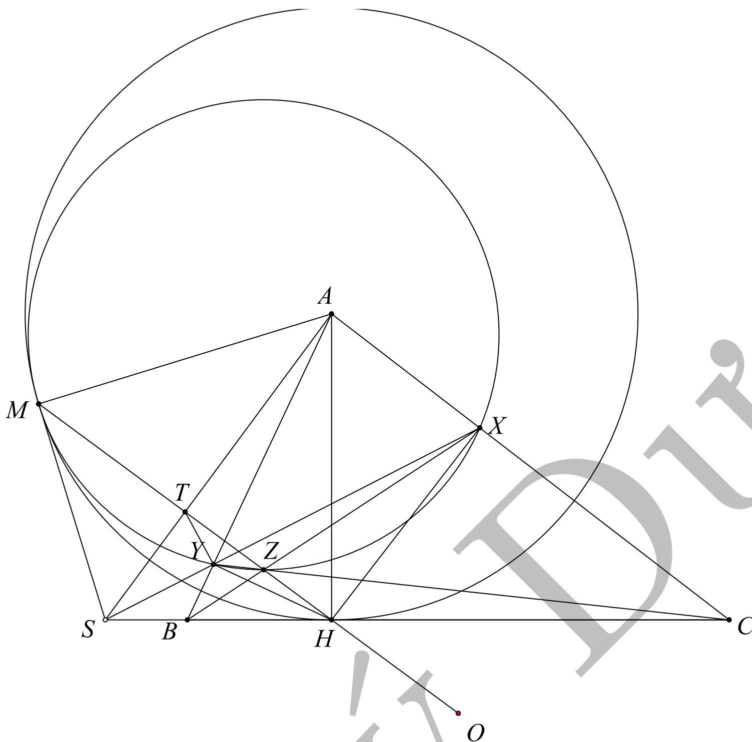
Lời giải. Kẻ đường kính AK của (O) thì H, M, K thẳng hàng.
Ta có $\angle EKF = \angle BKC = 180^\circ - \angle BAC$ nên A, E, K, F đồng viên.
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với E, M, F thẳng hàng ta thu được $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{FC}{FA}$, hay $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{KE}{KF}$ do $\triangle KBE \sim \triangle KCF$.
Từ đây suy ra $AEKF$ là tứ giác điều hòa. Mà O là trung điểm AK nên $\angle AOE = \angle AOF = \angle EKF$ và có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 34. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). Đường tròn B, C tiếp xúc với (I) tại P. AI cắt BC tại X. Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến qua X của (I) (khác BC) và tiếp tuyến của (I) tại P. AS cắt (O) tại T. Chứng minh rằng $\angle ATI = 90°$.



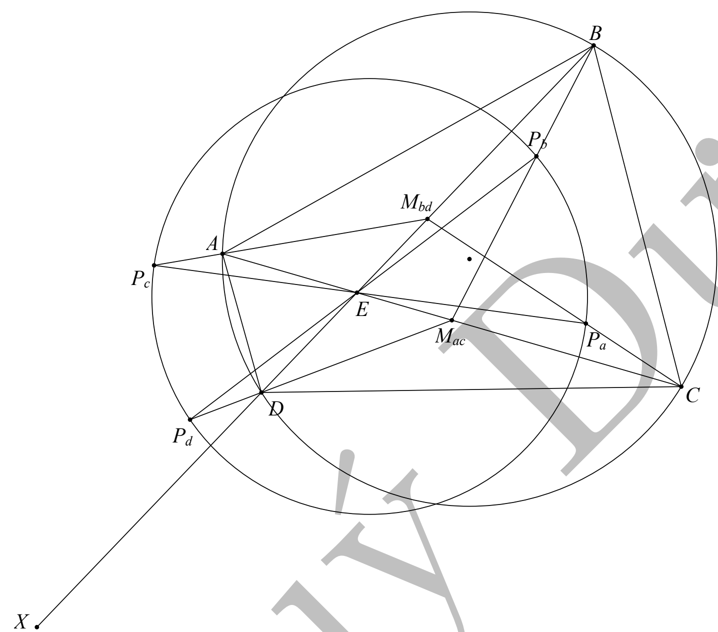
Lời giải. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, R là giao điểm của tiếp tuyến tại P của (I) với BC, K là giao điểm của IT và PD, Q là tiếp điểm của SX với (I).
Do (I) tiếp xúc (BPC) nên ta có RP cũng là tiếp tuyến của (BPC). Vậy nên ta có $RB \cdot RC = RP^2 = RD^2 = RK \cdot RI$ nên K thuộc (BIC), hay ta có $\angle IKJ = 90°$. Từ đó ta được P, D, K, J thẳng hàng.
Để ý rằng JI là phân giác $\angle PJQ$ và $IP = IQ$ nên $JPIQ$ nội tiếp, từ đây suy ra $IQJS$ nội tiếp và có $DI \cdot DJ = DB \cdot DC = DA \cdot DM = DQ \cdot DS$.
Vậy nên $ASMQ$ nội tiếp, hay ta có $\angle MQX = \angle MAT$. Mà $\angle ATM = \angle ABM = \angle AXC = \angle MXD = \angle MXQ$ nên ta được $\triangle QMX \sim \triangle AMT$, hay $\angle AMT = \angle QMX$. Vậy M, D, T thẳng hàng và theo bổ đề 6.11, $\angle ATI = 90°$ và có điều phải chứng minh. □

Bài toán 35. Cho tam giác ABC có đường cao AH. Gọi X, Y lần lượt là chân đường góc hạ từ H xuống AC, AB. Gọi Z là giao của BX và CY. Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc với (A, AH).



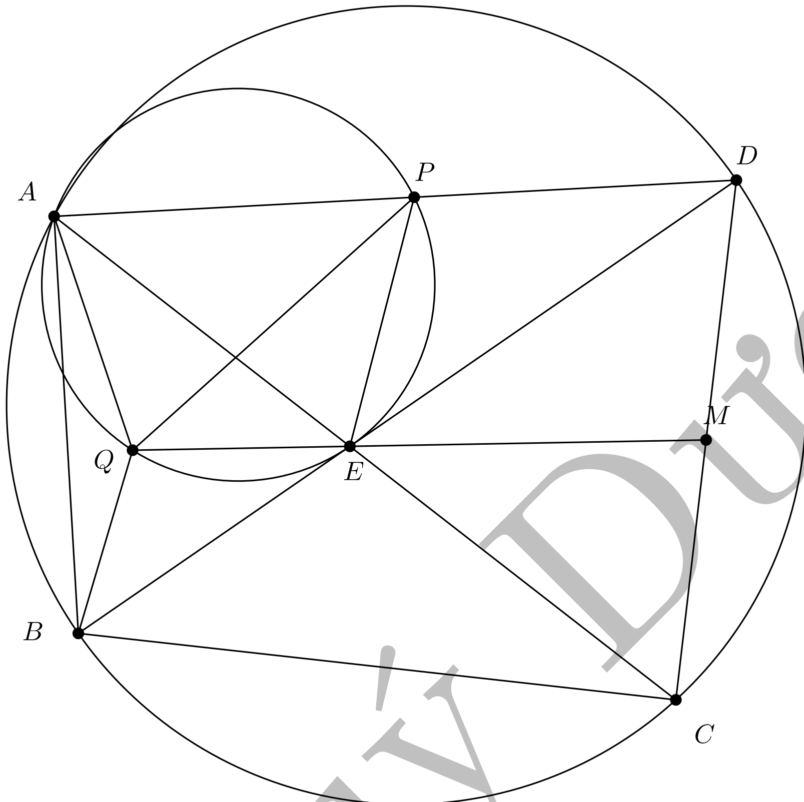
Lời giải. Ta thấy rằng $AH^2 = AY \cdot AB = AX \cdot AC$ nên $BYXC$ là tứ giác nội tiếp
Gọi T là điểm Miquel của tứ giác $BXYC$, S là giao điểm của XY và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BYXC$ thì do $BYXC$ là tứ giác nội tiếp nên T nằm trên AS.
Theo định lý Brocard, O, Z, T thẳng hàng và $OT \perp AS$.
Mà $AH^2 = AY \cdot AB = AT \cdot SS$ nên $HT \perp AS$, hay H, O, Z, T thẳng hàng.
Gọi M là điểm đối xứng của H qua AS thì $M \in (A, AH)$.
Có $TM^2 = TH^2 = TA \cdot TS = TZ \cdot TO$ nên $(MH, ZO) = -1$. Vậy nên theo hệ thức Maclaurin, $ZT \cdot ZO = ZM \cdot ZH = ZY \cdot ZC = ZB \cdot ZX$.
Phép nghịch đảo tâm Z, phương tích $ZT \cdot ZO$ lần lượt biến B, H, C thành M, X, Y. Mà B, H, C thẳng hàng nên $M \in (XYZ)$.
Mà $SM^2 = SH^2 = ST \cdot SA = SY \cdot SZ$ nên ta được SM là tiếp tuyến của (XYZ), hay (XYZ) tiếp xúc (A, AH) tại M. $\square$

Bài toán 36. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi M_{ac}, M_{bd} lần lượt là trung điểm của AC và BD. Gọi H_a là trực tâm tam giác BCD, P_a là hình chiếu của H_a lên CM_{bd}. Tương tự xác định P_b, P_c, P_d. Chứng minh rằng P_a, P_b, P_c, P_d đồng viên.



Lời giải. Nhận thấy là P_a là điểm $C-$Humpty của tam giác BCD, tương tự với P_b, P_c, P_d.
Từ đó ta có $M_{bd}B^2 = M_{bd}D^2 = M_{bd}P_a \cdot M_{bd}C = M_{bd}P_c \cdot M_{bd}A$, nên A, C, P_a, P_c đồng viên.
Gọi E là giao điểm của AC với BD. Ta sẽ chứng minh P_a, P_c, E thẳng hàng.
Gọi X là điểm thỏa mãn $(XE, DB) = -1$. Ta có $EX \cdot EM_{bd} = EB \cdot ED = EA \cdot EC$ nên M_{bd}, A, C, X đồng viên.
Phép nghịch đảo tâm M_{bd}, phương tích $M_{bd}B^2$ biến P_a, P_c, E thành C, A, X nên ta được P_a, P_c, E thẳng hàng,
Tương tự P_b, P_d, E thẳng hàng. Mà để ý rằng các tứ giác AP_aCP_c, BP_bDP_d nội tiếp nên sử dụng phương tích tại E, ta được P_a, P_b, P_c, P_d đồng viên và có điều phải chứng minh. □

Bài toán 37. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). E là giao điểm của AC và BD. Đường tròn ω qua A, E tiếp xúc với BD cắt lại AB tại P. Gọi M là trung điểm BC. ME cắt lại ω tại Q. Chứng minh rằng B, D, P, Q đồng viên.



Lời giải. Từ giả thiết ta có BD tiếp xúc (O') tại E nên $\angle QAE = \angle BEQ$ và $\angle DEC = \angle APE$.
Do tứ giác $AQEP$ nội tiếp nên $\angle APQ = \angle AEQ$ và $\angle AEQ = \angle MEC$ nên ta có $\angle APQ = \angle MEC$.
Lại có $\angle APE = \angle APQ + \angle QPE = \angle DEC = \angle DEM + \angle MEC = \angle DEM + \angle APQ$ nên $\angle QPE = \angle DEM = \angle QAE$.
Mặt khác, $\dfrac{\sin CEM}{\sin DEM} = \dfrac{EC}{ED} \cdot \dfrac{MC}{MD} = \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{EB}{EA}$, mà $\dfrac{\sin DEM}{\sin CEM} = \dfrac{\sin QAE}{\sin QEA} = \dfrac{QE}{QA}$ nên $\dfrac{QA}{QE} = \dfrac{EB}{EA}$.
Mà $\angle QAE = \angle BEQ$ nên $\triangle QEA \sim \triangle QBE$, do đó $\angle QBE = \angle QEA = \angle APQ$ hay ta có tứ giác $BQPD$ nội tiếp.

□