BÀI TẬP CTDL & GT #1
Đếm phép gán và mô hình hóa bài toán

Làm cá nhân : - Họ và tên : Nguyễn Vũ Dương

- MSSV :20520465

Bài 1) Tính tổng hữu hạn.

a) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999$

$= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2.500 - 1)$

$= \sum_{n=1}^{500} (2n-1) = n^2 = 500^2 = 250000$

b) $\cancel{1}\,2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$

$= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}$

$= \sum_{n=1}^{10} 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2a - 1} - 1$

$= 2046$

Tổng quát $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$

$\Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

c) $\sum_{i=3}^{n+1} 1$

Đầu tiên ta tính số số hạng

Ta có SSH = ~~số đầu~~ ~~số cuối~~ số cuối - số đầu + 1.

$= n+1 - 3 + 1 = n - 1$ (số hạng

$\Rightarrow \sum_{i=3}^{n+1} 1 = n - 1.$

d) $\sum_{i=3}^{n+1} i$

$SSH = n+1 - 3 + 1 = n - 1.$

$$\sum_{i=3}^{n+1} i = \frac{(n+4).(n-1)}{2}.$$

e) $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= \frac{(n-1)(n-1+1)(2n-2+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)\,n\,(2n-1+3)}{6} = \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

Áp dụng các công thức sau

$$\sum_{n=0}^{n} = \sum_{n=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tổng của n số hạng $= \dfrac{(\text{Số đầu} + \text{Số cuối}) \cdot SSH}{2}$

f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

$$= \sum_{j=2}^{n+1} 3^{j} = \frac{3^{n+2}-1}{3-1} - 3^1 - 3^0$$

$$= \frac{3^{n+2}-1}{2} - 3 - 1$$

$$= \frac{3^{n+2}-1}{2} - 4$$

$$= 3^{n+2} - 9$$

Áp dụng công thức:

$$S = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} \cdot \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

Ta có $\displaystyle\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{x=a}^{b} 1 = b-a+1.$$

i) $$\sum_{j\in(2,3,5)} (j^2+j)$$

$$= 2^2+2+3^2+3+5^2+5 = 48$$

j) $$\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=0}^{n}\ \sum_{k=0}^{100} (i+j)$$

$$= 101\cdot \sum_{i=1}^{m}\left((n+1)\cdot i + \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)$$

$$= 101\cdot\left[(n+1)\frac{(m+1)\,m}{2} + m\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$\frac{1}{n(n+1)}$

1

$1+1$

n

Bài 2) Đếm số phép gán và so sánh. và độ phức tạp

$s = 0;$ (phép gán)

$i = 1;$

while $(i \le n)$ do (n+1 phép so sánh

$j = 1;$ (phép gán)

while $(j \le i^2)$ do thực hiện $\sum_{n=1}^{i} n^2 + 1$ phép so sánh

$s = s + 1;$ (phép gán)

$j = j + 1;$

end do;

$i = i + 1.;$

end do;

Giải

Số phép gán : $1 + 1 + 2n + 2 \cdot \sum_{n=1}^{i} n^2$

$$= 2 + 2n + 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 7n + 6}{3}$$

Độ phức tạp = gán + SS.

Số phép so sánh.

$n \cdot \left(\sum_{x=1}^{n} (x^2) + 1\right) + 1.$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot n + 1 + 2n.$

Bài 3)

sum := 0 (phép gán)

i := 1;

while (i ≤ n) do (so sánh n lần)

j := n - i; (gán

(1) while (j ≤ i) do (tuỳ bao nhiêu)

sum := sum + j; (gán)

j := j + 1;

endw;

i := i + 1; (gán)

endw;

Giải

Với mỗi $n - i \le i$

$\Leftrightarrow n \le 2i$.

TH_1: $n > 2i$ thì (1) không thực hiện phép gán chỉ thực hiện phép so sánh 1 lần

Số phép gán là: $2 + 2n$

Số phép so sánh: $n + 1 \cdot i$

Với $n \leq i$

Số phép gán là

$$2 + 2n + 2 \cdot \sum_{j = n - i}^{i} j$$

$$= 2 + 2n + 2 \cdot \frac{(i + n - i)(i - n + i + 1)}{2}$$

$$= 2 + 2n + n \cdot (2i - n + 1)$$

$$= 2 + 2n + 2n \cdot \sum_{n}^{2i} i - n^2 + n$$

Số phép so sánh là: $n + 1 + n + \sum_{n}^{2i} \left(i - n^2 + n \right)$

$$\cancel{(n + 1)} + \cancel{2n} \left(\frac{n (2i - n + 1)}{2} + 1 \right) + 1$$

Với $i = \sum_{x = n}^{2i} 2x$

Bài 4)

```
sum := 0          (phép gán.
i := 1.
while i ≤ n do
    j := n - i x i
    while j ≤ i x i do
        sum := sum + i * j
        j := j + 1.
    endw
    i := i + 1.   (.
endw.
```

Pi →

Giải

Số phép gán $= 2 + 2.n + \sum_{i=1}^{n} \text{gán}(P_i)$

$$= 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} (2\alpha_1) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_1$$

Vòng lặp Pi chỉ thực hiện khi $n - i^2 \le i^2 \Rightarrow i^2 \ge \frac{n}{2}$.

Từ đây suy ra

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{Số phép ss} = n+1 \\ i^2 - (n - i^2) + 1 & \Rightarrow \text{Số phép ss } n.\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 + 1\right) + 1. \end{cases}$$

Như vậy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 = \sum_{i=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil}^{n} (2i^2 - n + 1) = 2\sum_{i=\lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil}^{n} i^2 - (n - \lceil\sqrt{\frac{n}{2}}\rceil + 1)(n-1)$$

KOKUYO

Bài 5)

```
sum := 0;
i := 1;
while (i ≤ n) do
    j := 1
    while (j > 0) do
        sum := sum + 1;
        j := j div 2;
    end w
    i = i + 1;
end w;
```

Giải

Phép gán $= 2 + 2n + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \left((\text{Int}) \log_2(j) + 1 \right)$

Phép so sánh: $\cancel{n \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left((\text{Int}) + 1 \cdot \log_2(j) + 1 \right) \right) + 1}$

$\cancel{n \cdot \sum_{j=1}^{n} \left((\text{Int}) \log_2(j) + 2 \right)} + 1.$

$\sum_{j=1}^{n} \left((\text{Int}) \log_2(j) + 1 \right) + n + 1 + n$

Bài 6

```
i := 1;
res := 0;
while (i ≤ n) do
    j := 1;
    while (j ≤ i) do
        res := res + i×j;
        j := j + 2;
    end do;
    i := i + 1;
end do.
```

Giải

Số phép gán: $2 + 2n + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (\alpha)$

Phép so sánh: $n + 1 + n + \sum_{j=1}^{n} (\alpha)$

với n là số chẵn; $\alpha = \frac{n}{2}$

n là số lẻ: $\alpha = \frac{n+1}{2}$.

II/ Bài tập mô hình hóa bài toán

Bài toán 1.

* Bài toán tô màu

Giả sử ta có bản đồ các quốc gia trên thế giới, ta muốn tô màu quốc gia này sao cho 2 nước có ~~chung~~ cùng ranh giới được tô màu khác nhau.

- Base: Đồ thị A thể hiện bản đồ của các quốc gia trên thế giới sao cho mỗi nước trên bản đồ là 1 đỉnh của đồ thị, 2 nước láng giềng ứng với 2 đỉnh kề nhau bằng 1 cạnh
- Input: Tập hợp B gồm m màu từ đỏ sang tím.
- Output: Tập Hợp P chứa các $C(i,j)$ với $i \in A$; $j \in B$ thể hiện các nước và màu của chúng trên bản đồ sao cho số màu mà sử dụng là ít nhất $\sum_{i=1}^{n} h_i$, h_i nhỏ nhất, h_i thể hiện màu của i có trong cặp ~~C~~ C hay ko.

2) Bài toán người giao hàng (du lịch, dưới Thm)

- E: mỗi người giao hàng tại n thành phố
- ~~Từ~~ phải từ một thành phố nào đó, đi qua các thành phố khác để giao hàng và trở về thành phố ban đầu
- Mỗi thành phố chỉ đến 1 lần, khoảng cách từ 1 thành phố đến thành phố khác là xác định được

Giả thiết mỗi thành phố đều có đường đi đến các thành phố còn lại

Hãy tìm đường đi để tổng độ dài nhỏ nhất

Base: A là đồ thị thể hiện bản đồ các thành phố trong 1 phạm vi nào đó.

Mỗi thành phố là 1 đỉnh. Đường i mà qua 2 thành phố là 1 cạnh và có được độ dài với $w_i > 0$.

Input: Tập hợp B gồm các đơn thành phố có trong A. và xuất phát từ thành phố x thuộc A.

Output: Tập hợp C gồm m cạnh $j \in A$ là đường đi qua tất cả thành phố thuộc B chỉ 1 lần và tổng độ dài của đường đi $\sum_{j=1}^{n} w_j$ là nhỏ nhất.

Bài tập 3

Một kẻ trộm đột nhập vào 1 ngôi nhà, hắn tìm thấy n đồ vật có trọng lượng và giá trị khác nhau. Nhưng hắn chỉ mang theo 1 cái balo lưu có sức chứa về trọng lượng tối đa là 14. Kẻ trộm cố bỏ các đồ vật vào túi sao cho tổng giá trị cao nhất khi mang đi

Input

Số tự nhiên n (n > 0) là đồ vật trong ngôi nhà.

m (m > 0) là trọng lượng tối đa của balo

n đồ vật lần lượt có giá trị c_i và khối lượng v_i ($1 \le i \le m$)

- Mỗi số nguyên dương x là giá trị cao nhất có thể mang đi

- n giá trị x_j ($x_j \in 0, 1$) thể hiện phương án chọn hoặc ko chọn vật thứ j. ($1 \le j \le n$).

Bài tập 4

Tìm đường đi trên mạng giao thông TPHCM bằng Bus

Giải

Base:

- Đồ thị A thể hiện bản đồ xe bus Thành phố HCM. đỉnh i thể hiện trạm xe buýt cạnh j thể hiện tuyến đường đi với độ dài $W_j > 0$

- Tập hợp B các tuyến (i, D) với i là số hiệu tuyến và D là tập hợp các cạnh tuyến này đi qua

Input: Trạm xuất phát $X \in A$, trạm đích $Y \in A$

Output: Tuyến xe buýt $P \in B$ để đi sao cho nó chứa cạnh đi qua X, Y và tổng độ dài n đường (cạnh $k \in D$ của P) mà tuyến đi qua qua X và Y để $\sum_{k=1}^{n} W_k$ nhỏ nhất.

Bài 5) Môn học X có n cột điểm. Hệ số (tỷ trọng) của mỗi cột điểm đã được phòng đào tạo quy định trước. Tuy nhiên, sinh viên lớp X đã thỏa thuận với giảng viên chỉ làm 1 đồ án duy nhất thay cho các cột. Sau khi chấm điểm đồ án bây giờ GV phải ~~chính~~ nhập đủ n cột điểm cho PĐT nhưng vẫn phải đảm bảo điểm trung bình theo cách tính của PGT sẽ bằng với k mà là điểm đồ án của SV. Hãy phát sinh tất cả cách ghi điểm mà GV có thể ghi cho SV. Biết rằng điểm mỗi cột được làm tròn đến 0,25 và $0 \le$ điểm mỗi cột ≤ 10, ĐTB làm tròn đến 0,1

Giải

Input:

n cột điểm

$a[i]$ là hệ số cột điểm thứ i : $a[i] \in N$.

k là điểm đồ án.

Output:

Một số nguyên duy nhất x là số cách phát sinh cách ghi điểm nhiều nhất có thể sao cho $1 \le j \le x$, với $L = \left(\sum_{1}^{n} a[i].b[i] \Big/ \sum_{1}^{n} a[i] \right) = k = L(j)$ là 1 cách phát sinh

Trong đó $b[i]$ là điểm GV cho ứng với cột điểm i, $1 \le i \le n$; $b[i]$, $L(j) \in R$.

Điều kiện ràng buộc

$0 \le b[i] \le 10$, $\{b[i]\} \in \{0{,}25; 0{,}5; 0{,}75\}$

$0 \le L[j] \le 10$; $L[j] \in \{0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, \dots 0{,}9\}$

Bài tập 1

Bài toán tìm kiếm tài liệu mô tả như sau

Từ câu truy vấn (gọi là query) người dùng nhập vào, hệ thống tìm kiếm và trả về danh sách tài liệu (được sắp hạng) có nội dung liên quan và phù hợp với thông tin truy vấn

Giải

Base: Tập hợp A các tài liệu (t, c), t là tiêu đề, c là nội dung

Input: Câu truy vấn B

Output: Tập hợp C là tài liệu ∈ A chứa nội dung liên quan đến B, được xếp hạng theo độ liên quan của B.