

Trong phần này, bạn sẽ lần lượt giải quyết các **Problem**. Bạn cần trình bày nó và submit lên hệ thống Moodle dưới dạng .pdf với tên MSSV.pdf, ví dụ: 12345678.pdf

**Problem 1** (Erdős-Rényi Networks). Xem xét một Erdős-Rényi network với  $N = 3000$  đỉnh, được liên kết với nhau với xác suất  $p = 10^{-3}$

- (a) Số lượng liên kết trung bình (kỳ vọng số lượng liên kết)  $\langle L \rangle = ?$
- (b) Mạng này đang nằm trong trạng thái nào (regime)?
- (c) Tính toán xác suất  $p_c$  mà mạng đang ở thời điểm quan trọng (the critical point)?
- (d) Cho trước xác suất liên kết  $p = 10^{-3}$ , tính toán số lượng đỉnh  $N^{cr}$  mà mạng này chỉ có duy nhất một thành phần?
- (e) Với mạng trong câu (d), tính toán bậc trung bình  $\langle K^{cr} \rangle = ?$ , và khoảng cách trung bình giữa hai đỉnh ngẫu nhiên bất kỳ  $\langle d \rangle = ?$
- (f) Tính toán phân phối bậc  $p_k$  của mạng này (xấp xỉ với một phân phối bậc Poission).

**Problem 2** (Generating Erdős-Rényi Networks). Dựa trên mô hình  $G(N, p)$ , hãy phát sinh ba mạng với  $N = 500$  đỉnh, và trung bình bậc

- (a)  $\langle k \rangle = 0.8$
- (b)  $\langle k \rangle = 1$
- (c)  $\langle k \rangle = 8$

**Problem 3** (Nghịch lý Tình bạn). Phân phối bậc  $p_k$  biểu diễn xác suất mà một đỉnh được chọn ngẫu nhiên có  $k$  hàng xóm. Tuy nhiên, nếu ta chọn ngẫu nhiên một liên kết, xác suất một đỉnh mà đỉnh cuối của nó có bậc là  $k$  là  $q_k = Akp_k$ , trong đó  $A$  là một nhân tử chuẩn hóa (normalization factor).

- (a) Tìm nhân tử chuẩn hóa  $A$ . Giả định rằng, mạng có phân phối bậc luật lũy thừa với  $2 < \gamma < 3$ , với bậc nhỏ nhất  $k_{min}$ , và bậc lớn nhất  $k_{max}$
- (b) Trong mô hình thiết lập,  $q_k$  cũng là xác suất mà một nút được chọn ngẫu nhiên có một hàng xóm với bậc  $k$ . Vậy, bậc trung bình của các hàng xóm của một nút được chọn ngẫu nhiên là bao nhiêu?
- (c) Tính toán bậc trung bình của một nút được chọn ngẫu nhiên trong một mạng với  $N = 10^4$ ,  $\gamma = 2.3$ ,  $k_{min} = 1$ , và  $k_{max} = 1000$ . So sánh kết quả với bậc trung bình của mạng  $\langle k \rangle$
- (d) Và bây giờ, bạn giải thích "nghịch lý" trong câu (c), rằng là bạn bè của một nút có nhiều bạn bè hơn chính nút đó?

## References

- [1] A.-L. Barabási. Network science. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1987):20120375, 2013.