

分类号_____

密级_____

UDC 注1 _____



南京理工大学
NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

博士 学 位 论 文

压缩采样雷达信号的快速重构方法研究

(题名和副题名)

张素玲

(作者姓名)

指导教师姓名 刘 中 教授

席 峰 副教授

学 位 类 别 工学博士

学 科 名 称 信息与通信工程

研 究 方 向 压缩采样

论 文 提 交 时 间 2018.09

注 1：注明《国际十进分类法 UDC》的类号。

博士学位论文

压缩采样雷达信号的快速重构方法研究

作 者：张素玲

指导教师：刘 中 教授
席 峰 副教授

南京理工大学

2018年9月

Ph.D. Dissertation

**Fast reconstruction of radar signals with
compressive sampling**

By

Zhang Su-ling

Supervised by Prof. Liu Zhong

Associate Prof. Xi Feng

Nanjing University of Science & Technology

September, 2018

声 明

本学位论文是我在导师的指导下取得的研究成果，尽我所知，在本学位论文中，除了加以标注和致谢的部分外，不包含其他人已经发表或公布过的研究成果，也不包含我为获得任何教育机构的学位或学历而使用过的材料。与我一同工作的同事对本学位论文做出的贡献均已在论文中作了明确的说明。

研究生签名: 张素玲

2019年 4月 18日

学位论文使用授权声明

南京理工大学有权保存本学位论文的电子和纸质文档，可以借阅或上网公布本学位论文的部分或全部内容，可以向有关部门或机构送交并授权其保存、借阅或上网公布本学位论文的部分或全部内容。对于保密论文，按保密的有关规定和程序处理。

研究生签名: 张素玲

2019年 4月 18日

摘要

压缩采样或压缩感知理论是根据信号的稀疏特性，以远低于奈奎斯特率的采样速率表征信号的理论。模拟信息转换(模信转换)，以压缩采样理论为基础，有效地实现了稀疏模拟信号的亚奈奎斯特率采样，并在宽带信号采样中获得广泛而深入的研究。在雷达应用领域，模信转换可实现宽带和超宽带雷达信号的亚奈奎斯特率采样，为宽带和超宽带雷达的发展提供了新的思路。但是，在一些应用领域，常常要恢复雷达回波的奈奎斯特率采样信号。从信号重构角度，这是一个大规模稀疏重构问题，现行的稀疏重构算法需要大的存储空间、计算量大，难以实现实时重构。

模信转换，根据采样信号对象不同，具有不同的实现结构。业已发展的模信转换系统可分为低通型模信转换、带通型模信转换和多带型模信转换。本文针对这三种模信转换在雷达信号采样中的应用，研究奈奎斯特率雷达信号的快速重构方法。

本文的主要工作和贡献如下：

1. 将随机解调模信转换应用于脉冲雷达基带信号采样，提出了一种分段滑动重构方法，实现了雷达基带回波信号的快速重构。

随机解调是一种典型的低通型模信转换系统，可实现雷达基带回波信号的亚奈奎斯特采样。基于对随机解调系统特性和雷达基带回波信号稀疏表示字典的分析，本文发现测量矩阵具有带状结构，并据此提出了一种分段滑动重构方法。该方法对观测时间内获得的压缩测量数据进行重叠分段，将大规模稀疏重构问题分解为一系列小规模稀疏重构子问题，通过采用滑动方式依次求解每个子问题实现信号的快速重构。分段重构性能受到相邻段引入干扰的影响，本文从理论上分析了分段滑动重构方法的重构性能，并通过仿真验证了该方法的有效性。

2. 将正交压缩采样模信转换应用于脉冲雷达带通信号采样，提出了一种近似处理方法，实现了雷达基带回波信号的快速重构。

正交压缩采样是一种带通型模信转换系统，可以实现带通模拟信号的亚奈奎斯特采样，并能够同时获取带通信号同相和正交分量的压缩测量。本文将正交压缩采样系统应用于雷达中频回波信号采样，在对正交压缩采样系统特性进行分析的基础上，将正交压缩采样测量矩阵近似成带状矩阵。由于近似矩阵与随机解调测量矩阵的结构相类似，因而可以根据正交压缩采样的测量数据，采用分段滑动重构方法实现快速重构。本文从理论上分析了对测量矩阵进行近似的合理性，并通过仿真分析验证了其可行性和有效性。

3. 将多带正交压缩采样模信转换应用于脉冲雷达多带信号采样，提出了块稀疏分段滑动重构方法，实现了每个子带基带信号的快速重构。

多带正交压缩采样是一种多带型模信转换系统，可以实现多带模拟信号的亚 Landau

率采样，并同时获取每个子带同相和正交分量的压缩测量。本文考虑等带宽多带雷达应用场景，将多带正交压缩采样系统应用于多带雷达信号采样。基于对等带宽多带雷达回波信号的分析，揭示出回波信号的块稀疏性，继而提出采用块稀疏重构模型恢复所有子带回波信号的方法，并发展了块稀疏分段滑动重构方法来实现快速重构。该方法根据分段滑动重构方法的分段方式，将大规模块稀疏重构问题分解成一系列小规模块稀疏重构子问题，通过依次求解每个子问题实现快速重构。数值仿真验证了块稀疏分段滑动重构方法的有效性。

4. 将分段滑动重构方法应用于压缩采样雷达运动目标回波信号的重构，提出了基于正交投影的加权稀疏分段滑动多脉冲回波快速重构方法。

与单脉冲回波不同，运动目标在脉冲积累时间内可能产生跨距离单元现象，使得回波信号表示系数具有稀疏时变性。本文首先采用概率分布模型描述稀疏位置的变化，将多脉冲回波信号重构转化为加权稀疏重构问题；然后根据分段滑动重构思想，提出基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构方法来实现快速重构。该方法利用前一个脉冲稀疏位置估计信息，构造相邻段引入干扰的正交补空间，将子段压缩测量投影到构造的正交补空间，有效地抑制了相邻段引入的干扰。数值仿真验证了方法的有效性。

关键词：压缩采样，压缩感知，模拟信息转换，随机解调，正交压缩采样，多带压缩采样，稀疏重构，分段滑动重构，块稀疏重构，加权稀疏，正交投影

Abstract

Compressive sampling or compressed sensing (CS) is a signal representation theory, which represents a sparse signal at a rate much lower than the Nyquist rate. As an application of CS theory, analog-to-information (AIC) efficiently performs sub-Nyquist sampling of sparse analog signals, and thus obtains wide and in-depth research on the sampling of wideband signals. In radar applications, AIC can implement the sub-Nyquist rate sampling of wideband and ultra-wideband radar signals and thus provides a new strategy for the development of wideband and ultra-wideband radars. However, in some applications, it is often required to recover the Nyquist-rate radar echoes from the sub-Nyquist rate samples. From the CS theory, this is a large-scale sparse reconstruction problem. It is difficult to perform real-time reconstruction by using the current sparse reconstruction algorithms because of huge storage and large computational load.

There are different AIC systems according to the signals to be sampled. Currently, the AIC systems can be divided into three categories: lowpass-type AIC, bandpass-type AIC, and multiband-type AIC. In this dissertation, we develop fast reconstruction schemes of Nyquist-rate radar signals with the radar echoes sampled by the three types of AIC systems.

The main works and contributions of this dissertation are as follows:

1. Applying the random demodulation (RD) AIC to the sampling of the pulsed radar baseband signals, we propose a segment-sliding reconstruction (SegSR) scheme, which can realize fast recovery of radar baseband echoes.

RD is typical of lowpass-type AIC systems. We apply the RD system to perform sub-Nyquist sampling of the radar baseband echoes. Based on the characteristics of RD system and the sparse representation of the radar baseband echoes, we find that the measurement matrix has a banded structure, and then propose a SegSR scheme. The SegSR scheme divides the compressive measurement data obtained during the observation time into overlapping segments, and then transforms the large-scale sparse reconstruction problem into a series of small-scale sparse reconstruction sub-problems. Finally, the fast reconstruction is realized by solving each sub-problem in a sliding mode. With the analysis of the effect of the interference introduced from the adjacent segments, we theoretically analyze the reconstruction performance of the SegSR scheme, and validate the effectiveness by simulations.

2. Applying the quadrature compressive sampling (QuadCS) AIC to the sampling of pulsed radar bandpass signal, we propose an approximation scheme to achieve the fast recon-

struction of the radar baseband echoes.

As a bandpass-type AIC system, QuadCS can perform sub-Nyquist sampling of bandpass analog signals, and acquire the compressive measurements of in-phase and quadrature (I/Q) components. We use the QuadCS system to sample the radar echoes at the intermediate frequency. With thorough analyses on the QuadCS system, we find that the QuadCS measurement matrix can be approximately transformed into a banded one which has a structure similar to the RD measurement matrix. Then we apply the SegSR scheme to the QuadCS samples to realize the fast reconstruction. We theoretically analyze the reasonableness of the approximation scheme, and demonstrate the feasibility and effectiveness by simulations.

3. Applying the multiband quadrature compressive sampling (MQCS) AIC to the sampling of pulsed radar multiband signals, we propose a block-sparsity-based segment-sliding reconstruction (BSegSR) scheme, which can realize fast recovery of the baseband components of each subband echo.

MQCS is a multiband-type AIC system, which can realize sub-Landau sampling of multiband analog signals, and obtain the compressive I/Q measurements of each subband signal. The multiband radar signals with equal-bandwidth subbands are considered. We apply the MQCS system to sample the multiband radar signals at sub-Landau rate. With the analyses on the multiband radar echoes, we reveal the block sparsity of the echo signals and establish a block-sparse reconstruction model to recover all subband echoes. Then we develop a BSegSR scheme for fast reconstruction. The BSegSR scheme decomposes the large-scale block-sparse reconstruction problem into a series of small-scale block-sparse reconstruction sub-problems. As in the SegSR, the BSegSR reconstructs each subband component in a sliding mode. Numerical simulations demonstrate the effectiveness of the BSegSR scheme.

4. Applying the SegSR scheme to fast reconstruction of moving target echo signals, we propose an orthogonal-projection-based weighted sparse segment-sliding reconstruction (OP-WSegSR) scheme of multiple pulse echoes.

Different from a single pulse echo, the moving targets may be across range cells in a coherent processing interval and thus the echo signals have the property of the time-varying sparsity. We adopt a random model to describe the sparsity and transform the reconstruction of the multiple echoes into a weighted sparse reconstruction problem. With the developed SegSR, we propose an OP-WSegSR scheme for fast reconstruction. As in the SegSR of a single pulse echo, the adjacent segments will introduce the interference affecting the estimation of the current segments. According to the estimation of sparse positions in the previous pulse,

the proposed scheme constructs an orthogonal complement subspace of the interference subspace, and projects the measurements of the current segment onto the complement subspace. Then the adjacent interference is greatly rejected. Simulations show the effectiveness of the OP-WSegSR scheme.

Key word: compressive sampling, compressed sensing, analog-to-information conversion, random demodulation, quadrature compressive sampling, multiband compressive sampling, sparse reconstruction, segment-sliding reconstruction, block-sparse reconstruction, weighted sparse, thogonal projection

目 录

摘要	I
Abstract	III
目录	VI
图目录	IX
表目录	XI
缩写与中英文对照	XII
符号说明	XIV
1 绪论	1
1.1 从 Nyquist 采样到压缩采样	1
1.2 模拟信息转换	3
1.3 压缩采样雷达	4
1.4 压缩采样雷达信号重构	7
1.5 本文的主要工作	8
2 压缩采样理论基础	9
2.1 稀疏信号的压缩采样和重构	9
2.1.1 稀疏信号	9
2.1.2 稀疏信号的压缩采样和可重构条件	10
2.1.3 稀疏重构算法	13
2.2 块稀疏信号的压缩采样和重构	17
2.2.1 块稀疏信号	17
2.2.2 块稀疏信号的压缩采样和可重构条件	18
2.2.3 块稀疏重构算法	19
2.3 模拟信息转换	22
2.3.1 随机解调	23
2.3.2 正交压缩采样	25
2.3.3 多带正交压缩采样	25
2.4 本章小结	26
3 随机解调压缩采样雷达信号的快速重构	27
3.1 信号模型和问题描述	28
3.1.1 信号模型	28
3.1.2 雷达基带回波信号的压缩采样	29

3.2 测量矩阵的结构和分段重构思想	30
3.3 分段滑动重构方法	36
3.3.1 分段滑动重构方法原理	36
3.3.2 存储量和运算量	39
3.4 分段滑动重构方法的性能分析	40
3.4.1 虚拟噪声特性分析	41
3.4.2 虚拟噪声对稀疏位置估计的影响	42
3.4.3 虚拟噪声对稀疏幅度估计的影响	43
3.5 仿真分析	47
3.5.1 参数设置	48
3.5.2 虚拟噪声特性评估	48
3.5.3 无噪声背景下的重构	49
3.5.4 噪声背景下的重构	52
3.6 本章小结	56
4 正交压缩采样雷达信号的快速重构	57
4.1 信号模型和问题描述	57
4.1.1 信号模型	57
4.1.2 雷达中频回波信号的压缩采样	58
4.2 测量矩阵的近似处理及分段滑动重构	60
4.2.1 测量矩阵的近似处理	60
4.2.2 基于带状近似矩阵的分段滑动重构	62
4.2.3 存储量和运算量	62
4.3 测量矩阵的近似处理对重构性能的影响	63
4.4 仿真分析	64
4.4.1 参数设置	65
4.4.2 无噪声背景下的重构	66
4.4.3 噪声背景下的重构	68
4.5 本章小结	70
5 多带正交压缩采样雷达信号的快速重构	71
5.1 信号模型和问题描述	72
5.1.1 多带雷达回波信号模型	72
5.1.2 多带雷达回波信号的压缩采样	73
5.1.3 基于块稀疏的多带联合重构	75

5.2 块稀疏分段滑动重构方法.....	76
5.2.1 测量矩阵的近似结构.....	76
5.2.2 块稀疏分段滑动重构方法原理.....	77
5.2.3 存储量和运算量.....	81
5.3 块稀疏分段滑动重构方法的性能分析.....	82
5.4 仿真分析.....	84
5.4.1 参数设置.....	84
5.4.2 无噪声背景下的重构.....	84
5.4.3 噪声背景下的重构.....	86
5.5 本章小结.....	89
6 基于压缩采样雷达的运动目标回波信号的快速重构	90
6.1 信号模型和问题描述.....	91
6.1.1 信号模型	91
6.1.2 加权稀疏重构问题模型	92
6.2 基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构方法.....	93
6.2.1 加权稀疏分段滑动重构	93
6.2.2 基于正交投影的后向虚拟噪声抑制	95
6.2.3 基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构方法	96
6.3 仿真分析.....	98
6.3.1 参数设置	98
6.3.2 无噪声背景下的重构	99
6.3.3 噪声背景下的重构	102
6.4 本章小结	105
7 结论	106
致 谢	108
参考文献	109
附 录	124
附录 A 攻读博士学位期间撰写的论文	124
附录 B 攻读博士学位期间参与的科研项目	124

图目录

图 1.1 传统雷达和 CS 雷达接收系统框图	5
图 1.2 基于基带采样的传统雷达和 CS 雷达接收系统框图	5
图 1.3 基于中频采样的传统雷达和 CS 雷达接收系统框图	6
图 2.1 随机解调系统框图	23
图 2.2 正交压缩采样系统框图	25
图 2.3 多带正交压缩采样系统框图	26
图 3.1 基于 RD 系统的雷达基带信号压缩采样框图	29
图 3.2 带状测量矩阵示意图	31
图 3.3 测量向量不重叠划分示意图	32
图 3.4 测量子矩阵示意图	32
图 3.5 测量向量重叠划分示意图	33
图 3.6 测量子矩阵和系数子向量的示意图	33
图 3.7 SGP 方法的划分示意图	34
图 3.8 测量子矩阵示意图	34
图 3.9 分段滑动重构方法的划分示意图	35
图 3.10 测量子向量的构成	37
图 3.11 虚拟噪声	49
图 3.12 相对重构误差和稀疏位置正确发现率(SegSR 方法)	50
图 3.13 绝对估计误差 $\ \Delta\tilde{\delta}_l^{(l)}\ , (l=2)$	50
图 3.14 运行时间(SegSR 方法)	51
图 3.15 相对重构误差和稀疏位置正确发现率	51
图 3.16 运行时间	52
图 3.17 重构信噪比 RSNR(SegSR 方法)	53
图 3.18 回波信号($K = 50$, ISNR = 10 dB)	53
图 3.19 重构回波信号($K = 50$, ISNR = 10 dB)	54
图 3.20 重构信噪比 RSNR	54
图 3.21 重构回波信号($K = 50$, ISNR = 10 dB)	55
图 4.1 QuadCS 系统框图	58
图 4.2 带通滤波器的冲激响应	61
图 4.3 测量矩阵及其近似矩阵的结构	61
图 4.4 测量向量、近似矩阵和稀疏向量的划分示意图	62

图 4.5 巴特沃斯带通滤波器的幅频响应和冲激响应.....	65
图 4.6 FIR 低通滤波器的幅频响应和冲激响应.....	66
图 4.7 相对误差 ε 与截断长度 T_{hb} 的关系.....	66
图 4.8 相对重构误差和稀疏位置正确发现率与截断长度 T_{hb} 的关系	67
图 4.9 运行时间	68
图 4.10 输出信噪比 RSNR 与输入信噪比 ISNR、稀疏度 K 的关系.....	68
图 4.11 回波信号($K = 50$, ISNR = 10 dB)	69
图 4.12 重构回波信号($K = 50$, ISNR = 10 dB, $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$)	69
图 5.1 MQCS 系统框图.....	73
图 5.2 近似矩阵的带状结构示意图.....	76
图 5.3 测量向量、近似矩阵和块稀疏系数向量划分示意图	77
图 5.4 测量子向量的构成	78
图 5.5 BSegSR 方法的相对重构误差	85
图 5.6 BSegSR 方法的相对重构误差和运行时间	85
图 5.7 BSegSR 与其它重构方法的相对重构误差和运行时间	86
图 5.8 RSNR 与 ISNR 和目标个数 K 的关系.....	87
图 5.9 回波信号($K = 50$, ISNR = 5 dB, $j=1$).....	87
图 5.10 重构回波信号($K = 50$, ISNR = 5 dB, $j=1$).....	88
图 6.1 SegSR 方法的划分示意图	94
图 6.2 目标的位置和幅度分布	99
图 6.3 相对重构误差和稀疏位置正确发现率($K = 100$)	100
图 6.4 正交投影前后的虚拟噪声子向量($l = 2$).....	100
图 6.5 相对重构误差与稀疏度 K 的关系	101
图 6.6 稀疏位置正确发现率与稀疏度 K 的关系	101
图 6.7 运行时间($N=9000$, $j = 3$).....	102
图 6.8 重构信噪比 RSNR ($K = 100$).....	103
图 6.9 回波信号($K = 100$, ISNR = 10 dB, $j=3$).....	103
图 6.10 重构回波信号($K = 100$, ISNR = 10 dB, $j=3$).....	104

表目录

表 3.1 不同分段方法对比.....	35
表 3.2 直接重构和 SegSR 方法的存储量.....	39
表 3.3 运算量比较.....	40
表 4.1 直接重构和基于近似矩阵采用 SegSR 方法重构的存储量.....	63
表 5.1 BSegSR 方法与其它方法的存储量	81
表 5.2 BSegSR 方法与其它方法的运算量	82
表 6.1 运算量比较	98

缩写与中英文对照

ADC	Analog-to-Digital Converter	模拟数字转换器
AIC	Analog-to-Information Conversion	模拟信息转换
BCS	Bayesian Compressive Sensing	Bayesian 压缩感知
BIHT	Block Iterative Hard Thresholding	块迭代硬阈值
BOMP	Block Orthogonal Matching Pursuit	块正交匹配追踪
BP	Basis Pursuit	基追踪
BPDN	Basis Pursuit De-noising	基追踪去噪
BPF	Band-Pass Filter	带通滤波器
BSBL	Block Sparse Bayesian learning	块稀疏 Bayesian 学习
BSegSR	Block sparsity based SegSR	块稀疏分段滑动重构
BStOMP	Block Stagewise Orthogonal Matching Pursuit	块分段正交匹配追踪
CCF	Cumulative Coherence Function	累积相干函数
CoSaMP	Compressive Sampling Matching Pursuit	压缩采样匹配追踪
CoSaMP-PKS	CoSaMP with Partially Known Support	部分支撑集已知的压缩采样匹配追踪
CRD	Constrained Random Demodulation	约束随机解调
CS	Compressive Sampling(Compressed Sensing)	压缩采样(压缩感知)
DS	Dantzig Selector	Dantzig 选择器
DSP	Digital Signal Processing/Processor	数字信号处理/处理器
EM	Expectation-Maximization	最大期望
FPGA	Field Programmable Gate Array	现场可编程门阵列
HTP	Hard Thresholding Pursuit	硬阈值追踪
IHT	Iterative Hard Thresholding	迭代硬阈值
I/Q	Inphase/Quadrature	同相/正交
IRLS	Iteratively Reweighted Least Square	迭代重加权最小二乘
ISNR	Input Signal-to-Noise Ratio	输入信噪比
LASSO	Least Absolute Shrinkage and Selection Operator	最小绝对收缩和选择算子
LNA	Low-Noise Amplifier	低噪放大器
LOT	Lapped Orthogonal Transform	重叠正交变换
LPF	Low-Pass Filter	低通滤波器
MCMC	Markov Chain Monte Carlo	马尔科夫链蒙特卡洛

MIP	Mutual Incoherence Property	互不相干特性
MP	Matching Pursuit	匹配追踪
MQCS	Multiband Quadrature Compressive Sampling	多带正交压缩采样
MWC	Modulated Wideband Converter	调制宽带转换器
NP	Nondeterministic Polynomial	非确定性多项式
NSP	Null Space Property	零空间特性
OMP	Orthogonal Matching Pursuit	正交匹配追踪
OMP-PKS	OMP with Partially Known Support	部分支撑集已知的正交匹配追踪
OP-WSegSR	Orthogonal-Projection-based WSegSR	基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构
QuadCS	Quadrature Compressive Sampling	正交压缩采样
RD	Random Demodulation	随机解调
RIC	Restricted Isometry Constant	约束等距常数
RIP	Restricted Isometry Property	约束等距特性
RMPI	Random Modulator Pre-Integrator	随机调制预积分
ROMP	Regularized Orthogonal Matching Pursuit	正则化正交匹配追踪
RSNR	Reconstruction Signal-to-Noise Ratio	重构信噪比
SBL	Sparse Bayesian Learning	稀疏 Bayesian 学习
SCS	Segmented Compressed Sampling	分段式压缩采样
SGP	Streaming Greedy Pursuit	流贪婪追踪
SP	Subspace Pursuit	子空间追踪
StOMP	Stagewise Orthogonal Matching Pursuit	分段正交匹配追踪
SegSR	Segment-Sliding Reconstruction	分段滑动重构
SR	Sparse Reconstruction	稀疏重构
SVNR	Signal-to-Virtual-Noise Ratio	信号虚拟噪声比
TBOMP	Two-step BOMP	两步块正交匹配追踪
TOMP	Two-step OMP	两步正交匹配追踪
WSegSR	Weighted Sparse Segment-Sliding Reconstruction	加权稀疏分段滑动重构
WSR	Weighted Sparse Reconstruction	加权稀疏重构

符号说明

\mathbb{R}, \mathbb{C}	实数域, 复数域
α, A	向量, 矩阵
α_A	向量 α 中索引属于集合 A 的元素组成的子向量
A_A	矩阵 A 中索引属于集合 A 的列向量组成的子矩阵
$\langle \alpha, b \rangle$	向量 α 和 b 的内积
I_N	$N \times N$ 维单位矩阵
$\text{Re}\{\cdot\}, \text{Im}\{\cdot\}$	取实部和虚部
$\text{supp}(\cdot)$	支撑集
$(\cdot)^T$	转置
$(\cdot)^H$	共轭转置
$(\cdot)^+$	Moore-Penrose 逆
$\ \cdot\ _0$	ℓ_0 范数(向量中非零元素的个数)
$\ \cdot\ _p (p > 0)$	ℓ_p 范数($p > 0$)
$\ \cdot\ _{2,0}$	混合 ℓ_2 / ℓ_0 范数
$\ \cdot\ _{2,p} (p > 0)$	混合 $\ell_2 / \ell_p (p > 0)$ 范数
$\lfloor \cdot \rfloor, \lceil \cdot \rceil$	向下, 向上取整
$ \cdot $	绝对值或集合的势

1 绪论

1.1 从 Nyquist 采样到压缩采样

在传统信号处理领域，信号处理方式可以分为模拟信号处理和数字信号处理。相比于模拟信号处理，数字信号处理具有可编程性高、灵活性强、计算精度高等优势。随着数字信号处理器(Digital Signal Processor, DSP)和现场可编程门阵列(Field Programmable Gate Array, FPGA)等集成器件的迅速发展，数字信号处理的应用越来越广泛。Nyquist 采样定理^{[1]-[4]}和模拟数字转换器(Analog-to-Digital Converter, ADC)^{[5][6]}是信号从模拟域转换到数字域的理论基础和实现手段。Nyquist 采样定理指出，对于频谱分布在 $(-f_H, f_H)$ 上的带限模拟信号 $x(t)$ ，若以 $f_s \geq 2f_H$ 的采样速率对 $x(t)$ 进行等间隔采样获取采样序列 $x(n)$ ，则原信号 $x(t)$ 可以由采样序列 $x(n)$ 完全确定。Nyquist 采样定理表明，带限模拟信号可以用离散时间序列来准确表示，这为带限模拟信号的数字化处理提供了理论保证。

Nyquist 采样定理是基于低通信号提出的采样理论。然而，在雷达和通信等应用领域，发射和接收的模拟信号一般是频谱分布在 $(-f_H, -f_L)$ 和 (f_L, f_H) 上的带通信号，或者由多个频谱互不重叠的带通信号组成的多带信号。通常，带通信号的载频远大于带宽 $B = f_H - f_L$ ，例如，X 波段雷达发射信号的载频可达到 10 GHz，而带宽一般在 100 MHz 到 1 GHz 之间，仅是载频的 1% 到 10%。类似地，多带信号的最高频率远大于有效带宽，即多带信号中所有子带信号的带宽之和。考虑由 J 个子带信号构成的多带信号，若频谱分布范围是 $\bigcup_{j=1}^J (-f_H^j, -f_L^j)$ 和 $\bigcup_{j=1}^J (f_L^j, f_H^j)$ ，则有效带宽 $B = \sum_{j=1}^J (f_H^j - f_L^j)$ 。根据 Nyquist 采样定理可知，采样速率的理论下限(Nyquist 率)是信号最高频率的两倍。显然，按照 Nyquist 采样定理对带通或多带模拟信号进行采样是相当不高效的。

理论上，对模拟信号进行均匀采样所得采样信号的频谱是原模拟信号频谱以采样速率为周期的周期延拓。那么，从频域角度来看，Nyquist 采样定理对采样速率的要求是为了避免采样信号的频谱出现混叠现象。显然，根据这一原则，对带通模拟信号进行采样时，采样速率是可以低于 Nyquist 率的。带通采样理论^[7]为以低于 Nyquist 率获取带通模拟信号的采样提供了理论依据。该理论指出，根据带通信号的中心频率和带宽，选择适当的采样速率对带通信号进行采样所得到的采样序列可以准确地确定原信号。特别地，当带通信号的中心频率和带宽满足一定条件时，采样频率可达到理论下限，即带通信号带宽的两倍。带通采样理论提出之后，人们进一步将其应用于多带模拟信号的采样，提出了基于带通均匀采样的多带信号采样理论^{[8]-[12]}。研究表明，按照带通采样理论对多带模拟信号采样时，采样速率的选择与各个子带信号的载频和带宽有关，当子带信号的载频和带宽满足一定条件时，采样速率可以取多带信号有效带宽的两倍，即 Landau 率^[13]。

根据上述针对低通、带通和多带信号的采样理论可知，它们都是利用信号的频域描述特性，以信号带宽为准则进行信号采样的。然而，随着应用需求的不断提高，信号带宽越来越大，从而对采样速率的要求越来越高。但是，受 ADC 技术的限制，高速 ADC 的发展遇到瓶颈，现行的 ADC 有时难以满足应用需求；同时，高速 ADC 产生的数据量大，对后续的数据存储和处理带来沉重的负担。为此，人们开始寻求新的采样方法和理论，以期能够在不损失信号信息的前提下，实现信号的低速采样。

实际上，信号的带限特性是信号在频域展现出的一种特性。注意到，信号是可以由其在某个基底或字典上的线性展开系数来表示的。更值得注意的是，许多信号在某个基底或字典上的展开系数中只有少量元素不为零，或者只有少量元素的幅度较大而其余元素的幅度接近于零。人们将这两种特性分别称为稀疏性和可压缩性。**E. J. Candès, J. K. Romberg, T. Tao 和 D. L. Donoho** 利用信号的稀疏性和可压缩性，提出了压缩采样或压缩感知(Compressive Sampling or Compressed Sensing, CS)理论^{[14]-[19]}。该理论指出，对于在某一基底上具有稀疏表示的信号，若采用一个与基底不相关的观测矩阵将稀疏信号从高维空间投影到低维空间上获取信号的压缩测量，那么，通过求解稀疏约束优化问题可以从压缩测量中恢复原信号。CS 理论表明，经过随机投影获取的压缩测量中包含了稀疏信号的所有信息，且压缩测量个数与信号的稀疏度(信号展开系数中非零元素的个数)有关，远小于信号的 Nyquist 采样个数，从而为模拟信号的低速采样提供了新思路。

CS 理论的基本问题是研究如何从少量线性测量中恢复稀疏信号，其基础理论主要包括信号的稀疏表示、测量矩阵的构造和稀疏重构算法。自 20 世纪 80 年代以来，人们对信号的稀疏分解开展了大量的研究工作^{[20]-[24]}，为研究信号的稀疏表示奠定了坚实的理论基础。为了保证稀疏信号的可重构性，人们提出了零空间特性^{[25][26]}、约束等距特性(Restricted Isometry Property, RIP)^{[27][28]}、互不相干特性(Mutual Incoherence Property, MIP)^[29]等性质来刻画测量矩阵，并在此基础上研究了稀疏信号的可重构条件。学者们展开了对随机矩阵^{[30]-[32]}和结构化随机矩阵的 RIP 分析，如随机 Toeplitz 矩阵^{[33]-[35]}、循环矩阵^[36]、块对角矩阵^{[37]-[41]}、带状随机矩阵^[42]、带状块 Toeplitz 矩阵^[43]等，这些研究工作为测量矩阵的构造提供了理论依据。CS 理论指出，从压缩测量中恢复稀疏信号需要求解稀疏约束优化问题。为了求解稀疏约束优化问题，人们提出了几类稀疏重构算法，主要有凸松弛算法^{[44]-[48]}、非凸优化算法^{[49]-[54]}、贪婪算法^{[55]-[63]}、稀疏 Bayesian 重构算法^{[64]-[67]}等。随着 CS 理论的发展，人们开始利用信号的稀疏结构，发展更为有效的重构算法，进一步提高信号的重构性能。许多学者发现有些稀疏信号的稀疏位置成块出现，提出了块稀疏信号的概念，继而开展了对块稀疏信号可重构条件的理论分析^{[68]-[69]}，并发展了相应的块稀疏重构算法^{[70]-[87]}。

综上所述，从 Nyquist 采样到压缩采样，采样和重构方式发生巨大变化。Nyquist

采样过程是带限连续时间信号向离散时间信号的线性投影。由于 Nyquist 采样序列是带限连续时间信号在时移 sinc 函数基底上的线性展开系数，因而连续时间信号的重构是通过对离散时间信号进行 sinc 函数线性内插来实现的。对于压缩采样而言，采样过程是高维空间的稀疏信号向低维空间的线性投影；重构是通过求解稀疏约束非线性优化问题获得原信号的稀疏表示系数，并利用稀疏表示系数和稀疏表示基底或字典恢复原信号。压缩采样克服了采样速率受制于信号带宽的局限性，为信号处理领域带来了新的革命。

1.2 模拟信息转换

CS 理论是基于离散信号提出的稀疏信号采样理论。那么，实现稀疏模拟信号的压缩采样成为一项重要研究工作。为此，人们开展了大量的研究，并提出了多种有效的实现系统。相应于基于 Nyquist 采样定理提出的 ADC，人们将基于 CS 理论提出的模拟信号压缩采样系统称为模拟信息转换(Analog-to-Information Conversion, AIC)。AIC 通过随机投影获取稀疏信号的亚 Nyquist(Sub-Nyquist)采样或低速测量；当描述 AIC 的测量矩阵满足可重构条件时，可从低速测量中恢复采样对象的 Nyquist 采样。

目前，针对不同类型的稀疏信号，人们根据不同的随机投影方式，提出了多种 AIC 系统。根据采样对象的频谱分布特性，现有 AIC 系统可分为低通型、带通型和多带型三类。低通型 AIC 系统主要有 R. G. Baraniuk 学术团队提出的随机采样^[88]、随机解调(Random Demodulation, RD)^{[89]-[92]}和随机滤波^[93]等。随机采样系统采用非均匀采样方式，通过随机选择采样时刻获取信号的采样数据，可以实现时频域稀疏信号的亚 Nyquist 率采样。与随机采样系统不同，RD 和随机滤波系统均采用均匀采样方式。RD 系统通过对稀疏信号进行随机调制、低通滤波和低速采样获取信号的压缩测量，可用于频域和时频域稀疏信号采样。随机滤波系统首先采用随机脉冲响应滤波器对稀疏信号进行滤波，然后进行低速采样获取信号的压缩测量，主要用于时域和时频域稀疏信号。与随机采样和随机滤波系统相比，RD 系统实现简单，受到更为广泛的关注。人们基于 RD 系统进一步提出了约束随机解调(Constrained Random Demodulator, CRD)^[94]、随机调制预积分(Random Modulator Pre-Integrator, RMPI)^[95]和分段式压缩采样(Segmented Compressed Sampling, SCS)^{[96]-[97]}等系统，并设计和实现了多种专用集成电路^{[98]-[102]}。

带通型 AIC 系统主要有南京理工大学提出的正交压缩采样(Quadrature Compressive Sampling, QuadCS)^{[103]-[104]}。QuadCS 系统不仅可以实现带通信号的亚 Nyquist 率采样，而且能够同时获取带通信号同相(Inphase, I)和正交(Quadrature, Q)分量的压缩测量，非常适合于雷达信号采样。QuadCS 系统首先对带通信号进行随机调制和带通滤波，然后以远低于带通信号两倍带宽的采样速率对滤波后的信号进行采样，最后利用传统数字正交解调技术获取带通信号 I/Q 分量的压缩测量。

多带型 AIC 系统主要有调制宽带转换器 (Modulated Wideband Converter, MWC)^{[105]-[107]} 和多带正交压缩采样 (Multiband QuadCS, MQCS)^[115] 等。MWC 是 M. Mishali 和 Y. C. Eldar 以通信领域中的盲频谱感知应用为研究背景提出的, 可实现对多带稀疏信号的亚 Nyquist 率采样。MWC 采用多个通道对多带信号进行随机调制、低通滤波和低速采样, 获取多路压缩测量数据。MWC 的最小采样频率由多带信号的有效带宽决定, 不能突破 Landau 率的限制。为了简化 MWC 的硬件实现, 学者们提出了多种不同的改进型 MWC 系统, 如基于随机循环矩阵的 MWC 系统^{[108][109]}、对角 MWC 系统^[110]、基于随机触发的 MWC 系统^[111]。T. Haque 和 R. T. Yazicigil 等^{[112]-[114]} 将 MWC 和模拟正交解调结构相结合, 提出了一种正交 AIC 系统并完成了硬件实现。该系统能够同时获取多带信号同相和正交分量的亚 Nyquist 率采样, 并且在系统灵敏度和功耗上优于 MWC。然而, 因其完整地保留了 MWC 的结构, 无法摆脱 MWC 的固有缺陷, 最小采样速率不能突破 Landau 率的限制。MQCS 系统是针对多带雷达^{[116][117]} 应用背景提出的亚 Landau 率采样系统, 是 QuadCS 系统在多带信号情形的推广。MQCS 系统不仅可以实现对多带信号的亚 Landau 率采样, 而且能够同时获取每个子带同相和正交分量的压缩测量。

以上仅从系统处理的稀疏信号类型出发, 介绍了一些有代表性的 AIC 系统, 更多综述内容可参见张弓等^[118] 和 P. Daponte 等^[119] 对当前 AIC 发展现状的总结。

1.3 压缩采样雷达

雷达利用目标反射的回波信号实现目标定位、跟踪、成像、识别等功能^{[120][121]}。传统雷达接收系统通常先将天线接收到的射频信号经过模拟前端处理获取基带或者中频信号, 然后采用 ADC 完成数字信号采集, 最后通过数字信号处理手段提取目标信息^[122]。图 1.1(a) 是简化的传统雷达接收系统框图。对于宽带和超宽带雷达, 雷达回波信号通常具有大带宽, 从而需要使用高速 ADC 来完成信号采集。然而, 高速 ADC 的发展遭遇瓶颈, 有时难以满足传统宽带和超宽带雷达的需求。

CS 理论为大带宽稀疏信号的低速采样提供了新的思路。人们基于雷达回波信号的稀疏性, 将 CS 理论应用于雷达领域^{[123]-[137]}, 提出了压缩采样 (CS) 雷达。CS 雷达接收系统对雷达回波信号进行亚 Nyquist 采样, 避免了传统雷达接收系统在采样大带宽回波信号时对高速 ADC 的需求。CS 雷达接收系统主要由 CS 模拟前端模块、低速 ADC 模块和 CS 信号处理模块组成, 如图 1.1(b) 所示。CS 雷达接收系统首先利用 CS 模拟前端模块获取基带或中频压缩信号(其带宽远小于回波信号的带宽), 然后采用低速 ADC 获取压缩测量数据, 最后采用 CS 信号处理方法提取目标信息。注意到, CS 雷达获取的是回波信号的压缩测量, 传统基于 Nyquist 采样数据的雷达信号处理方法不能直接用于压缩测量数据。目前, CS 信号处理方法主要有两种。一种是首先根据压缩测量数据恢复回波

信号的 Nyquist 采样，然后采用传统雷达信号处理方法完成后续处理。另一种是提出压缩域雷达信号处理方法，直接根据压缩测量数据实现目标信息提取。

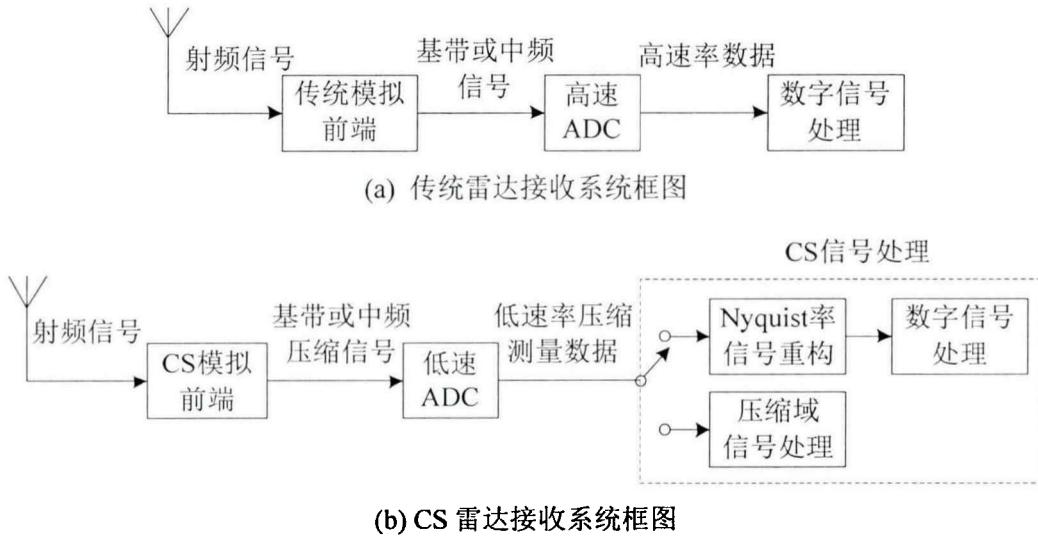


图 1.1 传统雷达和 CS 雷达接收系统框图

目前，人们已将随机滤波、RD、RMPI、QuadCS、MQCS 等 AIC 系统应用于雷达基带或中频信号采样^{[104],[115],[127]-[135]}，验证了 AIC 系统在雷达应用中的可行性。这些研究表明，可以采用 AIC 替代传统雷达接收系统的高速 ADC，发展基于 AIC 的 CS 雷达接收系统。图 1.2(a)和图 1.2(b)分别给出了基于基带采样的传统雷达和 CS 雷达接收系统。

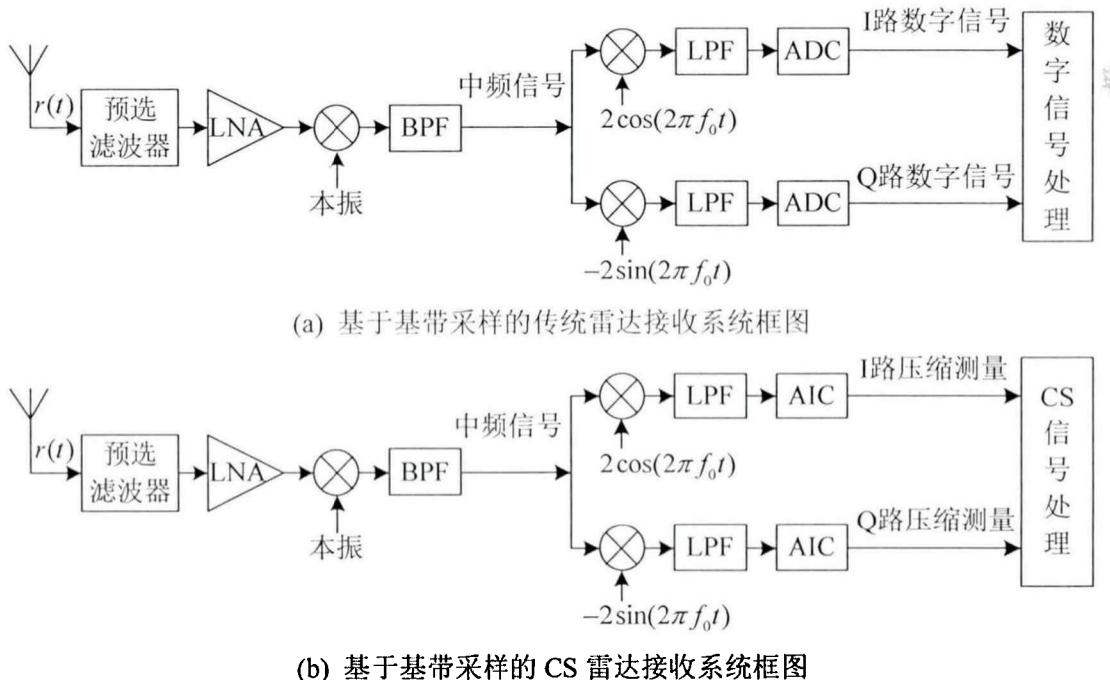


图 1.2 基于基带采样的传统雷达和 CS 雷达接收系统框图

图 1.2(a)中，天线接收到的射频信号首先经过预选滤波器和低噪放大器(Low Noise Amplifier, LNA)进行滤波和放大处理，然后与本振信号进行混频后经过带通滤波器

(Band-Pass Filter, BPF)得到载频为 f_0 的中频信号，接着经过由模拟正交混频和低通滤波器(Low-Pass Filter, LPF)组成的模拟正交解调模块获取 I/Q 两路基带模拟信号，然后经过 ADC 获取 I/Q 两路基带数字信号，最后进入数字信号处理单元完成后续处理。图 1.2(b)采用低通型 AIC 代替图 1.2(a)的 ADC，获取 I/Q 两路基带压缩测量数据，然后采用 CS 信号处理方法完成后续处理。

图 1.3(a)和图 1.3(b)分别给出了基于中频采样的传统雷达和 CS 雷达接收系统。图 1.3(a)中，传统中频采样雷达接收系统首先将天线接收后的射频信号搬移至中频进行数字化，然后利用数字正交调解结构获取 I/Q 两路基带数字信号，最后通过数字信号处理单元完成后续处理。图 1.3(b)采用带通型 AIC 代替图 1.3(a)的 ADC，获取中频压缩采样信号(压缩测量)，然后利用传统数字正交调解结构获取 I/Q 两路基带压缩测量，最后进行后续的 CS 信号处理。

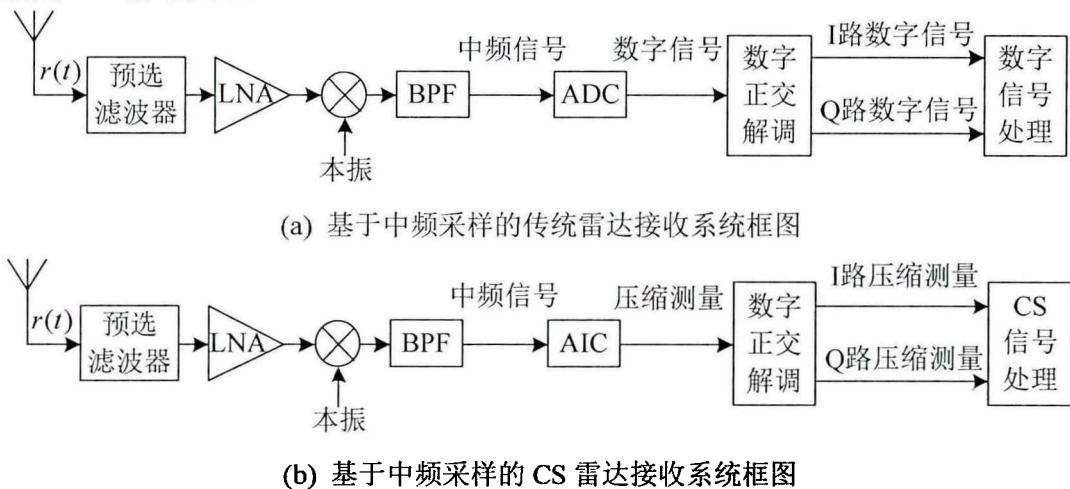


图 1.3 基于中频采样的传统雷达和 CS 雷达接收系统框图

针对 AIC 系统在雷达领域的应用，学者们开展了对雷达信号重构和目标参数估计方法的研究。R. G. Baraniuk 等^[127]将随机滤波应用于雷达成像，研究了基于稀疏重构的 CS 雷达成像性能。石光明等^[128]将 RD 系统应用于脉冲雷达信号采样，发展了基于稀疏重构的目标检测方法。G. E. Smith 等^[129]将 RD 系统应用于脉冲 Doppler 雷达信号采样，研究了首先从压缩测量数据中恢复雷达信号再按照传统雷达信号处理算法获取目标参数估计方法的性能。S. Becker^[95]和 J. Yoo 等^[131]基于 RMPI 系统研究了脉冲雷达信号的压缩采样和波形参量提取方法。E. Baransky 等^[132]将 Xampling 框架应用于脉冲 Doppler 雷达信号采样，评估了目标的参数估计性能。O. Bar-Ilan 等^[133]发展了亚 Nyquist 脉冲 Doppler 雷达的目标时延和 Doppler 估计方法。文献[103]和文献[104]研究了基于 QuadCS 系统的雷辔回波信号的压缩采样和信号重构性能。文献[134]和文献[135]将 QuadCS 系统应用于脉冲 Doppler 雷达信号采样，发展了压缩域的目标时延和 Doppler 估计方法。文献[115]将 QuadCS 系统扩展到多带雷达场景，提出了可实现多带雷辔回波亚 Landau 率

采样的 MQCS 系统，并研究了信号的重构性能。

1.4 压缩采样雷达信号重构

与传统雷达接收系统相比，在相同观测时间内，CS 雷达接收系统获取的测量数据量少，极大地降低了测量数据的存储负担。但是，根据 CS 理论，从雷达回波的压缩测量中恢复奈奎斯特率回波信号需要求解稀疏重构问题。在一些压缩采样雷达应用场景中，测量矩阵的规模大，恢复雷达信号通常需要求解大规模稀疏重构问题。例如，根据本文第 3 章采用 RD 系统获取雷达基带信号采样时给出的参数设置，测量矩阵的大小是 49800×248000 ，约需存储 1.24×10^{10} 个复数数据。按照 IEEE 双精度标准计算，测量矩阵约占 184 GB 的内存空间。显然，这需要大的存储空间存储测量矩阵。另外，采用现有稀疏重构算法直接求解大规模稀疏重构问题计算量大，难以实现实时重构。为此，本文主要研究奈奎斯特率雷达信号的快速重构方法。

注意到，在其它应用场合中，如 CS 合成孔径雷达成像^[138]、基于稀疏重构的雷达成像^[139]、基于压缩采样的无限长流信号重构^{[140]-[144]}等，也存在求解大规模稀疏重构的问题。目前，针对大规模稀疏重构问题，人们基于对稀疏信号进行分段估计的思想，提出了多种分段方式和重构方法，将原来的大规模稀疏重构问题转化为一系列小规模稀疏重构子问题进行求解。J. Yang 等^[138]针对 CS 合成孔径雷达成像应用，提出首先重构距离像，然后根据距离像进行分块重构获取相应观测子场景的图像。S. Qin 等^[139]主要研究基于稀疏重构的雷达成像，提出了一种分段重构方法。该方法采用固定大小的滑动窗以固定的滑动间隔获取每个子段的测量数据，并建立每个子段的稀疏重构子问题，然后求解每个子问题获取观测区域中的一小块图像，最终根据重构出的所有子块的图像拼接出整个观测区域的图像。T. B. Petros 等^[140]和 P. Boufounos 等^[141]分别针对具有时域和频域稀疏特性的无限长信号，基于有限长时变系统对无限长信号进行压缩采样得到的数据流，提出了一种流贪婪追踪(Streaming Greedy Pursuit, SGP)方法。不同于 S. Qin 等^[139]提出的方法，SGP 方法考虑了相邻两个子段的待重构稀疏信号之间的重叠性，提出了 Refinement 算法来求解每个稀疏重构子问题。基于 SGP 方法的思想，M. S. Asif 和 J. Romberg^[142]利用重叠正交变换(Lapped Orthogonal Transform, LOT)基底来稀疏表示光滑的无限长信号，并采用 ℓ_1 同伦算法求解每个稀疏重构子问题。在 M. S. Asif 和 J. Romberg^[142]的研究基础上，U. L. Wijewardhana 等^{[143][144]}进一步利用测量矩阵的块带状结构，基于稀疏 Bayesian 学习(Sparse Bayesian Learning, SBL)算法提出了更为有效的求解稀疏重构子问题的算法。

然而，上述方法并没有从理论上给出严格的重构误差上界，也没有从理论上分析相邻子段间的影响问题。除文献[142]-[144]外，上述其它方法产生的测量子矩阵不满足 RIP

条件，因而难以从理论上给出重构误差的上界。本文分别基于不同 AIC 发展的 CS 雷达系统，通过对系统特性以及雷达回波信号稀疏表示字典性质的分析，剖析了测量矩阵的结构，并据此提出了新的分段方式和重构方法，使得测量子矩阵满足 RIP 条件，继而发展了新的快速重构方法。

1.5 本文的主要工作

本文将低通型、带通型和多带型 AIC 应用于雷达信号采样，主要研究雷达回波信号的快速重构方法。全文分为 7 章，具体内容安排如下：

第 2 章，介绍压缩采样基本理论。首先简要阐述了稀疏信号的压缩采样和重构算法，然后介绍了块稀疏信号的压缩采样和重构算法，最后对 RD，QuadCS 和 MQCS 等典型的 AIC 系统进行了概述。

第 3 章，将低通型 AIC 应用于雷达基带信号采样，研究基于 RD 系统的脉冲雷达回波信号的快速重构方法。本章根据 RD 系统测量矩阵的带状结构，提出了分段滑动重构方法。该方法对观测时间内获得的压缩测量数据进行重叠分段，将大规模稀疏重构问题分解为一系列小规模稀疏重构子问题，通过采用滑动方式依次求解每个子问题实现稀疏信号的快速重构。分段重构性能受到相邻段引入干扰的影响，本章从理论上分析了分段滑动重构方法的重构性能，并通过仿真验证了该方法的有效性。

第 4 章，将带通型 AIC 应用于雷达中频带通信信号采样，研究基于 QuadCS 系统的脉冲雷达回波信号的快速重构方法。本章根据 QuadCS 系统特性，将 QuadCS 系统测量矩阵近似成一种具有带状结构的矩阵，然后采用分段滑动重构方法实现快速重构。本章理论上分析了对测量矩阵进行近似的合理性，并通过仿真验证了其可行性。

第 5 章，将多带型 AIC 应用于多带雷达信号采样，研究基于 MQCS 系统的多带雷达回波信号的快速重构方法。本章以探测同一场景的等带宽多带雷达为背景，在分析回波信号特征的基础上，揭示回波信号的块稀疏性，提出采用块稀疏重构模型恢复所有子带回波，并发展了块稀疏分段滑动重构方法，实现了对每个子带回波的快速重构。

第 6 章，将分段滑动重构方法应用于压缩采样雷达运动目标多脉冲回波信号的快速重构。本章考虑运动目标发生跨距离分辨单元的情形，根据多脉冲回波信号表示系数的稀疏时变性，采用概率分布模型描述稀疏位置的变化，将多脉冲回波信号重构转化为加权稀疏重构问题；然后根据分段滑动重构思想，提出基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构方法来实现快速重构。该方法利用前一个脉冲稀疏位置估计信息，构造相邻段引入干扰的正交补空间，将子段压缩测量投影到构造的正交补空间，有效地抑制了相邻段引入的干扰。仿真验证了方法的有效性。

第 7 章，对全文工作进行总结。

2 压缩采样理论基础

压缩采样(CS)是利用信号的稀疏性以低速率获取信号的采样理论。CS 理论指出，对于在某一基底上具有稀疏表示的信号，若采用随机线性投影获取信号的低速采样或测量，则通过求解稀疏重构问题可以从测量数据中恢复原信号。根据随机投影实现方式，人们提出了模拟信息转换(AIC)，实现了对稀疏模拟信号的亚 Nyquist 率采样。

本章主要介绍稀疏信号、块稀疏信号的压缩采样和重构算法，以及几种 AIC 系统。2.1 节主要介绍稀疏信号的压缩采样和重构算法，包括稀疏信号的定义、稀疏信号的压缩采样和可重构条件，以及稀疏重构算法；2.2 节主要介绍块稀疏信号的压缩采样和重构算法；2.3 节主要介绍几种 AIC 系统，包括随机解调，正交压缩采样和多带正交压缩采样等。

2.1 稀疏信号的压缩采样和重构

2.1.1 稀疏信号

稀疏信号是指在某个基底或字典上只有少量不为零的展开系数的信号。下面以离散信号为例给出稀疏信号的数学描述。令信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 在基底 $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 上的线性展开系数为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ ，则信号 \mathbf{x} 可表示为

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.1)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T \in \mathbb{R}^N$ 表示系数向量。记向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 中非零元素的个数为 K 。若 $K \ll N$ ，则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 K -稀疏向量，信号 \mathbf{x} 在基底 $\boldsymbol{\Psi}$ 上是 K -稀疏的，其中 K 表示稀疏度。定义 $\text{supp}(\boldsymbol{\alpha}) = \{n \mid \alpha_n \neq 0, n = 1, 2, \dots, N\}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的支撑集。定义 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 ℓ_0 范数，用于度量向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 中非零元素的个数。那么， K -稀疏向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 = |\text{supp}(\boldsymbol{\alpha})| = K$ 。

在实际应用中，几乎没有信号是严格 K -稀疏的。更为普遍的情况是，信号 \mathbf{x} 的系数向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 中少量元素的幅度较大，而大部分元素的幅度接近于零。若将向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 中的元素按照幅度大小降序排列，令 $|\alpha_{(i)}|$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 中第 i 个最大幅度，则有 $|\alpha_{(1)}| \geq |\alpha_{(2)}| \geq \dots \geq |\alpha_{(N)}|$ 。若存在正常数 C_1 和 q ，使得 $|\alpha_{(i)}|$ 满足幂律衰减

$$|\alpha_{(i)}| \leq C_1 i^{-q}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

则信号 \mathbf{x} 可由 K -稀疏信号近似表示，并且最佳 K -稀疏逼近误差满足

$$\sigma_{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{x}, K) = \min_{\mathbf{x}' \in \Sigma_K} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_2 \leq C_2 C_1 K^{-s} \quad (2.3)$$

其中 Σ_K 表示所有稀疏度不大于 K 的稀疏信号的集合， $s = q - 0.5$ ， C_2 是一个与 N 无关

的正常数， $\|\cdot\|_2$ 是欧几里得范数。可见，信号 x 的最佳逼近误差随着 K 的增大以指数 s 幂律衰减。通常，称满足式(2.2)的信号为 s -可压缩信号。 s 的值越大，信号的可压缩性越强。若 Ψ 是标准正交基，向量 α_k 是 K -稀疏向量，且 K 个非零元素分别对应于信号 x 的系数向量 α 中的 K 个幅度最大的系数，则 x 的最佳 K -稀疏逼近 x_k 可表示为 $x_k = \Psi \alpha_k$ 。

2.1.2 稀疏信号的压缩采样和可重构条件

对 K -稀疏信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 进行压缩采样获取测量向量 $y \in \mathbb{R}^M (M < N)$ 的过程可描述为

$$y = \Phi x \quad (2.4)$$

其中 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 表示观测矩阵。若信号 x 在基底 Ψ 上是稀疏的，且具有式(2.1)所示稀疏表示形式，则式(2.4)可表示为

$$y = \Phi \Psi \alpha = A \alpha \quad (2.5)$$

其中 $A = \Phi \Psi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 表示测量矩阵。

CS 理论要解决的一个重要问题是如何设计观测矩阵 Φ 使得观测过程不损失稀疏信号 x 的信息，从而保证从测量向量 $y = \Phi x$ 中精确恢复稀疏信号 x 。由式(2.5)可知，恢复稀疏信号 x 和恢复稀疏向量 α 是等价的。一旦恢复稀疏向量 α ，就可以根据式(2.1)恢复稀疏信号 x 。那么，从测量向量 $y = \Phi x$ 中精确恢复稀疏信号 x 的问题可转化为从 $y = A \alpha$ 中精确恢复稀疏向量 α 的问题。下面从测量矩阵 A 入手，分析稀疏向量 α 的可重构条件，即当测量矩阵 A 满足何种条件时，能够保证从 $y = A \alpha$ 中精确恢复稀疏向量 α 。

根据 $M < N$ 可知，式(2.5)是欠定方程，存在无穷多个解。但是，若式(2.5)的 K -稀疏解唯一，则稀疏向量 α 可以从压缩测量 $y = A \alpha$ 中精确恢复。那么，如何保证式(2.5)的 K -稀疏解的唯一性就成为实现稀疏信号恢复的重要问题。

令 $\mathcal{N}(A) = \{z | Az = 0\}$ 表示测量矩阵 A 的零空间，那么，式(2.5)的解可表示为

$$\hat{\alpha} = \alpha + \mathcal{N}(A) \quad (2.6)$$

假定 α' 是式(2.5)中不同于 α 的 K -稀疏解，则 $\alpha' - \alpha \in \mathcal{N}(A)$ ，且 $\alpha' - \alpha$ 的稀疏度不大于 $2K$ 。显然，若 $\mathcal{N}(A)$ 中不存在稀疏度不大于 $2K$ 的向量，则式(2.5)的 K -稀疏解是唯一的；反之亦然。可见，式(2.5)的 K -稀疏解唯一的充要条件是 $\mathcal{N}(A)$ 中不存在稀疏度不大于 $2K$ 的向量。为了便于刻画这一条件，引入测量矩阵 A 的 Spark 的定义。

定义 2.1^[25]: 对于给定的矩阵 A ，矩阵的 Spark 是指矩阵 A 的列向量线性相关时所需列向量的最小个数，记做 $\text{Spark}(A)$ 。

根据上述关于 $\mathcal{N}(A)$ 的条件和 Spark 的定义，可得使式(2.5)的 K -稀疏解唯一的充要条件。

定理 2.1^[25]: 对于任意向量 $y \in \mathbb{R}^M$ ，至多存在一个 K -稀疏向量 $\alpha \in \mathbb{R}^N$ 使得 $y = A \alpha$ 成

立的充要条件是 $\text{Spark}(A) > 2K$ 。

根据 Spark 的定义可知, $\text{Spark}(A)$ 的取值范围是 $[2, M+1]$ 。那么, 根据定理 2.1 可知, 要保证式(2.5)的 K -稀疏解唯一, 压缩测量的个数必须满足 $M \geq 2K$ 。

定理 2.1 保证了稀疏信号的可重构性。然而, 对于可压缩信号, 需要一种更严格的条件来限制 $\mathcal{N}(A)$ 。A. Cohen 等^[26]提出采用 K 阶零空间特性(Null Space Property, NSP)来刻画测量矩阵。

令 $A \subset \{1, 2, \dots, N\}$, $A^c = \{1, 2, \dots, N\} \setminus A$ 。令 $\alpha_A \in \mathbb{R}^N$ 表示将 α 中索引属于 A^c 的元素设置为 0 的列向量。

定义 2.2^[26]: 对于所有 $h \in \mathcal{N}(A)$ 和满足 $|A| \leq K$ 的 A , 若存在常数 $C > 0$ 使得

$$\|h_A\|_2 \leq C \frac{\|h_{A^c}\|_1}{\sqrt{K}} \quad (2.7)$$

成立, 则称矩阵 A 满足 K 阶零空间特性(NSP)。

定理 2.2^[145]: 若测量矩阵 $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 以常数 $C = C_0/2$ 满足 $2K$ 阶 NSP, 则存在一种重构算法 $\Delta: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ 使得重构误差满足

$$\|\Delta(A\alpha) - \alpha\|_2 \leq C_0 \frac{\sigma_K(\alpha)_1}{\sqrt{K}} \quad (2.8)$$

其中 $\sigma_K(\alpha)_1$ 表示向量 α 在 ℓ_1 范数度量下的最佳 K -稀疏逼近, 即

$$\sigma_K(\alpha)_1 = \min_{\hat{\alpha} \in \Sigma_K} \|\alpha - \hat{\alpha}\|_1 \quad (2.9)$$

反之, 若存在一种重构算法 $\Delta: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ 使得式(2.8)成立, 则矩阵 A 以常数 $C = C_0$ 满足 $2K$ 阶 NSP。

定理 2.2 为可压缩信号的重构提供了性能保证, 指出测量矩阵的 NSP 是保障可压缩信号的重构误差满足式(2.8)的充分必要条件。式(2.8)给出了重构可压缩信号时的重构误差的上界, 该误差上界由 ℓ_1 范数度量的最佳 K -稀疏逼近误差决定。

实际上, 式(2.4)和式(2.5)是无噪声背景下的测量模型。若观测过程存在观测噪声 $n \in \mathbb{R}^M$, 则测量向量 y 可表示为

$$y = \Phi x + n = A\alpha + n \quad (2.10)$$

针对有噪测量模型式(2.10), CS 理论要研究的问题是如何从 $y = A\alpha + n$ 中稳定恢复稀疏向量 α 。所谓稳定性是指观测噪声对稀疏向量重构性能的影响不会任意大。下面给出文献[146]关于稳定性的数学定义。

定义 2.3^[146]: 给定测量矩阵 $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 和重构算法 $\Delta: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$, 若组合 (A, Δ) 对任意 K -稀疏向量 α 和观测噪声 n 使得 $\|\Delta(A\alpha + n) - \alpha\|_2 \leq C\|n\|_2$ 成立, 则称组合 (A, Δ) 是 C -稳定的。

为了分析有噪情况下稀疏信号的可重构性, E. J. Candès 和 T. Tao^[27]提出了约束等距特性(RIP)来刻画测量矩阵 A 。

定义 2.4^[27]: 对于矩阵 A , 如果存在常数 $\delta \in (0,1)$ 使得

$$(1-\delta)\|\alpha\|_2^2 \leq \|A\alpha\|_2^2 \leq (1+\delta)\|\alpha\|_2^2 \quad (2.11)$$

对于所有 K -稀疏向量 α 均成立, 则称矩阵 A 满足 K 阶约束等距特性(RIP), 并且称使得式(2.11)成立的最小常数 δ_K 为 K 阶约束等距常数(Restricted Isometry Constant, RIC)。

本质上, RIP 刻画了矩阵 A 对稀疏信号的保范性。若矩阵 A 满足 K 阶 RIP 且 $\delta_K \rightarrow 0$, 则矩阵 A 的所有 $M \times K$ 维的子矩阵近似于等距映射, 即压缩测量不会减小 K -稀疏信号的能量。若矩阵 A 满足 $2K$ 阶 RIP 且 δ_{2K} 较小, 则任意两个 K -稀疏向量之间的距离在压缩测量后能够得到较好地保留, 从而为恢复 K -稀疏向量提供了保障。

根据 RIP 和 Spark 的定义可知, 当矩阵 A 满足 $\delta_{2K} < 1$ 时, $\text{Spark}(A) > 2K$ 。那么, 由定理 2.1 可得无噪声背景下有关 RIP 的稀疏信号可重构条件。

定理 2.3^[27]: 若矩阵 A 满足 $2K$ 阶 RIP 且 $\delta_{2K} < 1$, 则式(2.4)的 K -稀疏解唯一。

下面的定理 2.4 给出了 RIP 和 NSP 之间的关系。

定理 2.4^[27]: 若矩阵 A 满足 $2K$ 阶 RIP, 且 $\delta_{2K} < \sqrt{2}-1$, 则矩阵 A 满足 $2K$ 阶 NSP, 其中常数 $C = \sqrt{2}\delta_{2K}/(1-(1+\sqrt{2})\delta_{2K})$ 。

定理 2.4 表明, 若矩阵 A 满足 RIP, 则矩阵 A 也满足 NSP。可见, RIP 比 NSP 更加严格。

有关噪声背景下稳定恢复稀疏信号的理论保证, 将在第 2.1.3 小节给出。下面给出矩阵 A 满足 RIP 所需要的压缩测量个数的下界。

定理 2.5^[146]: 若矩阵 $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 满足 $2K$ 阶 RIP, 且 $\delta \in (0,0.5]$, 则 $M \geq CK\log(N/K)$, 其中 $C = 1/2\log(\sqrt{24}+1) \approx 0.28$ 。

上述基于测量矩阵 A 的 Spark 和 RIP 的理论分析表明, 当测量矩阵 A 的 Spark 和 RIC 满足一定条件时, 稀疏信号的可重构性可以得到保证。但是, 通过计算来验证这些条件需要遍历测量矩阵 A 的所有 $M \times K$ 维的子矩阵, 其计算复杂度非常高, 在实际中难以实现。为此, D. L Donoho 等^[29]提出了互不相干特性(Mutual Incoherence Property, MIP), 并采用相干系数(coherence)^[25]来刻画测量矩阵。

定义 2.5^[25]: 矩阵 A 的相干系数 μ 是指 A 的任意两个列向量 a_i 和 a_j 间的最大互相关系数, 即

$$\mu = \max_{1 \leq i < j \leq N} \frac{|\langle a_i, a_j \rangle|}{\|a_i\|_2 \|a_j\|_2} \quad (2.12)$$

矩阵 A 的相干系数 μ 的取值范围是 $[\sqrt{(N-M)/M(N-1)}, 1]$, 其下界称作 Welch 界^[147]。当 $N \gg M$ 时, Welch 界可近似表示为 $1/\sqrt{M}$, 从而有 $\mu \geq 1/\sqrt{M}$ 。

引理 2.1 给出了矩阵 A 的相干系数 μ 与 Spark 之间的关系。

引理 2.1^[146]: 对于任意矩阵 A , $\text{Spark}(A) \geq \mu^{-1} + 1$ 。

根据引理 2.1 和定理 2.1, 可得无噪声背景下关于测量矩阵 A 的相干系数的稀疏信号可重构条件。

定理 2.6^[25]: 若 $K < (\mu^{-1} + 1)/2$, 则式(2.5)的 K -稀疏解是唯一的。

结合定理 2.6 和 Welch 界可知, 采用测量矩阵 A 的相干系数描述信号可重构性时, 信号稀疏度 K 的上界为 $K = O(\sqrt{M})$ 。

此外, 引理 2.2 给出了矩阵 A 的相干系数 μ 与 RIP 之间的关系。

引理 2.2^[148]: 若矩阵 A 的列向量具有单位范数, 且矩阵 A 的相干系数 $\mu < 1/(K-1)$, 则矩阵 A 满足 K 阶 RIP 且 $\delta_K \leq (K-1)\mu$ 。

引理 2.2 中, 矩阵 A 的列向量具有单位范数是指矩阵 A 满足 $\|\mathbf{a}_n\|_2 = 1$, 其中 \mathbf{a}_n 表示矩阵 A 的第 n 列向量, $n = 1, 2, \dots, N$ 。

根据相干系数的定义可知, 矩阵的相干系数 μ 刻画了矩阵中任意两列向量间的互相关系数的最大值。那么, 利用相干系数 μ 来确定信号的可重构性实际上是一种最差情况分析方法。为了更为合理地刻画测量矩阵, J. A. Tropp^[150]提出累积相干函数(Cumulative Coherence Function, CCF)。

定义 2.6^[150]: 对于给定的正整数 k , 矩阵 A 的累积相干函数是指

$$\mu_k = \max_{|\Lambda|=k} \max_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda} \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \|\mathbf{a}_j\|_2} \quad (2.13)$$

其中 $|\Lambda|$ 表示索引集合 Λ 中元素的个数。

显然, 累积相干函数 μ_k 和相干系数 μ 之间满足 $\mu_k \leq k\mu$ 。特别地, 当 $k=1$ 时, $\mu_1 = \mu$ 。

定理 2.7^[150]: 若 $\mu_k < 1/2$, 则式(2.5)的 K -稀疏解唯一。

比较定理 2.6 和定理 2.7 可知, 定理 2.6 的条件比定理 2.7 更加严格。

根据上述稀疏信号可重构条件, 人们构造了一些能够使测量矩阵 A 满足条件的观测矩阵 Φ 。E. J. Candès 和 T. Tao^[17]指出, 对于任意 $N \times N$ 维稀疏基底 Ψ , 若 $M \times N$ 维观测矩阵 Φ 的元素服从 Gaussian 或 Bernoulli 分布, 则当 $M \geq O(K \log N)$ 时测量矩阵 A 以很大的概率满足 RIP 条件。S. Mendelson 等^[30]证明矩阵元素满足 subgaussian 分布的观测矩阵也存在类似的结论。考虑到完全随机的观测矩阵硬件实现复杂度高, 人们提出了一些易于硬件实现的结构化随机矩阵, 如随机 Toeplitz 矩阵^{[33]-[35]}, 循环矩阵^[36], 块对角矩阵^{[37]-[41]}, 带状随机矩阵^[42], 带状块 Toeplitz 矩阵^[43]等, 并从理论上分析了这些矩阵的 RIP 条件。M. F. Duarte 等对结构化观测矩阵的实现方式进行了总结, 详见文献[151]。

2.1.3 稀疏重构算法

在 CS 理论中, 利用测量矩阵 A 从测量向量 y 中恢复稀疏向量 α 的问题被称为稀疏

恢复或重构。对于理想的无噪声测量模型 $y = A\alpha$, 稀疏重构问题可表示为

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad \text{s.t.} \quad y = A\alpha \quad (2.14)$$

对于实际的有噪声测量模型 $y = A\alpha + n$, 若噪声向量 n 满足 $\|n\|_2 \leq \varepsilon$, 则噪声背景下的稀疏重构问题可表示为

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|y - A\alpha\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.15)$$

第 2.1.2 小节已经给出了式(2.14)的 K -稀疏解唯一的理论保证。但是, 求解式(2.14)和式(2.15)是 NP-难(Nondeterministic Polynomial Hard, NP-hard)问题^[152]。为了实现稀疏向量的恢复, 人们提出了几类稀疏重构算法, 主要有凸松弛算法、凸优化算法、贪婪算法、稀疏 Bayesian 重构算法等。

(1) 凸松弛算法

凸松弛算法是指将 ℓ_0 范数稀疏约束松弛为 ℓ_1 范数稀疏约束, 继而求解 ℓ_1 最小化问题实现稀疏恢复的一类算法。将式(2.14)中的 ℓ_0 范数松弛为 ℓ_1 范数, 可得

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad \text{s.t.} \quad y = A\alpha \quad (2.16)$$

其中 $\|\alpha\|_1 = \sum_{n=1}^N |\alpha_n|$ 表示向量 α 的 ℓ_1 范数。式(2.16)称为基追踪(Basis Pursuit, BP)问题。类似地, 将式(2.15)中的 ℓ_0 范数松弛为 ℓ_1 范数, 可得

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|y - A\alpha\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.17)$$

式(2.17)称为基追踪去噪(BP De-Nosing, BPDN)问题。通过引入一个正则化参数 $\lambda > 0$, 式(2.17)可转化为无约束的 ℓ_1 正则化最小二乘问题

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|A\alpha - y\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1 \quad (2.18)$$

其中 λ 用来平衡压缩测量拟合误差与稀疏向量的 ℓ_1 范数。另外, 式(2.17)还可等价为 ℓ_1 范数约束的最小二乘问题

$$\min_{\alpha} \|y - A\alpha\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|\alpha\|_1 \leq \tau \quad (2.19)$$

其中 τ 用来限制稀疏向量的 ℓ_1 范数。式(2.19)称为最小绝对值收缩与选择算子(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator, LASSO)^[153]。

实际上, 式(2.17)-式(2.19)考虑的是 ℓ_2 有界噪声的情形, 即 $\|n\|_2 \leq \varepsilon$ 。E. J. Candès 和 T. Tao 针对 ℓ_∞ 有界噪声, 即 $\|A^\top n\|_\infty \leq \xi$, 提出了 Dantzig 选择器(Dantzig Selector, DS)^[154]。DS 方法求解具有 ℓ_∞ 约束的 ℓ_1 最小化稀疏重构问题

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A^\top(y - A\alpha)\|_\infty \leq \xi \quad (2.20)$$

E. J. Candès 等证明, 若测量矩阵 A 满足 $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$, 则 ℓ_1 最小化问题式(2.16)与 ℓ_0

最小化问题式(2.14)等价^[28]。可见，在无噪声背景下，求解 ℓ_1 最小化问题可精确重构稀疏向量。文献[28]证明，若测量矩阵 A 满足 $\delta_{2K} < \sqrt{2}-1$ ，则式(2.17)的解 $\hat{\alpha}$ 满足 $\|\hat{\alpha} - \alpha\|_2 \leq C\varepsilon$ ，其中 $C = 4\sqrt{1+\delta_{2K}}/(1-(1+\sqrt{2})\delta_{2K})$ 。文献[145]证明，若测量矩阵 A 满足 $\delta_{2K} < \sqrt{2}-1$ ，则式(2.20)的解 $\hat{\alpha}$ 满足 $\|\hat{\alpha} - \alpha\|_2 \leq C\sqrt{K}\xi$ ，其中 $C = 4\sqrt{2}/(1-(1+\sqrt{2})\delta_{2K})$ 。可见，在噪声背景下，求解 ℓ_1 最小化问题可以稳定恢复稀疏向量。

ℓ_1 最小化问题可以采用多种算法求解，例如，内点法^[44]，梯度投影法^[45]，同伦法(Homotopy)^[46]，迭代收缩阈值法^[47]，Bregman 迭代算法^[48]等。凸松弛算法的计算复杂度高，比如内点法的计算复杂度为 $O(M^2N^{1.5})$ 。

(2) 非凸优化算法

非凸优化算法是指采用非凸函数代替 ℓ_0 范数稀疏约束，从而通过求解非凸优化问题实现稀疏恢复的一类算法。目前，通常采用 ℓ_p ($0 < p < 1$) 范数，对称对数函数^[50]，高斯函数^[51]等逼近 ℓ_0 范数。R. Chartrand^[49]采用 ℓ_p ($0 < p < 1$) 范数代替 ℓ_0 范数，从而将 ℓ_0 最小化问题式(2.14)转为 ℓ_p ($0 < p < 1$) 最小化问题

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_p \quad \text{s.t.} \quad y = A\alpha \quad (2.21)$$

其中 $\|\alpha\|_p = (\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^p)^{1/p}$ 表示向量 α 的 ℓ_p ($0 < p < 1$) 范数。 ℓ_p ($0 < p < 1$) 最小化问题可以采用迭代重加权最小二乘(Iteratively Reweighted Least Squares, IRLS)^[50]等算法求解。E. J. Candès 等^[51]指出采用对称对数函数逼近 ℓ_0 范数时，可以将非凸优化问题转化为一系列加权 ℓ_1 范数最小化子问题来求解。H. Mohimani 等^[52]采用高斯函数逼近 ℓ_0 范数，提出了光滑 ℓ_0 范数算法。N. Mourad 等^[53]和 G. Gasso 等^[54]分别利用凸函数替代法和凸函数差分法将非凸优化问题转化为一系列凸优化子问题来求解。

(3) 贪婪算法

贪婪算法采用迭代方式搜索稀疏向量的支撑集并更新幅度以逐步逼近稀疏向量。根据不同的支撑集搜索准则，人们提出了多种贪婪算法，例如，匹配追踪(Matching Pursuit, MP)^[21]，正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^{[55][56]}，正则化 OMP(Regularized OMP, ROMP)^{[57][58]}，压缩采样匹配追踪(Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP)^[59]，子空间追踪(Subspace Pursuit, SP)^[60]，分段 OMP(Stagewise OMP, StOMP)^[61]，迭代硬阈值(Iterative Hard Thresholding, IHT)^[62]，硬阈值追踪(Hard Thresholding Pursuit, HTP)^[63]等。现有贪婪算法中，最具代表性的是 OMP 算法。

OMP 算法在每次迭代过程中，将测量矩阵中与当前残差最相关的列向量的索引作为本次迭代搜索出的稀疏位置，然后求解最小二乘问题更新所有已搜索到的稀疏位置的幅度，具体流程见算法 2.1。根据 OMP 算法的流程可知，OMP 算法的运算量与迭代次数和每次迭代的运算量有关。在第 i 次迭代中，更新稀疏位置估计时求内积的运算量为 $O(MN)$ ；更新幅度估计时求解最小二乘问题的运算量与求解方法有关，例如，直接求

解的运算量为 $O(Mi + Mi^2 + i^3)$ ，采用 Cholesky 和 QR 分解时的运算量分别为 $O(Mi + i^2)$ 和 $O(Mi)$ ^[149]。由于 $i \ll N$ ，每次迭代中，内积的运算量占主导。若仅考虑每次迭代中内积的运算量，则采用 OMP 算法恢复 K -稀疏向量时，完成 K 次迭代的运算量为 $O(KMN)$ 。

算法 2.1: OMP

输入: 测量向量 y , 测量矩阵 A

输出: 估计的稀疏向量 \hat{a}

初始化: 估计值 $\hat{a} = 0$, 索引集 $A^{[0]} = \emptyset$, 残差 $r^{[0]} = y$, 迭代次数 $i=1$ 。

步骤: 循环执行步骤 1)-4), 直至满足迭代终止条件。

- 1) 寻找 A 中与残差 $r^{[i-1]}$ 最相关的列向量的索引, 即 $\lambda^{[i]} = \arg \max_{j=1, \dots, N-1} |\langle a_j, r^{[i-1]} \rangle|$, 更新索引集 $A^{[i]} = A^{[i-1]} \cup \{\lambda^{[i]}\}$ 。
- 2) 更新估计值 $\hat{a}_{A^{[i]}} = (A_{A^{[i]}})^+ y$, 其中 $A_{A^{[i]}}$ 表示 A 中索引属于 $A^{[i]}$ 的列向量组成的子矩阵。
- 3) 更新残差 $r^{[i]} = y - A_{A^{[i]}} \hat{a}_{A^{[i]}}$ 。
- 4) 更新迭代次数 $i=i+1$ 。

在无噪声背景下, OMP 算法的迭代终止条件可设置为 $\|r^{[i]}\|_2 = 0$ 。文献[150]和[155]-[158]业已证明, 在无噪声背景下, 当测量矩阵的相干系数或 RIC 满足一定条件时, OMP 算法可以精确恢复稀疏向量。定理 2.8 和定理 2.9 分别基于测量矩阵的 MIP 和 RIP 给出了 OMP 算法精确恢复稀疏向量的充分条件。

定理 2.8^[150]: 若测量矩阵 A 满足 $\mu < 1/(2K-1)$, OMP 算法可以从 $y = A\alpha$ 中精确恢复 K -稀疏向量 α 。

定理 2.9^[156]: 若测量矩阵 A 满足 $\delta_{K+1} < 1/(\sqrt{K}+1)$, 则 OMP 算法经过 K 次迭代可以从 $y = A\alpha$ 中恢复 K -稀疏向量 α 。

在噪声背景下, OMP 算法的迭代终止条件通常为 $\|r^{[i]}\|_2 \leq \varepsilon_2$ 或 $\|A^T r^{[i]}\|_\infty \leq \varepsilon_\infty$, 其中 ε_2 和 ε_∞ 的取值与噪声特性有关。文献[159]和文献[160]-[162]分别基于测量矩阵的 MIP 和 RIP 分析了在 ℓ_2 和 ℓ_∞ 有界噪声以及高斯噪声背景下, 采用 OMP 算法精确恢复稀疏向量支撑集的条件。有关 OMP 算法在 ℓ_2 和 ℓ_∞ 有界噪声下的性能保证, 定理 2.10 和定理 2.11 分别给出了基于测量矩阵的 MIP 和 RIP 的分析结果。

定理 2.10^[159]: 对于测量模型 $y = A\alpha + n$, 若噪声 n 满足 $\|n\|_2 \leq b_2 (\|A^T n\|_\infty \leq b_\infty)$, 测量矩阵 A 的相干系数满足 $\mu < 1/(2K-1)$, K -稀疏向量 α 中非零元素 $\alpha_n (n \in \Lambda)$ 满足

$$|\alpha_n| \geq \frac{2b_2}{1-(2K-1)\mu} (|\alpha_n| \geq \frac{2b_\infty}{1-(2K-1)\mu} \left(1 + \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{1-(K-1)\mu}}\right)) \quad (2.22)$$

则采用迭代终止条件为 $\|r^{[i]}\|_2 \leq b_2 (\|A^T r^{[i]}\|_\infty \leq b_\infty)$ 的 OMP 算法可以从 y 中精确恢复 α 的支撑集 Λ 。

定理 2.11^[161]: 对于测量模型 $y = A\alpha + n$, 若噪声 n 满足 $\|n\|_2 \leq b_2 (\|A^T n\|_\infty \leq b_\infty)$, 测量矩阵 A 满足 $\delta_{K+1} < 1/(\sqrt{K}+1)$, K -稀疏向量 α 中非零元素 $\alpha_n (n \in \Lambda)$ 满足

$$|\alpha_n| \geq \frac{(\sqrt{1+\delta_{K+1}} + 1)b_2}{1 - (\sqrt{K} + 1)\delta_{K+1}} \quad (2.23)$$

$$(|\alpha_n| \geq \frac{(\sqrt{1+\delta_{K+1}} + 1)\sqrt{K}b_\infty}{1 - (\sqrt{K} + 1)\delta_{K+1}})$$

则采用迭代终止条件为 $\|\mathbf{r}^{[i]}\|_2 \leq b_2 (\|\mathbf{A}^T \mathbf{r}^{[i]}\|_\infty \leq b_\infty)$ 的 OMP 算法可以从 y 中精确恢复 α 的支撑集 A 。

由定理 2.10 和定理 2.11 可知，在 ℓ_2 和 ℓ_∞ 有界噪声背景下，当测量矩阵的相干系数或 RIC、稀疏向量非零元素的幅度满足一定条件时，OMP 算法采用合适的迭代终止条件就可以精确获取稀疏向量的支撑集。

考虑到一些实际应用中，存在部分先验信息，例如，待估计稀疏向量的支撑集中有一部分事先已知的情形。R. E. Carrillo 等^[63]基于现有稀疏重构算法提出了部分支撑集已知的稀疏重构算法，如 OMP-PKS(OMP with Partially Known Support)、CoSaMP-PKS 等算法。这些算法与原算法的不同之处在于初始化步骤。这些算法利用已知的部分支撑集完成相应的初始化步骤。例如，OMP-PKS 算法在初始化时，首先根据已知的支撑集初始化索引集 $A^{[0]}$ ，然后初始化残差 $\mathbf{r}^{[0]} = \mathbf{y} - \mathbf{A}_{A^{[0]}} \hat{\alpha}_{A^{[0]}}$ ，其中 $\hat{\alpha}_{A^{[0]}} = (\mathbf{A}_{A^{[0]}})^+ \mathbf{y}$ 。除此之外，OMP-PKS 算法的其它步骤与 OMP 算法相同。

(4) 稀疏 Bayesian 重构算法

稀疏 Bayesian 重构算法是一种基于统计分析的稀疏重构算法。这类算法假设信号的稀疏系数向量服从某种先验概率分布。D. P. Wipf 等^[64]基于 Gaussian 先验分布提出了稀疏 Bayesian 学习(Sparse Bayesian Learning, SBL)算法。S. Ji 等^[65]研究 Bayesian 框架下的 CS 重构问题，提出了 Bayesian 压缩感知(Bayesian Compressive Sensing, BCS)框架。S. D. Babacan 等^[66]研究了 Laplace 先验分布下的 SBL 算法。D. Baron 等^[67]将编码理论中的置信传播(Belief Propagation)解码方法和 Bayesian 重构方法相结合，提出了置信传播 Bayesian 重构方法，该方法需要的测量个数为 $O(K \log(N))$ ，计算复杂度为 $O(N \log^2(N))$ 。

人们期望稀疏重构算法能够同时满足以下要求：所需压缩测量个数少；在噪声环境下鲁棒性(robust)好；对任意稀疏信号都能保证一致的重构性能；计算复杂度低。然而，现有稀疏重构算法难以同时满足所有要求。对于上述四类稀疏重构算法而言，凸松弛类算法的鲁棒性较好，贪婪算法的计算复杂度较低。在实际应用中，通常根据不同的条件和要求，选择合适的算法。

2.2 块稀疏信号的压缩采样和重构

2.2.1 块稀疏信号

记信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 在基底 $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 上的系数向量为 $v \in \mathbb{R}^N$ ，即 $x = \Psi v$ 。若向量 v 可进一步描述为

$$\boldsymbol{\nu} = \underbrace{[\nu_1, \dots, \nu_{d_1}, \nu_{d_1+1}, \dots, \nu_{d_1+d_2}, \dots, \nu_{N-d_{N_B}+1}, \dots, \nu_N]}_{\boldsymbol{\nu}^T[1]}^T \quad (2.24)$$

$$\underbrace{\nu_{d_1+1}, \dots, \nu_{d_1+d_2}, \dots, \nu_{N-d_{N_B}+1}, \dots, \nu_N}_{\boldsymbol{\nu}^T[2]} \quad \underbrace{\nu_{N-d_{N_B}+1}, \dots, \nu_N}_{\boldsymbol{\nu}^T[N_B]}$$

其中， $\nu[i] \in \mathbb{R}^d$ 表示 $\boldsymbol{\nu}$ 的第 i 个子块， d_i 表示第 i 个子块的大小， N_B 表示子块的个数。定义分块 $\mathcal{I} = \{d_1, d_2, \dots, d_{N_B}\}$ 以表征每个子块的大小。定义混合 ℓ_2 / ℓ_0 范数

$$\|\boldsymbol{\nu}\|_{2,0} = \sum_{i=0}^{N_B} I(\|\nu[i]\|_2 > 0) \quad (2.25)$$

其中 $I(\cdot)$ 表示指示函数，即当 $\|\nu[i]\|_2 > 0$ 时， $I(\|\nu[i]\|_2 > 0)$ 取值为 1，反之为 0。如果向量 $\boldsymbol{\nu}$ 满足 $\|\boldsymbol{\nu}\|_{2,0} = K \ll N$ ，则称向量 $\boldsymbol{\nu}$ 是块 K -稀疏向量，信号 \mathbf{x} 在基底 $\boldsymbol{\Psi}$ 上是块 K -稀疏的，其中 K 表示块稀疏度。

定义块稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ 的支撑集 $A = \text{supp}(\boldsymbol{\nu}) = \{i | \nu[i] \neq 0, i = 1, 2, \dots, N_B\}$ ，则 $\|\boldsymbol{\nu}\|_{2,0} = |A|$ 。定义

$$|\nu_{\max}| = \max_{i \in A} \|\nu[i]\|_2, \quad |\nu_{\min}| = \min_{i \in A} \|\nu[i]\|_2 \quad (2.26)$$

则 $|\nu_{\max}|^2$ 和 $|\nu_{\min}|^2$ 分别表示块稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ 中非零块能量的最大值和最小值。

2.2.2 块稀疏信号的压缩采样和可重构条件

若将块 K -稀疏信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 通过观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ($M < N$) 获取压缩测量向量 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ ，则有

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{B} \boldsymbol{\nu} \quad (2.27)$$

其中 $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 表示测量矩阵。

类似于式(2.24)对向量 $\boldsymbol{\nu}$ 的分块描述，测量矩阵 \mathbf{B} 可按列划分为 N_B 个子块，即

$$\mathbf{B} = \underbrace{[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{c_1}, \mathbf{b}_{c_1+1}, \dots, \mathbf{b}_{c_1+c_2}, \dots, \mathbf{b}_{N-c_{N_B}+1}, \dots, \mathbf{b}_N]}_{\mathbf{B}[1]} \quad (2.28)$$

$$\underbrace{\mathbf{B}[2]}_{\mathbf{B}[N_B]}$$

其中， \mathbf{b}_n 表示 \mathbf{B} 的第 n ($n = 1, 2, \dots, N$) 列向量， $\mathbf{B}[i] \in \mathbb{R}^{M \times c_i}$ 表示 \mathbf{B} 的第 i ($i = 1, 2, \dots, N_B$) 个子块。那么， $\mathbf{y} = \mathbf{B} \boldsymbol{\nu}$ 可表示为

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N_B} \mathbf{B}[i] \nu[i] \quad (2.29)$$

当观测过程存在噪声时，测量向量 \mathbf{y} 可表示为

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} + \mathbf{n} = \mathbf{B} \boldsymbol{\nu} + \mathbf{n} \quad (2.30)$$

其中 $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^M$ 表示观测噪声。

对于块稀疏测量模型式(2.27)和式(2.30)，CS 理论要解决的一个重要问题是如何从无噪测量向量 $\mathbf{y} = \mathbf{B} \boldsymbol{\nu}$ 中精确恢复块稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ 以及从有噪测量向量 $\mathbf{y} = \mathbf{B} \boldsymbol{\nu} + \mathbf{n}$ 中稳定恢复块稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ 的问题。一旦恢复块稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ ，就可以根据 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\nu}$ 恢复块稀疏信号 \mathbf{x} 。

下面介绍几种与测量矩阵 \mathbf{B} 有关的块稀疏信号可重构条件。

为了分析块稀疏信号的可重构性, Y. C. Eldar 和 M. Mishali^[69]基于测量矩阵的 RIP 提出了块约束等距特性(block-RIP)。

定义 2.7^[69]: 对于矩阵 \mathbf{B} , 如果存在常数 $\delta^T \in (0,1)$ 使得

$$(1 - \delta^T) \|\mathbf{v}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Bv}\|_2^2 \leq (1 + \delta^T) \|\mathbf{v}\|_2^2 \quad (2.31)$$

对于分块 $\mathcal{I} = \{c_1, c_2, \dots, c_{N_B}\}$ 的所有块 K -稀疏向量 \mathbf{v} 均成立, 则称矩阵 \mathbf{B} 在分块 \mathcal{I} 上满足 K 阶块约束等距特性, 并称使得式(2.31)成立的最小常数 δ_K^T 为 K 阶块约束等距常数 (block-RIC)。

基于测量矩阵 \mathbf{B} 的块 RIP, Y. C. Eldar 和 M. Mishali^[69]分析了无噪测量模型式(2.27)的块 K -稀疏解唯一的充分条件。

定理 2.12^[69]: 若测量矩阵 \mathbf{B} 的块 RIP 满足 $\delta_{2K}^T < 1$, 则存在唯一的块 K -稀疏向量 \mathbf{v} 使得 $y = \mathbf{Bv}$ 成立。

特别地, 在测量矩阵中每个子块的列向量相互独立, 且每个子块大小相同的情况下, Y. C. Eldar 等^[71]提出了块相干系数(block coherence)和子相干系数(sub-coherence)分别刻画测量矩阵的全局特性和局部特性。

定义 2.8^[71]: 设矩阵 \mathbf{B} 的列向量具有单位范数, 每个子块的列向量相互独立, 并且每个子块的大小均为 c 。矩阵 \mathbf{B} 的块相干系数 μ_B 和子相干系数 μ_s 分别定义为

$$\mu_B = \max_{1 \leq i < j \leq N_B} \left(\|\mathbf{B}^H[i]\mathbf{B}[j]\|_2 / c \right) \quad (2.32)$$

$$\mu_s = \max_{1 \leq r \leq N_B} \max_{1 \leq i < j \leq d} \left| \mathbf{b}_i^H \mathbf{b}_j \right|, \quad \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \in \mathbf{B}[r] \quad (2.33)$$

特别地, 当 $c=1$ 时, 定义 $\mu_s = 0$ 。

根据 μ_B , μ_s 和 μ 的定义, 可知 $\mu_B \in [0, \mu]$, $\mu_s \in [0, \mu]$ 。特殊地, 若矩阵 \mathbf{B} 中每个子块的列向量正交, 即 $\mathbf{B}^H[i]\mathbf{B}[i] = \mathbf{I}_c$, $i = 1, 2, \dots, N_B$, 则有 $\mu_s = 0$ 和 $\mu_B \leq 1/c$ 。

X. Lv 等^[72]和陈鹏等^[73]揭示了 μ_B , μ_s 与 δ_K^T 的关系: $\delta_K^T \leq (c-1)\mu_s + (K-1)c\mu_B$ 。显然, 若 $K < (\mu_B^{-1} + c - (c-1)\mu_s/\mu_B)/(2c)$, 则 $\delta_{2K}^T < 1$ 。那么, 根据定理 2.12 可得式(2.27)的块 K -稀疏解唯一的充分条件。

定理 2.13: 设向量 \mathbf{v} 是每个子块大小均为 c 的任意块 K -稀疏向量, 测量矩阵 \mathbf{B} 具有块相干系数 μ_B 和子相干系数 μ_s 。若 $K < (\mu_B^{-1} + c - (c-1)\mu_s/\mu_B)/(2c)$, 则存在唯一的块 K -稀疏向量 \mathbf{v} 使得 $y = \mathbf{Bv}$ 成立。

2.2.3 块稀疏重构算法

在 CS 理论中, 从测量向量 $y = \mathbf{Bv}$ 中恢复块 K -稀疏向量 \mathbf{v} 的问题可以描述为

$$\min_{\mathbf{v}} \|\mathbf{v}\|_{2,0} \quad \text{s.t.} \quad y = \mathbf{Bv} \quad (2.34)$$

对于测量模型 $\mathbf{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{n}$, 若噪声向量 \mathbf{n} 满足 $\|\mathbf{n}\|_2 \leq \varepsilon$, 则块稀疏重构问题可表示为

$$\min_{\boldsymbol{\nu}} \|\boldsymbol{\nu}\|_{2,0} \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{B}\boldsymbol{\nu}\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.35)$$

然而, 式(2.34)和式(2.35)是 NP-难问题。为了重构块稀疏向量, 人们将用于实现稀疏向量重构的算法扩展到块稀疏模型, 发展了相应的块稀疏重构算法, 例如, 混合 ℓ_2 / ℓ_1 优化算法、非凸优化块稀疏重构算法、块贪婪算法和块稀疏 Bayesian 重构算法等。

(1) 混合 ℓ_2 / ℓ_1 凸优化算法

混合 ℓ_2 / ℓ_1 优化算法是指将求解稀疏重构问题的凸松弛算法扩展到块稀疏重构模型而形成的一类算法。定义混合 ℓ_2 / ℓ_1 范数 $\|\boldsymbol{\nu}\|_{2,1} = \sum_{n=0}^{N-1} \|\boldsymbol{\nu}[n]\|_2$ 。采用 $\|\boldsymbol{\nu}\|_{2,1}$ 代替式(2.34)和式(2.35)中的 $\|\boldsymbol{\nu}\|_{2,0}$, 可得混合 ℓ_2 / ℓ_1 优化问题

$$\min_{\boldsymbol{\nu}} \|\boldsymbol{\nu}\|_{2,1} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\nu} \quad (2.36)$$

$$\min_{\boldsymbol{\nu}} \|\boldsymbol{\nu}\|_{2,1} \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{B}\boldsymbol{\nu}\|_2 \leq \varepsilon \quad (2.37)$$

Y. C. Eldar 和 M. Mishali^[69]证明, 当测量矩阵的块 RIP 满足 $\delta_{2K}^T < \sqrt{2}-1$ 时, 式(2.36)与式(2.34)等价。J. H. Lin 和 S. Li^[70]进一步将等价条件放宽至 $\delta_{2K}^T < 0.4931$ 。可见, 在无噪声背景下, 求解混合 ℓ_2 / ℓ_1 优化问题式(2.36)可以精确重构块稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ 。另外, Y. C. Eldar 等^[71]基于测量矩阵的相干性分析了块稀疏向量的精确重构条件。

定理 2.14^[71]: 设向量 $\boldsymbol{\nu}$ 是每个子块大小均为 c 的任意块 K -稀疏向量, 测量矩阵 \mathbf{B} 具有块相干系数 μ_B 和子相干系数 μ_s 。若 $K < (\mu_B^{-1} + c - (c-1)\mu_s/\mu_B)/(2c)$, 则采用混合 ℓ_2 / ℓ_1 优化算法可以从测量向量 $\mathbf{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\nu}$ 中恢复块 K -稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ 。

针对测量向量存在噪声的情况, Y. C. Eldar 和 M. Mishali^[69]基于测量矩阵的块 RIP 分析了式(2.37)解的稳定性。

定理 2.15^[69]: 设 $\boldsymbol{\nu}$ 是具有分块 \mathcal{I} 的任意块 K -稀疏向量, 测量向量 $\mathbf{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{n}$, 其中噪声向量 \mathbf{n} 满足 $\|\mathbf{n}\|_2 \leq \varepsilon$ 。若测量矩阵 \mathbf{B} 的块 RIP 满足 $\delta_{2K}^T < \sqrt{2}-1$, 则式(2.37)的解 $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ 满足 $\|\hat{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\nu}\|_2 \leq C\varepsilon$, 其中 $C = 4\sqrt{1 + \delta_{2K}^T}/(1 - (1 + \sqrt{2})\delta_{2K}^T)$ 。

混合 ℓ_2 / ℓ_1 优化问题可采用迭代重加权 ℓ_2 / ℓ_1 算法^[75]、组 LASSO^{[76][77]}算法等求解。

(2) 非凸优化块稀疏重构算法

非凸优化块稀疏重构算法采用非凸函数代替 ℓ_2 / ℓ_0 范数作为块稀疏约束, 从而通过求解非凸优化问题实现块稀疏重构。非凸优化块稀疏重构算法是将求解稀疏重构问题的非凸优化算法扩展到块稀疏重构模型的产物。A. Majumdar 等^[78]将求解稀疏重构问题的 ℓ_p ($0 < p < 1$) 最小化算法扩展到块稀疏重构模型, 提出了混合 ℓ_2 / ℓ_p ($0 < p < 1$) 非凸优化算法。该算法采用混合 ℓ_2 / ℓ_p ($0 < p < 1$) 范数 $\|\boldsymbol{\nu}\|_{2,p} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|\boldsymbol{\nu}[n]\|_2^p\right)^{1/p}$ 代替式(2.34)中的混合 ℓ_2 / ℓ_0 范数 $\|\boldsymbol{\nu}\|_{2,0}$, 然后通过求解混合 ℓ_2 / ℓ_p ($0 < p < 1$) 最小化问题

$$\min_{\boldsymbol{\nu}} \|\boldsymbol{\nu}\|_{2,p} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\nu} \quad (2.38)$$

恢复块稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ 。Y. Wang 等^[79]基于测量矩阵的块 RIP 分析了混合 ℓ_2 / ℓ_p ($0 < p < 1$) 非凸优化算法在无噪声和有噪声背景下的重构性能。A. Majumdar 等^[78]将光滑 ℓ_0 范数算法扩展到块稀疏模型，采用高斯函数逼近 ℓ_2 / ℓ_0 范数，发展了光滑 ℓ_2 / ℓ_0 范数算法。

(3) 块贪婪算法

块贪婪算法是稀疏重构模型下的贪婪算法在块稀疏重构模型下的推广。Y. C. Eldar 等^[71]将 MP 和 OMP 算法扩展到块稀疏重构模型，分别提出了块匹配追踪(Block MP, BMP) 和块正交匹配追踪(Block OMP, BOMP) 算法。R. G. Baraniuk 等^[80]分别将 CoSaMP 和 IHT 算法扩展到块稀疏重构模型，提出了块压缩采样匹配追踪(Block CoSaMP, BCoSaMP) 和块迭代硬阈值(Block IHT, BIHT) 算法。黄博学和周彤^[81]将 StOMP 算法扩展到块稀疏重构模型，提出了块分段正交匹配追踪(Block StOMP, BStOMP) 算法。

上述贪婪算法中，最具代表性的是 BOMP 算法，其流程见算法 2.2。BOMP 算法在每次迭代过程中，根据残差与测量矩阵每个子块的相关性选择块稀疏位置，然后求解最小二乘问题更新所有已搜索到的块稀疏位置的幅度。根据 BOMP 算法的流程可知，BOMP 算法的运算量与迭代次数和每次迭代的运算量有关。在第 i 次迭代中，更新稀疏位置估计时求内积的运算量为 $O(MN)$ ；更新幅度估计时求解最小二乘问题的运算量与采用的求解方法有关，例如，直接求解的运算量为 $O(Mic + M^2c^2 + i^3c^3)$ ，采用 Cholesky 和 QR 分解时的运算量分别为 $O(Mic + i^2c^2)$ 和 $O(Mic)$ ，其中 c 表示块稀疏向量每个子块的大小。由于 $ic \ll N$ ，每次迭代中，内积的运算量占主导。若仅考虑每次迭代中内积的运算量，则采用 BOMP 算法恢复 K -稀疏向量时，完成 K 次迭代的运算量为 $O(KMN)$ 。

算法 2.2: BOMP

输入: 测量向量 \mathbf{y} ，测量矩阵 \mathbf{B}

输出: 估计的块稀疏向量 $\hat{\boldsymbol{\nu}}$

初始化: 估计值 $\hat{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}$ ，索引集 $A^{[0]} = \emptyset$ ，残差 $r^{[0]} = \mathbf{y}$ ，迭代次数 $i = 1$ 。

步骤: 循环执行步骤 1)-4)，直至满足迭代终止条件。

- 1) 寻找 \mathbf{B} 中与残差 $r^{[i-1]}$ 最相关块的索引，即 $\lambda^{[i]} = \arg \max_{j=1,2,\dots,N_b} \|(\mathbf{B}[j])^\top r^{[i-1]}\|_2$ ，更新索引集 $A^{[i]} = A^{[i-1]} \cup \{\lambda^{[i]}\}$ 。
- 2) 更新估计值 $\hat{\boldsymbol{\nu}}_{A^{[i]}} = (\mathbf{B}_{A^{[i]}})^\dagger \mathbf{y}$ ，其中 $\mathbf{B}_{A^{[i]}}$ 表示 \mathbf{B} 中索引属于 $A^{[i]}$ 的块组成的子矩阵。
- 3) 更新残差 $r^{[i]} = \mathbf{y} - \mathbf{B}_{A^{[i]}} \hat{\boldsymbol{\nu}}_{A^{[i]}}$ 。
- 4) 更新迭代次数 $i = i + 1$ 。

Y. Fu 等^[82]和 Y. C. Eldar 等^[71]分别基于测量矩阵的块 RIP 和块相干性，分析了采用 BOMP 算法从无噪测量向量 $\mathbf{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\nu}$ 中精确恢复块稀疏向量 $\boldsymbol{\nu}$ 的条件。

定理 2.16^[82]: 设 $\boldsymbol{\nu}$ 是任意块 K -稀疏向量，若测量矩阵 \mathbf{B} 满足 $\delta_{K+1}^T < 1/(\sqrt{K} + 1)$ ，则 BOMP 算法经过 K 次迭代就可以从 $\mathbf{y} = \mathbf{B}\boldsymbol{\nu}$ 中恢复 $\boldsymbol{\nu}$ 。

定理 2.17^[71]: 设向量 ν 是每个子块大小均为 c 的任意块 K -稀疏向量, 测量矩阵 B 具有块相干系数 μ_B 和子相干系数 μ_s 。若 $Kc < (\mu_B^{-1} + c - (c-1)\mu_s/\mu_B)/2$, 则采用 BOMP 算法可以从测量向量 $y = B\nu$ 中恢复 ν 。

Ben-Haim Z 和 Y. C. Eldar^[83]基于测量矩阵的块相干性分析了有界噪声和高斯噪声背景下 BOMP 算法的性能保证。

定理 2.18^[83]: 对于测量模型 $y = B\nu + n$, 其中噪声 n 满足 $\|n\|_2 \leq \varepsilon$, 测量矩阵 B 具有块相干系数 μ_B 和子相干系数 μ_s 。若

$$(1-(c-1)\mu_s)|\nu_{\min}| > 2\varepsilon\sqrt{1+(c-1)\mu_s} + (2K-1)c\mu_B|\nu_{\min}| \quad (2.39)$$

则 BOMP 算法可以精确恢复块 K -稀疏向量 ν 的支撑集, 并且向量 ν 的估计值 $\hat{\nu}$ 与真实值 ν 间绝对误差的上界满足

$$\|\hat{\nu} - \nu\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-(c-1)\mu_s - (K-1)c\mu_B}} \quad (2.40)$$

定理 2.19^[83]: 对于测量模型 $y = B\nu + n$, 其中高斯噪声 n 满足 $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_N)$, 测量矩阵 B 具有块相干系数 μ_B 和子相干系数 μ_s 。若存在常数 $\beta \geq 1/c$ 使得

$$(1-(c-1)\mu_s - (2K-1)c\mu_B)|\nu_{\min}| \geq 2\sigma\sqrt{2\beta c(1+(c-1)\mu_s)\log N} \quad (2.41)$$

成立, 则 BOMP 算法以概率 $1 - 0.8c(2\beta c \log N)^{c/2-1}/N^{\beta c-1}$ 精确恢复块 K -稀疏向量 ν 的支撑集, 并且向量 ν 的估计值 $\hat{\nu}$ 与真实值 ν 间绝对误差的上界满足

$$\|\hat{\nu} - \nu\|_2 \leq \frac{\sqrt{2\beta(1+(c-1)\mu_s)cK\sigma^2 \log N}}{1-(c-1)\mu_s - (K-1)c\mu_B} \quad (2.42)$$

(4) 块稀疏 Bayesian 算法

块稀疏 Bayesian 算法是稀疏 Bayesian 算法在块稀疏重构模型下的推广。Z. Zhang 和 B. D. Rao^{[84][85]}提出了块稀疏 Bayesian 学习(Block Sparse Bayesian learning, BSBL)框架, 然后基于 BSBL 框架提出了两种分别用于子块大小已知和未知情形的算法。L. Yu 等^[86]提出了一种基于 BCS 框架的块稀疏重构算法, 该算法利用层次 Bayesian(hierarchical Bayesian)模型对稀疏先验和块先验进行建模, 并采用马尔科夫链蒙特卡洛(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)实现 Bayesian 推断。M. Korki 等^[87]提出了一种块迭代 Bayesian 算法(Block Iterative Bayesian Algorithm, Block-IBA), 该算法在 Bayesian 框架下利用最大期望(Expectation-Maximization, EM)算法迭代估计块稀疏信号的幅度和位置。

2.3 模拟信息转换

CS 理论是基于离散稀疏信号提出的信号表示理论。模拟信息转换(AIC), 以 CS 理

论为基础，有效地实现了稀疏模拟信号的亚 Nyquist 采样，已成为目前宽带信号采样的重要手段。人们根据不同的随机投影方式，提出了多种 AIC 系统。根据采样对象的类型，现有 AIC 系统可分为低通型、带通型和多带型三种。业已提出的 AIC 系统中，随机解调(RD)、正交压缩采样(QuadCS)和多带正交压缩采样(MQCS)分别属于低通型 AIC、带通型 AIC 和多带型 AIC。本节主要介绍 RD、QuadCS 和 MQCS 三种 AIC 系统。

2.3.1 随机解调

随机解调(RD)是一种低通型 AIC 系统。如图 2.1 所示，RD 系统首先采用伪随机信号 $p(t)$ 对输入信号 $x(t)$ 进行扩频，其中 $p(t)$ 以不低于 $x(t)$ 的两倍带宽的速率在 +1 和 -1 间随机取值；然后将扩频输出信号经过积分时间为 T_{int} 的积分器进行滤波；最后，在 $t = m/T_{\text{cs}}$ 时刻对积分器的输出进行采样以获取压缩测量值 y_m ，其中采样频率 $f_{\text{cs}} = 1/T_{\text{int}}$ 。若信号 $x(t)$ 的带宽为 $B/2$ ，则 RD 的降采样率为 $R = B/f_{\text{cs}}$ 。记观测时间 T 内 $x(t)$ 的 Nyquist 采样数据的个数为 $N = \lfloor TB \rfloor$ ，RD 输出的压缩测量个数为 $M = \lfloor Tf_{\text{cs}} \rfloor$ 。

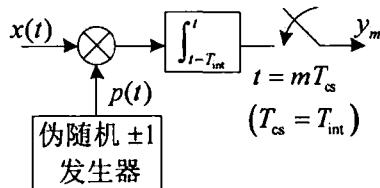


图 2.1 随机解调系统框图

J. A. Tropp 等^[92]以多频稀疏信号为例，刻画了 RD 的测量矩阵。设输入信号包含 K 个频率不超过 $B/2$ 的单频复信号， $\tilde{\mathbf{y}} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$ 是观测时间 $T = 1$ s 内输出的 M 个复压缩测量构成的向量。那么，RD 系统获取模拟信号压缩测量的过程可表示为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Phi} \tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Phi} \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{a}} \quad (2.43)$$

其中 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 表示 RD 的观测矩阵； $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 在基底 $\tilde{\mathbf{F}} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 上具有稀疏表示的离散时间信号，即 $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{a}}$ ； $\tilde{\mathbf{F}}$ 表示经过列置换的离散傅里叶变换矩阵，即 $\tilde{\mathbf{F}} = N^{-1/2} [e^{-2\pi j k l / N}]_{j,k}$ ， $j = 0, 1, \dots, N-1$ ， $k = 0, \pm 1, \dots, \pm(N/2-1), N/2$ ； $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 是 K -稀疏向量； $\tilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Phi} \tilde{\mathbf{F}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 表示 RD 的测量矩阵。另外，RD 的观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 可进一步表示为

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{H} \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.44)$$

其中 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 表示积分和采样过程， $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\xi) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示扩频过程， $\xi \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 是由以等概率取值为 ± 1 的元素组成的随机向量。特殊地，若降采样率 R 为整数，且 $M = N/R$ 时， \mathbf{H} 可表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{I}_R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

其中 $\mathbf{I}_R \in \mathbb{R}^{R \times 1}$ 是全 1 列向量(所有元素均为 1)。那么, 测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 可进一步表示为

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\Sigma\tilde{\mathbf{F}} \quad (2.46)$$

文献[92]指出, 当采样频率 f_{cs} 选择适当时, RD 的 $M \times N$ 维测量矩阵具有 RIP。根据 RD 的压缩测量个数与采样频率之间的关系, 可得定理 2.20 关于测量矩阵满足 RIP 对 RD 的压缩测量个数的要求。

定理 2.20^[92]: 若 RD 的压缩测量个数满足

$$M \geq C\delta^{-2}K \log^6 N \quad (2.47)$$

其中 C 为常数, 则 RD 的测量矩阵以高于 $1 - O(N^{-1})$ 的概率满足 K 阶 RIP, 且 $\delta_K \leq \delta$ 。

文献[164]提出了调制单位范数紧框架(Modulated Unit-norm Tight Frame, MUTF), 指出当测量个数 $M = O(K \log^2 K \log^2 N)$ 时, 满足 MUTF 的测量矩阵以高概率具有 RIP。下面首先阐述 MUTF, 继而说明 RD 的测量矩阵属于 MUTF。

定理 2.21^[164]: 假设测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 可表示为三个矩阵的乘积, 即 $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{B}}$, 其中矩阵 $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 是单位范数紧框架(UTF), $\mathbf{D} = \text{diag}(\xi) \in \mathbb{R}^{L \times L}$ 是对角矩阵, 其对角线上的元素由具有零均值单位方差的独立 r -subgaussian 随机变量组成, 矩阵 $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{b}_{l,n}] \in \mathbb{C}^{L \times N}$ 是列正交矩阵, 即 $\tilde{\mathbf{B}}^H \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{I}_N$ 。若对于 $\delta \in (0, 1)$, 有

$$M \geq c\delta^{-2}KL\mu^2(\tilde{\mathbf{B}})(\log^2 K \log^2 \hat{N}) \quad (2.48)$$

其中 $c > 0$ 是仅与 r 有关的参数, $\mu(\tilde{\mathbf{B}}) = \max_{0 \leq l \leq L-1, 0 \leq n \leq N-1} |\tilde{b}_{l,n}|$ 表示矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 中元素的最大幅值, $\hat{N} = \max\{L, N\}$, 则矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 至少以概率 $1 - \hat{N}^{-\log \hat{N} \log^2 K}$ 满足 RIP, 且 $\delta_K \leq \delta$ 。

对于 RD 的测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\Sigma\tilde{\mathbf{F}}$, 根据 Σ 和 $\tilde{\mathbf{F}}$ 以及 MUTF 的定义可知, 若要证明 $\tilde{\mathbf{A}}$ 是 MUTF, 则需要证明矩阵 \mathbf{H} 是单位范数紧框架(UTF)。引理 2.3 给出了矩阵是 UTF 的充分必要条件。

引理 2.3^[165]: 对于 $M \times L$ 的列归一化 $\tilde{\mathbf{U}}$, 矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}$ 是 UTF 的充分必要条件是: $\tilde{\mathbf{U}}$ 的 M 个非零奇异值等于 $\sqrt{L/M}$, 或者 $\sqrt{M/L}\tilde{\mathbf{U}}$ 的行向量构成正交族。

根据引理 2.3, 式(2.45)所示的矩阵 \mathbf{H} 是 UTF。因此, 测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 是 MUTF。根据定理 2.21 可知, 当 RD 系统输出的测量个数满足 $M \geq c\delta^{-2}K(\log^2 K \log^2 N)$ 时, 其中 $c > 0$ 是仅与 r 有关的参数, 测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\Sigma\tilde{\mathbf{F}}$ 至少以概率 $1 - N^{-\log N \log^2 K}$ 满足 RIP, 且 $\delta_K \leq \delta$ 。可见, 与定理 2.20 相比, RD 测量矩阵满足 RIP 条件时对测量个数的要求进一步降低。

上述关于 RD 测量矩阵的 RIP 分析, 使得从 RD 系统获取的压缩测量数据中恢复原稀疏信号具有了理论保证。在雷达应用领域, 石光明等^[128]和 G. E. Smith 等^[129]将 RD 系统分别应用于脉冲雷达信号采样和脉冲 Doppler 雷达信号采样, 通过仿真验证了 RD 系统在雷达应用中的有效性。由于 RD 系统属于低通型 AIC, 因而基于 RD 发展的雷达系统采用基带压缩采样方式获取雷达回波信号的 I/Q 压缩测量, 其系统结构如图 1.2(b)所

示。本文将基于 RD 发展的雷达系统称为随机解调压缩采样雷达系统，并将在第 3 章详细介绍 RD 系统获取基带雷达回波信号压缩采样的原理。

2.3.2 正交压缩采样

正交压缩采样(QuadCS)是一种可实现中频带通信号压缩采样的 AIC 系统。QuadCS 首先利用随机投影压缩中频带通信号的带宽，然后利用传统的正交采样技术对压缩后的带通信号进行采样，获取带通信号同相和正交分量的压缩测量。如图 2.2 所示，QuadCS 由低速采样模块和正交解调模块组成，其中低速采样模块通过随机扩频和带通滤波实现带通信号的随机投影，正交解调模块用于获取带通信号同相和正交分量的压缩测量。

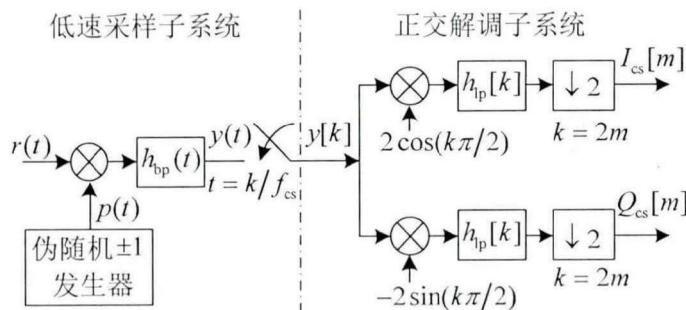


图 2.2 正交压缩采样系统框图

设带通信号 $r(t)$ 的带宽为 B ，稀疏度为 K ，记观测时间 T 内 $r(t)$ 的同相和正交分量的 Nyquist 采样数据个数为 $N = \lfloor TB \rfloor$ ，QuadCS 系统输出的同相和正交分量压缩测量个数均为 $M = \lfloor Tf_{cs} \rfloor$ 。文献[104]将 QuadCS 系统应用于中频雷达信号采样，并从频域角度分析了 QuadCS 系统测量矩阵的 RIP，指出当压缩测量个数 M 满足一定条件时，QuadCS 系统的频域复测量矩阵 \hat{A} 具有 RIP。

定理 2.22^[104]：若 QuadCS 的压缩测量个数满足

$$M \geq 32\delta_K^{-1}K \left(K \log(eN/K) + 2 \log K + \log(\eta^{-1}) + 6.08 \right) \quad (2.49)$$

则 QuadCS 的频域复测量矩阵 \hat{A} 以高于 $1-\eta$ 的概率具有约束等距常数 δ_K 。

定理 2.22 表明，为使 QuadCS 的测量矩阵具有 RIP，压缩测量个数需要满足 $M = O(K^2 \log(N/K))$ 。然而，文献[104]的仿真实验结果表明，当压缩测量个数满足 $M = O(K \log(N/K))$ 时，QuadCS 系统能够以接近 100% 的概率成功重构 K -稀疏信号。另外，文献[104]的仿真验证了 QuadCS 系统用于中频雷达信号采样的有效性。本文将基于 QuadCS 系统发展的压缩采样雷达称为正交压缩采样雷达，其系统结构如图 1.3(b)所示。本文将在第 4 章详细介绍正交压缩采样雷达的工作原理。

2.3.3 多带正交压缩采样

多带正交压缩采样(MQCS)是针对多带信号提出的 AIC 系统。如图 2.3 所示，MQCS

系统由亚 Landau 率采样模块和多带正交解调模块两部分组成。亚 Landau 率采样模块采用多个支路对多带信号分别进行随机扩频和带通滤波，以实现对每个子带的随机投影，然后对所有子带随机投影的累加信号进行低速采样获得多带信号的压缩测量；多带解调模块采用多个正交解调支路分别提取每个子带的同相和正交分量的压缩测量。

图 2.3 中， $r(t)$ 表示多带信号； $p^j(t)$ 和 $h_{bp}^j(t)$ 分别表示第 j 个支路的随机扩频信号和带通滤波器； f_{cs} 表示采样频率； $h_{ip}^j[k]$ 和 D^j 分别表示正交解调模块中第 j 个支路的数字低通滤波器和抽取因子； $I_{cs}^j[m]$ 和 $Q_{cs}^j[m]$ 分别表示第 j 个支路的同相和正交分量的压缩测量。

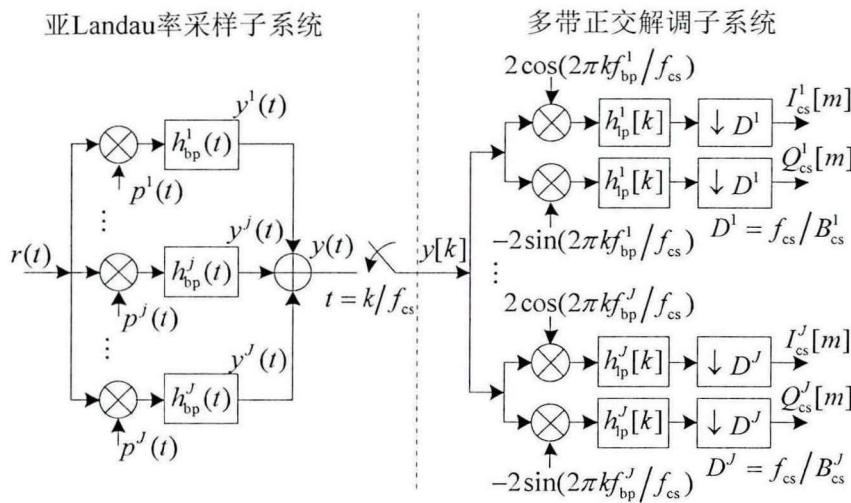


图 2.3 多带正交压缩采样系统框图

MQCS 系统是 QuadCS 系统在多带信号模型下的扩展，其基本原理是采用多个支路分别实现每个子带稀疏信号的压缩采样。文献[115]的分析表明，MQCS 系统的每个支路均可等效为一个独立的 QuadCS 系统。根据文献[115]对 QuadCS 系统测量矩阵的 RIP 分析可知，当 MQCS 系统的每个支路的压缩测量个数满足一定条件时，该支路的测量矩阵具有 RIP。因此，根据每个子带的同相和正交分量的压缩测量，通过求解稀疏重构问题可以恢复每个子带信号的 Nyquist 采样。文献[115]将 MQCS 系统应用于多带雷达信号采样，并通过仿真验证了 MQCS 系统在多带雷达应用中的有效性。本文将基于 MQCS 系统发展的压缩采样雷达称为多带正交压缩采样雷达，其工作原理将在第 5 章详细介绍。

2.4 本章小结

本章主要介绍了 CS 基本原理，首先从稀疏信号的压缩采样、可重构条件和稀疏重构算法等方面阐述了稀疏信号的压缩采样和重构算法；然后，从块稀疏信号的压缩采样、可重构条件和块稀疏重构算法等方面阐述了块稀疏信号的压缩采样和重构算法；最后，介绍了随机解调、正交压缩采样和多带正交压缩采样等 AIC 系统。

3 随机解调压缩采样雷达信号的快速重构

随机解调(RD)压缩采样雷达是以雷达基带回波信号为压缩采样对象的雷达接收系统。该系统首先对接收到的射频回波信号搬移到基带，并分别获取雷达基带回波信号的I/Q分量，然后采用两个RD模信转换结构对I/Q分量进行压缩采样，分别获取回波信号的I/Q压缩测量。根据压缩采样理论，从I/Q压缩测量数据中恢复奈奎斯特率基带回波信号可以通过求解稀疏重构问题来实现。然而，如3.1.2节所述，恢复雷达基带回波信号需要求解大规模稀疏重构问题。目前，采用现有稀疏重构算法直接求解面临存储量和计算量大的问题，难以实现实时重构。为此，本章基于随机解调压缩采样雷达，研究快速重构雷达基带回波信号的方法。

注意到，在其它应用中，如雷达成像^{[138][139]}、无限长流信号重构^{[140][141]}等，也存在大规模稀疏重构问题。人们利用测量矩阵的结构特性，提出对稀疏信号进行分段重构的思想，发展了多种分段方式对测量向量、测量矩阵和稀疏信号进行划分，将原来的大规模稀疏重构问题转化为一系列小规模稀疏重构子问题，然后采用滑动方式依次求解每个子问题获取每段稀疏信号的重构值，最终实现稀疏信号的整体重构。然而，由于子问题中的测量子矩阵并不满足约束等距特性，难以从理论上分析子问题的重构性能。

本章根据RD系统特性和雷达基带回波信号稀疏表示字典的结构，分析了测量矩阵的结构特性，然后提出了一种分段滑动重构方法。与已有方法不同，分段滑动重构方法产生的测量子矩阵具有约束等距特性，便于分析子问题的重构性能。

由于测量矩阵并不是块对角结构，按照分段滑动重构方法进行划分后，每段测量子向量除了包含由该段稀疏系数子向量引入的测量数据外，还包含由前一段稀疏系数子向量的不精确估计引入的测量误差，以及由后一段稀疏系数子向量引入的测量数据。为便于描述，本章将后两者分别称为前向虚拟噪声和后向虚拟噪声，统称为虚拟噪声。本章从理论上分析了虚拟噪声的特性及其对当前段稀疏系数位置和幅度估计的影响。理论分析表明，后向虚拟噪声水平可能比前向虚拟噪声高得多，从而使得后向虚拟噪声对稀疏系数子向量重构性能的影响较大。

为了降低后向虚拟噪声的影响，本章利用前向和后向虚拟噪声存在范围的不同，提出了一种两步正交匹配追踪(Two-step Orthogonal Matching Pursuit, TOMP)算法。基于相邻稀疏系数子向量间存在重叠部分的特点，TOMP算法将前一段稀疏系数子向量的部分支撑集估计作为当前段稀疏系数子向量的先验信息。本章通过数值仿真验证了分段滑动重构方法以及TOMP算法的有效性。

本章内容安排如下：3.1节给出信号模型和问题描述；3.2节分析测量矩阵的结构，并简述分段重构的思想；3.3节阐述分段滑动重构方法的原理，并分析存储量和运算量；

3.4 节分析分段滑动重构方法的性能；3.5 节给出数值仿真结果；3.6 节总结本章内容。

3.1 信号模型和问题描述

3.1.1 信号模型

设雷达发射载频为 f_c 、带宽为 B 、脉冲宽度为 T_p 的射频脉冲信号。对于 K 个静止的非起起伏点目标场景，雷达在观测时间 T 内接收的回波信号可表示为

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k a(t-t_k) \cos[2\pi f_c(t-t_k) + \phi(t-t_k) + \varphi_k], t \in [0, T] \quad (3.1)$$

其中 $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 分别是发射信号的包络和相位， σ_k ， t_k 和 φ_k 分别是第 k 个目标的反射系数、时延和相位偏移。可见，回波信号 $r(t)$ 是中心频率为 f_c 、带宽为 B 的带通信号。

令 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 分别表示带通信号 $r(t)$ 的同相(I)和正交(Q)分量，则 $r(t)$ 可表示为

$$r(t) = I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (3.2)$$

其中

$$I(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k a(t-t_k) \cos[\phi(t-t_k) + \varphi_k - 2\pi f_c t_k] \quad (3.3)$$

$$Q(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k a(t-t_k) \sin[\phi(t-t_k) + \varphi_k - 2\pi f_c t_k] \quad (3.4)$$

记 $\tilde{s}_0(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$ 为发射信号的复包络，其中 i 表示虚数单位。那么，回波信号 $r(t)$ 的复包络可表示为

$$\tilde{s}(t) = I(t) + iQ(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{\sigma}_k \tilde{s}_0(t-t_k) \quad (3.5)$$

其中 $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k e^{i(\varphi_k - 2\pi f_c t_k)}$ 表示目标的复反射系数。可见， $\tilde{s}(t)$ 是 K 个时移 $\tilde{s}_0(t)$ 的加权叠加。

根据 CS 理论，以亚 Nyquist 率采样 $\tilde{s}(t)$ 的一项前提条件是 $\tilde{s}(t)$ 具有稀疏表示。在许多雷达应用中，发射信号的复包络 $\tilde{s}_0(t)$ 是已知的。通常，采用波形匹配字典^[128]稀疏表示 $\tilde{s}(t)$ ，其中波形匹配字典 $\tilde{\psi}(t)$ 由 $\tilde{s}_0(t)$ 经过观测时间 T 内所有 Nyquist 采样格点的时延组成。令 $\tau_0 = 1/B$ 表示 Nyquist 采样间隔，则 $\tilde{\psi}(t) = \{\tilde{\psi}_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$ ，其中 $\tilde{\psi}_n(t) = \tilde{s}_0(t-n\tau_0)$ 表示字典 $\tilde{\psi}(t)$ 的第 n 个原子， $N = \lfloor (T-T_p)/\tau_0 \rfloor$ 。此外，为了简化符号，我们用符号 N 表示观测时间 T 内 Nyquist 采样个数，即 $N = \lfloor T/\tau_0 \rfloor$ 。

若目标时延满足 $t_k \in \{0, \tau_0, \dots, (N-1)\tau_0\}$ ，利用波形匹配字典 $\tilde{\psi}(t)$ ，可将 $\tilde{s}(t)$ 表示为

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n \tilde{\psi}_n(t) = \tilde{\psi}(t) \tilde{\sigma} \quad (3.6)$$

其中 $\tilde{\sigma} = [\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{N-1}]^T$ 是复反射系数向量，且 $\tilde{\sigma}$ 中非零元素的个数等于目标个数 K 。若 $K \ll N$ ，则称 $\tilde{s}(t)$ 为 K -稀疏信号。

3.1.2 雷达基带回波信号的压缩采样

本小节以回波信号 $r(t)$ 的 I/Q 分量模拟信号 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 为采样对象，阐述基于 RD 系统获取回波信号 I/Q 分量压缩测量的工作原理。

图 3.1 给出了基于 RD 系统的雷达基带信号压缩采样框图，其中图 3.1(a)是 I/Q 分量模拟信号压缩采样框图，图 3.1(b)是等效的复包络压缩采样框图。

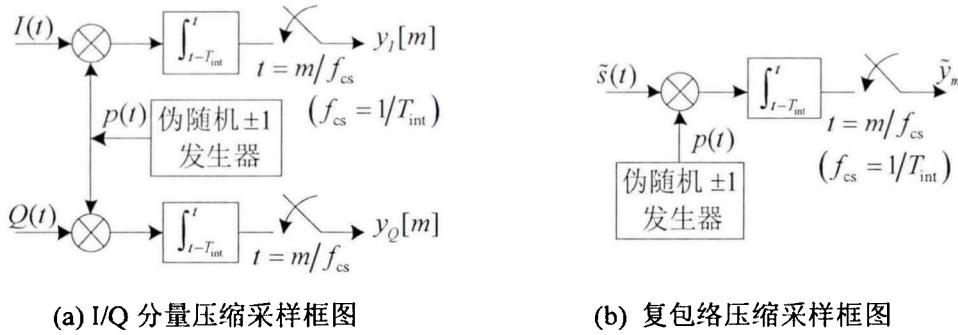


图 3.1 基于 RD 系统的雷达基带信号压缩采样框图

如图 3.1(a)所示， $I(t)$ 和 $Q(t)$ 分别经过两个相同的 RD 系统获取相应的压缩测量 $y_I[m]$ 和 $y_Q[m]$ 。在 I 支路， $I(t)$ 首先与伪随机信号 $p(t)$ 相乘，其中 $p(t)$ 以速率 B_p ($B_p \geq B$) 在 +1 和 -1 间随机取值，然后经过积分时间为 T_{int} 的积分器进行滤波，最后以采样速率 $f_{cs} = 1/T_{int}$ 对积分器的输出进行采样，获取 I 路压缩测量值 $y_I[m]$ ，即

$$y_I[m] = \int_{(m-1)T_{int}}^{mT_{int}} I(t)p(t)dt, m=1, 2, \dots, M \quad (3.7)$$

其中 $M = \lfloor Tf_{cs} \rfloor$ 表示观测时间 T 内获得的压缩测量个数。类似地，Q 支路输出的压缩测量值 $y_Q[m]$ 可表示为

$$y_Q[m] = \int_{(m-1)T_{int}}^{mT_{int}} Q(t)p(t)dt, m=1, 2, \dots, M \quad (3.8)$$

定义复压缩测量 $\tilde{y}_m = y_I[m] + iy_Q[m]$ ，则 \tilde{y}_m 可表示为

$$\tilde{y}_m = \int_{(m-1)T_{int}}^{mT_{int}} \tilde{s}(t)p(t)dt, m=1, 2, \dots, M \quad (3.9)$$

可见， \tilde{y}_m 是复包络 $\tilde{s}(t)$ 在 $t = m/f_{cs}$ 时刻的复压缩测量。那么，图 3.1(a)可等效表示为复包络 $\tilde{s}(t)$ 的压缩采样框图，见图 3.1(b)。

根据图 3.1(b)可知，若利用复包络 $\tilde{s}(t)$ 在波形匹配字典 $\tilde{\psi}(t)$ 上的稀疏表示(式(3.6))，则字典 $\tilde{\psi}(t)$ 的第 n 个原子 $\tilde{\psi}_n(t)$ 经过 RD 系统后的测量值可表示为

$$\tilde{a}_{m,n} = \int_{(m-1)T_{int}}^{mT_{int}} \tilde{\psi}_n(t)p(t)dt, m=1, 2, \dots, M, n=0, 1, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

结合式(3.6)、式(3.9)和式(3.10)，可得

$$\tilde{y}_m = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n \tilde{a}_{m,n}, \quad m=1, 2, \dots, M \quad (3.11)$$

定义 $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_M]^T$, $\tilde{\mathbf{a}}_n = [\tilde{a}_{1,n}, \tilde{a}_{2,n}, \dots, \tilde{a}_{M,n}]^T$ 和 $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}_0, \tilde{\mathbf{a}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_{N-1}]$, 则式(3.11)可表示成矩阵形式

$$\tilde{\mathbf{y}} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n \tilde{\mathbf{a}}_n = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.12)$$

其中, $\tilde{\mathbf{y}}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}$ 分别称为测量向量和测量矩阵。

根据复包络 $\tilde{s}(t)$ 的 Nyquist 采样速率 B 和亚 Nyquist 采样速率 f_{cs} , 定义 RD 系统的降采样率 $R = B/f_{cs}$ 。通常, R 是大于 1 的整数。根据 $R > 1$, 可知 $M < N$ 。那么, 式(3.12)是一个欠定方程。

令 $\tilde{\Psi}$ 表示以 Nyquist 采样速率对波形匹配字典 $\tilde{\psi}(t) (t \in [0, T])$ 中的每个原子进行离散化后得到的矩阵。根据式(2.44)所示 RD 系统观测矩阵 Φ , 可将测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 表示为

$$\tilde{\mathbf{A}} = \Phi \tilde{\Psi} = H \Sigma \tilde{\Psi} \quad (3.13)$$

根据定理 2.21 可知, 若 $\tilde{\Psi}$ 是列正交矩阵, 则测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 能够以高概率满足 RIP 条件。

由 CS 理论可知, 若欠定方程式(3.12)中的测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 满足 RIP 条件, 则从式(3.12)中获取稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的问题可以转化为稀疏重构问题

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.14)$$

一旦获取 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, 就可根据式(3.6)恢复基带回波 $\tilde{s}(t)$ 。可见, 恢收回波信号等效于恢复稀疏系数向量。

然而, 在许多雷达应用场景中, 测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的规模大。例如, 对于发射信号带宽为 $B = 100$ MHz、脉冲宽度为 $T_p = 10$ μs 的脉冲雷达系统, 在观测时间 $T = 2490$ μs 内回波信号复包络的 Nyquist 采样个数 $N = 249000$ 。若以 $1/5$ Nyquist 采样速率获取回波信号复包络的压缩测量, 则观测时间 $T = 2490$ μs 内的复压缩测量个数 $M = 49800$ 。若目标时延在 $[0, T - T_p]$ 内, 则测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的大小是 49800×248000 , 约需存储 1.24×10^{10} 个复数数据。按照 IEEE 双精度标准计算, 测量矩阵占据的内存空间约为 184 GB。目前, 采用现有算法直接求解大规模稀疏重构问题难以实现快速重构。

本文利用测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的结构特点, 提出一种分段滑动重构方法以快速重构稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 。3.2 节首先分析测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的结构, 然后介绍现有的几种分段重构方法以及存在的问题, 最后阐述本文提出的分段滑动重构方法的思想。

3.2 测量矩阵的结构和分段重构思想

根据式(3.10)可知, 测量矩阵 \tilde{A} 是 RD 系统作用于波形匹配字典 $\tilde{\psi}(t)$ 的结果。由于发射信号复包络 $\tilde{s}_0(t)$ 的脉冲宽度为 T_p , 即 $\tilde{s}_0(t)=0$, $t \notin [0, T_p]$, 因而波形匹配字典 $\tilde{\psi}(t)$ 中 $\tilde{\psi}_n(t)=\tilde{s}_0(t-n\tau_0)$ 的脉冲宽度也是 T_p , 即 $\tilde{\psi}_n(t)=0$, $t \notin [n\tau_0, T_p+n\tau_0]$, $n=0, 1, \dots, N-1$, 其中 $N=\lfloor(T-T_p)/\tau_0\rfloor$ 。因此, 根据式(3.10)可知, 在 RD 系统作用下, 测量矩阵 \tilde{A} 的第 n 列向量中部分元素的值为零, 即 $\tilde{a}_{m,n}=0$, $m \leq \lfloor n/R \rfloor$ 或 $m \geq \lceil (T_p+n\tau_0)/T_{\text{int}} \rceil + 1$ 。那么, 测量矩阵 \tilde{A} 可描述为

$$\tilde{a}_{m,n}=0, n/R < m-d \text{ 或 } n/R \geq m, m=1, 2, \dots, M, n=0, 1, \dots, N-1 \quad (3.15)$$

其中 $d=\max_n \left\{ \lceil (T_p+n\tau_0)/T_{\text{int}} \rceil - \lfloor n/R \rfloor \right\}$ 列向量最大非零区域的长度, R 表示行向量间的偏移量。可见, 测量矩阵 \tilde{A} 具有带状结构。为了描述方便, 称 d 为带状矩阵的垂直带。

令 $N_p=\lfloor T_p/\tau_0 \rfloor$ 和 $M_p=\lfloor T_p f_{\text{cs}} \rfloor$ 分别表示脉冲宽度 T_p 内 Nyquist 采样和复压缩采样数据的个数。若 T_p 既是 τ_0 的整数倍, 又是 T_{int} 的整数倍, 则 N_p , M_p 和 d 三者满足 $N_p=(d-1)R$ 和 $M_p=d-1$ 。例如, 设 $\tau_0=0.1 \mu\text{s}$, $T_p=0.9 \mu\text{s}$ 和 $T_{\text{int}}=0.3 \mu\text{s}$, 则 $R=3$, $M_p=3$, $N_p=9$, $d=4$ 。图 3.2 给出了测量矩阵的示意图, 图中空白区域的值均为 0。

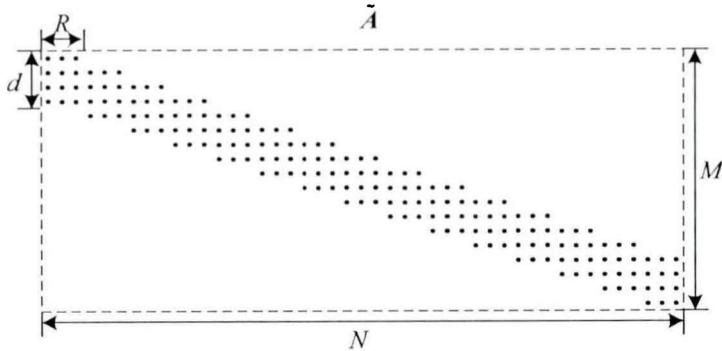


图 3.2 带状测量矩阵示意图

注意到, 测量矩阵 \tilde{A} 中存在大量空白区域。我们考虑对测量矩阵 \tilde{A} 、测量向量 \tilde{y} 和系数向量 $\tilde{\sigma}$ 进行分段处理, 将式(3.14)的大规模稀疏重构问题分解成一系列小规模稀疏重构子问题来求解。

一种直接的分段处理方法是对测量向量和测量矩阵进行不重叠划分, 见图 3.3。该方法将测量向量 \tilde{y} 划分为 L_d 个互不重叠的测量子向量 $\tilde{y}^l \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times 1}$, $l=1, 2, \dots, L_d$, 其中 $\tilde{M}=SM_p$; 将测量矩阵 \tilde{A} 划分为 L_d 个互不重叠的测量子矩阵 $\tilde{A}^l \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times \tilde{N}}$, $l=1, 2, \dots, L_d$, 其中 \tilde{A}^l 是对测量矩阵 \tilde{A} 按每块 \tilde{M} 行进行不重叠分块后去除全零列向量形成的, 除首末段外, 有 $\tilde{N}=(S+1)N_p$ 。此外, 将系数向量 $\tilde{\sigma}$ 分成 L_d 个相互重叠的系数子向量 $\tilde{\sigma}^l \in \mathbb{C}^{\tilde{N} \times 1}$, $l=1, 2, \dots, L_d$, 其中 $\tilde{\sigma}^l$ 是从 $\tilde{\sigma}$ 中提取与 \tilde{A}^l 中列向量相对应的元素组成的。按照上述划分方式, 式(3.14)的大规模稀疏重构问题可分解成 L_d 个子问题

$$\hat{\tilde{\sigma}}^l = \arg \min_{\tilde{\sigma}^l} \|\tilde{\sigma}^l\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{y}^l = \tilde{A}^l \tilde{\sigma}^l, \quad l=1, 2, \dots, L_d \quad (3.16)$$

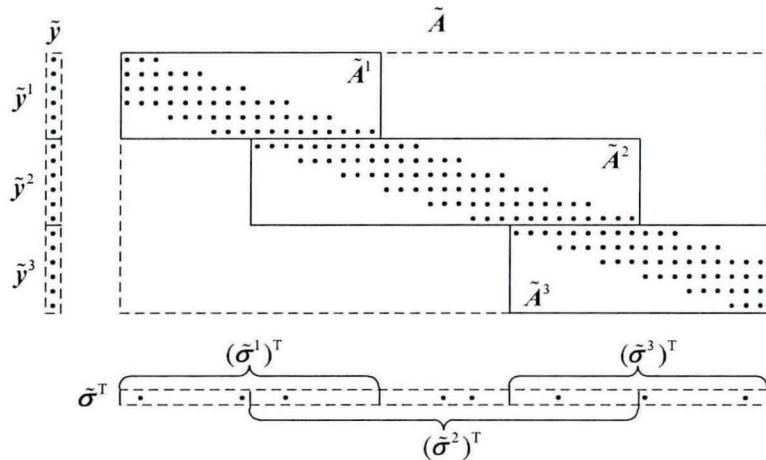


图 3.3 测量向量不重叠划分示意图

显然, 若式(3.16)中子问题可解, 则可采用一般稀疏重构算法获取 $\tilde{\sigma}^l$ 的估计值 $\hat{\sigma}^l$, $l=1,2,\dots,L_d$, 然后对相邻系数子向量的重叠部分进行处理得到系数向量 $\tilde{\sigma}$ 的估计值 $\hat{\sigma}$ 。然而, 由测量子矩阵 \tilde{A}^l 的产生方式可知, \tilde{A}^l 的一些列向量(例如最后几列)仅包含测量矩阵 \tilde{A} 中相应列向量的部分非零元素, 从而使得 \tilde{A}^l 中存在高度相关的列向量。根据 RIP 的定义可知, \tilde{A}^l 不满足 RIP 条件。图 3.4 给出了测量子矩阵 \tilde{A}^l 中满足和不满足 RIP 的区域。由于 \tilde{A}^l 不满足 RIP 条件, 从理论上分析子问题(式(3.16))的重构性能存在困难。

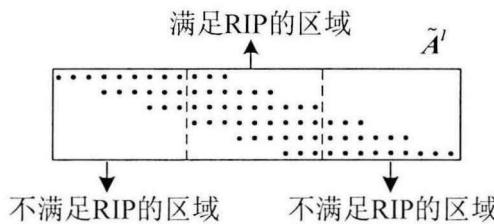


图 3.4 测量子矩阵示意图

有别于图 3.3 对测量向量进行不重叠划分的分段方法, S. Qin 等^[139]提出了一种对测量向量进行重叠划分的分段方法, 见图 3.5。该方法将测量向量 \tilde{y} 划分为 L_0 个相互重叠的测量子向量 $\tilde{y}^{[l]} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times 1}$, $l=1,2,\dots,L_0$, 其中 $\tilde{M}=SM_p$, 相邻测量子向量间的偏移量为 M_p ($M_p < \tilde{M}$); 将测量矩阵 \tilde{A} 划分为 L_0 个相互重叠的测量子矩阵 $\tilde{A}^{[l]} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times \tilde{N}}$, $l=1,2,\dots,L_0$, 其中 $\tilde{A}^{[l]}$ 是对测量矩阵 \tilde{A} 按每块 \tilde{M} 行进行重叠分块后去除其中的全零列向量形成的, 相邻测量子矩阵中行向量和列向量间的偏移量分别为 M_p 和 N_p ($N_p < \tilde{N}$), 除首末段外, 有 $\tilde{N}=(S+1)N_p$ 。此外, 将系数向量 $\tilde{\sigma}$ 分成 L_0 个相互重叠的系数子向量 $\tilde{\sigma}^{[l]} \in \mathbb{C}^{\tilde{N} \times 1}$, $l=1,2,\dots,L_0$, 其中 $\tilde{\sigma}^{[l]}$ 是从 $\tilde{\sigma}$ 中提取与 $\tilde{A}^{[l]}$ 中列向量相对应的元素组成的, 相邻系数子向量间的偏移量为 N_p 。

按照上述划分方式, 式(3.14)的大规模稀疏重构问题可分解为

$$\hat{\sigma}^{[l]} = \arg \min_{\tilde{\sigma}^{[l]}} \|\tilde{\sigma}^{[l]}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{y}^{[l]} = \tilde{A}^{[l]} \tilde{\sigma}^{[l]}, \quad l=1,2,\dots,L_0 \quad (3.17)$$

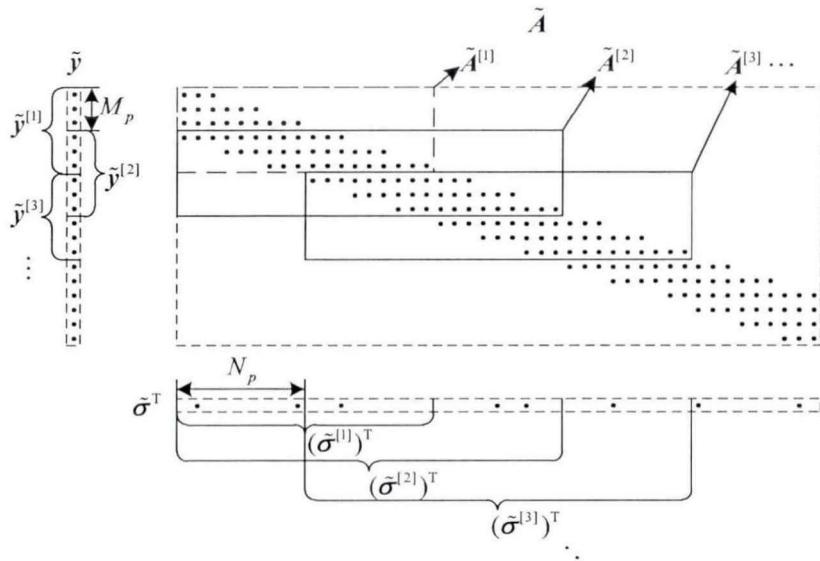


图 3.5 测量向量重叠划分示意图

文献[139]指出，采用现有稀疏重构方法依次求解式(3.17)中的 L_0 个子问题，分别获取 $\tilde{\sigma}^{[l]}$ 的估计值 $\hat{\sigma}^{[l]}$ ， $l=1, 2, \dots, L_0$ ，然后仅保留 $\hat{\sigma}^{[l]}$ 中 N_p 个系数的估计值，其中，这 N_p 个系数对应于测量子矩阵 $\tilde{A}^{[l]}$ 中满足 RIP 的区域，见图 3.6。然而，值得注意的是，由于测量子矩阵 $\tilde{A}^{[l]}$ 不满足 RIP 条件，子问题(式(3.17))的重构性能缺乏理论保证。

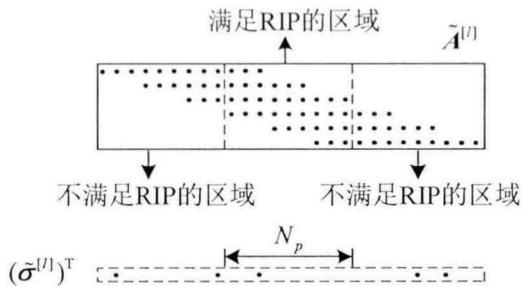


图 3.6 测量子矩阵和系数子向量的示意图

T. B. Petros 等^[140]和 P. Boufounos 等^[141]提出了一种流贪婪追踪(Streaming Greedy Pursuit, SGP)方法，见图 3.7。SGP 方法将测量向量 \tilde{y} 划分为 L_s 个相互重叠的测量子向量 $\tilde{y}^{[l]} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times 1}$ ， $l=1, 2, \dots, L_s$ ，其中 $\tilde{M}=SM_p$ ，相邻测量子向量间的偏移量为 1；将测量矩阵 \tilde{A} 划分为 L_s 个相互重叠的测量子矩阵 $\tilde{A}^{[l]} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times \tilde{N}}$ ， $l=1, 2, \dots, L_s$ ，其中 $\tilde{N}=SN_p$ ，相邻测量子矩阵中行向量和列向量间的偏移量分别为 1 和 R 。此外，将系数向量 $\tilde{\sigma}$ 分成 L_s 个相互重叠的系数子向量 $\tilde{\sigma}^{[l]} \in \mathbb{C}^{\tilde{N} \times 1}$ ， $l=1, 2, \dots, L_s$ ，其中 $\tilde{\sigma}^{[l]}$ 是从 $\tilde{\sigma}$ 中提取与 $\tilde{A}^{[l]}$ 中列向量相对应的元素组成的，相邻系数子向量间的偏移量为 R 。

令 $\tilde{A}_{1,R}^{[l]}$ 表示 $\tilde{A}^{[l]}$ 的前 R 个列向量组成的子矩阵， $\tilde{\sigma}_{1,R}^{[l]}$ 表示 $\tilde{\sigma}^{[l]}$ 的前 R 个系数组成的子向量， $\tilde{y}_{1,R}^{[l]}$ 表示利用估计值 $\hat{\sigma}_{1,R}^{[l-1]}$ 从测量子向量 $\tilde{y}^{[l]}$ 中去除 $\tilde{\sigma}_{1,R}^{[l-1]}$ 引入的测量得到的子向量，则式(3.14)的大规模稀疏重构问题可分解为

$$\hat{\tilde{\sigma}}^{[l]} = \arg \min_{\tilde{\sigma}^{[l]}} \|\tilde{\sigma}^{[l]}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\tilde{y}^{[l]} - \tilde{A}^{[l]} \tilde{\sigma}^{[l]}\|_2 \leq \eta^{[l]}, \quad l=1, 2, \dots, L \quad (3.18)$$

其中 $\eta^{(l)}$ 与 $\tilde{\sigma}_{1:R}^{(l-1)}$ 的估计误差 $\Delta\tilde{\sigma}_{1:R}^{(l-1)} = \hat{\sigma}_{1:R}^{(l-1)} - \tilde{\sigma}_{1:R}^{(l-1)}$ 有关。

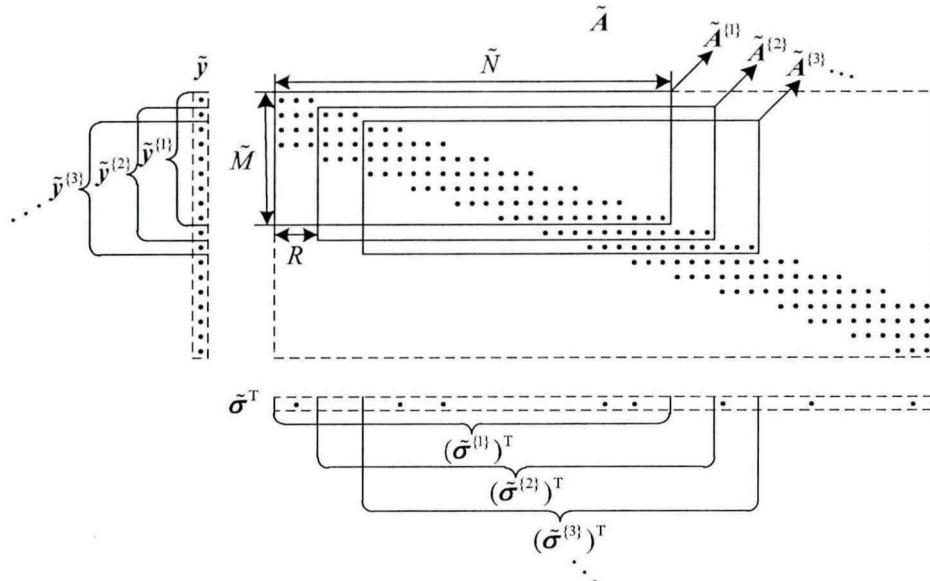


图 3.7 SGP 方法的划分示意图

注意到, 测量子矩阵 $\tilde{A}^{(l)}$ 中存在不满足 RIP 的区域, 见图 3.8。考虑到相邻两段稀疏子向量间的重叠性, 文献[140]提出了一种 Refinement 算法求解式(3.18), 见算法 3.1。

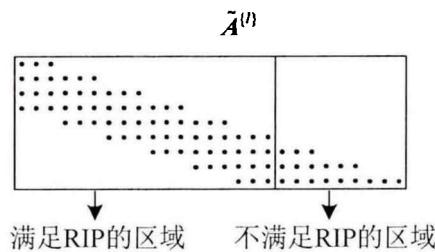


图 3.8 测量子矩阵示意图

算法 3.1: Refinement 算法

输入: $\tilde{y}^{(l)}$, $\tilde{A}^{(l)}$, $\hat{\sigma}^{(l-1)}$, W , K_1 和 K_2

输出: $\hat{\sigma}^{(l)}$

步骤:

- 1) 初始化估计值 $\hat{\sigma}^{(l)} = [(\hat{\sigma}_{R:\tilde{N}-1}^{(l-1)})^T, \theta_R^T]^T$;
- 2) 计算残差 $\tilde{r}^{(l)} = \tilde{y}^{(l)} - \tilde{A}^{(l)} \hat{\sigma}^{(l)}$;
- 3) 计算 $\tilde{p}^{(l)} = (\tilde{A}^{(l)})^H W^2 \tilde{r}^{(l)}$, 其中 W 是对角矩阵;
- 4) 获取支撑集 $A^{(l)} = \text{supp}(\hat{\sigma}^{(l)}) \cup \text{supp}(\tilde{p}^{(l)}|_{K_1})$, 其中 $\tilde{p}^{(l)}|_{K_1}$ 表示保留向量 $\tilde{p}^{(l)}$ 中幅度最大的 K_1 个系数, 并将其余系数置零;
- 5) 计算 $\tilde{b}^{(l)} = (W A_{A'}^{(l)})^+ W \tilde{y}^{(l)}$;
- 6) 更新估计值 $\hat{\sigma}^{(l)} = \tilde{b}^{(l)}|_{K_2}$ 。

Refinement 算法利用前一段稀疏子向量的估计值初始化当前段稀疏子向量, 并通过加权矩阵 W 来削弱 $\tilde{A}^{(l)}$ 中不满足 RIP 的区域对重构性能带来的影响。然而, 文献[140] 34

并没有从理论上分析 Refinement 算法的重构性能。另外，该算法需要系数子向量 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的稀疏度先验信息以便设置参数 K_1 和 K_2 。那么，在稀疏度先验信息未知或不准确的情况下，该算法的重构性能会下降。此外，从式(3.18)可以看出，每个子段的重构性能受其前一段系数子向量估计误差的影响。然而，文献[140]并没有对子段间的误差传播特性进行严格的理论分析。

综上所述，由于以上三种方法中测量子矩阵均存在不满足 RIP 的区域，从理论上分析子问题的重构性能存在困难。本章提出了一种分段滑动重构(SegSR)方法，见图 3.9。该方法对测量向量 \tilde{y} 、系数向量 $\tilde{\sigma}$ 和测量矩阵 \tilde{A} 进行重叠划分，分别得到 L 个测量子向量 $\tilde{y}^{(l)} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times 1}$ 、系数子向量 $\tilde{\sigma}^{(l)} \in \mathbb{C}^{\tilde{N} \times 1}$ 和测量子矩阵 $\tilde{A}^{(l)} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times \tilde{N}}$ ， $l=1,2,\cdots,L$ ，其中 $\tilde{M}=(S+1)M_p$ ， $\tilde{N}=SN_p$ ，相邻测量子矩阵中行向量和列向量间的偏移量分别为 M_p 和 N_p 。从图 3.9 可以看出，测量子矩阵 $\tilde{A}^{(l)}$ 中每一列向量都包含了测量矩阵 \tilde{A} 中相应列向量的所有非零元素。因此，当测量矩阵 \tilde{A} 满足 RIP 条件时，测量子矩阵 $\tilde{A}^{(l)}$ 也能满足 RIP 条件，从而便于分析子问题的重构性能。SegSR 方法与文献[139]方法和 SGP 方法的比较见表 3.1。3.3 节将详细阐述 SegSR 方法的原理，3.4 节将分析 SegSR 方法的性能。

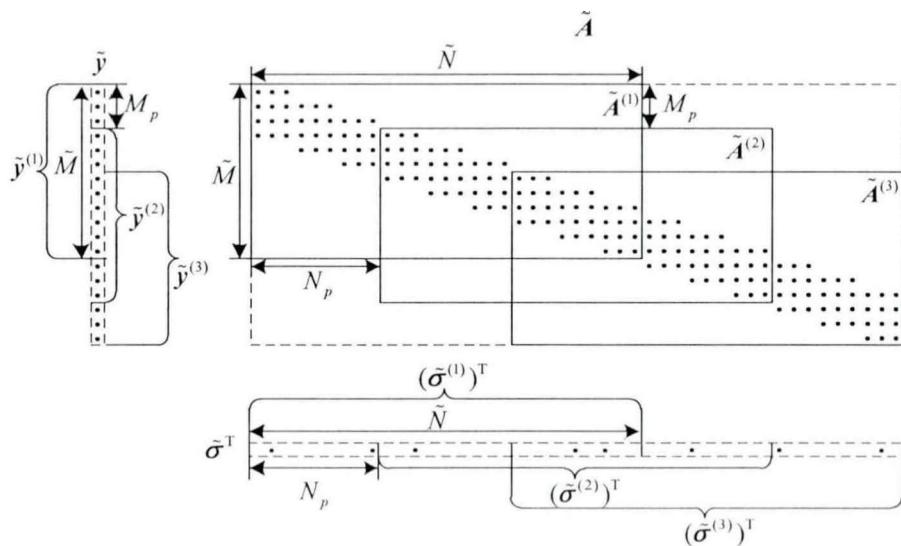


图 3.9 分段滑动重构方法的划分示意图

表 3.1 不同分段方法对比

重构方法	文献[139]	SGP	SegSR
测量子矩阵大小($\tilde{M} \times \tilde{N}$)	$SM_p \times (S+1)N_p$	$SM_p \times SN_p$	$(S+1)M_p \times SN_p$
行向量偏移量	M_p	1	M_p
列向量偏移量	N_p	R	N_p
子段个数	$L_0 = M/M_p - 1$	$L_s = M - \tilde{M} + 1$	$L = M/M_p - S + 1$
测量子矩阵是否满足 RIP	否	否	是

3.3 分段滑动重构方法

3.3.1 分段滑动重构方法原理

如图 3.9 所示, 对系数向量 $\tilde{\sigma}$ 、测量向量 \tilde{y} 和测量矩阵 \tilde{A} 进行划分。将系数向量 $\tilde{\sigma}$ 分成 L 个重叠的系数子向量

$$\tilde{\sigma}^{(l)} = \tilde{\sigma}(\tilde{n} : \tilde{n} + \tilde{N} - 1), l = 1, 2, \dots, L \quad (3.19)$$

其中 $\tilde{n} = (l-1)N_p$, $N_p = (d-1)R$ 表示相邻系数子向量间的偏移量, $\tilde{N} = SN_p$ ($1 < S < P$) 表示系数子向量 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的长度, $P = \lceil N/N_p \rceil$, $L = P - S + 1$ 。此外, 可将 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 等分成 S 个长度为 N_p 的子向量, 即 $\tilde{\sigma}^{(l)} = [(\tilde{\sigma}_1^{(l)})^\top, (\tilde{\sigma}_2^{(l)})^\top, \dots, (\tilde{\sigma}_S^{(l)})^\top]^\top$, 其中 $\tilde{\sigma}_s^{(l)} = \tilde{\sigma}^{(l)}((s-1)N_p : sN_p - 1)$, $s = 1, \dots, S$ 。选择参数 S 时要确保 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的稀疏性。这里, 我们假定 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 是稀疏的。

类似地, 将测量向量 \tilde{y} 分成 L 个重叠的测量子向量

$$\tilde{y}^{(l)} = \tilde{y}(\tilde{m} : \tilde{m} + \tilde{M} - 1), l = 1, 2, \dots, L \quad (3.20)$$

其中 $\tilde{m} = (l-1)M_p + 1$, $M_p = d-1$ 表示相邻测量子向量间的偏移量, $\tilde{M} = (S+1)M_p$ 表示测量子向量 $\tilde{y}^{(l)}$ 的长度。

根据对系数向量 $\tilde{\sigma}$ 和测量向量 \tilde{y} 的划分方式, 从测量矩阵 \tilde{A} 中抽取与 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 对应的列向量、与 $\tilde{y}^{(l)}$ 对应的行向量, 组成 $\tilde{M} \times \tilde{N}$ 维的测量子矩阵

$$\tilde{A}^{(l)} = \tilde{A}(\tilde{m} : \tilde{m} + \tilde{M} - 1, \tilde{n} : \tilde{n} + \tilde{N} - 1), l = 1, 2, \dots, L \quad (3.21)$$

类似于对系数子向量 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的等分方式, 测量子矩阵 $\tilde{A}^{(l)}$ 可等分成 S 个 $\tilde{M} \times N_p$ 的子矩阵, 即 $\tilde{A}^{(l)} = [\tilde{A}_1^{(l)}, \tilde{A}_2^{(l)}, \dots, \tilde{A}_S^{(l)}]$, 其中 $\tilde{A}_s^{(l)} = \tilde{A}^{(l)}(1 : \tilde{M}, (s-1)N_p : sN_p - 1)$, $s = 1, \dots, S$ 。

按照上述划分方式, 测量子向量 $\tilde{y}^{(l)}$ 是由系数子向量 $\tilde{\sigma}_1^{(l-1)}$ 、 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 和 $\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}$ 引入的测量向量组成的。定义

$$\tilde{A}^{(l-1)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^{(l-1)}(M_p + 1 : \tilde{M}, 0 : N_p - 1) \\ \boldsymbol{0}_{M_p \times N_p} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\tilde{A}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{M_p \times N_p} \\ \tilde{A}_S^{(l+1)}(1 : \tilde{M} - M_p, 0 : N_p - 1) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

则 $\tilde{A}^{(l-1)}\tilde{\sigma}_1^{(l-1)}$ 和 $\tilde{A}^{(l+1)}\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}$ 分别表示测量子向量 $\tilde{y}^{(l)}$ 中由系数子向量 $\tilde{\sigma}_1^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}$ 引入的测量向量, 从而可将 $\tilde{y}^{(l)}$ 表示为

$$\tilde{y}^{(l)} = \begin{cases} \tilde{A}^{(l)}\tilde{\sigma}^{(l)} + \tilde{A}^{(l+1)}\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}, & l = 1 \\ \tilde{A}^{(l-1)}\tilde{\sigma}_1^{(l-1)} + \tilde{A}^{(l)}\tilde{\sigma}^{(l)} + \tilde{A}^{(l+1)}\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}, & l = 2, 3, \dots, L-1 \\ \tilde{A}^{(l-1)}\tilde{\sigma}_1^{(l-1)} + \tilde{A}^{(l)}\tilde{\sigma}^{(l)}, & l = L \end{cases} \quad (3.24)$$

图 3.10 给出了测量子向量 $\tilde{y}^{(l)}$ 的组成。

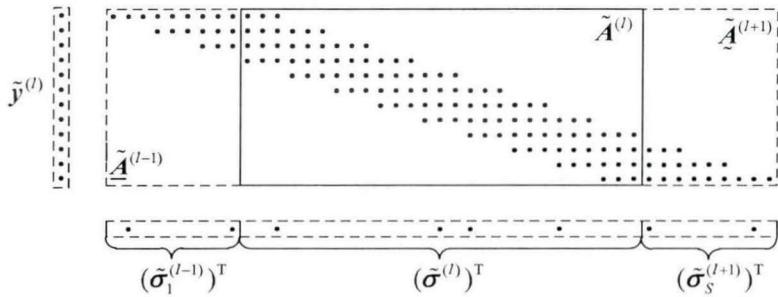


图 3.10 测量子向量的构成

如图 3.10 所示, 测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}$ 中任意一个列向量都包含了测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 中相应列向量的所有非零元素, 而 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l+1)}$ 中每一个列向量仅包含了测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 中相应列向量的部分非零元素。显然, 当测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 满足 RIP 条件时, 测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}$ 也能满足 RIP 条件, 而 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l+1)}$ 则不能满足 RIP 条件。因此, 我们考虑利用 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}$ 从式(3.24)中获取系数子向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l)}$ 。

令 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l-1)}$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l-1)}$ 的估计值, $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(l-1)} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(l-1)} - \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l-1)}$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(l-1)}$ 和 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l-1)}$ 之间的误差。定义

$$\underline{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{y}}^{(l)}, & l=1 \\ \tilde{\mathbf{y}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)} \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l-1)}, & l=2,3,\dots,L \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}^{(l+1)} \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l+1)}, & l=1 \\ \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)} \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(l-1)} + \tilde{\mathbf{A}}^{(l+1)} \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l+1)}, & l=2,3,\dots,L-1 \\ \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)} \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(l-1)}, & l=L \end{cases} \quad (3.26)$$

可得

$$\underline{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(l)} \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l)} + \underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}, \quad l=1,2,\dots,L \quad (3.27)$$

这样, 压缩测量模型(式(3.12))被分解成 L 个子模型(式(3.27))。

注意到, 若将 $\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}$ 视为噪声, 则式(3.27)可看作是噪声环境下的压缩测量模型。根据 $\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}$ 的定义(式(3.26)), $\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}$ 是由前一段系数估计误差 $\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(l-1)}$ 和后一段系数 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l+1)}$ 引入的。换言之, $\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}$ 是在分段过程中产生的, 并不是一般意义上的噪声。为了描述方便, 我们称 $\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}$ 为虚拟噪声子向量, 并分别称 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)} \Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l+1)} \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l+1)}$ 为前向和后向虚拟噪声子向量。类似地, 把 $\underline{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l)}$ 称为虚拟测量子向量。

对于式(3.27), 若 $\|\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}\|_2 \leq \eta^{(l)}$, 则通过求解

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l)} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \left\| \underline{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{A}}^{(l)} \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l)} \right\|_2 \leq \eta^{(l)}, \quad l=1,2,\dots,L \quad (3.28)$$

可获取系数子向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l)}$ 。那么, 根据估计值 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(l)} (l=1,2,\dots,L-1)$ 和 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(L)}$ 可得 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$, 即 $\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = [(\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(1)})^T, (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(2)})^T, \dots, (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(L-1)})^T, (\hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^{(L)})^T]^T$ 。

我们将上述方法称为分段滑动重构(SegSR)方法, 其流程见算法 3.2。根据 SegSR 方法的流程可知, SegSR 方法的一个关键步骤是求解子问题(式(3.28))获取系数子向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$

的估计，其估计性能直接影响 SegSR 方法的重构性能。由式(3.28)可知，系数子向量 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的估计精度受虚拟噪声 $\tilde{n}^{(l)}$ 的影响。3.3.2 节将从虚拟噪声 $\tilde{n}^{(l)}$ 的特性入手，剖析其 ℓ_2 和 ℓ_∞ 有界性，并以 OMP 算法为例分析其对估计性能的影响。

算法 3.2: SegSR

输入: $S, M_p, N_p, \tilde{M}, \tilde{N}$ 和 L

输出: $\hat{\tilde{\sigma}}$

步骤:

- 1) 初始化 $l = 1$ 。
 - 2) 提取 $\tilde{M} \times 1$ 维测量子向量 $\tilde{y}^{(l)}$ 和 $\tilde{M} \times \tilde{N}$ 维测量子矩阵 $\tilde{A}^{(l)}$ 。
 - 3) 根据式(3.25)计算虚拟测量子向量 $\underline{\tilde{y}}^{(l)}$ 。
 - 4) 求解式(3.28)得到稀疏向量 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}^{(l)}$ 。
 - 5) 令 $l = l + 1$ 。如果 $l > L$ ，执行步骤 6；否则，根据式(3.22)产生 $\tilde{M} \times N_p$ 维子矩阵 $\tilde{A}^{(l-1)}$ ，并从估计向量 $\hat{\tilde{\sigma}}^{(l-1)}$ 中提取子向量 $\hat{\tilde{\sigma}}_1^{(l-1)}$ ，然后执行步骤 2)。
 - 6) 形成稀疏向量 $\tilde{\sigma}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\sigma}} : \hat{\tilde{\sigma}} = [(\hat{\tilde{\sigma}}_1^{(1)})^\top, (\hat{\tilde{\sigma}}_1^{(2)})^\top, \dots, (\hat{\tilde{\sigma}}_1^{(L-1)})^\top, (\hat{\tilde{\sigma}}_1^{(L)})^\top]^\top$ 。
-

考虑到相邻系数子向量间存在重叠部分，即 $\tilde{\sigma}^{(l-1)}$ 的后 $(N - N_p)$ 个系数与 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的前 $(N - N_p)$ 个系数相同。我们可以采用 OMP-PKS^[163] 算法求解子问题(3.28)，将 $\tilde{\sigma}^{(l-1)}$ 的后 $(N - N_p)$ 个系数的稀疏位置估计作为 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的支撑集先验信息。此外，根据 $\tilde{A}^{(l-1)}$ 和 $\tilde{A}^{(l+1)}$ 的定义可知，前向虚拟噪声 $\tilde{A}^{(l-1)} \Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}$ 和后向虚拟噪声 $\tilde{A}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_S^{(l+1)}$ 的存在范围不同，分别是 $[1:M_p]$ 和 $[\tilde{M}-M_p+1:\tilde{M}]$ 。由于 $\Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}$ 是误差向量， $\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}$ 是系数向量，因而后向虚拟噪声水平可能比前向虚拟噪声水平高得多。为了降低后向虚拟噪声的影响，本章提出了两步 OMP(Two-step OMP, TOMP) 算法，见算法 3.3。

算法 3.3: TOMP

输入: $\underline{\tilde{y}}^{(l)}, \tilde{A}^{(l)}, N_p, \tilde{N}, \hat{\tilde{\sigma}}^{(l-1)}$, 阈值 ζ_1 和 ζ_2 ($\zeta_2 < \zeta_1$)

输出: 估计的稀疏子向量 $\hat{\tilde{\sigma}}^{(l)}$

步骤:

- 1) 初始化索引集 $A^{[0]} = \text{supp}(\hat{\tilde{\sigma}}^{(l-1)}(N_p : \tilde{N} - 1))$ ，残差 $\tilde{r}^{[0]} = \underline{\tilde{y}}^{(l)} - \tilde{A}_{A^{[0]}}^{(l)} (\tilde{A}_{A^{[0]}}^{(l)})^+ \underline{\tilde{y}}^{(l)}$ ，迭代次数 $i = 1$ 。
 - 2) 寻找 $\tilde{A}^{(l)}$ 中与残差 $\tilde{r}^{[i-1]}$ 最相关的列向量的索引，即 $\lambda^{[i]} = \arg \max_{j=0,1,\dots,\tilde{N}-1} |\langle \tilde{a}_j^{(l)}, \tilde{r}^{[i-1]} \rangle|$ ，并更新索引集 $A^{[i]} = A^{[i-1]} \cup \{\lambda^{[i]}\}$ 。
 - 3) 更新残差 $\tilde{r}^{[i]} = \underline{\tilde{y}}^{(l)} - \tilde{A}_{A^{[i]}}^{(l)} (\tilde{A}_{A^{[i]}}^{(l)})^+ \underline{\tilde{y}}^{(l)}$ 。
 - 4) 如果 $\|\tilde{r}^{[i-1]}\|_2 - \|\tilde{r}^{[i]}\|_2 \leq \zeta_1$ ，令 $i = i + 1$ ，执行步骤 5)；否则，令 $i = i + 1$ ，执行步骤 2)。
 - 5) 在 $\tilde{A}^{(l)}$ 的第 0 至 $\tilde{N} - N_p - 1$ 列中，寻找与残差 $\tilde{r}^{[i-1]}$ 最相关的列向量的索引，即 $\lambda^{[i]} = \arg \max_{j=0,1,\dots,\tilde{N}-N_p-1} |\langle \tilde{a}_j^{(l)}, \tilde{r}^{[i-1]} \rangle|$ ，并更新索引集 $A^{[i]} = A^{[i-1]} \cup \{\lambda^{[i]}\}$ 。
 - 6) 更新残差 $\tilde{r}^{[i]} = \underline{\tilde{y}}^{(l)} - \tilde{A}_{A^{[i]}}^{(l)} (\tilde{A}_{A^{[i]}}^{(l)})^+ \underline{\tilde{y}}^{(l)}$ 。
 - 7) 如果 $\|\tilde{r}^{[i-1]}\|_2 - \|\tilde{r}^{[i]}\|_2 \leq \zeta_2$ ，执行步骤 8)；否则，令 $i = i + 1$ ，执行步骤 5)。
 - 8) 根据 $\hat{\tilde{\sigma}}_{A^{[i]}}^{(l)} = (\tilde{A}_{A^{[i]}}^{(l)})^+ \underline{\tilde{y}}^{(l)}$ 计算估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}^{(l)}$ 。
-

TOMP 算法由两个 OMP 过程构成。在第一个 OMP 过程(步骤 2-4)中, 稀疏位置搜索范围是 $[0 : \tilde{N} - 1]$, 主要完成系数子向量的粗略估计。第二个 OMP 过程(步骤 5-7)将稀疏位置的搜索范围限定在 $[0 : \tilde{N} - N_p - 1]$ 内, 进一步获取这些系数的精细估计。对于两个 OMP 过程迭代终止条件中的阈值, 第二个的阈值 ζ_2 要小于第一个的阈值 ζ_1 。另外, 前一段系数子向量的支撑集估计在第一个 OMP 过程前的初始化过程中完成(见步骤 1)。

3.3.2 存储量和运算量

本小节首先分析 SegSR 方法的存储量, 并与直接重构、文献[139]方法和 SGP 方法相比较。对于 SegSR 方法而言, 需要顺序求解式(3.28)所示的 L 个子问题, 仅需存储 $\tilde{M} \times \tilde{N}$ 维的复测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}$, 按照 IEEE 双精度标准计算, 占据存储空间 $16\tilde{M}\tilde{N}$ 字节(byte)。此外, 根据 $\tilde{M} = (S+1)M_p$ 和 $\tilde{N} = SN_p$, 可知 $16\tilde{M}\tilde{N} = 16S(S+1)M_pN_p$ 。可见, SegSR 方法的存储量与控制子段长度的参数 S 有关, S 越大, SegSR 方法所需的存储量越大。

对于直接重构而言, 直接求解式(3.14)需要存储 $M \times N$ 维的复测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$, 存储空间为 $16MN$ 字节。此外, 由 $M = PM_p$ 和 $N = PN_p$ 可知, $16MN = 16P^2M_pN_p$ 。显然, 若 $S^2 \ll P^2$, 则 $16\tilde{M}\tilde{N} \ll 16MN$ 。可见, 相比于直接重构, SegSR 方法的存储量极大降低。

对于第 3.1.2 小节给出的脉冲雷达系统参数, 有 $N = 249000$, $N_p = 1000$, $P = 249$ 。当 $R = 5$ 时, $M = 49800$, $M_p = 200$ 。表 3.2 给出了直接重构和 SegSR 方法所需的存储量。由表 3.2 可知, SegSR 方法的存储量远低于直接重构。另外, 对于 SegSR 方法而言, 控制子段长度的参数 S 取值越大, 存储量越大。

表 3.2 直接重构和 SegSR 方法的存储量

重构方法	直接重构	SegSR		
		$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$
存储量(MB)	1.89×10^5	18.31	36.62	61.04

下面分析文献[139]方法和 SGP 方法的存储量。类似于 SegSR 方法, 文献[139]方法和 SGP 方法的存储量分别与 $\tilde{M} \times \tilde{N}$ 维测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}$ 的大小有关。根据文献[139]方法和 SGP 方法中参数 \tilde{M} 和 \tilde{N} 的定义(见表 3.1), 两种方法占据的存储空间分别为 $16S(S+1)M_pN_p$ 和 $16S^2M_pN_p$ 字节。可见, 文献[139]方法的存储量与 SegSR 方法相同, SGP 方法的存储量占 SegSR 方法存储量的 $S/(S+1)$ 。

下面分析 SegSR 方法的运算量, 并与直接重构、文献[139]方法和 SGP 方法相比较。根据 SegSR 方法可知, 我们需要求解式(3.28)所示的 L 个子问题。下面分别分析采用 OMP、OMP-PKS 和 TOMP 算法求解 L 个子问题的总运算量。

对于第 l 个子问题, 采用 OMP 算法求解时的运算量为 $O(i_{\text{OMP}}^{(l)}\tilde{M}\tilde{N})$, 其中 $i_{\text{OMP}}^{(l)}$ 表示迭代次数。那么, 采用 OMP 算法求解 L 个子问题的总运算量为 $C_{\text{SegSR-OMP}} = O(\sum_{l=1}^L i_{\text{OMP}}^{(l)}\tilde{M}\tilde{N})$ 。

若记稀疏子向量 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的稀疏度为 $K^{(l)}$, 则 $i_{\text{OMP}}^{(l)} \leq K^{(l)}$, 从而有 $C_{\text{SegSR-OMP}} = O(\sum_{l=1}^L K^{(l)} \tilde{M}\tilde{N})$ 。

类似地, 采用 OMP-PKS 和 TOMP 算法求解 L 个子问题的总运算量可分别表示为 $C_{\text{SegSR-OMP-PKS}} = O(\sum_{l=1}^L i_{\text{OMP-PKS}}^{(l)} \tilde{M}\tilde{N})$ 和 $C_{\text{SegSR-TOMP}} = O(\sum_{l=1}^L i_{\text{TOMP}}^{(l)} \tilde{M}\tilde{N})$ 。考虑到 OMP-PKS 和 TOMP 算法求解第 l 个子问题时均利用了第 $(l-1)$ 段的部分支撑集信息, 避免了重复估计相邻系数子向量间重叠部分的支撑集, 则有 $\sum_{l=1}^L i_{\text{OMP-PKS}}^{(l)} \leq K$ 和 $\sum_{l=1}^L i_{\text{TOMP}}^{(l)} \leq K$, 从而有 $C_{\text{SegSR-OMP-PKS}} = O(K\tilde{M}\tilde{N})$ 和 $C_{\text{SegSR-TOMP}} = O(K\tilde{M}\tilde{N})$ 。

根据上述分析结论, 若向量 $\tilde{\sigma}$ 的稀疏位置呈均匀分布, 则 $\sum_{l=1}^L K^{(l)} = KS(P-S+1)/P$, 从而有 $C_{\text{SegSR-OMP}} = O(KS\tilde{M}\tilde{N})$ 。可见, 对于 SegSR 方法而言, 采用 OMP 算法求解子问题时的总运算量是采用 OMP-PKS 和 TOMP 算法求解时的 S 倍。因此, 3.5 节的仿真将采用 OMP-PKS 和 TOMP 算法求解 SegSR 方法产生的子问题。

下面分析直接重构、文献[139]方法和 SGP 方法的运算量。对于直接重构(求解式(3.14))而言, 采用 OMP 算法求解的运算量为 $C_{\text{OMP}} = O(KMN)$ 。对于文献[139]方法, 若采用 OMP 算法求解子问题(式(3.17)), 则求解 L_0 个子问题的总运算量为 $O(\sum_{l=1}^{L_0} K^{[l]} \tilde{M}\tilde{N})$, 其中 $K^{[l]}$ 表示第 l 个稀疏子向量的稀疏度。对于 SGP 方法, 由于 Refinement 算法^[140]求解每个子问题(式(3.18))的运算量为 $O(\tilde{M}\tilde{N})$, 因而求解 L_s 个子问题的总运算量为 $C_{\text{SGP}} = O(L_s \tilde{M}\tilde{N})$ 。

表 3.3 总结了 SegSR 方法与文献[139]方法、SGP 方法和直接重构方法的运算量。

表 3.3 运算量比较

重构方法	直接重构	文献[139]	SGP	SegSR		
	(OMP)	(OMP)		OMP	OMP-PKS	TOMP
运算量	$O(KMN)$	$O(\sum_{l=1}^{L_0} K^{[l]} \tilde{M}\tilde{N})$	$O(L_s \tilde{M}\tilde{N})$	$O(\sum_{l=1}^L K^{(l)} \tilde{M}\tilde{N})$	$O(K\tilde{M}\tilde{N})$	$O(K\tilde{M}\tilde{N})$

由于 $K \ll L_s$, SegSR 方法的运算量远小于 SGP 方法。此外, 根据 $\tilde{M}\tilde{N} = S(S+1)M_p N_p$ 和 $MN = P^2 M_p N_p$ 可知, 若 $S^2 \ll P^2$, 则 $\tilde{M}\tilde{N} \ll MN$, 从而有 $C_{\text{SegSR-OMP-PKS}} \ll C_{\text{OMP}}$ 和 $C_{\text{SegSR-TOMP}} \ll C_{\text{OMP}}$ 。可见, 采用 OMP-PKS 和 TOMP 算法求解 SegSR 方法子问题的总运算量比采用 OMP 算法直接重构小得多。

3.4 分段滑动重构方法的性能分析

根据 SegSR 方法的流程可知, SegSR 方法的性能由子问题(式(3.28))的重构性能决定。考虑到子问题中存在虚拟噪声, 本节主要研究虚拟噪声对子问题重构性能的影响。目前, 针对噪声环境下的稀疏重构问题, 主要研究 ℓ_2 和 ℓ_∞ 有界噪声, 如文献[160]-[162]对 OMP 算法性能的研究。为此, 本节首先研究子问题中虚拟噪声的 ℓ_2 和 ℓ_∞ 有界性, 然后以 OMP 算法为例, 分析虚拟噪声对系数子向量的稀疏位置和幅度估计的影响。

3.4.1 虚拟噪声特性分析

令 $\Gamma^{(l)}$ 、 $\Gamma_s^{(l)}$ ($s=1, \dots, S$) 和 $\Delta\Gamma_1^{(l-1)}$ 分别表示 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 、 $\tilde{\sigma}_s^{(l)}$ ($s=1, \dots, S$) 和 $\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l-1)}$ 的支撑集, $\tilde{\delta}_k^{(l)}$ 表示测量子矩阵 $\tilde{A}^{(l)}$ 的 k 阶约束等距常数。对于虚拟噪声 $\underline{n}^{(l)}$, 定理 3.1 给出其 ℓ_2 和 ℓ_∞ 有界性。定理 3.1 的证明需要用到一些与矩阵的约束等距常数有关的特性, 见引理 3.1。

引理 3.1^{[27][59]}: 若矩阵 A 具有约束等距常数 δ_K , 稀疏向量 σ 和 σ' 的支撑集 Γ 和 Γ' 不相交, 且满足 $|\Gamma| \leq k$, $|\Gamma'| \leq k'$ 和 $k+k' \leq K$ 。则

- 1) $\langle A\sigma, A\sigma' \rangle \leq \delta_{k+k'} \|\sigma\|_2 \|\sigma'\|_2$;
- 2) $\left\| A_\Gamma^H A_{\Gamma'} \right\|_2 \leq \delta_K$;
- 3) $\left\| (A_\Gamma^H A_\Gamma)^{-1} \right\|_2 \leq 1/(1-\delta_K)$;
- 4) 对于 $k \leq K$, 有 $\delta_k \leq \delta_K$ 。

定理 3.1: 虚拟噪声 $\underline{n}^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots, L$) 满足

$$\left\| \underline{n}^{(l)} \right\|_2 \leq \varepsilon_2^{(l)} = \begin{cases} b_2^{(l+1)}, & l=1 \\ a_2^{(l-1)} + b_2^{(l+1)}, & l=2, 3, \dots, L-1 \\ a_2^{(l-1)}, & l=L \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\left\| (\tilde{A}^{(l)})^H \underline{n}^{(l)} \right\|_\infty \leq \varepsilon_\infty^{(l)} = \begin{cases} b_\infty^{(l+1)}, & l=1 \\ a_\infty^{(l-1)} + b_\infty^{(l+1)}, & l=2, 3, \dots, L-1 \\ a_\infty^{(l-1)}, & l=L \end{cases} \quad (3.30)$$

其中 $a_2^{(l-1)} = \sqrt{1 + \tilde{\delta}_{|\Delta\Gamma_1^{(l-1)}|}^{(l-1)}} \|\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_2$, $a_\infty^{(l-1)} = \tilde{\delta}_{|\Gamma_1^{(l-1)}|+1}^{(l-1)} \|\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_2$, $b_2^{(l+1)} = \sqrt{1 + \tilde{\delta}_{|\Gamma_S^{(l+1)}|}^{(l+1)}} \|\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_2$, $b_\infty^{(l+1)} = \tilde{\delta}_{|\Gamma_S^{(l+1)}|+1}^{(l+1)} \|\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_2$ 。

证明: 首先证明虚拟噪声 $\underline{n}^{(l)}$ 是 ℓ_2 有界的。根据 $\underline{n}^{(l)}$ 的定义(式(3.26))可知, 对于 $l=2, 3, \dots, L-1$, 有

$$\begin{aligned} \left\| \underline{n}^{(l)} \right\|_2 &\leq \left\| \tilde{A}^{(l-1)} \Delta\tilde{\sigma}_1^{(l-1)} \right\|_2 + \left\| \tilde{A}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_S^{(l+1)} \right\|_2 \leq \left\| \tilde{A}^{(l-1)} \Delta\tilde{\sigma}_1^{(l-1)} \right\|_2 + \left\| \tilde{A}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_S^{(l+1)} \right\|_2 \\ &\leq \sqrt{1 + \tilde{\delta}_{|\Delta\Gamma_1^{(l-1)}|}^{(l-1)}} \|\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_2 + \sqrt{1 + \tilde{\delta}_{|\Gamma_S^{(l+1)}|}^{(l+1)}} \|\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

其中最后一个不等式是根据 RIP 的定义得到的。

定义 $a_2^{(l-1)} = \sqrt{1 + \tilde{\delta}_{|\Delta\Gamma_1^{(l-1)}|}^{(l-1)}} \|\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_2$ 和 $b_2^{(l+1)} = \sqrt{1 + \tilde{\delta}_{|\Gamma_S^{(l+1)}|}^{(l+1)}} \|\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_2$, 则式(3.31)可简写为

$$\left\| \underline{n}^{(l)} \right\|_2 \leq a_2^{(l-1)} + b_2^{(l+1)}, \quad l=2, 3, \dots, L-1 \quad (3.32)$$

特殊地, 当 $l=1$ 时, $\left\| \underline{n}^{(1)} \right\|_2 = \left\| \tilde{A}^{(2)} \tilde{\sigma}_S^{(2)} \right\|_2 \leq b_2^{(2)}$; 当 $l=L$ 时, $\left\| \underline{n}^{(L)} \right\|_2 = \left\| \tilde{A}^{(L-1)} \Delta\tilde{\sigma}_1^{(L-1)} \right\|_2 \leq a_2^{(L-1)}$ 。

下面证明虚拟噪声 $\underline{n}^{(l)}$ 是 ℓ_∞ 有界的。类似地, 对于 $l=2, 3, \dots, L-1$, 有

$$\left\| (\tilde{A}^{(l)})^H \underline{n}^{(l)} \right\|_\infty \leq \left\| (\tilde{A}^{(l)})^H \tilde{A}^{(l-1)} \Delta\tilde{\sigma}_1^{(l-1)} \right\|_\infty + \left\| (\tilde{A}^{(l)})^H \tilde{A}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_S^{(l+1)} \right\|_\infty \quad (3.33)$$

根据 $\tilde{A}^{(l-1)}$ 与 $\tilde{A}_s^{(l)}$ ($s=2, 3, \dots, S$) 正交、 $\tilde{A}^{(l+1)}$ 与 $\tilde{A}_s^{(l)}$ ($s=1, 2, \dots, S-1$) 正交可知

$$\|(\tilde{\mathbf{A}}^{(l)})^H \tilde{\mathbf{n}}^{(l)}\|_{\infty} \leq \|(\tilde{\mathbf{A}}_1^{(l)})^H \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)} \Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_{\infty} + \|(\tilde{\mathbf{A}}_S^{(l)})^H \tilde{\mathbf{A}}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_{\infty} \quad (3.34)$$

下面分别讨论式(3.34)中不等式右边的两项。对于第一项，根据 $\tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}_1^{(l)}$ 的定义和矩阵结构，可知 $(\tilde{\mathbf{A}}_1^{(l)})^H \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)} = (\tilde{\mathbf{A}}_2^{(l-1)})^H \tilde{\mathbf{A}}_1^{(l-1)}$ ，从而有

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\mathbf{A}}_1^{(l)})^H \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)} \Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_{\infty} &= \|(\tilde{\mathbf{A}}_2^{(l-1)})^H \tilde{\mathbf{A}}_1^{(l-1)} \Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_{\infty} \\ &= \max_{j \in \{N_p, N_p+1, \dots, 2N_p-1\}} \left| \langle \tilde{\mathbf{a}}_j^{(l-1)}, \tilde{\mathbf{A}}_1^{(l-1)} \Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)} \rangle \right| \end{aligned} \quad (3.35)$$

根据引理 3.1 的性质 1)，可得

$$\|(\tilde{\mathbf{A}}_1^{(l)})^H \tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)} \Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_{\infty} \leq \tilde{\delta}_{|\Gamma_1^{(l-1)}|+1}^{(l-1)} \|\Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_2 \quad (3.36)$$

类似地，对于第二项，我们有

$$\|(\tilde{\mathbf{A}}_S^{(l)})^H \tilde{\mathbf{A}}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_{\infty} = \|(\tilde{\mathbf{A}}_{S-1}^{(l+1)})^H \tilde{\mathbf{A}}_S^{(l+1)} \tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_{\infty} \leq \tilde{\delta}_{|\Gamma_S^{(l+1)}|+1}^{(l+1)} \|\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_2 \quad (3.37)$$

将式(3.35)和(3.37)代入式(3.34)，可得

$$\|(\tilde{\mathbf{A}}^{(l)})^H \tilde{\mathbf{n}}^{(l)}\|_{\infty} \leq \tilde{\delta}_{|\Gamma_1^{(l-1)}|+1}^{(l-1)} \|\Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_2 + \tilde{\delta}_{|\Gamma_S^{(l+1)}|+1}^{(l+1)} \|\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_2 \quad (3.38)$$

定义 $a_{\infty}^{(l-1)} = \tilde{\delta}_{|\Gamma_1^{(l-1)}|+1}^{(l-1)} \|\Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}\|_2$ 和 $b_{\infty}^{(l+1)} = \tilde{\delta}_{|\Gamma_S^{(l+1)}|+1}^{(l+1)} \|\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}\|_2$ ，则

$$\|(\tilde{\mathbf{A}}^{(l)})^H \tilde{\mathbf{n}}^{(l)}\|_{\infty} \leq a_{\infty}^{(l-1)} + b_{\infty}^{(l+1)}, \quad l = 2, 3, \dots, L-1 \quad (3.39)$$

特殊地，对于 $l=1$ 和 $l=L$ ，分别有 $\|(\tilde{\mathbf{A}}^{(1)})^H \tilde{\mathbf{n}}^{(1)}\|_{\infty} = \|(\tilde{\mathbf{A}}^{(1)})^H \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} \tilde{\sigma}_S^{(2)}\|_{\infty} \leq b_{\infty}^{(2)}$ 和 $\|(\tilde{\mathbf{A}}^{(L)})^H \tilde{\mathbf{n}}^{(L)}\|_{\infty} = \|(\tilde{\mathbf{A}}^{(L)})^H \tilde{\mathbf{A}}^{(L-1)} \Delta \tilde{\sigma}_1^{(L-1)}\|_{\infty} \leq a_{\infty}^{(L-1)}$ 。至此，定理 3.1 得证。■

根据定理 3.1，虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{n}}^{(l)}$ 的 ℓ_2 和 ℓ_{∞} 上界分别是 $\varepsilon_2^{(l)}$ 和 $\varepsilon_{\infty}^{(l)}$ 。 $\varepsilon_2^{(l)}$ 由 $a_2^{(l-1)}$ 和 $b_2^{(l+1)}$ 组成， $\varepsilon_{\infty}^{(l)}$ 由 $a_{\infty}^{(l-1)}$ 和 $b_{\infty}^{(l+1)}$ 组成。其中 $a_2^{(l-1)}$ ($a_{\infty}^{(l-1)}$) 与上一段的估计误差 $\Delta \tilde{\sigma}_1^{(l-1)}$ 有关， $b_2^{(l+1)}$ ($b_{\infty}^{(l+1)}$) 与下一段的系数 $\tilde{\sigma}_S^{(l+1)}$ 有关。可见，在 $\varepsilon_2^{(l)}$ ($\varepsilon_{\infty}^{(l)}$) 中， $b_2^{(l+1)}$ ($b_{\infty}^{(l+1)}$) 往往会占主导地位。

3.4.2 虚拟噪声对稀疏位置估计的影响

根据虚拟噪声的 ℓ_2 和 ℓ_{∞} 有界性，以及定理 2.11 有关 OMP 算法在 ℓ_2 和 ℓ_{∞} 有界噪声下的性能保证，可得采用 OMP 算法从 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(l)} \tilde{\sigma}^{(l)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(l)}$ 中精确估计 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 稀疏位置的条件。方便起见，我们将定理 2.11 重新描述为下面的定理 3.2。

定理 3.2：对于测量模型 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)} = \tilde{\mathbf{A}}^{(l)} \tilde{\sigma}^{(l)} + \tilde{\mathbf{n}}^{(l)}$ ，若 $\|\tilde{\mathbf{n}}^{(l)}\|_2 \leq \varepsilon_2^{(l)}$ ($\|(\tilde{\mathbf{A}}^{(l)})^H \tilde{\mathbf{n}}^{(l)}\|_{\infty} \leq \varepsilon_{\infty}^{(l)}$)， $\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}$ 满足 $\tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|+1}^{(l)} < 1/(\sqrt{|\Gamma^{(l)}|} + 1)$ ，稀疏子向量 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 中非零元素 $\tilde{\sigma}_j^{(l)}$ ($j \in \Gamma^{(l)}$) 满足

$$\left| \tilde{\sigma}_j^{(l)} \right| \geq \frac{\left(\sqrt{1 + \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|+1}^{(l)}} + 1 \right) \varepsilon_2^{(l)}}{1 - \left(\sqrt{|\Gamma^{(l)}|} + 1 \right) \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|+1}^{(l)}} \quad \left(\left| \tilde{\sigma}_j^{(l)} \right| \geq \frac{\left(\sqrt{1 + \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|+1}^{(l)}} + 1 \right) \sqrt{|\Gamma^{(l)}|} \varepsilon_{\infty}^{(l)}}{1 - \left(\sqrt{|\Gamma^{(l)}|} + 1 \right) \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|+1}^{(l)}} \right) \quad (3.40)$$

则，采用迭代终止条件为 $\|\tilde{\mathbf{r}}^{[i]}\|_2 \leq \varepsilon_2^{(l)}$ ($\|(\tilde{\mathbf{A}}^{(l)})^H \tilde{\mathbf{r}}^{[i]}\|_{\infty} \leq \varepsilon_{\infty}^{(l)}$) 的 OMP 算法可精确恢复 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的支

支撑集 $\Gamma^{(l)}$ 。

从定理 3.2 中对系数非零元素幅度的要求可知, 当虚拟噪声的 ℓ_2 上界 $\varepsilon_2^{(l)}$ (ℓ_∞ 上界 $\varepsilon_\infty^{(l)}$) 的值大时, 对系数幅度的要求就高。由于虚拟噪声中包含了下一段部分系数引入的测量数据, $\varepsilon_2^{(l)}$ ($\varepsilon_\infty^{(l)}$) 的值会比较大, 因而实际中会存在幅度不能满足要求的稀疏系数。显然, 精确恢复这些系数的位置估计得不到保证。

定理 3.2 是基于虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{n}}^{(l)}$ 得到的, 其中 $\tilde{\mathbf{n}}^{(l)}$ 由前向和后向虚拟噪声组成。考虑到前向和后向虚拟噪声的存在范围分别是 $[1:M_p]$ 和 $[\tilde{M}-M_p+1:\tilde{M}]$, 前向虚拟噪声与测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_s^{(l)}$ ($s=2,\dots,S$) 的每一列都正交, 后向虚拟噪声与测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_s^{(l)}$ ($s=1,\dots,S-1$) 的每一列都正交。根据 OMP 算法原理, 系数子向量 $\tilde{\sigma}_s^{(l)}$ 的稀疏位置估计主要受前向虚拟噪声的影响, 系数子向量 $\tilde{\sigma}_s^{(l)}$ 的稀疏位置估计主要受后向虚拟噪声的影响。受虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{n}}^{(l)}$ 的影响, OMP 算法只能精确恢复 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 中幅值较大的系数的位置。但是, 若在 OMP 算法迭代终止后, 再增加一个仅在 $[0:\tilde{N}-N_p-1]$ 内寻找稀疏位置的 OMP 过程, 可以减弱后向虚拟噪声的影响, 进一步获取 $\tilde{\sigma}^{(l)}(0:\tilde{N}-N_p-1)$ 中尚未估计出的系数位置。这就是第 3.3 节所述 TOMP 算法的思想。

3.4.3 虚拟噪声对稀疏幅度估计的影响

根据 OMP 算法可知, 在精确恢复系数子向量 $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 的支撑集 $\Gamma^{(l)}$ 后, $\tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)} = (\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)})^+ \underline{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l)}$ 是

$$\underline{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l)} = \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)} \tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)} + \underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)} = \sum_{s=1}^S \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_s^{(l)}}^{(l)} \tilde{\sigma}_{\Gamma_s^{(l)}}^{(l)} + \underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}, \quad l=1,2,\dots,L \quad (3.41)$$

的最小二乘解, 其中

$$\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)}, & l=1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} + \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)}, & l=2,3,\dots,L-1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(L-1)}}^{(L-1)} \Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(L-1)}}^{(L-1)}, & l=L \end{cases} \quad (3.42)$$

记估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}$ 与真实值 $\tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}$ 间的误差为 $\Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)} = \tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)} - \hat{\tilde{\sigma}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}$, 则有

$$\Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)} = -(\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)})^+ \underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)} \quad (3.43)$$

那么, 估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}$ 的绝对误差 $\|\Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}\|_2$ 满足

$$\|\Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}\|_2 = \|(\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)})^+ \underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}\|_2 \leq \|(\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)})^+\|_2 \|\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}\|_2 \quad (3.44)$$

根据 $\|(\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)})^+\|_2 \leq 1/\sqrt{1-\delta_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}}$ 可知 $\|\Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}\|_2$ 的上界满足

$$\|\Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{1-\delta_{\Gamma^{(l)}}^{(l)}}} \|\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)}\|_2 \quad (3.45)$$

记系数子向量 $\tilde{\sigma}_{F_s^{(l)}}^{(l)}$ 的第 s ($s=1, \dots, S$) 个子向量 $\tilde{\sigma}_{F_s^{(l)}}^{(l)}$ 的估计值为 $\hat{\tilde{\sigma}}_{F_s^{(l)}}^{(l)}$ 。定理 3.3 给出了估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}_{F_s^{(l)}}^{(l)}$ 的绝对误差 $\|\Delta\tilde{\sigma}_{F_s^{(l)}}^{(l)}\|_2 = \|\tilde{\sigma}_{F_s^{(l)}}^{(l)} - \hat{\tilde{\sigma}}_{F_s^{(l)}}^{(l)}\|_2$ 的上界。

定理 3.3: 方程(3.41)的最小二乘解 $\hat{\tilde{\sigma}}_{F_s^{(l)}}^{(l)}$ ($s=1, \dots, S$) 的绝对误差满足

$$\left\| \Delta\tilde{\sigma}_{F_s^{(l)}}^{(l)} \right\|_2 \leq \begin{cases} \alpha^{S-s+1} \left\| \tilde{\sigma}_{F_s^{(l+1)}}^{(l+1)} \right\|_2, & l=1 \\ \beta \left\| \Delta\tilde{\sigma}_{F_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right\|_2 + \alpha^{S-s+1} \left\| \tilde{\sigma}_{F_s^{(l+1)}}^{(l+1)} \right\|_2, & l=2, 3, \dots, L-1 \\ \beta \left\| \Delta\tilde{\sigma}_{F_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right\|_2, & l=L \end{cases} \quad (3.46)$$

其中 $\beta = \alpha^s (1 - \alpha^{2(S-s+1)}) / (1 - \alpha^2)$, $\alpha = \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)} / (1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)})$, $\bar{K}^{(l)} = \max \{ |\Gamma^{(l-1)}|, |\Gamma^{(l)}|, |\Gamma^{(l+1)}| \}$, $\bar{\delta}_k^{(l)} = \max \{ \tilde{\delta}_k^{(l-1)}, \tilde{\delta}_k^{(l)}, \tilde{\delta}_k^{(l+1)} \}$ 。

下面给出证明定理 3.3 需要的一个引理及其证明过程。

引理 3.2: 若列满秩矩阵 \mathbf{U} 可划分为 S 个子矩阵, 即 $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_S]$, 且 $S \geq 3$ 时子矩阵 \mathbf{U}_s ($s=1, \dots, S-2$) 与 \mathbf{U}_{s+2} ($s=1, \dots, S-2$) 正交, 则

$$\mathbf{U}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^+ + \dots + (-1)^{j-1} \mathbf{U}_1^+ \prod_{i=2}^j \mathbf{U}_i \mathbf{C}_i^+ + \dots + (-1)^{S-1} \mathbf{U}_1^+ \prod_{i=2}^S \mathbf{U}_i \mathbf{C}_i^+ \\ \mathbf{C}_2^+ + \dots + (-1)^{j-1} \mathbf{C}_2^+ \prod_{i=3}^{j+1} \mathbf{U}_i \mathbf{C}_i^+ + \dots + (-1)^{S-2} \mathbf{C}_2^+ \prod_{i=3}^S \mathbf{U}_i \mathbf{C}_i^+ \\ \vdots \\ \mathbf{C}_s^+ + \dots + (-1)^{j-1} \mathbf{C}_s^+ \prod_{i=s+1}^{j+s-1} \mathbf{U}_i \mathbf{C}_i^+ + \dots + (-1)^{S-s} \mathbf{C}_s^+ \prod_{i=s+1}^S \mathbf{U}_i \mathbf{C}_i^+ \\ \vdots \\ \mathbf{C}_S^+ \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

其中 $\mathbf{C}_i = (\mathbf{I} - [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{i-1}] [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{i-1}]^+)^{-1} \mathbf{U}_i$ ($i=2, \dots, S$)。

证明: 采用数学归纳法来证明。文献[166]业已证明, $S=2$ 时, 有

$$\mathbf{U}^+ = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2]^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^+ - \mathbf{U}_1^+ \mathbf{U}_2 \mathbf{C}_2^+ \\ \mathbf{C}_2^+ \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

成立。那么, 当 $S=3$ 时, 有

$$\mathbf{U}^+ = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3]^+ = \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2]^+ - [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2]^+ \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3^+ \\ \mathbf{C}_3^+ \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

将式(3.48)代入(3.49)可得

$$\mathbf{U}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^+ - \mathbf{U}_1^+ \mathbf{U}_2 \mathbf{C}_2^+ + \mathbf{U}_1^+ \mathbf{U}_2 \mathbf{C}_2^+ \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3^+ \\ \mathbf{C}_2^+ - \mathbf{C}_2^+ \mathbf{U}_3 \mathbf{C}_3^+ \\ \mathbf{C}_3^+ \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

显然, 当 $S=3$ 时, 式(3.47)成立。

假设 $S=Q$ 时式(3.47)成立, 则对于 $S=Q+1$, 根据式(3.48)可得

$$\mathbf{U}^+ = \begin{bmatrix} [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_Q]^+ - [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_Q]^+ \mathbf{U}_{Q+1} \mathbf{C}_{Q+1}^+ \\ \mathbf{C}_{Q+1}^+ \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

显然, 将式(3.47)中的 S 替换为 Q , 并代入式(3.51), 即可证明 $S=Q+1$ 时式(3.47)成立。因此, 引理 3.2 得证。■

下面给出定理 3.3 的证明过程。

定理 3.3 的证明:首先证明 $l=2, 3, \dots, L-1$ 时绝对误差 $\|\Delta\tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2 = \|\tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} - \hat{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2$ 的上界。方程(3.41)的最小二乘解 $\hat{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}$ 的误差 $\Delta\tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} = \tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} - \hat{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}$ 可表示为

$$\Delta\tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} = -(\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{n}}^{(l)} = -(\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ (\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \Delta\tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} + \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)} \tilde{\sigma}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)}) \quad (3.52)$$

注意到列满秩矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}$ 由 S 个子矩阵组成, 即 $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} = [\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)}, \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{(l)}}^{(l)}]$, 且 $S \geq 3$ 时 $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_s^{(l)}}^{(l)} (s=1, 2, \dots, S-2)$ 与 $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{s+2}^{(l)}}^{(l)} (s=1, 2, \dots, S-2)$ 正交, 则根据引理 3.2 有

$$\Delta\tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} = \tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} - \hat{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} = -(\tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} \Delta\tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} + \tilde{\mathbf{Q}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} \tilde{\sigma}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)}), \quad s=1, \dots, S \quad (3.53)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} = \begin{cases} (\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} + \sum_{j=2}^S \left((-1)^{j-1} (\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)} \left(\prod_{i=2}^{j-1} (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i+1}^{(l)}}^{(l)} \right) (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_j^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right), & s=1 \\ (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_s^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} + \sum_{j=2}^{S-s+1} \left((-1)^{j-1} \left(\prod_{i=s}^{j+s-2} (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i+1}^{(l)}}^{(l)} \right) (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_{j+s-1}^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right), & s=2, \dots, S-1 \\ \left(\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_S^{(l)}}^{(l)} \right)^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}, & s=S, \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} = \begin{cases} (-1)^{S-1} (\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)} \left(\prod_{i=2}^{S-1} (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i+1}^{(l)}}^{(l)} \right) (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_S^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)}, & s=1 \\ (-1)^{S-s} \left(\prod_{i=s}^{S-1} (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i+1}^{(l)}}^{(l)} \right) (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_S^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)}, & s=2, \dots, S-1 \\ \left(\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_S^{(l)}}^{(l)} \right)^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)}, & s=S \end{cases}$$

式中 $\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} = (\mathbf{I} - [\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)}, \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i-1}^{(l)}}^{(l)}] [\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)}, \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i-1}^{(l)}}^{(l)}]^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})$, $i=2, \dots, S$ 。由式(3.53)可得

$$\|\Delta\tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2 \leq \|\tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2 \|\Delta\tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\|_2 + \|\tilde{\mathbf{Q}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2 \|\tilde{\sigma}_{\Gamma_S^{(l+1)}}^{(l+1)}\|_2, \quad s=1, \dots, S \quad (3.54)$$

下面推导 $\|\tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2$ 和 $\|\tilde{\mathbf{Q}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2$ 的上界。从 $\tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}$ 和 $\tilde{\mathbf{Q}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}$ 的定义可以看出, $\|\tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2$ 和 $\|\tilde{\mathbf{Q}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\|_2$

与 $\left\|(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}\right\|_2$, $\left\|(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2$, $\left\|(\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2$ ($i=2, \dots, S$), $\left\|(\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_{i+1}^{(l)}}^{(l)}\right\|_2$ ($i=2, \dots, S-1$) 和 $\left\|(\tilde{C}_{\Gamma_S^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_{S+1}^{(l)}}^{(l+1)}\right\|_2$ 有关。我们将对这几项分别讨论。

对于 $\left\|(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}\right\|_2$, 根据 $(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)} = ((\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^{-1} (\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}$ 以及引理 3.1 的性质 2)-4) 可得

$$\left\|(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}\right\|_2 \leq \left\|((\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^{-1}\right\|_2 \left\|(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}\right\|_2 \leq \frac{1}{1 - \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|}^{(l)}} \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|}^{(l)} \leq \frac{\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \quad (3.55)$$

类似地, 对于 $\left\|(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2$, 有

$$\left\|(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2 \leq \left\|((\tilde{A}_{\Gamma_2^{(l-1)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l-1)}}^{(l-1)})^{-1}\right\|_2 \left\|(\tilde{A}_{\Gamma_2^{(l-1)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2 \leq \frac{1}{1 - \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l-1)}|}^{(l-1)}} \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l-1)}|}^{(l-1)} \leq \frac{\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \quad (3.56)$$

对于 $\left\|(\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2$ ($i=2, \dots, S$), 下文首先讨论 $i=2$ 时情况。根据 $\tilde{A}_s^{(l-1)}$ 与 $\tilde{A}_s^{(l)}$ ($s=2, \dots, S$) 正交, 可得

$$(\tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} = \left((\tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}})^H \tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)} \right)^{-1} (\tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)} (\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \quad (3.57)$$

从而有

$$\left\|(\tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2 \leq \left\|((\tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}})^H \tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)})^{-1}\right\|_2 \left\|(\tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}\right\|_2 \left\|(\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2 \quad (3.58)$$

根据引理 3.1 的性质 2)-4), 可得

$$\left\|((\tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}})^H \tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)})^{-1}\right\|_2 \leq \left\|([\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}}, \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}]^H [\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}}, \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}])^{-1}\right\|_2 \leq \frac{1}{1 - \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|}^{(l)}} \leq \frac{1}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \quad (3.59)$$

$$\left\|(\tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)}\right\|_2 \leq \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|}^{(l)} \leq \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)} \quad (3.60)$$

将式(3.59), (3.60)和(3.56)代入(3.58), 可得

$$\left\|(\tilde{C}_{\Gamma_2^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2 \leq \left(\frac{\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \right)^2 \quad (3.61)$$

对于 $\left\|(\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2$ ($i=3, \dots, S$), 有

$$\left\|(\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2 \leq \left\|((\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^H (\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^{(l)})^{-1}\right\|_2 \left\|(\tilde{A}_{\Gamma_i^{(l)}})^H \tilde{A}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}\right\|_2 \left\|(\tilde{C}_{\Gamma_{i-1}^{(l)}})^+ \tilde{A}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}\right\|_2 \quad (3.62)$$

与式(3.59)和(3.60)类似, 有

$$\begin{aligned} \left\|((\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^H (\tilde{C}_{\Gamma_i^{(l)}})^{(l)})^{-1}\right\|_2 &\leq \left\|([\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}}, \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}, \dots, \tilde{A}_{\Gamma_i^{(l)}}]^H [\tilde{A}_{\Gamma_1^{(l)}}, \tilde{A}_{\Gamma_2^{(l)}}, \dots, \tilde{A}_{\Gamma_i^{(l)}}])^{-1}\right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{1 - \tilde{\delta}_{|\Gamma^{(l)}|}^{(l)}} \leq \frac{1}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\left\| (\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^H \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i-1}^{(l)}}^{(l)} \right\|_2 \leq \tilde{\delta}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} \leq \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)} \quad (3.64)$$

将式(3.63)和(3.64)代入(3.62), 可得

$$\begin{aligned} \left\| (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right\|_2 &\leq \frac{\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \left\| (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_{i-1}^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right\|_2 \\ &\leq \left(\frac{\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \right)^{i-2} \left\| (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_2^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right\|_2, \quad i = 3, \dots, S \end{aligned} \quad (3.65)$$

将式(3.61)代入(3.65), 可得

$$\left\| (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right\|_2 \leq \left(\frac{\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \right)^i, \quad i = 3, \dots, S \quad (3.66)$$

对于 $\left\| (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i+1}^{(l)}}^{(l+1)} \right\|_2$ ($i = 2, \dots, S-1$) 和 $\left\| (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_S^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{S+1}^{(l+1)}}^{(l+1)} \right\|_2$, 与式(3.66)的推导类似, 有

$$\left\| (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{i+1}^{(l)}}^{(l+1)} \right\|_2 \leq \frac{\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}, \quad i = 2, \dots, S-1 \quad (3.67)$$

$$\left\| (\tilde{\mathbf{C}}_{\Gamma_S^{(l)}}^{(l)})^+ \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_{S+1}^{(l+1)}}^{(l+1)} \right\|_2 \leq \frac{\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}}{1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)}} \quad (3.68)$$

由式(3.55), (3.56), (3.66)-(3.68)可得 $\left\| \tilde{\mathbf{P}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} \right\|_2 \leq \alpha^s (1 - \alpha^{2(S-s+1)}) / (1 - \alpha^2)$, $\left\| \tilde{\mathbf{Q}}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} \right\|_2 \leq \alpha^{S-s+1}$ ($s = 1, \dots, S$), 其中 $\alpha = \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)} / (1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)})$ 。从而, 根据式(3.54)可得

$$\left\| \Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} \right\|_2 \leq \beta \left\| \Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right\|_2 + \alpha^{S-s+1} \left\| \tilde{\sigma}_{\Gamma_{S+1}^{(l+1)}}^{(l+1)} \right\|_2, \quad s = 1, \dots, S \quad (3.69)$$

其中 $\beta = \alpha^s (1 - \alpha^{2(S-s+1)}) / (1 - \alpha^2)$, $\alpha = \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)} / (1 - \bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)})$ 。

特别地, $l=1$ 时, $\Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)} = -\tilde{\mathbf{Q}}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)} \tilde{\sigma}_{\Gamma_{S+1}^{(l+1)}}^{(l+1)}$ ($s = 1, \dots, S$), 从而有 $\left\| \Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l)}}^{(l)} \right\|_2 \leq \alpha^{S-s+1} \left\| \tilde{\sigma}_{\Gamma_{S+1}^{(l+1)}}^{(l+1)} \right\|_2$ ($s = 1, \dots, S$); $l=L$ 时, 有 $\left\| \Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_S^{(l)}}^{(l)} \right\|_2 \leq \beta \left\| \Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)} \right\|_2$ ($s = 1, \dots, S$)。至此, 定理 3.3 得证。■

定理 3.3 揭示了绝对误差 $\left\| \Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)} \right\|_2$ ($s = 1, \dots, S$) 的上界与引入前后向虚拟噪声的 $\Delta \tilde{\sigma}_{\Gamma_1^{(l-1)}}^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\sigma}_{\Gamma_{S+1}^{(l+1)}}^{(l+1)}$ 之间的关系。注意到 $\bar{\delta}_{\bar{K}^{(l)}}^{(l)} < 1/3$ 时 $\alpha < 1/2$, $\beta < 1$ 。继而, 由 β 的表达式可知, β 随 s 增大而减小。可见, 在 β 作用下, 前向虚拟噪声的影响随 s 增大而减小。而在 α^{S-s+1} 作用下, 后向虚拟噪声的影响随 s 增大而增大。考虑到后向虚拟噪声可能比前向虚拟噪声高得多, $\tilde{\sigma}^{(l)}$ 中子向量 $\tilde{\sigma}_{\Gamma_i^{(l)}}^{(l)}$ 可能比其它子向量 $\tilde{\sigma}_{\Gamma_s^{(l)}}^{(l)}$ ($s = 2, \dots, S$) 估计得精确些。这也是 3.3 节描述 SegSR 方法时每个子段仅输出 $\tilde{\sigma}_1^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}_1^{(l)}$ 的原因。

3.5 仿真分析

本节通过仿真实验评估 SegSR 方法的重构性能, 并与文献[139]的方法、SGP 方法^[140]

以及直接重构的性能相比较。本节分别采用 OMP-PKS 和 TOMP 算法求解 SegSR 方法产生的子问题(式(3.28)); 采用 OMP 算法求解文献[139]方法产生的子问题(式(3.17)); 采用 Refinement 算法^[140]求解 SGP 方法产生的子问题(式(3.18)); 采用 OMP 算法进行直接重构(求解式(3.14))。对于文献[139]的方法和 SGP 方法, 分别按照 $S = 2$ 和 $S = 3$ 设置每个子问题的规模。除特别说明外, 本节的仿真结果均是 1000 次蒙特卡洛实验的平均结果。仿真采用的计算机硬件配置为主频 3.1 GHz 的英特尔酷睿 i5-2400 处理器和 4 GB 内存, 仿真环境为 MATLAB 2011B。

3.5.1 参数设置

仿真采用的雷达发射信号为常见的线性调频脉冲信号, 其复包络 $\tilde{s}(t)$ 可表示为

$$\tilde{s}(t) = \text{rect}\left((t - T_p/2)/T_p\right) e^{i\gamma(t-T_p/2)^2} \quad (3.70)$$

其中 $\gamma = B/T_p$ 是调频斜率, B 和 T_p 分别是发射信号的带宽和脉冲宽度, $\text{rect}(t/T_p)$ 表示矩形脉冲, 即

$$\text{rect}(t/T_p) = \begin{cases} 1, & -T_p/2 \leq t \leq T_p/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (3.71)$$

设发射信号的带宽 $B = 100$ MHz, 脉冲宽度 $T_p = 10$ μ s。为使测量矩阵的规模适中以便评估直接重构的性能, 设观测时间 $T = 100$ μ s。假设目标时延在 $[0, T - T_p)$ 的分辨率格点上随机取值, 反射系数和相位偏移分别在 $(0, 1]$ 和 $(0, 2\pi]$ 上均匀分布。设 RD 系统中伪随机信号 $p(t)$ 的速率 $B_p = 100$ MHz, ADC 的采样速率 $f_{cs} = 20$ MHz。根据上述参数可知, RD 系统的降采样率 $R = 5$; 观测时间 T 内基带回波信号的 Nyquist 采样个数和复压缩测量个数分别为 $N = 10000$ 和 $M = 2000$; 脉冲宽度 T_p 内基带回波信号的 Nyquist 采样个数和复压缩测量个数分别为 $N_p = 1000$ 和 $M_p = 200$ 。

3.5.2 虚拟噪声特性评估

本小节主要评估虚拟噪声的存在范围和虚拟噪声水平。仿真中, 设置 SegSR 方法中调整子段大小的参数 $S = 3$, 并采用 OMP-PKS 求解式(3.28)的子问题。

首先, 评估虚拟噪声的存在范围。根据 $S = 3$ 和 $M_p = 200$ 可知, 测量子向量的长度 $\tilde{M} = 800$ 。根据前向和后向虚拟噪声的定义, 前向和后向虚拟噪声的存在范围分别是 $[1:200]$ 和 $[601:800]$ 。图 3.11(a)给出了稀疏度 $K = 50$ 时第二段测量子向量中虚拟噪声的幅值。该结果是 1000 次蒙特卡洛实验中一次实验的结果。可见, 图 3.11(a)的结果与理论分析一致。

其次, 评估虚拟噪声水平。定义三个信号虚拟噪声比(Signal-to-Virtual-Noise Ratio, SVNR), 即信号与总虚拟噪声比 $\text{SVNR}_o^{(l)}$, 信号与前向虚拟噪声比 $\text{SVNR}_a^{(l)}$, 信号与后

向虚拟噪声比 $\text{SVNR}_b^{(l)}$, 分别评估第 l 段测量子向量中总虚拟噪声、前向和后向虚拟噪声的水平。其中, $\text{SVNR}_o^{(l)}$ 、 $\text{SVNR}_a^{(l)}$ 和 $\text{SVNR}_b^{(l)}$ 的定义分别为

$$\text{SVNR}_o^{(l)} = \frac{\|\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}\|_2^2}{E\left[\|\tilde{\mathbf{n}}^{(l)}\|_2^2\right]}, \quad \text{SVNR}_a^{(l)} = \frac{\|\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}\|_2^2}{E\left[\|\tilde{\mathbf{A}}^{(l-1)}\Delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(l-1)}\|_2^2\right]}, \quad \text{SVNR}_b^{(l)} = \frac{\|\tilde{\mathbf{A}}^{(l)}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}\|_2^2}{E\left[\|\tilde{\mathbf{A}}^{(l+1)}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_S^{(l+1)}\|_2^2\right]} \quad (3.72)$$

图 3.11(b)给出了不同稀疏度 K 时第 2 段中三个 SVNR 的结果。由图 3.11(b)可知, 在虚拟噪声中, 后向虚拟噪声占主导地位, 其噪声水平远高于前向虚拟噪声。

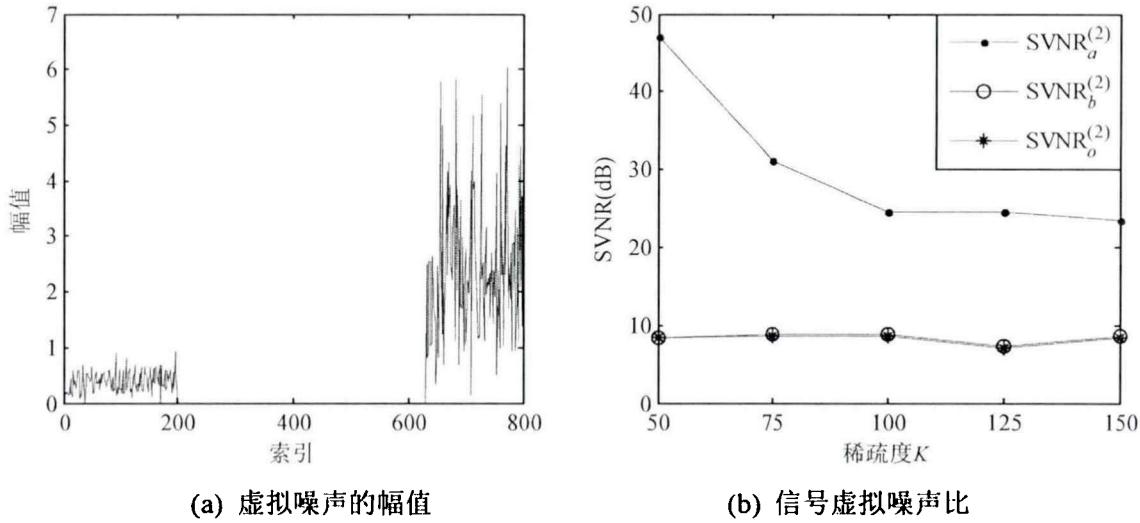


图 3.11 虚拟噪声

3.5.3 无噪声背景下的重构

本小节通过稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的重构误差和稀疏位置正确发现率, 以及仿真所需运行时间来评估无噪声背景下的重构性能。其中, 重构误差的评估标准为稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 与估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 之间的相对重构误差

$$E_r = \left\| \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right\|_2 / \left\| \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right\|_2 \quad (3.73)$$

稀疏位置正确发现率是指稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 中非零元素被正确发现的个数与非零元素总个数的比值, 运行时间通过 CPU 时间来说明。

首先评估无噪声背景下 SegSR 方法的重构性能, 比较采用 TOMP 和 OMP-PKS 算法进行子段重构时的结果。图 3.12(a)和(b)分别给出了不同稀疏度 K 和参数 S 下 SegSR 方法的相对重构误差 E_r 和稀疏位置正确发现率。

由图 3.12(a)可知, 对于相同的稀疏度 K 和参数 S , 采用 TOMP 算法实现子段重构时的 E_r 明显低于 OMP-PKS 算法的结果。由图 3.12(b)可知, 对于相同的稀疏度 K 和参数 S , 采用 TOMP 算法实现子段重构时的稀疏位置正确发现率明显高于 OMP-PKS 算法的结果。可见, TOMP 算法可以重构出 OMP-PKS 算法无法估计的稀疏系数, 与第 3.4.2 小节的

分析一致。另外,由图 3.12(b)可知,SegSR 方法的稀疏位置正确发现率小于 1,为 90%以上。这是由于受虚拟噪声的影响,SegSR 方法在进行子段重构时无法估计出幅值较小的系数。这也是造成图 3.12(a)中所示 SegSR 方法的相对重构误差 E_r 不为零的原因。

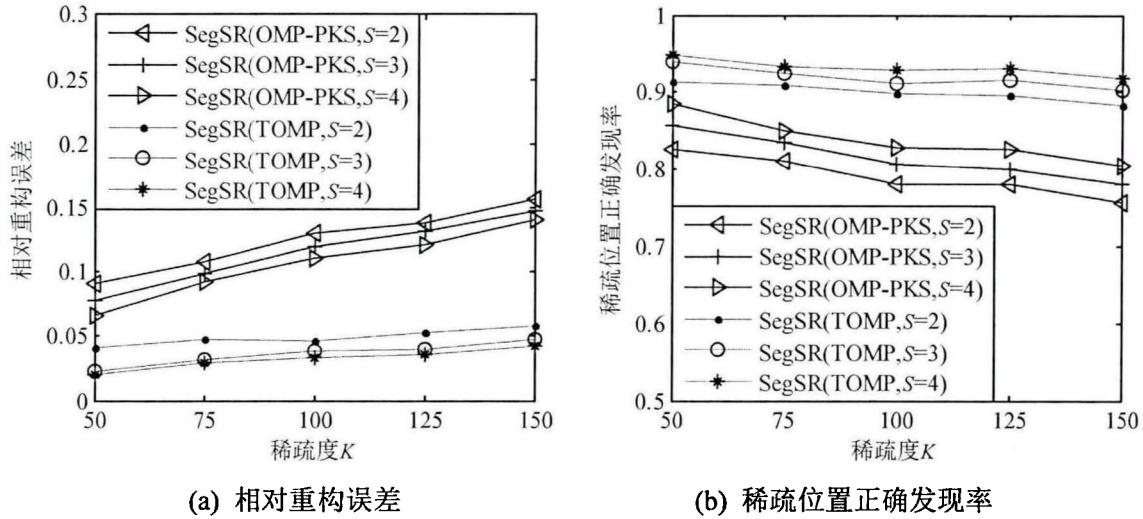


图 3.12 相对重构误差和稀疏位置正确发现率(SegSR 方法)

此外,从图 3.12(a)还可以看出,采用 TOMP 和 OMP-PKS 算法实现子段重构时,相对重构误差 E_r 随着参数 S 的增大而减小。下面将通过分析第 l 段系数子向量 $\tilde{\sigma}_l^{(l)}$ 中 S 个子向量 $\tilde{\sigma}_1^{(l)}, \tilde{\sigma}_2^{(l)}, \dots, \tilde{\sigma}_S^{(l)}$ 的绝对估计误差 $\|\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l)}\|_2, \|\Delta\tilde{\sigma}_2^{(l)}\|_2, \dots, \|\Delta\tilde{\sigma}_S^{(l)}\|_2$ 来解释这一现象。

图 3.13 给出了稀疏度 $K = 100$ 时 $\tilde{\sigma}^{(2)}$ 中 S 个系数子向量 $\tilde{\sigma}_1^{(2)}, \tilde{\sigma}_2^{(2)}, \dots, \tilde{\sigma}_S^{(2)}$ 的绝对估计误差。由图 3.13 可知, $\|\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l)}\|_2$ 的值随着 S 的增大而减小。另外,由图 3.13 可知,对于给定的 S , $\|\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l)}\|_2$ 的值往往是 S 个绝对估计误差 $\|\Delta\tilde{\sigma}_1^{(l)}\|_2, \|\Delta\tilde{\sigma}_2^{(l)}\|_2, \dots, \|\Delta\tilde{\sigma}_S^{(l)}\|_2$ 中最小的。这是 SegSR 方法在子段重构后输出估计值 $\hat{\sigma}_1^{(l)}$ 的原因,与第 3.4.3 小节的分析一致。

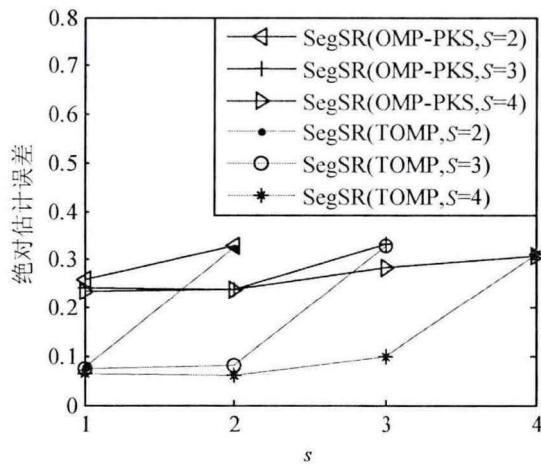


图 3.13 绝对估计误差 $\|\Delta\tilde{\sigma}_s^{(l)}\|_2$ ($l=2$)

图 3.14 给出了不同稀疏度 K 和参数 S 下 SegSR 方法的运行时间,其中子段重构采用 TOMP 算法实现。由图 3.14 可知,SegSR 方法的运行时间随着参数 S 的增大而增大。

考虑到图 3.12(a)中 SegSR 方法的相对重构误差 E_r 随着参数 S 的增大而减小，因而，在选择参数 S 时要综合考虑相对重构误差和运行时间。根据图 3.12(a)和图 3.14 的仿真结果，选择 $S=3$ 比较好。

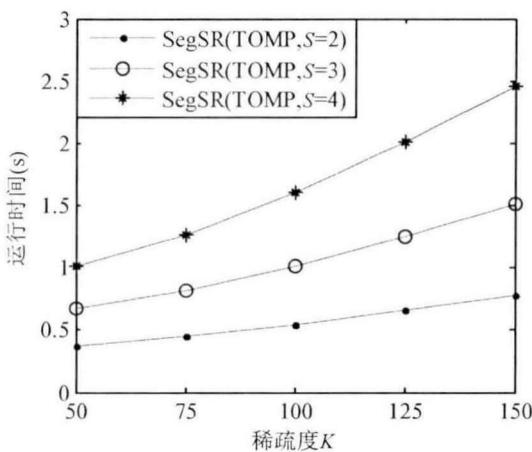


图 3.14 运行时间(SegSR 方法)

下面比较 SegSR 方法与文献[139]方法、SGP 方法以及直接重构的性能，其中 SegSR 方法的仿真结果是在参数 $S=3$ 时采用 TOMP 算法实现子段重构的结果。图 3.15(a)和(b)分别给出了不同稀疏度 K 时四种方法的相对重构误差 E_r 和稀疏位置正确发现率。

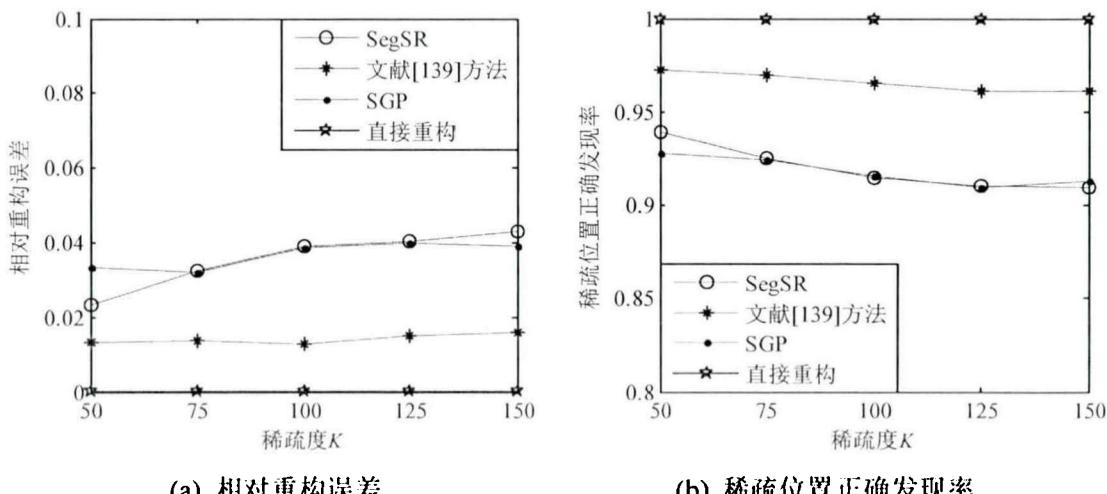


图 3.15 相对重构误差和稀疏位置正确发现率

由图 3.15(a)和(b)可知，直接重构方法的相对重构误差 E_r 为 10^{-15} 数量级，稀疏位置正确发现率为 1。可见，直接重构方法可以实现精确重构。由图 3.15(a)可知，SegSR 方法的相对重构误差 E_r 高于文献[139]方法。由图 3.15(b)可知，SegSR 方法的稀疏位置正确发现率低于文献[139]方法。这是由于 SegSR 方法的子问题中存在虚拟噪声。需要指出的是，虽然 SegSR 方法的重构性能低于文献[139]方法，但是 SegSR 方法具有理论保证，每个子问题都有重构误差的理论上界。此外，从图 3.15(a)和(b)可以看出，SGP 方法的重构性能略差，这是因为 SGP 方法的稀疏度先验信息无法精确获知。

图 3.16 给出了 SegSR 方法与文献[139]方法以及直接重构的运行时间。根据图 3.16 可知, SegSR 方法与文献[139]方法的运行时间基本相同, 比直接重构的运行时间要短。其中, $K = 50$ 和 $K = 150$ 时 SegSR 方法的运行时间分别是直接重构的 32.4% 和 16.7%。根据 3.3.2 小节的运算量分析可知, $S = 3$ 和 $P = 10$ 时 SegSR 方法与直接重构方法的运算量之比为 $S(S+1)/P^2 = 12\%$ 。理论分析与仿真结果间存在差异的主要原因是 3.3.2 小节的分析对 OMP 和 TOMP 算法的运算量进行了简化, 没有考虑 OMP 和 TOMP 算法中求解最小二乘的运算量。此外, 对于 SGP 方法, 稀疏度 K 为 50、75、100、125 和 150 时, 运行时间为 46.1 s、47.6 s、49.3 s、50.5 s 和 52.1 s。为了便于比较, 图 3.16 中没有给出 SGP 方法的运行时间。SGP 方法运行时间长的主要原因是分段个数 L_s 远大于稀疏度 K 。

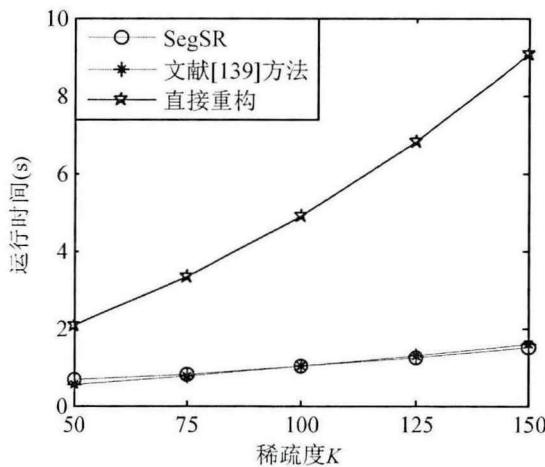


图 3.16 运行时间

3.5.4 噪声背景下的重构

假设回波信号 $\tilde{s}(t)$ 受到带限、加性复高斯白噪声 $\tilde{n}(t)$ 的污染, 其中 $\tilde{n}(t)$ 的带宽为 $B/2$, 功率谱密度为 $N_0/2$ 。本小节定义 $\text{ISNR} = 2 \int_0^T |\tilde{s}(t)|^2 dt / (TBN_0)$ 为输入信噪比(Input Signal-to-Noise Ratio, ISNR), 采用重构信噪比(Reconstruction Signal-to-Noise Ratio, RSNR)

$$\text{RSNR} = \left\| \tilde{\Psi} \tilde{\sigma} \right\|_2^2 / E \left[\left\| \tilde{\Psi} (\hat{\sigma} - \tilde{\sigma}) \right\|_2^2 \right] \quad (3.74)$$

评估噪声背景下的重构性能。

首先评估 SegSR 方法的重构性能, 比较采用 TOMP 和 OMP-PKS 算法进行子段重构时的结果。图 3.17(a)给出了稀疏度 $K = 100$ 时 SegSR 方法的 RSNR 与 ISNR 的关系。图 3.17(b)给出了 $\text{ISNR} = 10 \text{ dB}$ 时 SegSR 方法的 RSNR 与稀疏度 K 的关系。

由图 3.17(a)可知, 当 ISNR 较高($\text{ISNR} \geq 5 \text{ dB}$)时, 采用 TOMP 算法实现子段重构时的 RSNR 明显高于采用 OMP-PKS 算法时的结果; 当 ISNR 较低($\text{ISNR} < 5 \text{ dB}$)时, 两者

的差别不大。这是由于 ISNR 较高时, TOMP 算法可以估计出 OMP-PKS 算法无法估计的稀疏系数。另外, 由图 3.17(a)可知, ISNR > 10 dB 时, 采用 TOMP 算法实现子段重构时的 RSNR 随参数 S 的增大而增大, 而 ISNR ≤ 10 dB 时, RSNR 随参数 S 的变化不大。这是由于 ISNR 较低时, 背景噪声的影响占主导, 而 ISNR 较高时, 虚拟噪声的影响占主导。由图 3.17(b)可知, 采用 TOMP 算法实现子段重构时的 RSNR 明显高于 OMP-PKS 算法的结果。另外, 当 $S \geq 3$ 时, 采用 TOMP 算法实现子段重构时的 RSNR 变化不明显。可见, 设置 SegSR 的参数 S 时, 选择 $S = 3$ 比较好。这与无噪情况下的结论相同。

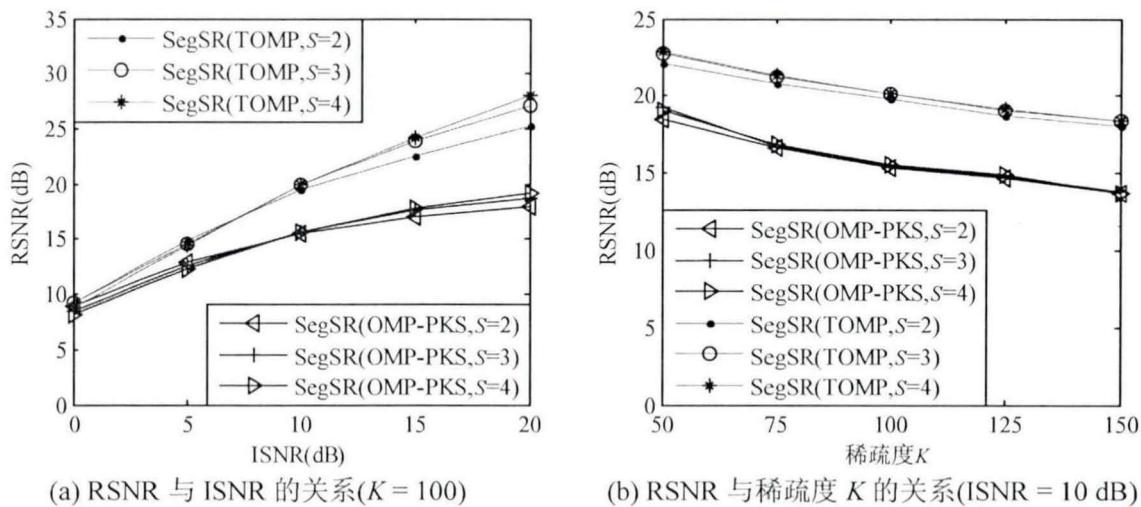


图 3.17 重构信噪比 RSNR(SegSR 方法)

为了直观展示信号波形的重构情况, 图 3.18 和图 3.19 分别给出了稀疏度 $K = 50$ 、 $\text{ISNR} = 10 \text{ dB}$ 时一次仿真实验中的原始回波信号和采用 SegSR 方法恢复出的回波信号。

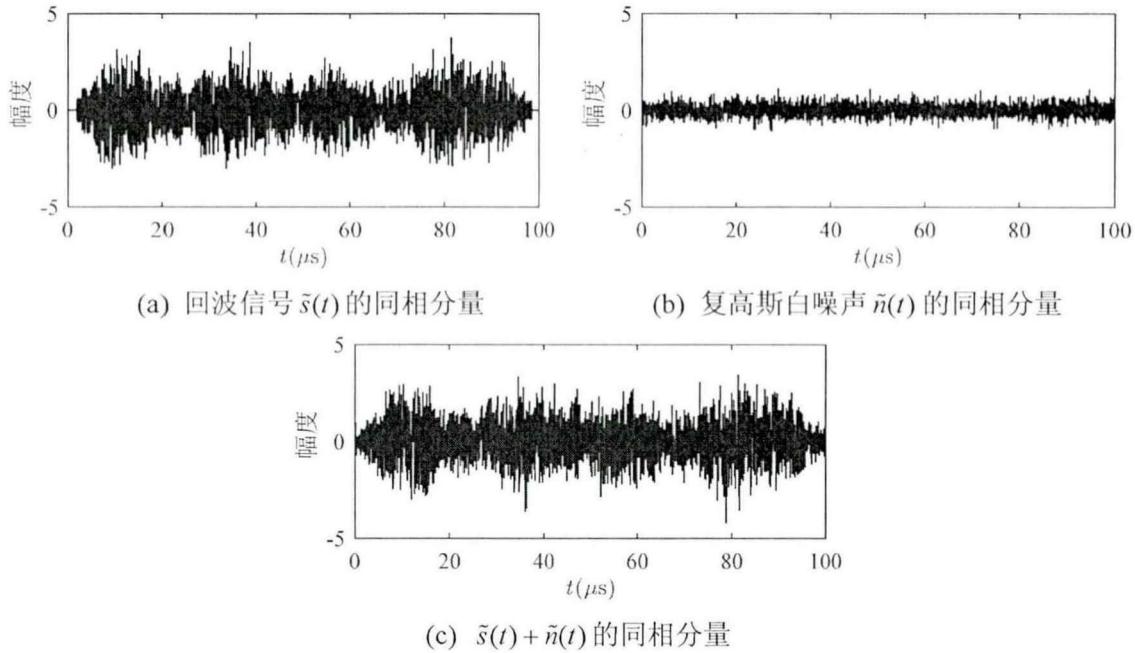


图 3.18 回波信号($K = 50$, $\text{ISNR} = 10 \text{ dB}$)

图 3.18(a)-(c)分别给出了稀疏度 $K = 50$ 、ISNR = 10 dB 时一次仿真实验中回波信号 $\tilde{s}(t)$ 、复高斯白噪声 $\tilde{n}(t)$ 以及 $\tilde{s}(t) + \tilde{n}(t)$ 的同相分量。图 3.19(a)和(c)分别是参数 $S = 3$ 时采用 OMP 和 TOMP 算法实现子段重构所恢复的 Nyquist 率回波信号 $\hat{\Psi}\hat{\sigma}$ 的同相分量；图 3.19(b)和(d)分别是相应的重构波形误差 $\hat{\Psi}(\hat{\sigma} - \tilde{\sigma})$ 的同相分量。由图 3.19(b)和(d)可知，采用 TOMP 算法进行子段重构时的波形误差要小于采用 OMP 算法时的结果。

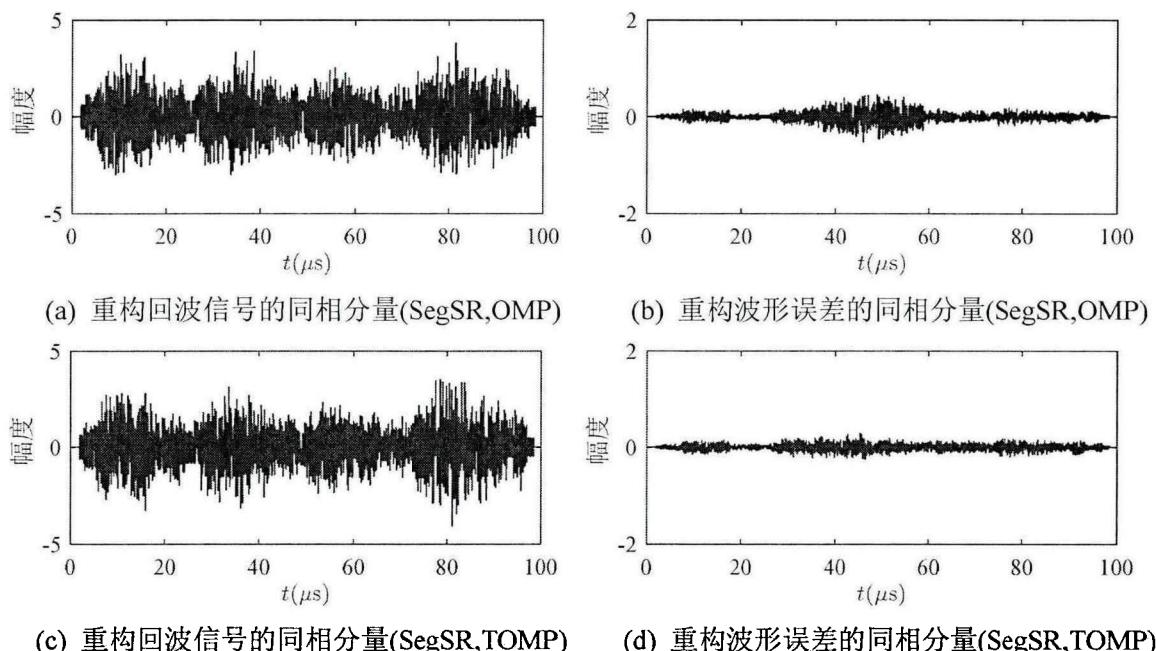


图 3.19 重构回波信号($K = 50$, ISNR = 10 dB)

下面比较 SegSR 方法与文献[139]方法、SGP 方法以及直接重构的性能，其中 SegSR 方法的仿真结果是在参数 $S = 3$ 时采用 TOMP 算法实现子段重构的结果。图 3.20(a)给出了稀疏度 $K = 100$ 时四种方法的 RSNR 与 ISNR 的关系。图 3.20(b)给出了 ISNR = 10 dB 时四种方法的 RSNR 与稀疏度 K 的关系。

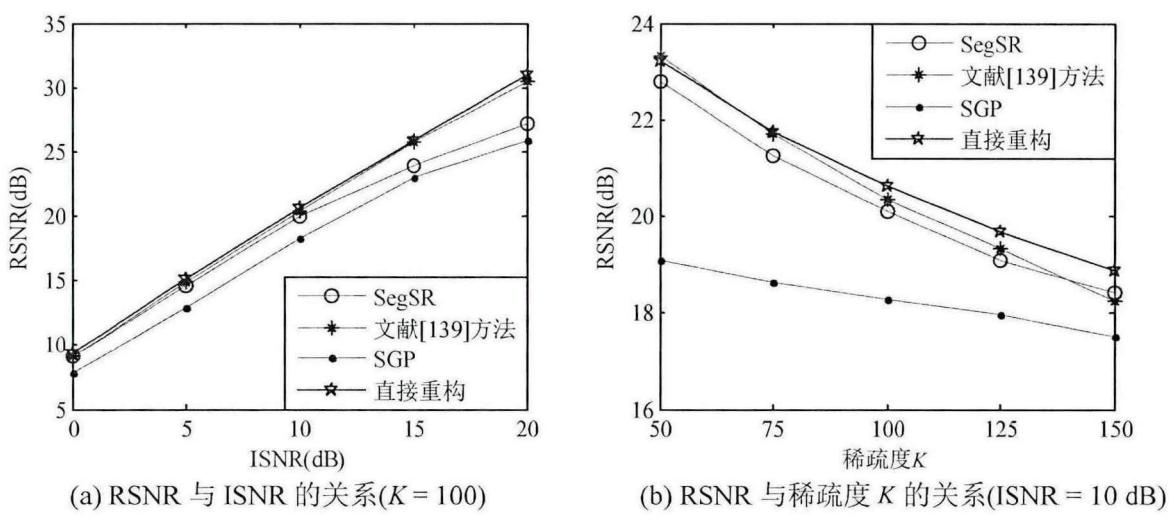


图 3.20 重构信噪比 RSNR

由图 3.20(a)和(b)可知, SegSR 方法的 RSNR 接近于文献[139]方法以及直接重构的结果, 特别是 $\text{ISNR} \leq 10 \text{ dB}$ 时。这是由于 ISNR 较低时, 相对于虚拟噪声而言, 背景噪声的影响占主导。另外, 由图 3.20(a)和(b)可知, SegSR 方法的 RSNR 高于 SGP 方法。这是由于求解 SGP 子问题的 Refinement 算法依赖于稀疏度先验信息, 而在噪声背景下, 稀疏度先验信息不准确使得 SGP 方法的重构性能显著下降。

为了直观地展示信号波形的重构情况, 图 3.21 给出了稀疏度 $K = 50$ 、 $\text{ISNR} = 10 \text{ dB}$ 时一次仿真实验中采用上述四种方法恢复的回波信号, 其中仿真使用的原始回波信号见图 3.18。

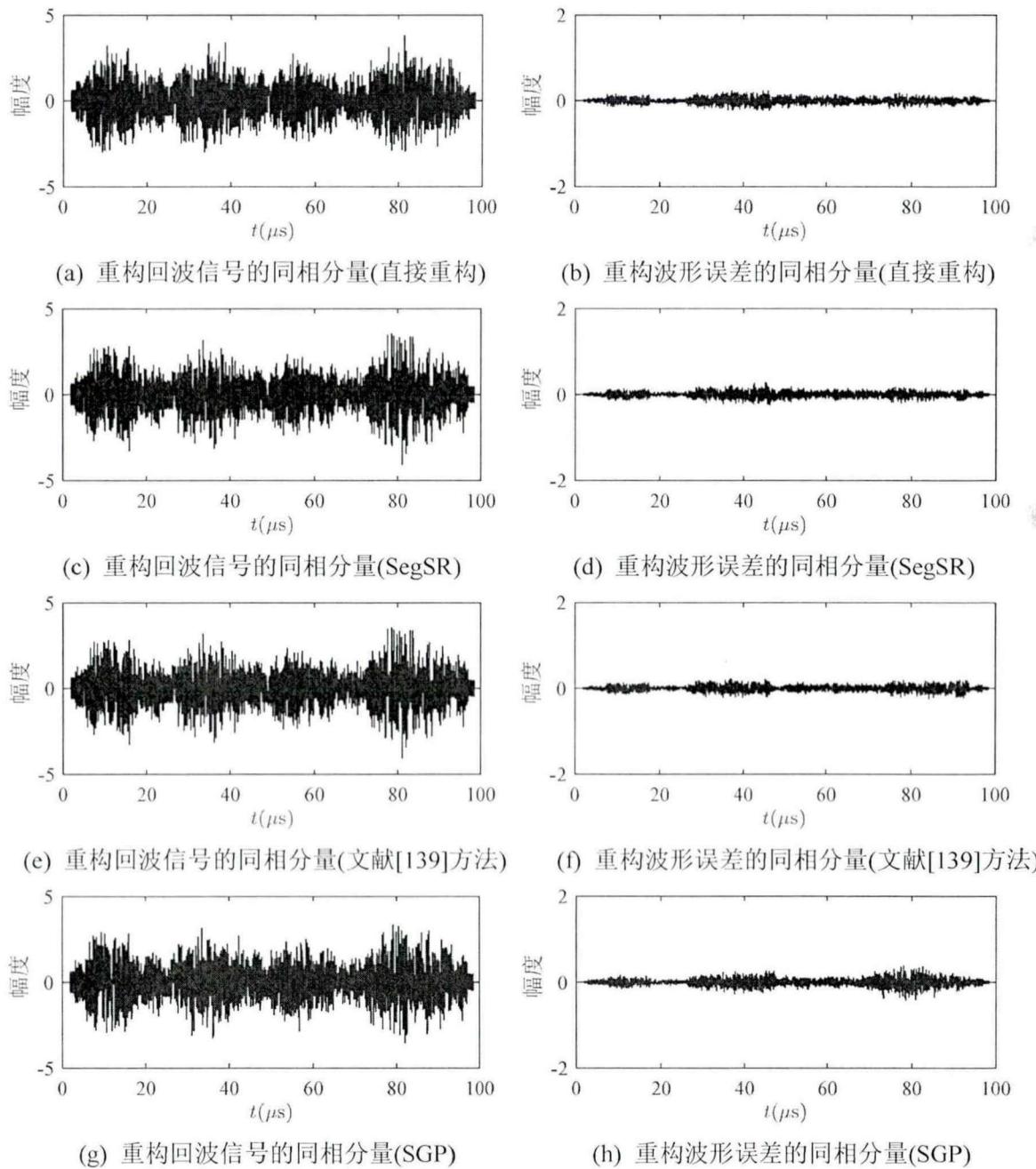


图 3.21 重构回波信号($K = 50$, $\text{ISNR} = 10 \text{ dB}$)

图 3.21(a)、(c)、(e)和(g)分别是采用直接重构、SegSR、文献[139]方法和 SGP 这四种方法恢复出的 Nyquist 率回波信号 $\tilde{\Psi}\hat{\sigma}$ 的同相分量；图 3.21(b)、(d)、(f)和(h)分别是相应的重构波形误差 $\tilde{\Psi}(\hat{\sigma}-\tilde{\sigma})$ 的同相分量。由图 3.21(b)、(d)、(f)和(h)可知，SegSR 方法的重构波形误差接近于文献[139]方法和直接重构的结果，比 SGP 方法的重构波形误差要小。

3.6 本章小结

本章将 RD 系统应用于脉冲雷达基带回波信号采样，研究了从压缩测量数据中快速重构基带回波信号的问题，提出了一种新的分段重构方法——分段滑动重构(SegSR)方法。本章从 RD 系统测量矩阵的结构、SegSR 方法的原理及其存储量和运算量、SegSR 方法的重构性能分析，以及仿真实验四个方面做了深入研究。首先，根据雷达回波信号的稀疏表示和 RD 的结构特点，分析了测量矩阵的带状结构；其次，详细阐述了 SegSR 方法的原理、流程和实现方式，并分析了 SegSR 方法的存储量和运算量；然后，从理论上分析了对带状测量矩阵进行分割时由相邻段产生的虚拟噪声的特性，以及虚拟噪声对当前段稀疏系数位置和幅度估计性能的影响；最后，通过仿真实验分析了 SegSR 方法的重构性能。虽然 SegSR 方法是基于 RD 系统提出的，但其它 AIC 系统若能产生类似结构的测量矩阵，也可采用 SegSR 方法进行重构。

4 正交压缩采样雷达信号的快速重构

正交压缩采样(QuadCS)雷达是以雷达中频回波信号为压缩采样对象的雷达接收系统。该系统采用 QuadCS 系统对雷达中频回波信号进行压缩采样，获取回波信号 I/Q 压缩测量。理论上，从压缩测量中恢复雷达基带回波信号可以通过求解稀疏重构问题实现。然而，如 4.1.2 节所述，稀疏重构问题的规模大，采用现有稀疏重构算法直接求解计算量大，难以实现实时重构。为此，本文基于 QuadCS 雷达系统，开展基带回波信号快速重构方法的研究。

第 3 章针对 RD 压缩采样雷达面临的大规模稀疏重构问题，根据采用积分器实现低通滤波的 RD 系统结构特点，剖析出 RD 系统的测量矩阵具有带状结构，并据此提出了一种分段滑动重构(SegSR)方法，快速有效地完成了对大规模稀疏重构问题的求解。然而，对于采用带通滤波器实现带通滤波的 QuadCS 系统而言，模拟带通滤波器具有无限长冲激响应，因而 QuadCS 系统的测量矩阵并不具备与 RD 系统测量矩阵相类似的带状结构，从而使得无法采用 SegSR 方法求解 QuadCS 雷达面临的大规模稀疏重构问题。

本章对 QuadCS 系统中带通滤波器的冲激响应进行合理截断，将 QuadCS 系统的测量矩阵近似成带状矩阵，继而采用 SegSR 方法实现快速重构。注意到，采用近似矩阵实现稀疏重构等同于测量矩阵受到扰动时的稀疏重构问题。本章从理论上分析了利用近似矩阵重构信号的稳定性，并通过仿真评估了近似矩阵的扰动量，验证了获取近似矩阵的合理性和可行性，以及基于近似矩阵采用 SegSR 方法实现快速重构的有效性。

本章内容安排如下：4.1 节给出信号模型和问题描述；4.2 节分析测量矩阵的结构，介绍测量矩阵的近似处理方法，以及分段滑动重构方法的应用；4.3 节分析近似处理对重构性能的影响；4.4 节给出数值仿真结果；4.5 节总结本章内容。

4.1 信号模型和问题描述

4.1.1 信号模型

设雷达发射载频为 f_c 、带宽为 B 、脉冲宽度为 T_p 的脉冲信号。对于 K 个静止的非起伏点目标环境，雷达接收端对回波信号进行下变频处理后获取的中频信号可表示为

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k a(t-t_k) \cos[2\pi f_0(t-t_k) + \phi(t-t_k) + \varphi_k], t \in [0, T] \quad (4.1)$$

其中 T 表示雷达观测时间， f_0 是中频载波频率， $a(t)$ 和 $\phi(t)$ 分别是发射信号的包络和相位， σ_k ， t_k 和 φ_k 分别是第 k 个目标的反射系数、时延和相位偏移。若 $f_0 > B/2$ ，则 $r(t)$ 是载频为 f_0 、带宽为 B 的带通信号。

令 $I(t)$ 和 $Q(t)$ 分别表示带通信号 $r(t)$ 的同相(I)和正交(Q)分量, 则 $r(t)$ 可表示为

$$r(t) = I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (4.2)$$

其中

$$I(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k a(t-t_k) \cos[\phi(t-t_k) + \varphi_k - 2\pi f_0 t_k] \quad (4.3)$$

$$Q(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k a(t-t_k) \sin[\phi(t-t_k) + \varphi_k - 2\pi f_0 t_k] \quad (4.4)$$

记 $\tilde{s}_0(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$ 为发射信号的复包络, 其中 i 表示虚数单位, 则 $r(t)$ 的复包络可表示为

$$\tilde{s}(t) = I(t) + iQ(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{\sigma}_k \tilde{s}_0(t-t_k) \quad (4.5)$$

其中 $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k e^{i(\varphi_k - 2\pi f_0 t_k)}$ 表示目标的复反射系数。

令 $\tau_0 = 1/B$ 表示 Nyquist 采样间隔, $\tilde{\psi}(t)$ 表示由 $\tilde{s}_0(t)$ 以 τ_0 为间隔进行时移形成的波形匹配字典, 即 $\tilde{\psi}(t) = \{\tilde{\psi}_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$, 其中 $\tilde{\psi}_n(t) = \tilde{s}_0(t-n\tau_0)$, $N = \lfloor (T-T_p)/\tau_0 \rfloor$ 。若目标时延满足 $t_k \in \{0, \tau_0, \dots, (N-1)\tau_0\}$, 利用波形匹配字典 $\tilde{\psi}(t)$, 可将 $\tilde{s}(t)$ 表示为

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n \tilde{\psi}_n(t) = \tilde{\psi}(t) \tilde{\sigma} \quad (4.6)$$

其中 $\tilde{\sigma} = [\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{N-1}]^\top$ 表示复反射系数向量, 且 $\tilde{\sigma}$ 中非零元素个数等于目标个数, 即 $\|\tilde{\sigma}\|_0 = K$ 。如果 $K \ll N$, 则称 $\tilde{s}(t)$ 为 K -稀疏信号。

4.1.2 雷达中频回波信号的压缩采样

本小节阐述 QuadCS 系统获取脉冲雷达中频回波信号 I/Q 分量压缩测量的工作原理。如图 4.1 所示, QuadCS 系统由低速采样模块和正交解调模块组成。

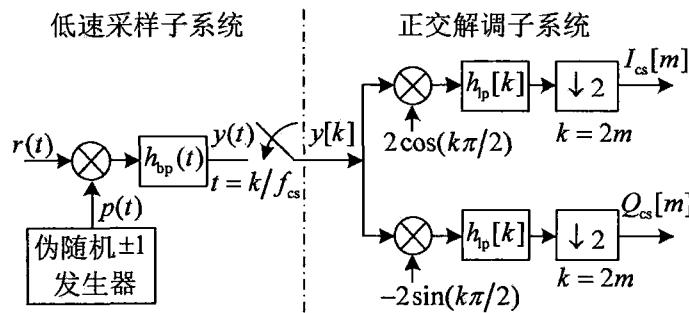


图 4.1 QuadCS 系统框图

在低速采样模块中, 输入信号 $r(t)$ 首先与伪随机信号 $p(t)$ 相乘, 其中 $p(t)$ 以速率 B_p ($B_p \geq B$) 在 +1 和 -1 之间随机取值, 然后经过中心频率为 f_0 、带宽为 B_{cs} ($B_{cs} \ll B$) 的带通

滤波器得到带通信号 $y(t)$ 。令 $h_{bp}(t)$ 表示带通滤波器的冲激响应，则 $y(t)$ 可表示为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{bp}(\tau) p(t-\tau) r(t-\tau) d\tau = \operatorname{Re}\{\tilde{s}_{cs}(t) e^{i2\pi f_0 t}\} \quad (4.7)$$

其中 $\tilde{s}_{cs}(t)$ 是信号 $r(t)$ 的压缩复包络，有

$$\tilde{s}_{cs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-i2\pi f_0 \tau} p(t-\tau) \tilde{s}(t-\tau) d\tau \quad (4.8)$$

此外， $\tilde{s}_{cs}(t)$ 可分解为同相压缩分量 $I_{cs}(t)$ 和正交压缩分量 $Q_{cs}(t)$ ，即有 $I_{cs}(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{s}_{cs}(t)\}$ 和 $Q_{cs}(t) = \operatorname{Im}\{\tilde{s}_{cs}(t)\}$ ，其中 $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ 和 $\operatorname{Im}\{\cdot\}$ 分别表示取实部和虚部运算。

针对中心频率为 f_0 、带宽为 B_{cs} 的带通信号 $y(t)$ ，可采用带通采样理论^[7]对 $y(t)$ 进行采样。若采样频率满足 $f_{cs} = 4f_0/(4l+1)$ (l 为满足 $l \leq \lfloor (f_0 - B_{cs}/2)/2B_{cs} \rfloor$ 的正整数)，则 $y(t)$ 的采样序列 $y[k]$ 可表示为

$$\begin{aligned} y[k] &= y(k/f_{cs}) = \operatorname{Re}\{\tilde{s}_{cs}(k/f_{cs}) e^{ik\pi/2}\} \\ &= I_{cs}(k/f_{cs}) \cos(k\pi/2) - Q_{cs}(k/f_{cs}) \sin(k\pi/2) \\ &= I_{cs}[k] \cos(k\pi/2) - Q_{cs}[k] \sin(k\pi/2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

正交解调模块首先对 $y[k]$ 进行数字解调，然后经过截止频率为 $\pi/2$ 的数字低通滤波器实现滤波处理，最后对滤波输出进行 2 倍抽取。令 $h_p[k]$ 表示低通滤波器的冲激响应，则正交解调模块输出的压缩 I/Q 序列 $I_{cs}[m]$ 和 $Q_{cs}[m]$ ，即

$$I_{cs}[m] = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} 2h_p[\xi] y[2m-\xi] \cos((2m-\xi)\pi/2) \quad (4.10)$$

$$Q_{cs}[m] = - \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} 2h_p[\xi] y[2m-\xi] \sin((2m-\xi)\pi/2) \quad (4.11)$$

那么，根据 $I_{cs}[m]$ 和 $Q_{cs}[m]$ 可得压缩的复包络序列 $\tilde{s}_{cs}[m]$ ，即

$$\tilde{s}_{cs}[m] = I_{cs}[m] + iQ_{cs}[m] = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h_p[\xi] \tilde{s}_{cs}((2m-\xi)/f_{cs}) \quad (4.12)$$

记观测时间 T 内 $\tilde{s}_{cs}[m]$ 的个数为 $M = \lfloor T/T_{cs} \rfloor$ ，其中 $T_{cs} = 2/f_{cs}$ 。根据 Nyquist 采样间隔 τ_0 ，定义 $R = T_{cs}/\tau_0$ 为 QuadCS 的降采样率，通常， R 为大于 1 的整数。

注意到，根据式(4.6)所示 $\tilde{s}_{cs}(t)$ 的稀疏表示形式，可将式(4.8)改写为

$$\tilde{s}_{cs}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n \int_{-\infty}^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-i2\pi f_0 \tau} p(t-\tau) \tilde{\psi}_n(t-\tau) d\tau \quad (4.13)$$

那么，式(4.12)可进一步表示为

$$\tilde{s}_{cs}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h_p[\xi] \int_{-\infty}^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-i2\pi f_0 \tau} p((2m-\xi)/f_{cs}-\tau) \tilde{\psi}_n((2m-\xi)/f_{cs}-\tau) d\tau \quad (4.14)$$

定义测量向量 $\tilde{s}_{cs} = [\tilde{s}_{cs}[1], \tilde{s}_{cs}[2], \dots, \tilde{s}_{cs}[M]]^T$ 和测量矩阵 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{m,n}] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ，其中

$$\tilde{a}_{m,n} = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h_p[\xi] \int_{-\infty}^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-i2\pi f_0 \tau} p((2m-\xi)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-\xi)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (4.15)$$

则可将 QuadCS 用矩阵形式描述为

$$\tilde{s}_{cs} = \tilde{A}\tilde{\sigma} \quad (4.16)$$

文献[104]证明对正交波形匹配字典， \tilde{A} 满足 RIP 条件。因此，可求解稀疏重构问题

$$\hat{\tilde{\sigma}} = \arg \min_{\tilde{\sigma}} \|\tilde{\sigma}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{s}_{cs} = \tilde{A}\tilde{\sigma} \quad (4.17)$$

获取稀疏向量 $\tilde{\sigma}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}$ ，然后根据式(4.6)恢复基带回波信号 $\tilde{s}(t)$ 。

然而，在一些雷达应用场景下，直接求解式(4.17)需要计算大的测量矩阵 \tilde{A} 。例如，对于发射信号带宽 $B = 100$ MHz、脉冲宽度 $T_p = 10$ μs 的脉冲雷达系统，若 QuadCS 系统的降采样率 $R = 5$ ，则观测时间 $T = 2490$ μs 内回波信号复包络的压缩测量个数 $M = 49800$ 。若目标时延在 $[0, T - T_p)$ 内，则测量矩阵 \tilde{A} 的大小是 49800×248000 。根据现有稀疏重构算法的运算量，直接求解式(4.17)运算量大，难以实现快速重构。4.2 节将在分析 QuadCS 物理特征基础上，通过合理近似测量矩阵 \tilde{A} ，给出快速重构稀疏向量 $\tilde{\sigma}$ 的方法。

4.2 测量矩阵的近似处理及分段滑动重构

4.2.1 测量矩阵的近似处理

对于物理可实现的模拟滤波器而言，其冲激响应在 $t < 0$ 时等于 0。因此，QuadCS 系统中模拟带通滤波器满足 $h_{bp}(t) = 0$ ， $t < 0$ 。设 QuadCS 系统中数字低通滤波器 h_p 的长度为 N_{hl} ，则式(4.15)可改写为

$$\tilde{a}_{m,n} = \sum_{\xi=0}^{N_{hl}-1} h_p[\xi] \int_0^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-i2\pi f_0 \tau} p((2m-\xi)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-\xi)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (4.18)$$

对于脉冲宽度为 T_p 的复包络 $\tilde{s}_0(t)$ ，字典 $\tilde{\psi}(t)$ 中原子 $\tilde{\psi}_n(t) = \tilde{s}_0(t - n\tau_0)$ 的脉冲宽度也是 T_p ，即 $\tilde{\psi}_n(t) = 0$ ， $t \notin [n\tau_0, T_p + n\tau_0)$ ， $n = 0, 1, \dots, N-1$ ，其中 $N = \lfloor (T - T_p)/\tau_0 \rfloor$ 。那么，由式(4.18)得到的测量矩阵 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{m,n}] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 满足

$$\tilde{a}_{m,n} = 0, \quad n/R \geq m \quad (4.19)$$

注意到，尽管 $h_{bp}(t)$ 是无限长的，但是其能量主要集中在有限时间内。图 4.2 给出了 $h_{bp}(t)$ 的示意图。由图 4.2 可知，当 t 大于某一时刻时， $h_{bp}(t)$ 接近于 0。那么，由式(4.18)可知，当 m 大于某一数值时，测量矩阵 \tilde{A} 的元素 $\tilde{a}_{m,n}$ 接近于 0。图 4.3(a)给出了测量矩阵 \tilde{A} 的结构示意图，其中空白区域的值为 0，灰色区域的值接近于 0。

下面通过对 $h_{bp}(t)$ 进行截断处理，即采用有限长冲激响应逼近无限长冲激响应，来获取测量矩阵 \tilde{A} 的近似矩阵 \tilde{A}' ，见图 4.3(b)。

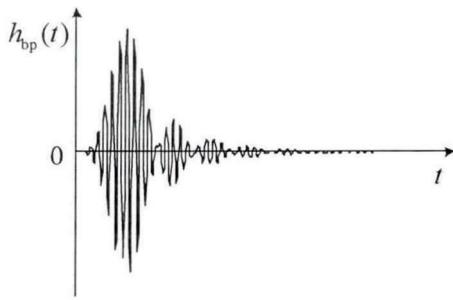


图 4.2 带通滤波器的冲激响应

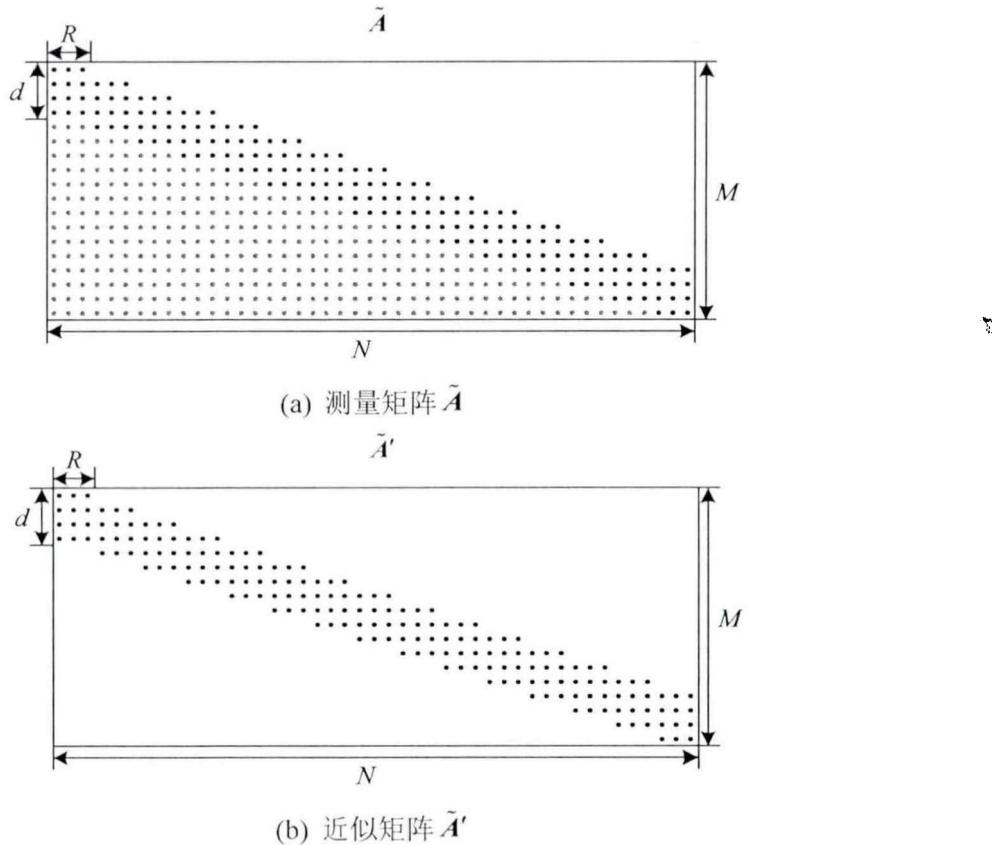


图 4.3 测量矩阵及其近似矩阵的结构

设 $h_{bp}(t)$ 的截断长度为 T_{hb} , 则式(4.18)转变为

$$\tilde{a}'_{m,n} = \sum_{\xi=0}^{N_{hl}-1} h_{bp}[\xi] \int_0^{T_{hb}} h_{bp}(\tau) e^{-j2\pi f_{cs}\tau} p((2m-\xi)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-\xi)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (4.20)$$

这样, 近似矩阵 $\tilde{A}' = [\tilde{a}'_{m,n}] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 满足

$$\tilde{a}'_{m,n} = 0, m \leq \lfloor n/R \rfloor \text{ 或 } m \geq \left\lceil \left(\lceil (T_p + n\tau_0 + T_{hb}) f_{cs} \rceil + N_{hl} - 1 \right) / 2 \right\rceil \quad (4.21)$$

令 $d = \max_n \left\{ \left\lceil \left(\lceil (T_p + n\tau_0 + T_{hb}) f_{cs} \rceil + N_{hl} - 1 \right) / 2 \right\rceil - \lfloor n/R \rfloor \right\}$, 则式(4.21)可改写为

$$\tilde{a}'_{m,n} = 0, n/R < m-d \text{ 或 } n/R \geq m \quad (4.22)$$

可见, \tilde{A}' 具有带状结构, 其中列向量最大非零区域(垂直带)的长度为 d , 行向量间的偏

移量为 R 。根据 d 的定义, 对于给定的 T_p , f_{cs} 和 N_{hl} , d 随着 T_{hb} 的增大而增大。

4.2.2 基于带状近似矩阵的分段滑动重构

注意到, 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 在结构上与矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 不同, 呈带状结构, 与第 3 章中 RD 测量矩阵的结构相同。因此, 可以采用第 3 章提出的分段滑动重构(SegSR)方法对测量向量 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}}$ 、矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 和稀疏系数向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 进行重叠划分, 将原来的大规模稀疏重构问题转化为一系列小规模稀疏重构子问题求解。

按照 SegSR 方法的分段方式对 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}}$ 、 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 进行划分(如图 4.4 所示), 分别获取 L 个测量子向量 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}}^{(l)}$ 、系数子向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$ 和测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'^{(l)}$ 。记 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}}^{(l)}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$ 的长度分别为 \tilde{M} 和 \tilde{N} , $\tilde{\mathbf{A}}'^{(l)}$ 的大小是 $\tilde{M} \times \tilde{N}$, 其中 $\tilde{M} = (S+1)M_p$, $\tilde{N} = SN_p$, $M_p = d - 1$, $N_p = M_p R$, S 用来控制 \tilde{M} 和 \tilde{N} 的大小, 且满足 $1 < S < P$ ($P = \lceil N/N_p \rceil$)。此外, 每段测量子向量(系数子向量)相对于其前一段的偏移量为 M_p (N_p)。这样, 第 l 个稀疏重构子问题可表示为

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}} \left\| \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)} \right\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \left\| \tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{A}}'^{(l)} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)} \right\|_2 \leq \eta^{(l)} \quad (4.23)$$

其中 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}}^{(l)}$ 为第 l 段虚拟测量子向量, 是根据估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(l-1)}$ 的前 N_p 个元素从测量子向量 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}}^{(l)}$ 中去除其引入的测量形成的; $\eta^{(l)}$ 与虚拟噪声和近似矩阵引入的噪声有关, 其中虚拟噪声源于前一段的估计误差和后一段引入的部分测量。在求解式(4.23)获取 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$ 后, 将 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(l)}$ 的前 N_p 个元素作为第 l 段输出的重构系数。这样, 依次求解每个子问题可重构出稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 。

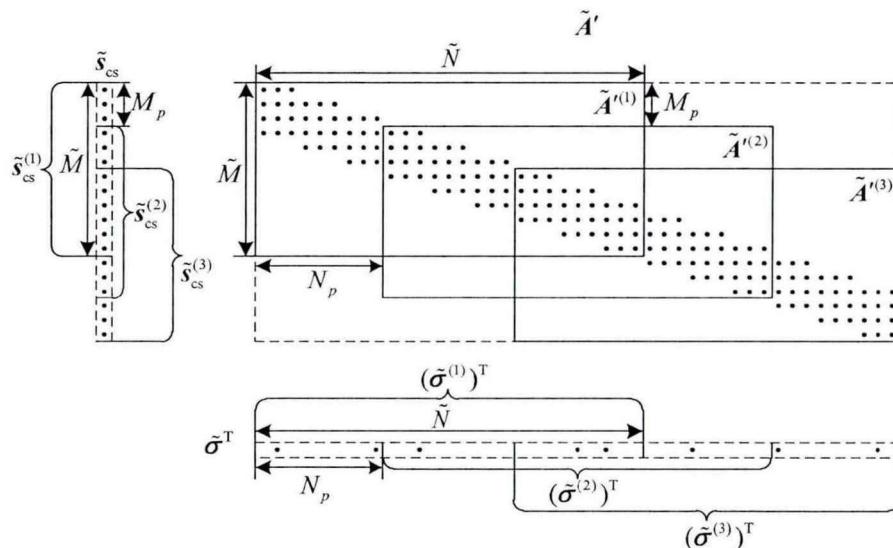


图 4.4 测量向量、近似矩阵和稀疏向量的划分示意图

4.2.3 存储量和运算量

本小节主要分析基于近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 采用 SegSR 方法进行重构所需的存储量和运算量。首先分析存储量。由 3.3.2 小节对 SegSR 方法的存储量分析可知, SegSR 方法的存储量与测量子矩阵的大小有关。根据 4.2.2 小节可知, 采用 SegSR 方法对近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 进行划

分后,每段的测量子矩阵是 $\tilde{M} \times \tilde{N}$ 维的复矩阵,其中 $\tilde{M} = (S+1)M_p$, $\tilde{N} = SN_p$, $M_p = d-1$, $N_p = (d-1)R$ 。因此,基于近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 的 SegSR 方法所需存储空间的字节数为 $16\tilde{M}\tilde{N} = 16S(S+1)M_pN_p = 16S(S+1)(d-1)^2R$ 。可见,对于给定的参数 S 和 R , 存储量与参数 d 有关, d 越大, 存储量越大。根据 4.2.1 小节中参数 d 的定义可知,对于给定的测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$, 近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 中参数 d 的取值与截断长度 T_{hb} 有关, T_{hb} 越大, d 越大。

对于 4.1.2 小节中的脉冲雷达系统参数,有 $N = 249000$ 。若 QuadCS 系统的采样频率 $f_{cs} = 40$ MHz, 低通滤波器冲激响应的长度 $N_{hl} = 31$, 则 $R = 5$, $M = 49800$ 。表 4.1 给出了基于近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 采用 SegSR 方法重构所需的存储量,其中近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 根据不同的截断长度 T_{hb} 产生, SegSR 方法的参数 S 固定, 取 $S = 3$ 。

表 4.1 直接重构和基于近似矩阵采用 SegSR 方法重构的存储量

重构方法	直接重构	基于近似矩阵的 SegSR 方法			
		$T_{hb} = 0.2 \mu s$	$T_{hb} = 0.4 \mu s$	$T_{hb} = 0.6 \mu s$	$T_{hb} = 0.8 \mu s$
		($d = 219$)	($d = 223$)	($d = 227$)	($d = 231$)
存储量(MB)	1.89×10^5	43.51	45.12	46.76	48.43

由表 4.1 可知,随着 T_{hb} 的增大, d 增大, 存储量也增大。此外,作为对比,表 4.1 也给出了直接求解式(4.17)时需要的存储量。关于直接重构的运算量分析详见 3.3.2 小节。由表 4.1 可知,相对于直接重构而言,基于近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 采用 SegSR 方法重构所需的存储量明显降低。

其次,分析基于近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 采用 SegSR 方法进行重构所需的运算量。根据 3.3.2 小节对 SegSR 方法的运算量分析可知,若采用 TOMP 算法求解式(4.23)所示的 L 个子问题,总的运算量为 $C_{\text{SegSR-TOMP}} = O(K\tilde{M}\tilde{N})$ 。类似于存储量的分析,由 $K\tilde{M}\tilde{N} = KS(S+1)(d-1)^2R$ 可知,对于给定的参数 S 和 R , 运算量也与参数 d 有关,而且 d 越大, 运算量越大。此外,对于直接重构而言,采用 OMP 算法直接求解式(4.17)时的运算量为 $O(KMN)$ 。根据 3.3.2 小节对直接重构和 SegSR 方法的运算量分析,可知基于近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 采用 SegSR 方法进行重构所需的运算量明显低于直接重构。

4.3 测量矩阵的近似处理对重构性能的影响

本章提出的快速重构方法是建立在带状近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 基础上的,因此有必要分析矩阵近似对重构性能的影响。

根据近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 的产生过程(式(4.20)), 若定义误差矩阵 $\tilde{\mathbf{E}} = [\tilde{e}_{m,n}] \in \mathbb{C}^{M \times N}$, 其中

$$\tilde{e}_{m,n} = - \sum_{\xi=0}^{N_{hl}-1} h_{lp}[\xi] \int_{T_{hb}}^{\infty} h_{bp}(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} p((2m-\xi)/f_{cs} - \tau) \tilde{\psi}_n((2m-\xi)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (4.24)$$

则 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 可表示为

$$\tilde{\mathbf{A}}' = \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{E}} \quad (4.25)$$

那么，根据 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 重构 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的问题可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}} - \tilde{\mathbf{A}}'\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_2 \leq \epsilon \quad (4.26)$$

其中 ϵ 是与 $\tilde{\mathbf{E}}$ 有关的值。

注意到，式(4.26)可以看作是测量矩阵受到扰动时的稀疏重构问题。文献[167]-[169]对利用式(4.26)重构可压缩信号进行了研究，其中文献[169]给出了采用 OMP 算法精确估计可压缩信号的最佳 K 项逼近的支撑集的条件，以及估计值与真实值间绝对误差的上界。对利用式(4.26)恢复稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 而言，令 Γ 表示 K -稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的支撑集， $\|\cdot\|_2^{(K)}$ 表示所有 K 列子矩阵的谱范数的最大值，可得如下结论：

定理 4.1：若测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 受到扰动矩阵 $\tilde{\mathbf{E}}$ 的干扰，且相对扰动 $\|\tilde{\mathbf{E}}\|_2^{(K)} / \|\tilde{\mathbf{A}}\|_2^{(K)} \leq \varepsilon^{(K)}$ ，当矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}' = \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{E}}$ 满足 RIP 条件，且 $K+1$ 阶约束等距常数满足

$$\delta'_{K+1} < \frac{1}{\sqrt{K+1}} - \frac{3}{\sqrt{K+1}} \frac{\varepsilon^{(K)} \sqrt{1+\delta_K} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_2}{\min_{j \in \Gamma} |\tilde{\sigma}_j|} \quad (4.27)$$

时，OMP 算法经过 K 次迭代可以从 $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{cs}}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 中精确估计 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 的支撑集，且 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 与估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 之间绝对误差 $\|\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_2$ 的上界为

$$\|\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_2 \leq \frac{\varepsilon^{(K)} \sqrt{1+\delta_K} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_2}{\sqrt{1-\delta'_K}} \quad (4.28)$$

定理 4.1 是对文献[169]中的定理 1 进行简化得到的，其证明过程在这里不再赘述。

由定理 4.1 可知，给定测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 和稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ ， $\varepsilon^{(K)}$ 越小，对 δ'_{K+1} 的要求越低。根据文献[167]对矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}' = \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{E}}$ 的 RIP 分析可知 $\delta'_K \leq \delta'_{K,\max} = (1+\delta_K)(1+\varepsilon^{(K)})^2 - 1$ 。可见， $\varepsilon^{(K)}$ 越小， δ'_K 的上界 $\delta'_{K,\max}$ 越小。那么，获取近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 的原则是使 $\varepsilon^{(K)}$ 尽可能小，从而保证 $\tilde{\mathbf{A}}'$ 能够满足 RIP，并且约束等距常数可以满足定理 4.1 的条件(式(4.27))。注意到 $\delta'_{K+1} > 0$ ，由式(4.27)可知 $\min_{j \in \Gamma} |\tilde{\sigma}_j| > 3\varepsilon^{(K)} \sqrt{1+\delta_K} \|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|_2$ 。可见，稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 中非零元素的幅度必须满足一定条件，才能实现对 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 支撑集 Γ 的精确估计。

根据 $\varepsilon^{(K)}$ 的定义和误差矩阵 $\tilde{\mathbf{E}}$ 的产生方式(式(4.24))可知， $\varepsilon^{(K)}$ 与截断长度 T_{hb} 有关。由于 K 值较大时通过遍历所有组合计算 $\|\tilde{\mathbf{E}}\|_2^{(K)}$ 和 $\|\tilde{\mathbf{A}}\|_2^{(K)}$ 面临计算复杂度很高的问题，我们不直接计算 $\varepsilon^{(K)}$ 的值。注意到，相对误差 $\varepsilon = \|\tilde{\mathbf{A}}' - \tilde{\mathbf{A}}\|_2 / \|\tilde{\mathbf{A}}\|_2 = \|\tilde{\mathbf{E}}\|_2 / \|\tilde{\mathbf{A}}\|_2$ 与截断长度 T_{hb} 的关系可反映 $\varepsilon^{(K)}$ 与 T_{hb} 的关系。因此，我们在第 4.4 节中仿真评估相对误差 ε 与 T_{hb} 的关系，并给出在保证重构精度情况下 T_{hb} 的选择范围。

4.4 仿真分析

本节通过仿真实验评估基于近似矩阵采用 SegSR 方法实现快速重构的性能，并与基于近似矩阵进行直接重构(求解式(4.26))的性能相比较。关于 SegSR 方法的参数设置，根据第 3 章对 SegSR 方法重构性能的理论分析和仿真结果，本节将 SegSR 方法中用于控制测量子矩阵大小的参数 S 设为 3，并采用 TOMP 算法求解 SegSR 方法产生的子问题。另外，基于近似矩阵进行的直接重构采用 OMP 算法实现。除特别说明外，本节的仿真结果均是 500 次蒙特卡洛实验的平均结果。仿真采用的计算机硬件配置为主频 3.1 GHz 的英特尔酷睿 i5-2400 处理器和 4 GB 内存，仿真环境为 MATLAB 2011B。

4.4.1 参数设置

设雷达发射信号为带宽 $B = 100 \text{ MHz}$ 、时宽 $T_p = 10 \mu\text{s}$ 的线性调频脉冲信号。为使测量矩阵的规模适中以便评估采用近似矩阵直接重构的性能，设观测时间 $T = 100 \mu\text{s}$ 。根据上述参数可知，在观测时间 T 内回波信号复包络的 Nyquist 采样个数 $N = 10000$ 。对于回波模型式(4.1)，假设目标时延在 $[0, T - T_p)$ 的分辨率格点上随机取值，反射系数和相位偏移分别在 $(0, 1]$ 和 $(0, 2\pi]$ 上均匀分布。

设 QuadCS 系统输入信号的载频 $f_0 = 130 \text{ MHz}$ ，伪随机信号 $p(t)$ 的速率 $B_p = 100 \text{ MHz}$ ，带通滤波器带宽 $B_{cs} = 10 \text{ MHz}$ ，ADC 采样速率 $f_{cs} = 40 \text{ MHz}$ 。由上述参数可知，QuadCS 系统的降采样率 $R = 5$ ，在观测时间 T 内系统输出的复压缩测量个数 $M = 2000$ 。

对于 QuadCS 低速采样模块中的模拟带通滤波器，仿真选用 6 阶巴特沃斯带通滤波器，以实现 $f_0 \pm B_{cs}$ 处至少具有 -35 dB 的衰减。图 4.5(a)和图 4.5(b)分别给出了该滤波器的幅频响应和冲激响应。对于 QuadCS 正交解调模块中的数字低通滤波器，仿真采用通带截止频率为 5 MHz ，阻带截止频率为 10 MHz ，通带最大波纹为 1 dB 和阻带最小衰减为 -60 dB 的 FIR 滤波器。图 4.6(a)和图 4.6(b)分别给出了采用窗函数设计法设计的 FIR 低通滤波器的幅频响应和冲激响应，其中冲激响应的长度 $N_{hl} = 31$ 。

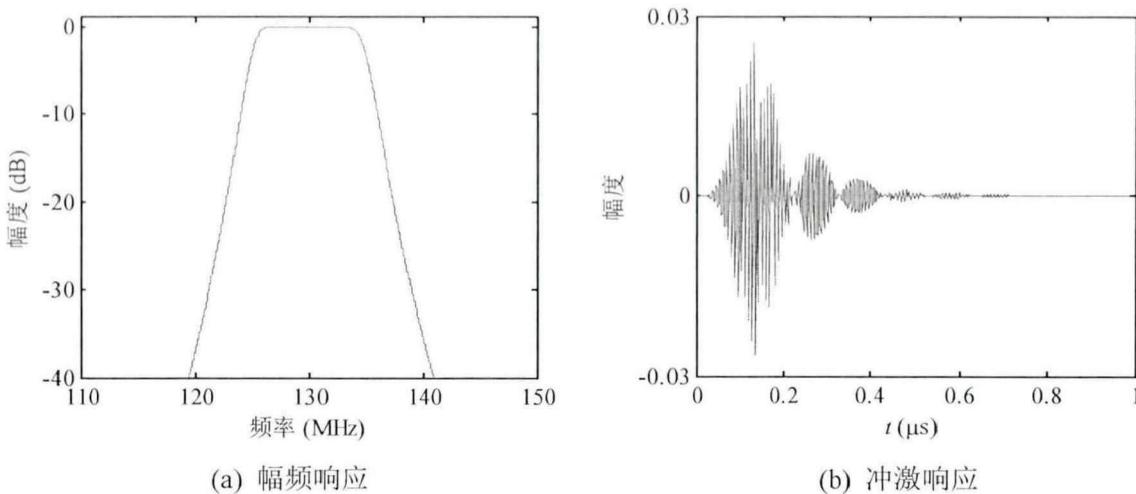


图 4.5 巴特沃斯带通滤波器的幅频响应和冲激响应

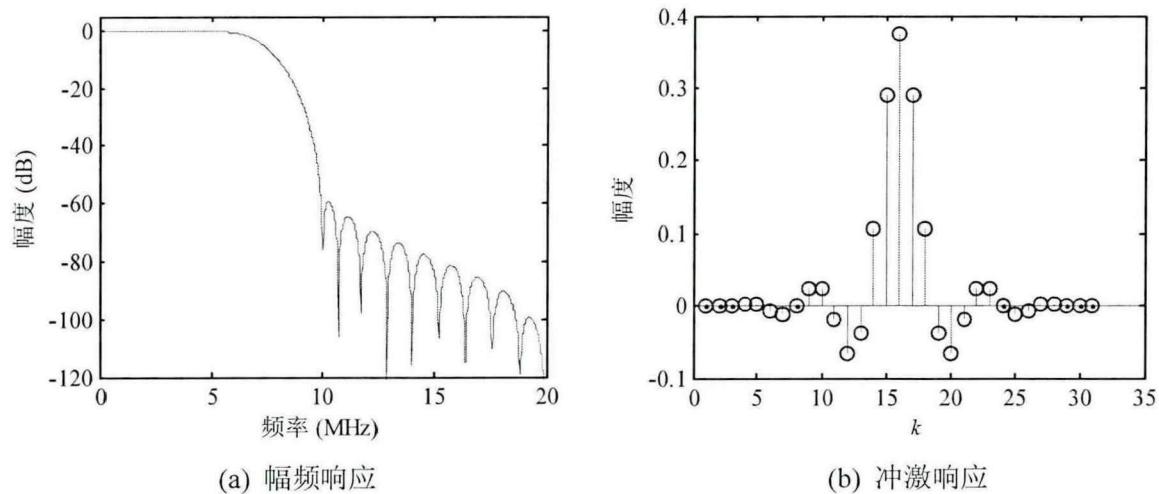
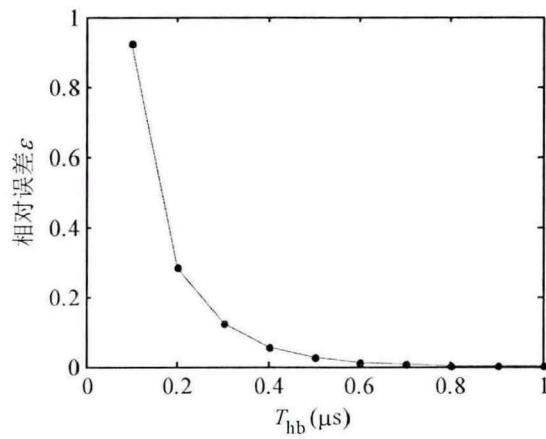


图 4.6 FIR 低通滤波器的幅频响应和冲激响应

如 4.3 节所述，我们希望选择合适的截断长度 T_{hb} 对带通滤波器的冲激响应进行截断，使近似矩阵 \tilde{A}' 能很好地逼近测量矩阵 \tilde{A} 。图 4.7 给出了相对误差 $\varepsilon = \|\tilde{A}' - \tilde{A}\|_2 / \|\tilde{A}\|_2$ 与 T_{hb} 的关系，它们是 500 次实验的平均结果，其中每次实验采用不同的伪随机信号。考虑到 $T_{hb} < 0.2 \mu\text{s}$ 时， $\varepsilon > 0.284$ ，近似矩阵 \tilde{A}' 可能无法满足 RIP 条件，或者约束等距常数不能满足定理 4.1 的条件。因此，下文讨论 $T_{hb} \geq 0.2 \mu\text{s}$ 的情况。注意到， $T_{hb} = 0.4 \mu\text{s}$ 时， $\varepsilon = 0.056$ ； $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 时， $\varepsilon = 0.012$ 。后续仿真将重点讨论 $T_{hb} = 0.4 \mu\text{s}$ 和 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 时的情况。

图 4.7 相对误差 ε 与截断长度 T_{hb} 的关系

4.4.2 无噪声背景下的重构

本小节通过重构误差、稀疏位置正确发现率和运行时间来评估无噪声背景下的重构性能，其中重构误差的评估标准为稀疏向量 $\tilde{\sigma}$ 与估计值 $\hat{\sigma}$ 之间的相对重构误差 $E_r = \|\hat{\sigma} - \tilde{\sigma}\|_2 / \|\tilde{\sigma}\|_2$ ，稀疏位置正确发现率是指稀疏向量 $\tilde{\sigma}$ 中非零元素被正确发现的个数与非零元素总个数的比值。

(1) 重构误差和稀疏位置正确发现率

首先评估采用近似矩阵直接重构的性能。图 4.8(a)和图 4.8(b)分别给出了不同稀疏度 K 下相对重构误差 E_r 和稀疏位置正确发现率与截断长度 T_{hb} 的关系。

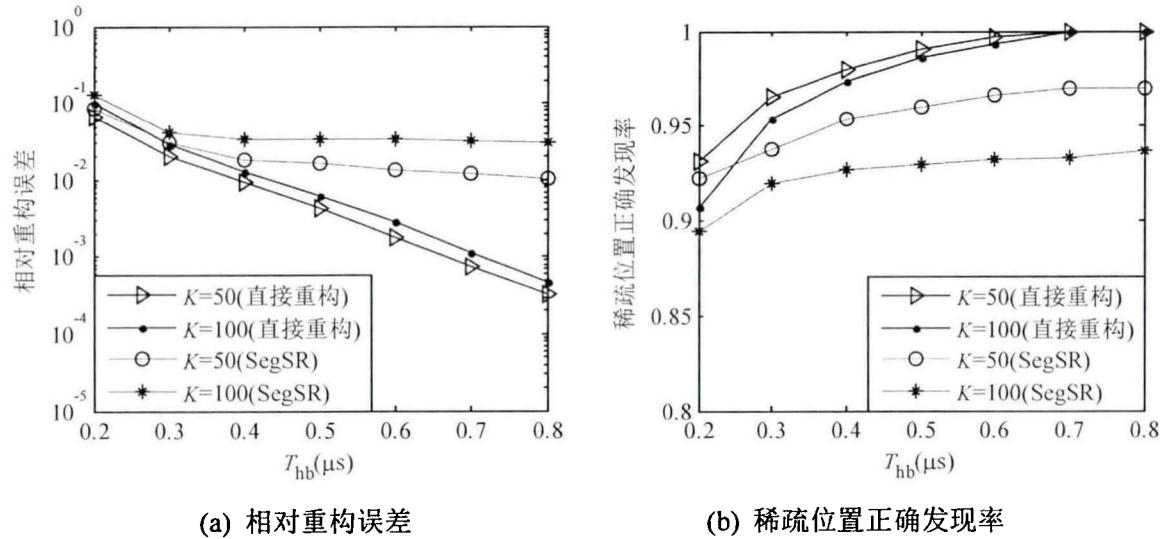


图 4.8 相对重构误差和稀疏位置正确发现率与截断长度 T_{hb} 的关系

由图 4.8(a)可知,对于给定的稀疏度 K , 相对重构误差 E_r 随 T_{hb} 增大而减小。图 4.8(b)可知,对于给定的稀疏度 K , 稀疏位置正确发现率随 T_{hb} 增大逐渐趋近于 1。可见, T_{hb} 越大, 对稀疏向量 $\tilde{\sigma}$ 中非零元素幅度的要求越低, 与第 4.3 节的理论分析一致。此外, 对于给定的稀疏度 $K = 100$, 当 $T_{hb} \geq 0.6 \mu\text{s}$ 时稀疏位置正确发现率可达 99% 以上, 相对重构误差 $E_r < 0.003$ 。因此, 可以认为选择 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 是比较合适的。

下面评估 SegSR 方法的相对重构误差 E_r 和稀疏位置正确发现率。为便于比较, 我们将仿真结果分别展示在图 4.8(a)和图 4.8(b)中。由图 4.8(a)可知, SegSR 方法的相对重构误差 E_r 高于直接重构。由图 4.8(b)可知, SegSR 方法的稀疏位置正确发现率低于直接重构。这是由于 SegSR 方法产生的子问题中存在虚拟噪声。注意到, $T_{hb} \geq 0.6 \mu\text{s}$ 时, SegSR 方法的相对重构误差 E_r 和稀疏位置正确发现率基本保持不变。根据 4.2.3 小节存储量分析可知, T_{hb} 越大, 存储量越大。针对仿真的例子, 我们认为取截断长度 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 是比较合适的选择。

上述仿真验证了选择合适的截断长度获取近似矩阵的合理性, 以及根据近似矩阵采用 SegSR 方法重构的有效性。

(2) 运行时间

这里通过 CPU 时间来说明算法的运行时间。图 4.9 给出了截断长度 $T_{hb} = 0.4 \mu\text{s}$ 和 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 时直接重构和 SegSR 方法的运行时间。由图 4.9 可知, SegSR 方法的运行时间比直接重构显著减少。此外, 由图 4.9 可知, 对于直接重构或者 SegSR 方法而言, $T_{hb} = 0.4 \mu\text{s}$ 和 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 时的运行时间几乎相同。这是因为针对仿真的例子, $T_{hb} = 0.4 \mu\text{s}$ 和 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 时参数 d 的值差异不大, 分别是 $d = 223$ 和 $d = 227$ 。

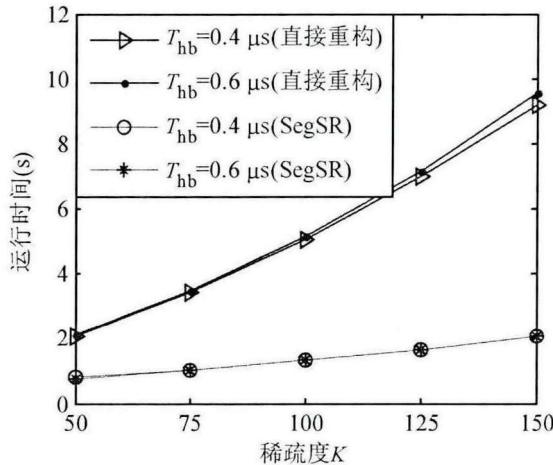


图 4.9 运行时间

4.4.3 噪声背景下的重构

设回波模型式(4.1)受到带限加性高斯白噪声 $n(t)$ 的干扰, 其中 $n(t)$ 的中心频率为 f_0 、带宽为 B 、功率谱密度为 $N_0/2$ 。定义输入信噪比(ISNR)为

$$\text{ISNR} = \int_0^T |r(t)|^2 dt / (TN_0 B) \quad (4.29)$$

本小节采用重构信噪比(RSNR)评估噪声背景下的重构性能, RSNR 的定义见式(3.74)。

根据 4.4.1 小节对截断长度 T_{hb} 与相对误差 ε 的讨论, 以及 4.4.2 小节无噪背景下的仿真结果, 我们分别评估了 $T_{\text{hb}} = 0.4 \mu\text{s}$ 和 $T_{\text{hb}} = 0.6 \mu\text{s}$ 时直接重构和采用 SegSR 方法重构的 RSNR。图 4.10(a)给出了稀疏度 $K = 100$ 时 RSNR 与 ISNR 的关系。由图 4.10(a)可知, 采用 SegSR 方法时的 RSNR 接近于直接重构的结果。另外, 在 $\text{ISNR} \leq 10 \text{ dB}$ 时, 截断长度 $T_{\text{hb}} = 0.4 \mu\text{s}$ 和 $T_{\text{hb}} = 0.6 \mu\text{s}$ 时 SegSR 的 RSNR 几乎相同。此外, 直接重构也有类似的结果。这是由于采用近似矩阵引入的误差比噪声 $n(t)$ 带来的误差小。

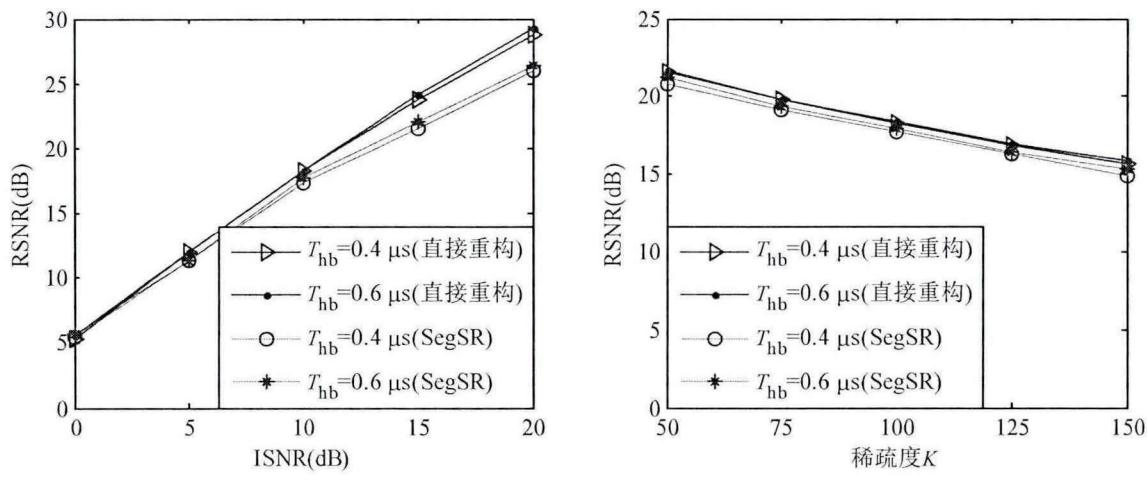
(a) RSNR 与稀疏度 K 的关系($\text{ISNR} = 10 \text{ dB}$) (b) RSNR 与 ISNR 的关系($K = 100$)图 4.10 输出信噪比 RSNR 与输入信噪比 ISNR、稀疏度 K 的关系

图 4.10(b)给出了 ISNR = 10 dB 时 RSNR 与稀疏度 K 的关系。由图 4.10(b)可知, 截断长度 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 时 SegSR 方法的 RSNR 略优于 $T_{hb} = 0.4 \mu\text{s}$ 时的结果。可见, 根据截断长度 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 获取近似矩阵, 并采用 SegSR 方法可以实现近似最优的性能。本小节在噪声背景下的仿真进一步表明, 针对本节的仿真例子, 取截断长度 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 是比较合适的选择。

此外, 为了直观展示信号波形的重构情况, 图 4.11 和图 4.12 分别给出了稀疏度 $K = 50$ 、ISNR = 10 dB 时一次仿真实验中的原始回波信号和恢复的基带回波信号。

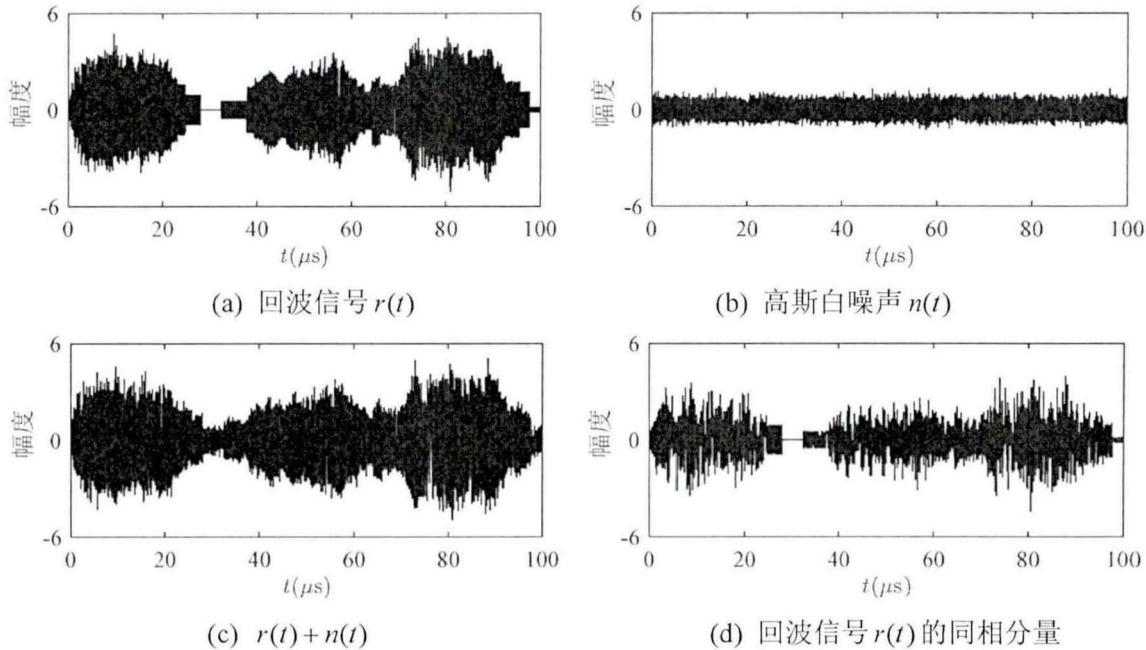


图 4.11 回波信号($K = 50$, ISNR = 10 dB)

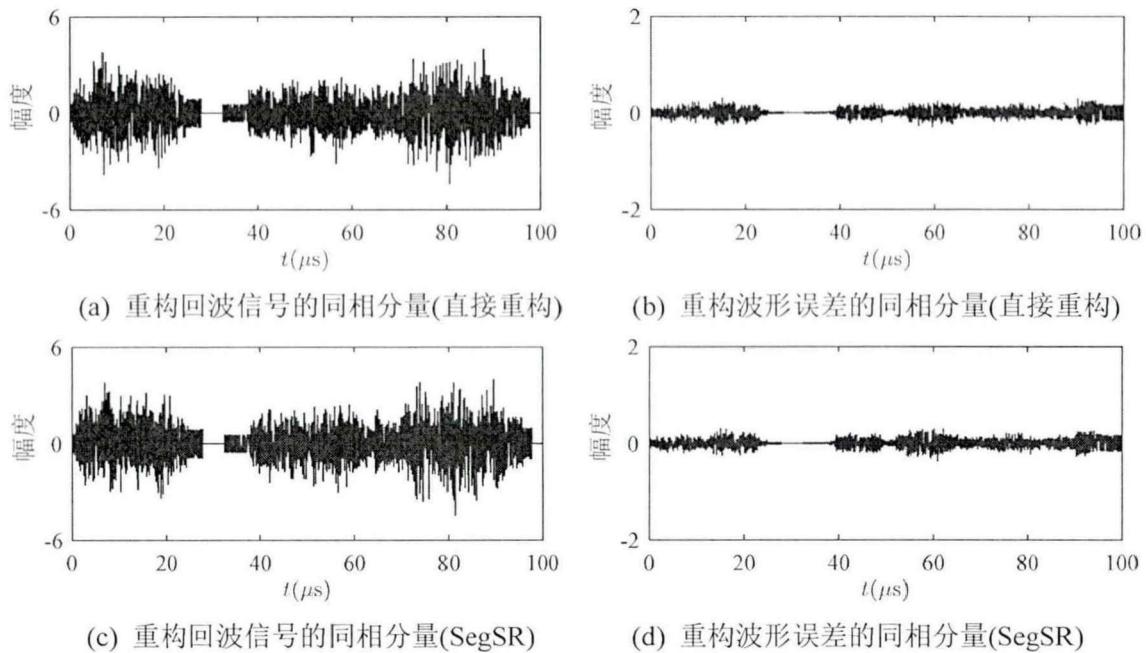


图 4.12 重构回波信号($K = 50$, ISNR = 10 dB, $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$)

图 4.11(a)-(d)分别给出了稀疏度 $K = 50$ 、ISNR = 10 dB 时一次仿真实验中回波信号 $r(t)$ 、高斯白噪声 $n(t)$ 、 $r(t) + n(t)$ 以及 $r(t)$ 的同相分量。图 4.12(a)和(c)分别是截断长度 $T_{hb} = 0.6 \mu s$ 时直接重构和采用 SegSR 方法重构所恢复的 Nyquist 率基带回波信号的同相分量；图 4.12(b)和(d)分别是相应的重构波形误差的同相分量。由图 4.12(b)和(d)可知，截断长度 $T_{hb} = 0.6 \mu s$ 时，SegSR 方法的重构波形误差与直接重构的结果相差不大。

4.5 本章小结

本章研究了基于 QuadCS 系统的脉冲雷达回波信号的快速重构问题，提出了先将 QuadCS 的测量矩阵近似成带状结构矩阵，然后采用 SegSR 方法实现快速重构的方法。本章主要从 QuadCS 测量矩阵的近似处理方法、近似处理对重构性能的影响和仿真实验三个方面进行了深入研究。首先，基于对 QuadCS 系统特性的分析，提出将测量矩阵近似为带状矩阵的近似处理方法；然后，从理论上分析了测量矩阵的近似处理对重构性能的影响；最后，通过数值仿真验证了对测量矩阵进行合理近似的可行性以及将 SegSR 方法应用于 QuadCS 雷达回波信号快速重构的有效性。

5 多带正交压缩采样雷达信号的快速重构

传统多带雷达系统^{[116][117]}在发射时间内发射多个载频不同且频谱互不重叠的带通信号照射同一目标场景，在观测时间内接收目标反射的多带回波信号。通常，接收系统根据传统多带信号采样理论对多带回波信号进行采样，再经过后续处理提取目标信息。受 Landau 率^[13]的限制，传统多带信号采样方法的采样速率不能低于多带信号有效带宽的两倍。然而，人们对目标场景的高分辨率要求使得多带回波信号往往具有大的有效带宽，从而需要高速 ADC 完成信号采集。但是，现有 ADC 有时难以满足实际应用的需要。

随着 CS 理论的发展，文献[115]开展了对多带模拟信号进行亚 Landau 率采样的研究，并基于 QuadCS 系统提出了多带正交压缩采样(MQCS)系统。MQCS 系统采用低速 ADC 获取多带模拟信号的亚 Landau 率采样，为采样大有效带宽多带信号提供了有效的解决方案。MQCS 系统不仅可以实现多带模拟信号的亚 Landau 率采样，而且能够同时获取每个子带 I/Q 分量的压缩(亚 Nyquist 率)测量，非常适宜于多带雷达信号的采样。

本章以等带宽多带雷达脉冲回波信号为采样对象，首先根据每个子带回波信号的稀疏性，简要介绍 MQCS 系统获取每个子带回波信号 I/Q 压缩测量的工作原理，给出通过独立求解多个稀疏重构问题恢复每个子带回波的子带独立重构方法；然后利用等带宽多带回波信号的块稀疏性，建立块稀疏重构模型，提出通过求解一个块稀疏重构问题恢复所有子带回波的多带联合重构方法。注意到，多带联合重构方法需要求解大规模块稀疏重构问题。然而，采用现有的块稀疏重构算法直接求解需要大的存储空间和计算量，目前通用计算水平难以实现实时重构。为此，本章主要研究从多带雷达回波信号的压缩测量中快速重构每个子带的基带信号的问题。

MQCS 系统采用多个支路获取不同子带回波信号的 I/Q 压缩测量，其中每个支路都可以看作是一个独立的 QuadCS 系统。因此，按照第 4 章针对 QuadCS 系统测量矩阵的近似处理方法，可将块稀疏重构模型中的测量矩阵近似为带状结构矩阵。考虑到块稀疏性是稀疏性的一个重要拓展，本章将基于带状结构测量矩阵提出的分段滑动重构(SegSR)方法扩展到块稀疏重构情形，提出了块稀疏分段滑动重构(Block-sparsity-based SegSR, BSegSR)方法，实现了多带雷达回波信号的快速重构。

BSegSR 方法的本质是利用测量矩阵的带状结构和信号的块稀疏特性，对观测时间内的压缩测量数据进行重叠分段，将大规模块稀疏重构问题分解成一系列小规模块稀疏重构子问题，并通过依次求解每个子问题实现快速重构。受分段影响，相邻数据段将对当前段的重构产生影响。为了提高分段重构性能，本章提出了一种两步块正交匹配追踪(Two-step Block Orthogonal Matching Pursuit, TBOMP)算法。

本章内容安排如下：5.1 节给出信号模型和问题描述；5.2 节阐述块稀疏滑动重构方

法的原理，并分析存储量和运算量；5.4节给出数值仿真结果；5.5节总结本章内容。

5.1 信号模型和问题描述

5.1.1 多带雷达回波信号模型

考虑一个发射 J 个等带宽信号的多带雷达系统。假设 J 个信号同时照射一个目标场景，每个子带信号的脉冲宽度为 T_p 、带宽为 B_0 且频谱不重叠。对包含 K 个静止的非起伏点目标雷达场景，第 j 个子带的回波信号可表示为

$$r^j(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k^j a^j(t-t_k^j) \cos[2\pi f_0^j(t-t_k^j) + \phi^j(t-t_k^j) + \varphi_k^j], t \in [0, T] \quad (5.1)$$

其中 T 为雷达观测时间； $a^j(t)$ 、 $\phi^j(t)$ 和 f_0^j 分别是第 j 个子带发射信号的包络、相位和载频，且 $f_0^j \gg B_0$ ； σ_k^j 、 t_k^j 和 φ_k^j 分别是第 k 个目标对于第 j 个子带发射信号的反射系数、时延和相位偏移。回波信号 $r^j(t)$ 是载频为 f_0^j 、带宽为 B_0 的带通信号。多带雷达回波信号可表示为

$$r(t) = \sum_{j=1}^J r^j(t) \quad (5.2)$$

其有效带宽为 $B = JB_0$ 。

对于第 j 个子带回波信号 $r^j(t)$ ，记 $r^j(t)$ 的 I/Q 分量分别是 $I^j(t)$ 和 $Q^j(t)$ ，则

$$I^j(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k^j a^j(t-t_k^j) \cos[\phi^j(t-t_k^j) + \varphi_k^j - 2\pi f_0^j t_k^j] \quad (5.3)$$

$$Q^j(t) = \sum_{k=1}^K \sigma_k^j a^j(t-t_k^j) \sin[\phi^j(t-t_k^j) + \varphi_k^j - 2\pi f_0^j t_k^j] \quad (5.4)$$

记 $\tilde{s}_0^j(t) = a^j(t)e^{i\phi^j(t)}$ 为第 j 个子带发射信号的复包络，则 $r^j(t)$ 的复包络可表示为

$$\tilde{s}^j(t) = I^j(t) + iQ^j(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{\sigma}_k^j \tilde{s}_0^j(t-t_k^j) \quad (5.5)$$

其中 $\tilde{\sigma}_k^j = \sigma_k^j e^{i(\varphi_k^j - 2\pi f_0^j t_k^j)}$ 表示目标的复反射系数， i 表示虚数单位。

令 $\tau_0 = 1/B_0$ 表示 Nyquist 采样间隔， $\tilde{\psi}^j(t)$ 表示由复包络 $\tilde{s}_0^j(t)$ 以 τ_0 为间隔进行时移产生的波形匹配字典，即 $\tilde{\psi}^j(t) = \{\tilde{\psi}_n^j(t)\}_{n=0}^{N-1}$ ，其中 $\tilde{\psi}_n^j(t) = \tilde{s}_0^j(t-n\tau_0)$ ， $N = \lfloor (T-T_p)/\tau_0 \rfloor$ 。若目标时延均是 τ_0 的整数倍，则复包络 $\tilde{s}^j(t)$ 可表示为

$$\tilde{s}^j(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n^j \tilde{\psi}_n^j(t) = \tilde{\psi}^j(t) \tilde{\sigma}^j \quad (5.6)$$

其中 $\tilde{\sigma}^j = [\tilde{\sigma}_0^j, \tilde{\sigma}_1^j, \dots, \tilde{\sigma}_{N-1}^j]^T$ 表示复反射系数向量，且 $\tilde{\sigma}^j$ 中非零元素个数等于目标个数 K 。

若 $K \ll N$, 则 $\tilde{s}^j(t)$ 可由波形匹配字典 $\tilde{\psi}^j(t)$ 稀疏表示, 且稀疏度为 K 。

5.1.2 多带雷达回波信号的压缩采样

本小节阐述采用 MQCS 系统获取多带雷达回波信号压缩采样的原理。MQCS 系统由亚 Landau 率采样模块和多带正交解调模块组成, 如图 5.1 所示。

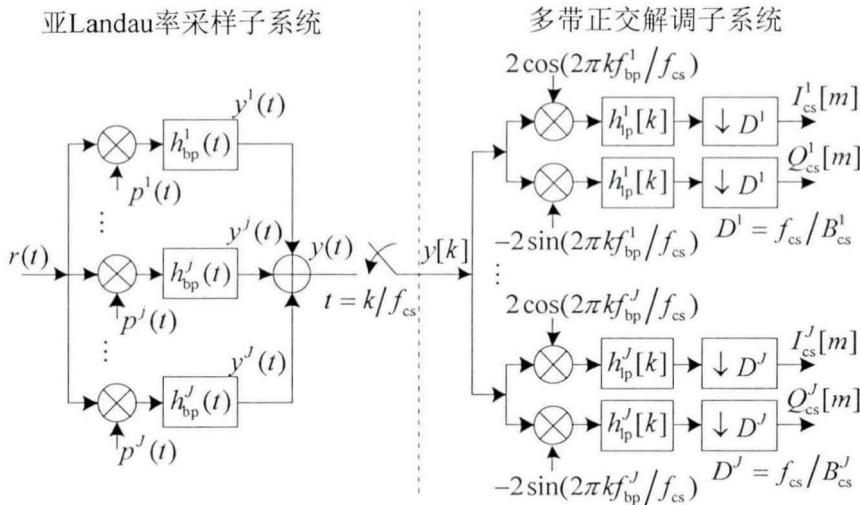


图 5.1 MQCS 系统框图

在亚 Landau 率采样模块中, 多带信号 $r(t)$ 首先经过 J 个并行的扩频和带通滤波支路, 分别获取 J 个压缩的带通信号 $y^j(t)$, $j=1, 2, \dots, J$ 。令 $p^j(t)$ 表示第 j 个支路的扩频信号, 它是带宽为 B_p^j 的低通随机信号; $h_{\text{bp}}^j(t)$ 表示第 j 个支路的中心频率为 f_{bp}^j 、带宽为 B_{cs}^j ($B_{\text{cs}}^j \ll B_0$) 的带通滤波器。若设置 B_p^j 使子带信号 $r^j(t)$ 经过扩频后的频谱(简称扩频谱)与相邻子带信号 $r^{j-1}(t)$ 和 $r^{j+1}(t)$ 的扩频谱之间存在不交叠区域, 并设置 f_{bp}^j 和 B_{cs}^j 使 $h_{\text{bp}}^j(t)$ 的通带范围处在该不交叠区域内, 则压缩信号 $y^j(t)$ 仅包含子带信号 $r^j(t)$ 的信息。那么, 第 j 个支路的输出信号 $y^j(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} y^j(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{bp}}^j(\tau) p^j(t-\tau) r^j(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{bp}}^j(\tau) p^j(t-\tau) r^j(t-\tau) d\tau \\ &= \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{bp}}^j(\tau) p^j(t-\tau) \tilde{s}_{\text{cs}}^j(t-\tau) e^{i2\pi f_0^j(t-\tau)} d\tau \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \tilde{s}_{\text{cs}}^j(t) e^{i2\pi f_0^j t} \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

其中 $\tilde{s}_{\text{cs}}^j(t)$ 是信号 $r^j(t)$ 的压缩复包络, 即

$$\tilde{s}_{\text{cs}}^j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{bp}}^j(\tau) e^{-i2\pi f_{\text{bp}}^j \tau} p^j(t-\tau) e^{i2\pi(f_0^j - f_{\text{bp}}^j)(t-\tau)} \tilde{s}^j(t-\tau) d\tau \quad (5.8)$$

此外, $\tilde{s}_{\text{cs}}^j(t)$ 可分解为同相压缩分量 $I_{\text{cs}}^j(t)$ 和正交压缩分量 $Q_{\text{cs}}^j(t)$, 即 $I_{\text{cs}}^j(t) = \text{Re}\{\tilde{s}_{\text{cs}}^j(t)\}$ 和 $Q_{\text{cs}}^j(t) = \text{Im}\{\tilde{s}_{\text{cs}}^j(t)\}$ 。

对 J 个支路输出的压缩带通信号进行叠加, 可得多带压缩信号 $y(t)$, 即

$$y(t) = \sum_{j=1}^J y^j(t) \quad (5.9)$$

利用带通均匀采样方法, 选择合适的采样频率 f_{cs} 对 $y(t)$ 进行采样, 以保证 $y(t)$ 的频谱在采样后不会混叠。那么, $y(t)$ 的采样序列 $y[k]$ 是一个具有 J 个子带的数字多带信号, 可表示为

$$y[k] = y(k/f_{\text{cs}}) = \sum_{j=1}^J y^j(k/f_{\text{cs}}) = \sum_{j=1}^J \operatorname{Re} \left\{ \tilde{s}_{\text{cs}}^j(k/f_{\text{cs}}) e^{i2\pi k f_{\text{bp}}^j / f_{\text{cs}}} \right\} \quad (5.10)$$

多带正交解调模块采用 J 个正交解调模块从采样序列 $y[k]$ 中分别提取 J 个子带的 I/Q 压缩序列 $I_{\text{cs}}^j[m]$ 和 $Q_{\text{cs}}^j[m]$, $j=1, 2, \dots, J$ 。令 $h_{\text{lp}}^j[k]$ 和 D^j 分别表示第 j 个正交解调模块中同相和正交支路的数字低通滤波器和抽取因子, 则 $I_{\text{cs}}^j[m]$ 和 $Q_{\text{cs}}^j[m]$ 可分别表示为

$$I_{\text{cs}}^j[m] = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} 2h_{\text{lp}}^j[\xi] y[2m-\xi] \cos \left(2\pi(D^j m - \xi) f_{\text{bp}}^j / f_{\text{cs}} \right) \quad (5.11)$$

$$Q_{\text{cs}}^j[m] = - \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} 2h_{\text{lp}}^j[\xi] y[2m-\xi] \sin \left(2\pi(D^j m - \xi) f_{\text{bp}}^j / f_{\text{cs}} \right) \quad (5.12)$$

那么, 根据 $I_{\text{cs}}[m]$ 和 $Q_{\text{cs}}[m]$ 可得压缩的复包络序列 $\tilde{s}_{\text{cs}}^j[m]$, 即

$$\tilde{s}_{\text{cs}}^j[m] = I_{\text{cs}}^j[m] + iQ_{\text{cs}}^j[m] = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h_{\text{lp}}^j[\xi] \tilde{s}_{\text{cs}}^j((D^j m - \xi) / f_{\text{cs}}) \quad (5.13)$$

在观测时间 T 内, $\tilde{s}_{\text{cs}}^j[m]$ 的个数为 $M^j = \lfloor T/T_{\text{cs}}^j \rfloor$, 其中 $T_{\text{cs}}^j = D^j / f_{\text{cs}}$ 。根据 Nyquist 采样间隔 τ_0 , 定义 $R^j = T_{\text{cs}}^j / \tau_0$ 为 MQCS 系统中第 j 个支路的降采样率, 通常, R^j 为大于 1 的整数。特别地, 设 J 个带通滤波器的带宽均相同, 记为 B_{cs} , 则等带宽多带信号 $r(t)$ 经过 MQCS 系统处理后, 每个子带的压缩采样序列的个数均相同, 记为 M , 即 $M = \lfloor T/T_{\text{cs}} \rfloor$, 其中 $T_{\text{cs}} = D/f_{\text{cs}}$, $D = f_{\text{cs}}/B_{\text{cs}}$ 。显然, MQCS 系统每个支路的降采样率均相同, 记为 R , 即 $R = T_{\text{cs}}/\tau_0$ 。

注意到, 根据式(5.6)所示 $\tilde{s}_{\text{cs}}^j(t)$ 的稀疏表示形式, 可将式(5.8)改写为

$$\tilde{s}_{\text{cs}}^j(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n^j \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{lp}}^j(\tau) e^{-i2\pi f_{\text{bp}}^j \tau} p^j(t-\tau) e^{i2\pi(f_0^j - f_{\text{bp}}^j)(t-\tau)} \tilde{\psi}_n^j(t-\tau) d\tau \quad (5.14)$$

那么, 式(5.13)可进一步表示为

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{\text{cs}}^j[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n^j \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h_{\text{lp}}^j[\xi] \int_{-\infty}^{\infty} h_{\text{lp}}^j(\tau) e^{-i2\pi f_{\text{bp}}^j \tau} p^j((Dm-\xi)/f_{\text{cs}} - \tau) e^{i2\pi(f_0^j - f_{\text{bp}}^j)((Dm-\xi)/f_{\text{cs}} - \tau)} \\ &\quad \tilde{\psi}_n^j((Dm-\xi)/f_{\text{cs}} - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.15)$$

定义测量向量 $\tilde{s}_{\text{cs}}^j = [\tilde{s}_{\text{cs}}^j[1], \tilde{s}_{\text{cs}}^j[2], \dots, \tilde{s}_{\text{cs}}^j[M]]^T$ 和测量矩阵 $\tilde{A}^j = [\tilde{a}_{m,n}^j] \in \mathbb{C}^{M \times N}$, 其中

$$\tilde{a}_{m,n}^j = \sum_{\xi=-\infty}^{\infty} h_{lp}^j[\xi] \int_{-\infty}^{\infty} h_{bp}^j(\tau) e^{-i2\pi f_{bp}^j \tau} p^j((Dm - \xi)/f_{cs} - \tau) e^{i2\pi(f_0^j - f_{bp}^j)(Dm - \xi)/f_{cs} - \tau} \tilde{\psi}_n^j((Dm - \xi)/f_{cs} - \tau) d\tau \quad (5.16)$$

则有

$$\tilde{s}_{cs}^j = \tilde{A}^j \tilde{\sigma}^j \quad (5.17)$$

文献[115]分析了测量矩阵 \tilde{A}^j 的 RIP 条件，指出可通过求解稀疏重构问题

$$\hat{\tilde{\sigma}}^j = \arg \min_{\tilde{\sigma}^j} \|\tilde{\sigma}^j\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{s}_{cs}^j = \tilde{A}^j \tilde{\sigma}^j \quad (5.18)$$

获取稀疏向量 $\tilde{\sigma}^j$ 的估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}^j$ ，然后根据式(5.6)恢复第 j 个子带回波信号的复包络 $\tilde{s}^j(t)$ 。这里将上述针对每个子带独立进行的重构称为子带独立重构。可见，子带独立重构需要独立求解 J 个稀疏重构问题。

5.1.3 基于块稀疏的多带联合重构

应注意，系数向量 $\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2, \dots, \tilde{\sigma}^J$ 具有相同的稀疏结构，即非零元素个数和位置都相同。若提取 $\tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2, \dots, \tilde{\sigma}^J$ 的第 n 个元素组成向量 $\tilde{\nu}[n]$ ，即 $\tilde{\nu}[n] = [\tilde{\sigma}_n^1, \tilde{\sigma}_n^2, \dots, \tilde{\sigma}_n^J]^T, n = 0, 1, \dots, N-1$ ，则 $\tilde{\nu}[n] \neq 0_{J,1}$ 表示存在时延为 $n\tau_0$ 的目标。若将 N 个向量 $\tilde{\nu}[n] (n = 0, 1, \dots, N-1)$ 组合成向量 $\tilde{\nu} = [\tilde{\nu}^T[0], \tilde{\nu}^T[1], \dots, \tilde{\nu}^T[N-1]]^T$ 。定义 $\|\tilde{\nu}\|_{2,0} = \sum_{n=0}^{N-1} I(\|\tilde{\nu}[n]\|_2 > 0)$ ，其中 $I(\cdot)$ 表示指示函数，则 $\|\tilde{\nu}\|_{2,0} = K$ 。可见，系数向量 $\tilde{\nu}$ 不仅是稀疏的，也是块稀疏的，且块稀疏度等于目标个数 K 。

基于上述观察，可根据式(5.17)建立块稀疏问题模型，将 J 个独立的稀疏重构问题式(5.18)转换为一个块稀疏重构问题。类似于向量 $\tilde{\nu}$ 的产生方式，定义 $\tilde{y} = [\tilde{y}^T[1], \tilde{y}^T[2], \dots, \tilde{y}^T[M]]^T$ ，其中 $\tilde{y}[m] = [\tilde{s}_{cs}^1[m], \tilde{s}_{cs}^2[m], \dots, \tilde{s}_{cs}^J[m]]^T$ 由 $\tilde{s}_{cs}^1, \tilde{s}_{cs}^2, \dots, \tilde{s}_{cs}^J$ 的第 m 个元素组成。定义 $\tilde{B} = [\tilde{B}_{m,n}] \in \mathbb{C}^{M \times NJ}$ ，其中 $\tilde{B}_{m,n} = \text{diag}[\tilde{a}_{m,n}^1, \tilde{a}_{m,n}^2, \dots, \tilde{a}_{m,n}^J] \in \mathbb{C}^{J \times J}$ 。这样，可将式(5.17)的 J 个等式联合表示为

$$\tilde{y} = \tilde{B} \tilde{\nu} \quad (5.19)$$

因此，可通过求解块稀疏重构问题

$$\min_{\tilde{\nu}} \|\tilde{\nu}\|_{2,1} \quad \text{s.t.} \quad \tilde{y} = \tilde{B} \tilde{\nu} \quad (5.20)$$

恢复块稀疏向量 $\tilde{\nu}$ ，其中 $\|\tilde{\nu}\|_{2,1} = \sum_{n=0}^{N-1} \|\tilde{\nu}[n]\|_2$ 。

然而，在一些应用场景下，直接求解式(5.20)需要计算大的测量矩阵 \tilde{B} 。例如，对于具有 $J=3$ 个子带的多带雷达系统，其中发射信号每个子带的带宽 $B_0 = 100$ MHz、脉冲宽度 $T_p = 10$ μs，观测时间 $T = 2490$ μs 内每个子带回波信号复包络的 Nyquist 采样个数 $N = 249000$ 。若 MQCS 系统中每个支路的降采样率均为 $R = 5$ ，则观测时间 $T = 2490$ μs 内 MQCS 系统每个支路输出的复压缩测量数据个数 $M = 49800$ 。若目标时延在 $[0, T-T_p]$

内，则测量矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的大小是 149400×744000 。根据现有块稀疏重构算法的运算量，难以快速恢复块稀疏向量 $\tilde{\mathbf{v}}$ 。本章根据测量矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的结构特性，提出一种块稀疏分段滑动重构(BSegSR)方法。5.2 节首先说明测量矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的结构，然后阐述 BSegSR 方法的原理。

5.2 块稀疏分段滑动重构方法

5.2.1 测量矩阵的近似结构

根据 MQCS 系统的工作原理可知，MQCS 系统的每个支路均可等效为一个独立的 QuadCS 系统^[115]。第 4 章指出对 QuadCS 系统中带通滤波器的冲激响应进行合理截断，可将测量矩阵近似成带状矩阵。类似地，针对 MQCS 系统，对第 j 个支路带通滤波器的冲激响应 $h_{\text{bp}}^j(t)$ 进行截断，可得测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^j$ 的近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'^j$ 。

设对带通滤波器冲激响应 $h_{\text{bp}}^j(t)$ 进行截取的时间范围为 $[0, T_{\text{hb}}]$ ，其中 T_{hb} 表示截断长度。记低通滤波器冲激响应 $h_{\text{lp}}^j[k]$ 的长度为 N_{hl} ，则式(5.16)转变为

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{m,n}^{j,j} = & \sum_{\xi=0}^{N_{\text{hl}}-1} h_{\text{lp}}^j[\xi] \int_0^{T_{\text{hb}}} h_{\text{bp}}^j(\tau) e^{-i2\pi f_{\text{bp}}^j \tau} p^j((Dm - \xi)/f_{\text{cs}} - \tau) e^{i2\pi(f_0^j - f_{\text{bp}}^j)(Dm - \xi)/f_{\text{cs}} - \tau} \\ & \tilde{\psi}_n^j((Dm - \xi)/f_{\text{cs}} - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.21)$$

注意到 $\tilde{\psi}_n^j(t) = 0$ ， $t \notin [n\tau_0, T_p + n\tau_0)$ 。于是，近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'^j = [\tilde{a}_{m,n}^{j,j}] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 满足

$$\tilde{a}_{m,n}^{j,j} = 0, \quad n/R < m-d \text{ 或 } n/R \geq m \quad (5.22)$$

其中 $d = \max_n \left\{ \left[\left((T_p + n\tau_0 + T_{\text{hb}}) f_{\text{cs}} \right) + N_{\text{hl}} - 1 \right] / 2 \right\} - \lfloor n/R \rfloor \right\}$ 。可见，近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'^j$ 具有带状结构，其中列向量最大非零区域(垂直带)的长度为 d ，行向量间的偏移量为 R 。图 5.2 是近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'^j$ 的示意图。

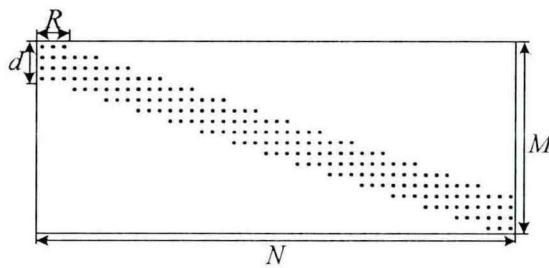


图 5.2 近似矩阵的带状结构示意图

显然，针对近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'^j$ ($j=1, 2, \dots, J$)，可采用 SegSR 方法实现子带独立快速重构。注意到，第 4 章基于 QuadCS 系统分析了截断长度 T_{hb} 对重构性能的影响。根据第 4 章的相关理论和仿真分析可知，对 MQCS 系统中带通滤波器的冲激响应进行截断时，选择的截断长度 T_{hb} 需使 $\tilde{\mathbf{A}}'^j$ 与 $\tilde{\mathbf{A}}^j$ 间的相对误差 $\varepsilon^j = \|\tilde{\mathbf{A}}'^j - \tilde{\mathbf{A}}^j\|_2 / \|\tilde{\mathbf{A}}^j\|_2 \leq 0.01$ ($j=1, 2, \dots, J$)。

对于多带联合重构，按照测量矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的产生方式，可根据近似矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}'^1, \tilde{\mathbf{A}}'^2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}'^J$ 获取测量矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 的近似矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'$ 。根据 $\tilde{\mathbf{A}}'^j$ 的结构(图 5.2)可知，近似矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'$ 具有带状结构，

其垂直带的长度为 dJ , 行向量每 J 行偏移一次, 偏移量为 RJ , 如图 5.3 所示。下一小节将详细阐述基于带状矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'$ 提出的 BSegSR 方法。

5.2.2 块稀疏分段滑动重构方法原理

为了便于阐述, 本节忽略近似矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'$ 与测量矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 间的误差, 即记 $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{v}}$ 。图 5.3 给出了对测量向量 $\tilde{\mathbf{y}}$ 、块稀疏系数向量 $\tilde{\mathbf{v}}$ 和近似矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'$ 的分段划分示意图。如图 5.3 所示, 分别对测量向量 $\tilde{\mathbf{y}}$ 和块稀疏系数向量 $\tilde{\mathbf{v}}$ 进行重叠分段, 每段测量子向量和系数子向量的长度分别为 $\tilde{M}J$ 和 $\tilde{N}J$, 其中 $\tilde{M} = (S+1)M_p$, $\tilde{N} = SN_p$, $M_p = d-1$, $N_p = (d-1)R$, S 用来控制子段长度, 且满足 $1 < S < P$ ($P = \lceil N/N_p \rceil$)。此外, 每段测量子向量(系数子向量)相对于其前一段的偏移量为 $M_p J$ ($N_p J$)。实际上, 测量子向量的偏移量可以取 $M_p J$ 的倍数, 即 $WM_p J$ 。当然, 系数子向量的偏移量要做相应倍数的调整, 即 $WN_p J$ 。为了讨论方便, 本节假设 $W=1$, 5.4 节将对多个偏移量的情形进行仿真分析。

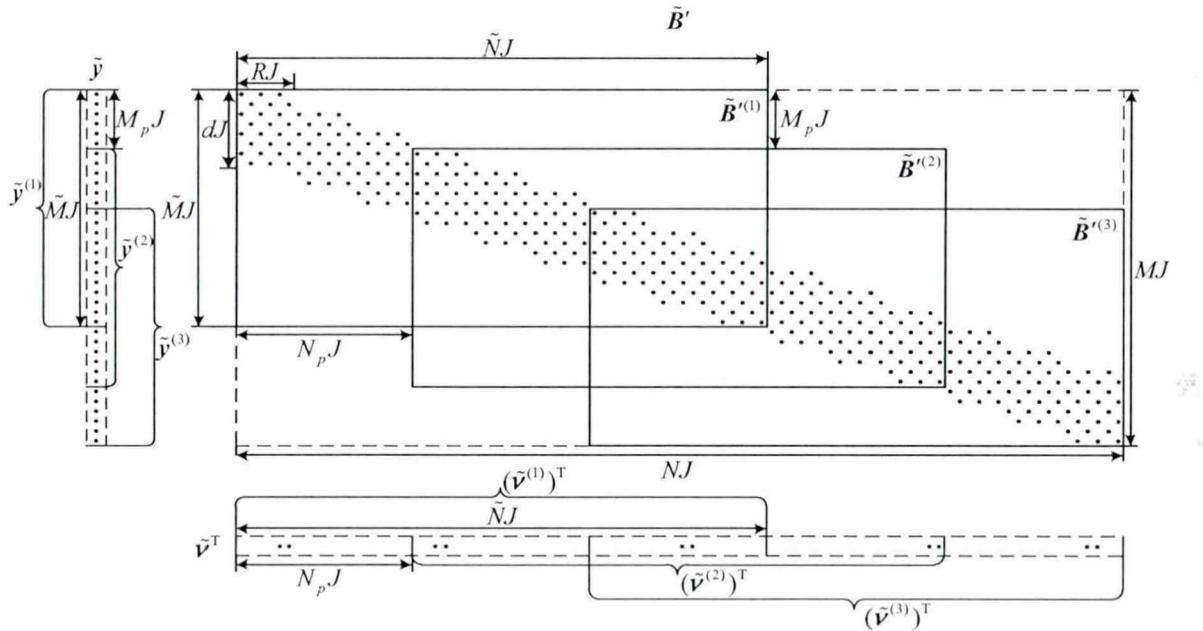


图 5.3 测量向量、近似矩阵和块稀疏系数向量划分示意图

令第 l 段测量子向量和块稀疏系数子向量分别为 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)}$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}$, 则有

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(l)} = [\tilde{\mathbf{y}}^T[\tilde{m}+1], \tilde{\mathbf{y}}^T[\tilde{m}+2], \dots, \tilde{\mathbf{y}}^T[\tilde{m}+\tilde{M}]]^T = \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{m}J+1 : \tilde{m}J+\tilde{M}J) \quad (5.23)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(l)} = [\tilde{\mathbf{v}}^T[\tilde{n}], \tilde{\mathbf{v}}^T[\tilde{n}+1], \dots, \tilde{\mathbf{v}}^T[\tilde{n}+\tilde{N}-1]]^T = \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{n}J : \tilde{n}J+\tilde{N}J-1) \quad (5.24)$$

其中 $\tilde{m} = (l-1)M_p$, $\tilde{n} = (l-1)N_p$, L 表示总的分段个数。此外, $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}$ 可等分成 S 个长度为 $N_p J$ 的子向量, 即 $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)} = [(\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l)})^T, (\tilde{\mathbf{v}}_2^{(l)})^T, \dots, (\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l)})^T]^T$, 其中 $\tilde{\mathbf{v}}_s^{(l)} = \tilde{\mathbf{v}}^{(l)}((s-1)N_p J : sN_p J-1)$, $s = 1, 2, \dots, S$ 。

对于近似矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'$, 分别提取第 l 段测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)}$ 对应的行和第 l 段系数子向量 $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}$ 对应的列, 可得第 l 段 $\tilde{M}J \times \tilde{N}J$ 测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$, 即

$$\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)} = \tilde{\mathbf{B}}'(\tilde{m}J+1 : \tilde{m}J+\tilde{M}J, \tilde{n}J : \tilde{n}J+\tilde{N}J-1) \quad (5.25)$$

类似于对系数子向量 $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}$ 的等分, 将 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 等分成 S 个子矩阵, 即 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)} = [\tilde{\mathbf{B}}_1'^{(l)}, \tilde{\mathbf{B}}_2'^{(l)}, \dots, \tilde{\mathbf{B}}_S'^{(l)}]$, 其中 $\tilde{\mathbf{B}}_s'^{(l)} = \tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}(1 : \tilde{M}J, (s-1)N_pJ : sN_pJ-1) \in \mathbb{C}^{\tilde{M}J \times N_pJ}$, $s = 1, 2, \dots, S$ 。

根据上述划分方式可知, 系数子向量 $\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)}$, $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}$ 引入的测量构成了测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)}$ 。由式(5.23)-式(5.25)可知, $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}$ 表示测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)}$ 中由系数子向量 $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}$ 引入的测量。定义

$$\underline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(l-1)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1'^{(l-1)}(M_pJ+1 : \tilde{M}J, 0 : N_pJ-1) \\ \mathbf{0}_{M_pJ \times N_pJ} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M_pJ \times N_pJ} \\ \tilde{\mathbf{B}}_S'^{(l+1)}(1 : \tilde{M}J - M_pJ, 0 : N_pJ-1) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

则 $\underline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(l-1)}\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)}$ 和 $\underline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(l+1)}\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}$ 分别表示 $\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}$ 引入的测量。那么, 测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)}$ 可表示为

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(l)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}\tilde{\mathbf{v}}^{(l)} + \tilde{\mathbf{B}}'^{(l+1)}\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}, & l=1 \\ \underline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(l-1)}\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)} + \tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}\tilde{\mathbf{v}}^{(l)} + \underline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(l+1)}\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}, & l=2, 3, \dots, L-1 \\ \underline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(l-1)}\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)} + \tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}, & l=L \end{cases} \quad (5.28)$$

图 5.4 展示了测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{(l)}$ 的组成。

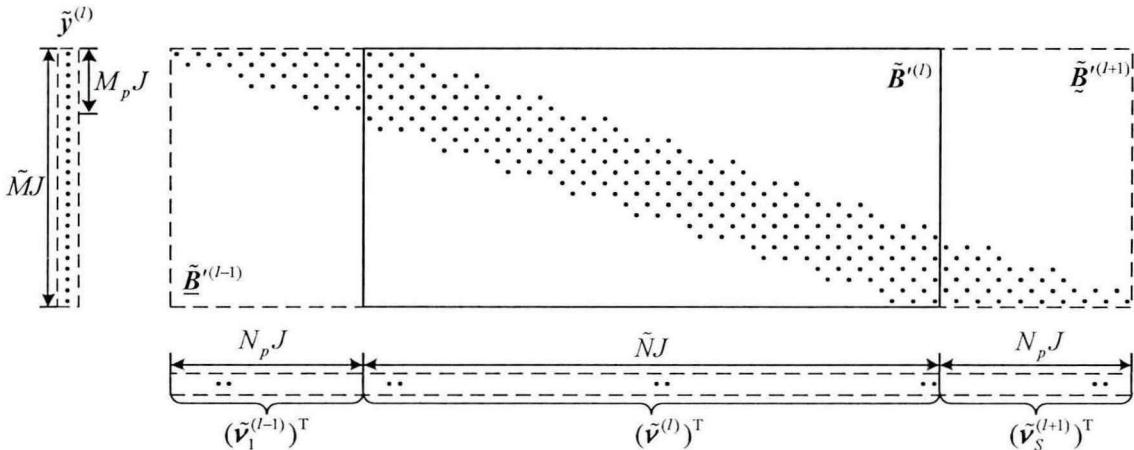


图 5.4 测量子向量的构成

定义

$$\underline{\tilde{\mathbf{y}}}^{(l)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{y}}^{(l)}, & l=1 \\ \tilde{\mathbf{y}}^{(l)} - \underline{\tilde{\mathbf{B}}}^{(l-1)}\hat{\mathbf{v}}_1^{(l-1)}, & l=2, 3, \dots, L \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{n}}}^{(l)} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{B}}'^{(l+1)}\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}, & l=1 \\ \tilde{\mathbf{B}}'^{(l-1)}\Delta\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)} + \tilde{\mathbf{B}}'^{(l+1)}\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}, & l=2, 3, \dots, L-1 \\ \tilde{\mathbf{B}}'^{(l-1)}\Delta\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)}, & l=L \end{cases} \quad (5.30)$$

其中 $\hat{\nu}_1^{(l-1)}$ 是系数子向量 $\tilde{\nu}_1^{(l-1)}$ 的估计值, $\Delta\tilde{\nu}_1^{(l-1)} = \tilde{\nu}_1^{(l-1)} - \hat{\nu}_1^{(l-1)}$ 是系数子向量 $\tilde{\nu}_1^{(l-1)}$ 与其估计值 $\hat{\nu}_1^{(l-1)}$ 间的误差。那么, 式(5.28)可改写为噪声情况下的块稀疏重构模型

$$\underline{\tilde{y}}^{(l)} = \tilde{\mathbf{B}}^{(l)} \tilde{\nu}^{(l)} + \underline{\tilde{n}}^{(l)}, \quad l=1,2,\dots,L \quad (5.31)$$

这样, $\underline{\tilde{y}} = \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\nu}$ 被分解为 L 个子模型式(5.31)。

但是, $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 是分段处理方式带来的, 由前一段系数误差和后一段系数引入的测量组成, 与一般意义上的噪声不同。为了便于描述, 称 $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 为第 l 段虚拟噪声子向量。类似地, 称 $\underline{\tilde{y}}^{(l)}$ 为第 l 段虚拟测量子向量。此外, 考虑到, $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 中 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l-1)} \Delta \tilde{\nu}_1^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l+1)} \tilde{\nu}_S^{(l+1)}$ 分别表示前一段系数误差 $\Delta \tilde{\nu}_1^{(l-1)}$ 和后一段系数 $\tilde{\nu}_S^{(l+1)}$ 引入的测量, 分别称 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l-1)} \Delta \tilde{\nu}_1^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l+1)} \tilde{\nu}_S^{(l+1)}$ 为前向和后向虚拟噪声。

对于子模型式(5.31), 若 $\|\underline{\tilde{n}}^{(l)}\|_2 \leq \eta^{(l)}$, 可通过求解块稀疏重构子问题

$$\hat{\tilde{\nu}}^{(l)} = \arg \min_{\tilde{\nu}^{(l)}} \|\tilde{\nu}^{(l)}\|_{2,1} \quad \text{s.t.} \quad \|\underline{\tilde{y}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{B}}'^{(l)} \tilde{\nu}^{(l)}\|_2 \leq \eta^{(l)} \quad (5.32)$$

获取块稀疏子向量 $\tilde{\nu}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\nu}}^{(l)}$ 。

由于测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 的规模较小, 可采用现有块稀疏重构算法直接求解式(5.32), 获取 $\tilde{\nu}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\nu}}^{(l)}$, $l=1,2,\dots,L$ 。然后根据估计值 $\hat{\tilde{\nu}}_1^{(l)}$ ($l=1,2,\dots,L-1$) 和 $\hat{\tilde{\nu}}^{(L)}$ 获取块稀疏向量 $\tilde{\nu}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\nu}}$, 即 $\hat{\tilde{\nu}} = [(\hat{\tilde{\nu}}_1^{(1)})^\top, (\hat{\tilde{\nu}}_1^{(2)})^\top, \dots, (\hat{\tilde{\nu}}_1^{(L-1)})^\top, (\hat{\tilde{\nu}}_1^{(L)})^\top]^\top$ 。

本文将上述方法称为块稀疏 SegSR 方法, 简记为 BSegSR 方法, 其流程见算法 5.1。

算法 5.1: BSegSR

输入: S , M_p , N_p , J , \tilde{M} , \tilde{N} 和 L

输出: 估计的块稀疏向量 $\hat{\tilde{\nu}}$

步骤:

- 1) 初始化 $l=1$ 。
- 2) 提取 $\tilde{M}J \times 1$ 测量子向量 $\underline{\tilde{y}}^{(l)}$ 和 $\tilde{M}J \times \tilde{N}J$ 测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 。
- 3) 根据式(5.29)计算虚拟测量子向量 $\underline{\tilde{y}}^{(l)}$ 。
- 4) 求解式(5.32)获取块稀疏子向量 $\tilde{\nu}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\nu}}^{(l)}$ 。
- 5) 令 $l=l+1$ 。如果 $l>L$, 执行步骤 6); 否则, 根据式(5.26)产生 $\tilde{M}J \times N_p J$ 子矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l-1)}$, 并从估计向量 $\hat{\tilde{\nu}}^{(l-1)}$ 中提取子向量 $\hat{\tilde{\nu}}_1^{(l-1)}$, 然后执行步骤 2)。
- 6) 根据估计值 $\hat{\tilde{\nu}}_1^{(l)}$, $l=1,2,\dots,L-1$ 和 $\hat{\tilde{\nu}}^{(L)}$ 形成块稀疏向量 $\tilde{\nu}$ 的估计值 $\hat{\tilde{\nu}}$:

$$\hat{\tilde{\nu}} = [(\hat{\tilde{\nu}}_1^{(1)})^\top, (\hat{\tilde{\nu}}_1^{(2)})^\top, \dots, (\hat{\tilde{\nu}}_1^{(L-1)})^\top, (\hat{\tilde{\nu}}_1^{(L)})^\top]^\top.$$

根据 BSegSR 方法的流程可知, 求解块稀疏重构子问题式(5.32)重构块稀疏子向量 $\tilde{\nu}^{(l)}$ 是 BSegSR 方法的主要步骤。显然, 块稀疏子向量 $\tilde{\nu}^{(l)}$ 的估计精度直接影响块稀疏向量 $\tilde{\nu}$ 的估计精度。由式(5.32)可知, 块稀疏子向量 $\tilde{\nu}^{(l)}$ 的估计精度受虚拟噪声 $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 影响。虽然现有块稀疏重构算法可求解式(5.32), 但是利用虚拟噪声 $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 的特性, 可进一步提高重构性能。

根据 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l+1)}$ 的定义, 前向虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l-1)}\Delta\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)}$ 和后向虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l+1)}\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}$ 的存在范围分别是 $[1:M_pJ]$ 和 $[\tilde{M}J-M_pJ+1:\tilde{M}J]$ 。由于 $\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}$ 是系数向量, $\Delta\tilde{\mathbf{v}}_1^{(l-1)}$ 是误差向量, 因而后向虚拟噪声强度可能高于前向虚拟噪声。注意到, 根据近似矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'$ 的带状结构和测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 的定义可知, $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 中前 $(\tilde{N}-N_p)$ 块的列向量与后向虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l+1)}\tilde{\mathbf{v}}_S^{(l+1)}$ 正交。此外, 考虑到 BOMP^[71] 算法根据测量子向量的残差与测量子矩阵每个块的相关性来选择块稀疏位置, 后向虚拟噪声主要影响块稀疏子向量 $\tilde{\mathbf{v}}^{(l)}$ 中后 N_p 块的稀疏位置估计。因此, 本文对 BOMP 算法进行改进, 提出了两步 BOMP(two-step BOMP, TBOMP)算法, 见算法 5.2。

TBOMP 算法主要由两个 BOMP 处理过程组成, 第一个 BOMP(步骤 2-4)受虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{n}}^{(l)}$ 的影响, 只能获取块稀疏子向量的粗略估计; 第二个 BOMP(步骤 5-7)利用 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 中前 $(\tilde{N}-N_p)$ 块的列向量与后向虚拟噪声正交的特性, 将块索引的搜索范围限定在 $[0:\tilde{N}-N_p-1]$ 内, 进一步获取该范围内尚未估计的块稀疏系数。考虑到系数子向量的块稀疏度往往未知, 两个 BOMP 根据相邻两次迭代所得残差的变化量决定是否终止迭代。第二个 BOMP 的阈值 ζ_2 要小于第一个 BOMP 的阈值 ζ_1 , 以保证第二个 BOMP 可以估计出第一个 BOMP 尚未估计的块稀疏系数。此外, 注意到相邻系数子向量间存在重叠部分, TBOMP 算法在初始化块稀疏子向量 $\hat{\mathbf{v}}^{(l)}$ 的块索引集时利用了前一段估计 $\hat{\mathbf{v}}^{(l-1)}$ 的部分块索引(见步骤 1)。

算法 5.2: TBOMP

输入: $\underline{\mathbf{y}}^{(l)}, \tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}, J, N_p, \tilde{N}, \hat{\mathbf{v}}^{(l-1)}$, 阈值 ζ_1 和 $\zeta_2 (\zeta_2 < \zeta_1)$

输出: 估计的块稀疏子向量 $\hat{\mathbf{v}}^{(l)}$

步骤:

- 1) 初始化块索引集 $A^{[0]} = \{n | \hat{\mathbf{v}}^{(l-1)}[n] \neq 0, n = N_p, \dots, \tilde{N}-1\}$, 残差 $\tilde{\mathbf{r}}^{[0]} = \underline{\mathbf{y}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{B}}_{A^{[0]}}^{(l)}(\tilde{\mathbf{B}}_{A^{[0]}}^{(l)})^+ \underline{\mathbf{y}}^{(l)}$, 其中 $\tilde{\mathbf{B}}_{A^{[0]}}^{(l)}$ 表示 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 中索引属于 $A^{[0]}$ 的块组成的子矩阵, 迭代次数 $i=1$ 。
- 2) 寻找 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 中与残差 $\tilde{\mathbf{r}}^{[i-1]}$ 最相关块的索引, 即 $\lambda^{[i]} = \arg \max_{n=0,1,\dots,\tilde{N}-1} \|(\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}[n])^H \tilde{\mathbf{r}}^{[i-1]}\|_2$, 其中 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}[n] = \tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}(1:\tilde{M}J, (n-1)J:nJ-1)$ 表示 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 的第 n 块列向量。更新索引集 $A^{[i]} = A^{[i-1]} \cup \{\lambda^{[i]}\}$ 。
- 3) 更新残差 $\tilde{\mathbf{r}}^{[i]} = \underline{\mathbf{y}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{B}}_{A^{[i]}}^{(l)}(\tilde{\mathbf{B}}_{A^{[i]}}^{(l)})^+ \underline{\mathbf{y}}^{(l)}$ 。
- 4) 如果 $\|\tilde{\mathbf{r}}^{[i-1]}\|_2 - \|\tilde{\mathbf{r}}^{[i]}\|_2 \leq \zeta_1$, 令 $i=i+1$, 执行步骤 5); 否则, 令 $i=i+1$, 执行步骤 2)。
- 5) 在 $\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}$ 的第 0 至 $\tilde{N}-N_p-1$ 块中, 寻找与残差 $\tilde{\mathbf{r}}^{[i-1]}$ 最相关块的索引, 即 $\lambda^{[i]} = \arg \max_{n=0,1,\dots,\tilde{N}-N_p-1} \|(\tilde{\mathbf{B}}'^{(l)}[n])^H \tilde{\mathbf{r}}^{[i-1]}\|_2$, 并更新索引集 $A^{[i]} = A^{[i-1]} \cup \{\lambda^{[i]}\}$ 。
- 6) 更新残差 $\tilde{\mathbf{r}}^{[i]} = \underline{\mathbf{y}}^{(l)} - \tilde{\mathbf{B}}_{A^{[i]}}^{(l)}(\tilde{\mathbf{B}}_{A^{[i]}}^{(l)})^+ \underline{\mathbf{y}}^{(l)}$ 。
- 7) 如果 $\|\tilde{\mathbf{r}}^{[i-1]}\|_2 - \|\tilde{\mathbf{r}}^{[i]}\|_2 \leq \zeta_2$, 执行步骤 8); 否则, 令 $i=i+1$, 执行步骤 5)。
- 8) 根据 $\hat{\mathbf{v}}_{A^{[i]}}^{(l)} = (\tilde{\mathbf{B}}_{A^{[i]}}^{(l)})^+ \underline{\mathbf{y}}^{(l)}$ 计算估计值 $\hat{\mathbf{v}}^{(l)}$ 。

5.2.3 存储量和运算量

本小节首先分析 BSegSR、多带联合直接重构、子带独立直接重构和子带独立 SegSR 方法的存储量。首先，分析 BSegSR 方法的存储量。BSegSR 方法需要顺序求解式(5.32)中的 L 个子问题，需存储 $\tilde{M}J \times \tilde{N}J$ 维的复测量子矩阵，占据存储空间为 $16\tilde{M}\tilde{N}J^2$ 字节(按照 IEEE 双精度标准计算)。其次，对于多带联合直接重构而言，直接求解式(5.20)需要存储 $MJ \times NJ$ 维的复测量矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ ，存储空间为 $16MNJ^2$ 字节。再次，对于子带独立直接重构而言，需要直接求解式(5.18)所示 J 个子问题，其中每个子问题需要存储 $M \times N$ 维的复测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^j$ 。显然，采用顺序方式求解 J 个子问题时，子带独立直接重构所需的存储空间为 $16MN$ 字节。最后，对于子带独立 SegSR 方法而言，采用 SegSR 方法分别对每个子带进行重构，根据 3.3.2 小节对 SegSR 方法的存储量分析可知，所需的存储空间为 $16\tilde{M}\tilde{N}$ 字节。

综上所述，BSegSR 方法的存储量是子带独立 SegSR 方法的 J^2 倍。进一步，根据 $\tilde{M} = (S+1)M_p$ 和 $\tilde{N} = SN_p$ 可知， $16\tilde{M}\tilde{N}J^2 = 16(S+1)M_pN_pJ^2$ 。可见，BSegSR 方法的存储量与控制子矩阵大小的参数 S 有关， S 越大，存储量越大。此外，根据 $P = \lceil N/N_p \rceil$ 可知， $16MNJ^2 \leq 16P^2M_pN_pJ^2$ ($P = N/N_p$ 时等式成立)。显然，若 $S^2 \ll P^2$ ，则 $16\tilde{M}\tilde{N}J^2 \ll 16MNJ^2$ 。可见，相比于多带联合直接重构方法，BSegSR 方法的存储量极大降低。进一步，若 $S^2J^2 \ll P^2$ ，则 $16\tilde{M}\tilde{N}J^2 \ll 16MN$ 。可见，BSegSR 方法的存储量远低于子带独立直接重构。

对于 5.1.3 小节给出的多带雷达系统，有 $J = 3$ ， $N = 249000$ 。设 MQCS 系统每个支路的降采样率均为 $R = 5$ ，带通滤波器冲激响应 $h_{\text{bp}}^i(t)$ 的截断长度 $T_{\text{hb}} = 0.6 \mu\text{s}$ ，低通滤波器冲激响应 $h_{\text{lp}}^i[k]$ 的长度 $N_{\text{hl}} = 31$ ，则 $M = 49800$ ， $M_p = 226$ ， $N_p = 1130$ 。表 5.1 给出了 BSegSR 方法、多带联合直接重构、子带独立直接重构和子带独立 SegSR 方法的存储量，其中 BSegSR 方法和 SegSR 方法中控制子矩阵大小的参数均取 $S = 3$ 。由表 5.1 可知，BSegSR 方法的存储量远低于多带联合直接重构和子带独立直接重构。

表 5.1 BSegSR 方法与其它方法的存储量

重构方法	BSegSR	多带联合直接重构	子带独立直接重构	子带独立 SegSR
存储量(MB)	329.59	1.70×10^6	1.89×10^5	36.62

下面对比分析 BSegSR、多带联合直接重构、子带独立直接重构和子带独立 SegSR 方法的运算量。首先，分析 BSegSR 方法的运算量。BSegSR 方法需要求解式(5.32)所示的 L 个子问题。下面分析采用 BOMP 和 TBOMP 算法求解子问题时 BSegSR 方法的运算量。根据 2.2.3 小节对 BOMP 算法的运算量分析可知，采用 BOMP 算法求解式(5.32)中第 i 个子问题的运算量为 $O(i_{\text{BOMP}}^{(i)}\tilde{M}\tilde{N}J^2)$ ，其中 $i_{\text{BOMP}}^{(i)}$ 表示迭代次数。类似地，采用 TBOMP 算法求解式(5.32)中第 i 个子问题的运算量为 $O(i_{\text{TBOMP}}^{(i)}\tilde{M}\tilde{N}J^2)$ ，其中 $i_{\text{TBOMP}}^{(i)}$ 表示迭代次数。

那么，采用 BOMP 和 TBOMP 算法求解 L 个子问题的总运算量可分别表示为 $C_{\text{BSegSR-BOMP}} = O(\sum_{l=1}^L i_{\text{BOMP}}^{(l)} \tilde{M}\tilde{N}J^2)$ 和 $C_{\text{BSegSR-TBOMP}} = O(\sum_{l=1}^L i_{\text{TBOMP}}^{(l)} \tilde{M}\tilde{N}J^2)$ 。若记第 l 个子问题中待估计块稀疏子向量 $\tilde{\nu}^{(l)}$ 的块稀疏度为 $K^{(l)}$ ，则有 $i_{\text{BOMP}}^{(l)} \leq K^{(l)}$ ，从而有 $C_{\text{BSegSR-BOMP}} = O(\sum_{l=1}^L K^{(l)} \tilde{M}\tilde{N}J^2)$ 。考虑到 TBOMP 算法求解第 l 个子问题时利用了第 $(l-1)$ 段的部分支撑集信息，避免了对相邻系数子向量重叠部分的支撑集的重复估计，则有 $\sum_{l=1}^L i_{\text{TBOMP}}^{(l)} \leq K$ ，从而有 $C_{\text{BSegSR-TBOMP}} = O(K\tilde{M}\tilde{N}J^2)$ 。

其次，对于多带联合直接重构而言，采用 BOMP 算法求解式(5.20)的运算量为 $C_{\text{BOMP}} = O(KMNJ^2)$ 。再次，对于子带独立直接重构而言，采用 OMP 算法直接求解式(5.18)所示的 J 个稀疏重构问题的总运算量为 $O(KMNJ)$ 。最后，对于子带独立 SegSR 而言，若对每个子带采用 SegSR 方法进行重构时，均采用 TOMP 算法求解 SegSR 的子问题，则子带独立 SegSR 的总运算量为 $O(K\tilde{M}\tilde{N}J)$ 。表 5.2 总结了上述四种方法的运算量。

表 5.2 BSegSR 方法与其它方法的运算量

重构方法	BSegSR (TBOMP)	多带联合直接重构 (BOMP)	子带独立直接重构 (OMP)	子带独立 SegSR (TOMP)
运算量	$O(K\tilde{M}\tilde{N}J^2)$	$O(KMNJ^2)$	$O(KMNJ)$	$O(K\tilde{M}\tilde{N}J)$

综上所述，BSegSR 方法的运算量是子带独立 SegSR 方法的 J 倍。进一步，根据 $\tilde{M}\tilde{N} = S(S+1)M_p N_p$ 可知， $K\tilde{M}\tilde{N}J^2 = KS(S+1)M_p N_p J^2$ 。根据 $MN \leq P^2 M_p N_p$ ($P = N/N_p$ 时等式成立)可知， $KMNJ^2 \leq KP^2 M_p N_p J^2$ 。显然，若 $S^2 \ll P^2$ ，则 $K\tilde{M}\tilde{N}J^2 \leq KMNJ^2$ 。因此，BSegSR 方法的运算量远小于多带联合直接重构。此外，若 $S^2 J \ll P^2$ ，则 $K\tilde{M}\tilde{N}J^2 \ll KMNJ$ 。可见，BSegSR 方法的运算量远小于子带独立直接重构。

5.3 块稀疏分段滑动重构方法的性能分析

根据 BSegSR 方法的流程可知，BSegSR 方法的性能由子问题(式(5.32))的重构性能决定。考虑到子问题中存在虚拟噪声，本节主要研究虚拟噪声对子问题重构性能的影响。目前，关于噪声背景下的块稀疏重构问题，主要讨论有界噪声和高斯噪声，如文献[83]基于测量矩阵的块相干性对 BOMP 算法性能的研究。本节首先研究子问题(式(5.32))中虚拟噪声的有界性，然后以 BOMP 算法为例，分析虚拟噪声对块稀疏系数子向量重构性能的影响。

令 $A^{(l)}$ 、 $\Delta A_1^{(l-1)}$ 和 $A_S^{(l+1)}$ 分别表示块稀疏子向量 $\tilde{\nu}^{(l)}$ 、 $\Delta\tilde{\nu}_1^{(l-1)}$ 和 $\tilde{\nu}_S^{(l+1)}$ 的支撑集，令 $\mu_B^{(l)}$ 和 $\mu_S^{(l)}$ 分别表示测量子矩阵 $\tilde{B}^{(l)}$ 的块相干系数和子相干系数。注意到，根据 $\tilde{B}^{(l)}$ 的结构可知，每一个块矩阵的列向量间均相互正交，即有 $\mu_S^{(l)} = 0$ 。下面基于测量矩阵的块相干性，给出虚拟噪声 $\tilde{n}^{(l)}$ 的有界性。

定理 5.1： 虚拟噪声 $\tilde{n}^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots, L$) 满足

$$\left\| \underline{\tilde{n}}^{(l)} \right\|_2 \leq \varepsilon_l = \begin{cases} b_{l+1}, & l=1 \\ a_{l-1} + b_{l+1}, & l=2, \dots, L-1 \\ a_{l-1}, & l=L \end{cases} \quad (5.33)$$

其中 $a_{l-1} = (1 + (\|\Delta A_1^{(l-1)}\| - 1)J\mu_B^{(l-1)})\|\Delta \tilde{v}_1^{(l-1)}\|_2$, $b_{l+1} = (1 + (\|A_S^{(l+1)}\| - 1)J\mu_B^{(l+1)})\|\tilde{v}_S^{(l+1)}\|_2$ 。

证明：根据 $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 的定义(式(5.30))可知，对于 $l=2,3,\dots,L-1$ ，有

$$\begin{aligned} \left\| \underline{\tilde{n}}^{(l)} \right\|_2 &\leq \left\| \tilde{B}'^{(l-1)} \Delta \tilde{v}_1^{(l-1)} \right\|_2 + \left\| \tilde{B}'^{(l+1)} \tilde{v}_S^{(l+1)} \right\|_2 = \left\| \tilde{B}'^{(l-1)} \Delta \tilde{v}_1^{(l-1)} \right\|_2 + \left\| \tilde{B}'^{(l+1)} \tilde{v}_S^{(l+1)} \right\|_2 \\ &\leq (1 + (\|\Delta A_1^{(l-1)}\| - 1)J\mu_B^{(l-1)})\|\Delta \tilde{v}_1^{(l-1)}\|_2 + (1 + (\|A_S^{(l+1)}\| - 1)J\mu_B^{(l+1)})\|\tilde{v}_S^{(l+1)}\|_2 \end{aligned} \quad (5.34)$$

其中最后一个不等式是根据测量矩阵的特性^[71]以及 $\mu_S^{(l-1)} = 0$ 和 $\mu_S^{(l+1)} = 0$ 简化得到的。

定义 $a_{l-1} = (1 + (\|\Delta A_1^{(l-1)}\| - 1)J\mu_B^{(l-1)})\|\Delta \tilde{v}_1^{(l-1)}\|_2$ 和 $b_{l+1} = (1 + (\|A_S^{(l+1)}\| - 1)J\mu_B^{(l+1)})\|\tilde{v}_S^{(l+1)}\|_2$ ，则式(5.34)可简写为

$$\left\| \underline{\tilde{n}}^{(l)} \right\|_2 \leq \varepsilon_l = a_{l-1} + b_{l+1}, l=2,3,\dots,L-1 \quad (5.35)$$

特殊地，当 $l=1$ 时， $\left\| \underline{\tilde{n}}^{(l)} \right\|_2 \leq b_{l+1}$ ；当 $l=L$ 时， $\left\| \underline{\tilde{n}}^{(l)} \right\|_2 \leq a_{l-1}$ 。至此，定理 5.1 得证。■

根据定理 5.1， $\left\| \underline{\tilde{n}}^{(l)} \right\|_2$ 的上界 ε_l 由 a_{l-1} 和 b_{l+1} 组成，其中 a_{l-1} 与上一段的估计误差 $\Delta \tilde{v}_1^{(l-1)}$ 有关， b_{l+1} 与下一段的系数 $\tilde{v}_S^{(l+1)}$ 有关。可见，在 ε_l 中， b_{l+1} 往往会占主导地位。

根据虚拟噪声的有界性，以及定理 2.18 有关 BOMP 算法在有界噪声下的性能保证，可得采用 BOMP 算法从 $\underline{y}^{(l)} = \tilde{B}'^{(l)} \tilde{v}^{(l)} + \underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 中精确估计 $\tilde{v}^{(l)}$ 支撑集的条件，见定理 5.2。

定理 5.2：对于测量模型 $\underline{y}^{(l)} = \tilde{B}'^{(l)} \tilde{v}^{(l)} + \underline{\tilde{n}}^{(l)}$ ，其中 $\left\| \underline{\tilde{n}}^{(l)} \right\|_2 \leq \varepsilon_l$ 。若

$$\left| \tilde{v}_{\min}^{(l)} \right| > 2\varepsilon_l + (2\|A^{(l)}\| - 1)J\mu_B^{(l)} \left| \tilde{v}_{\min}^{(l)} \right| \quad (5.36)$$

则 BOMP 算法可以精确恢复块 $|A^{(l)}|$ -稀疏向量 $\tilde{v}^{(l)}$ 的支撑集，并且 $\tilde{v}^{(l)}$ 的估计值 $\hat{v}^{(l)}$ 与真实值 $\tilde{v}^{(l)}$ 间绝对误差的上界满足

$$\left\| \hat{v}^{(l)} - \tilde{v}^{(l)} \right\|_2 \leq \frac{\varepsilon_l}{\sqrt{1 - (\|A^{(l)}\| - 1)J\mu_B^{(l)}}} \quad (5.37)$$

根据式(2.26)的定义，式(5.36)中 $\left| \tilde{v}_{\min}^{(l)} \right| = \min_{i \in A^{(l)}} \left\| \tilde{v}^{(l)}[i] \right\|_2$ 。由定理 5.2 可知，当虚拟噪声 $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 上界 ε_l 的值大时，对 $\left| \tilde{v}_{\min}^{(l)} \right|$ 的要求就高。由于虚拟噪声 $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 包含下一段部分系数引入的测量数据， ε_l 的值可能会比较大，致使 $\left| \tilde{v}_{\min}^{(l)} \right|$ 无法满足式(5.36)的要求。这就意味着，受虚拟噪声 $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 的影响，BOMP 算法只能精确恢复 $\tilde{v}^{(l)}$ 中能量较大的块稀疏系数的位置。考虑到虚拟噪声 $\underline{\tilde{n}}^{(l)}$ 由前向和后向虚拟噪声组成，两者的存在范围分别是 $[1:M_p J]$ 和 $[\tilde{M}J - M_p J + 1:\tilde{M}J]$ 。根据 $\tilde{B}'^{(l)}$ 中前 $(\tilde{N} - N_p)$ 块的列向量与后向虚拟噪声 $\tilde{B}'^{(l+1)} \tilde{v}_S^{(l+1)}$ 正交的特性，以及 BOMP 算法搜寻块索引的方法，后向虚拟噪声主要影响 $\tilde{v}^{(l)}$ 中后 N_p 块的稀疏位置估计。那么，若在 BOMP 算法迭代终止后，再增加一个仅在 $[0:\tilde{N} - N_p - 1]$ 内寻找块索引的 BOMP 过程，可以减弱后向虚拟噪声的影响，进一步获取 $\tilde{v}^{(l)}$ 中前 $(\tilde{N} - N_p - 1)$

块中尚未估计出的块稀疏位置。这就是第 5.2.2 小节所述 TBOMP 算法的思想。

5.4 仿真分析

本节通过仿真评估 BSegSR 方法的性能，并与多带联合直接重构、子带独立直接重构和子带独立 SegSR 方法的性能相比较。其中，多带联合直接重构采用 BOMP^[71]算法直接求解式(5.20)实现；子带独立直接重构采用 OMP^[56]算法直接求解 J 个稀疏重构问题式(5.18)实现；子带独立 SegSR 采用第 3 章提出的 SegSR 方法分别对每个子带进行快速重构，并用第 3 章中 SegSR 方法的参数进行仿真。除特别说明外，本文的仿真结果均是 500 次蒙特卡洛实验的平均结果。仿真使用 3.1 GHz 主频的英特尔酷睿 i5-2400 处理器和 16 GB 内存的计算机。仿真环境为 MATLAB 2011B。

5.4.1 参数设置

设多带发射信号的子带个数 $J = 3$ ，每个子带均是带宽 $B_0 = 100 \text{ MHz}$ 、脉冲宽度 $T_p = 10 \mu\text{s}$ 的线性调频脉冲信号，载频分别为 1 GHz, 1.25 GHz 和 1.5 GHz。为使测量矩阵的规模适中以便评估直接重构的性能，设观测时间 $T = 100 \mu\text{s}$ 。假设目标时延在 $[0, T - T_p]$ 的分辨率格点上均匀分布，反射系数和相位偏移分别在 $(0, 1]$ 和 $(0, 2\pi]$ 上均匀分布。

设 MQCS 系统每个支路扩频信号的带宽均为 $B_p = 100 \text{ MHz}$ ；带通滤波器的中心频率分别为 0.97 GHz, 1.23 GHz 和 1.49 GHz，带宽均为 $B_{cs} = 10 \text{ MHz}$ ，中心频率 $\pm B_{cs}$ 处衰减低于 -35 dB ；ADC 采样速率 $f_{cs} = 120 \text{ MHz}$ ；每组正交解调支路中低通滤波器的通带截止频率为 5 MHz，阻带截止频率为 10 MHz，通带最大波纹为 1 dB，阻带最小衰减为 -60 dB ；抽取因子 $D = 6$ 。那么，MQCS 系统的降采样率 $R = 5$ 。仿真采用 6 阶巴特沃斯带通滤波器，根据 5.2.1 小节对截断长度 T_{hb} 选择依据的讨论以及第 4 章的相关仿真结果，截断长度取 $T_{hb} = 0.6 \mu\text{s}$ 。低通滤波器采用第 4 章仿真使用的 FIR 滤波器。

5.4.2 无噪声背景下的重构

本小节将通过重构误差和运行时间来评估无噪情况下的重构性能，其中重构误差的评估标准为块稀疏向量 $\tilde{\nu}$ 与估计值 $\hat{\tilde{\nu}}$ 之间的相对重构误差 E_r ，即

$$E_r = \left\| \hat{\tilde{\nu}} - \tilde{\nu} \right\|_2 / \left\| \tilde{\nu} \right\|_2 \quad (5.38)$$

对于子带独立重构(包括直接重构和采用 SegSR 方法重构)，按照块稀疏向量 $\tilde{\nu}$ 的产生方式，根据子带稀疏向量的估计值 $\hat{\sigma}^j$, $j = 1, \dots, J$ ，得到估计值 $\hat{\tilde{\nu}}$ 。

首先评估 BSegSR 方法的性能，并比较采用 BOMP 算法和 TBOMP 算法进行子段重构的结果。仿真中子段偏移量和子段长度固定，设置控制子段偏移量的参数 $W = 1$ 和控制子段长度的参数 $S = 3$ 。图 5.5 给出了两种方法得到的相对重构误差 E_r 。由图 5.5 可知，TBOMP 算法的重构性能优于 BOMP 算法。因此，下文关于 BSegSR 方法的仿真均采用

TBOMP 算法进行子段重构。

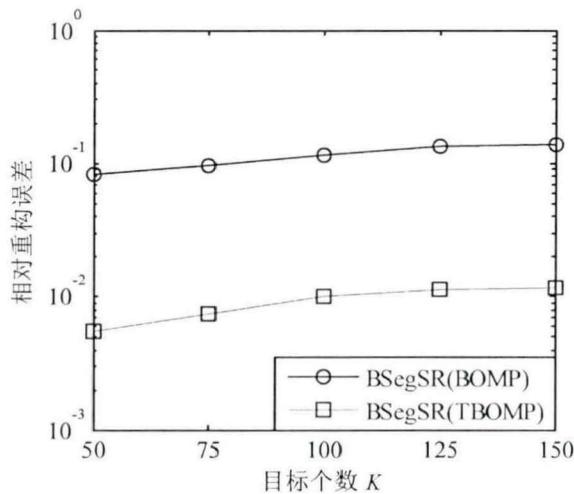


图 5.5 BSegSR 方法的相对重构误差

下面分析 BSegSR 方法的子段偏移量和子段长度对重构性能的影响。图 5.6(a)给出了参数 W (控制子段偏移量)和 S (控制子段长度)取不同值时相对重构误差 E_r 与目标个数(块稀疏度) K 的关系; 图 5.6(b)给出了所需的运行时间。

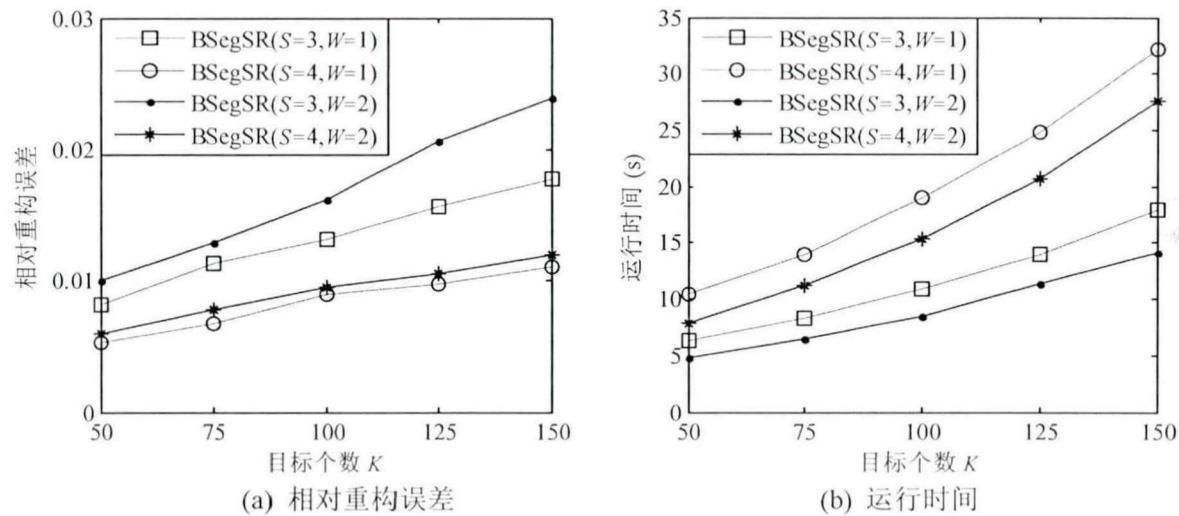


图 5.6 BSegSR 方法的相对重构误差和运行时间

由图 5.6(a)可知, 对于给定的 W , 相对重构误差 E_r 随 S 增大而减小。可见, 增加子段长度可以提高重构质量。但是, 由图 5.6(b)可知, 运行时间随 S 增大而增大。这是由于子段的运算量与子段长度成正比, 增大子段长度使得每个子段的运算量增大, 从而导致总的运行时间延长。另外, 由图 5.6(a)和(b)可知, 对于给定的 S , 相对重构误差 E_r 随 W 增大而增大, 而运行时间随 W 增大而减小。可见, 增大偏移量使得分段个数减小, 从而缩短了运算时间, 但是, 导致重构质量下降。综合而言, 子段偏移量和子段长度影响了块稀疏向量的重构质量和重构运算量。在实际应用中, 可折中考虑运算量和重构质量来选择参数 W 和 S 。对于仿真的例子, $W = 1$ 和 $S = 3$ 是较好的选择。5.4.3 小节将根

据这一参数设置仿真噪声情况下的重构性能。

最后,比较 BSegSR 方法与多带联合直接重构、子带独立直接重构和子带独立 SegSR 的性能。图 5.7(a)和(b)分别给出了相对重构误差 E_r 、运行时间与目标个数(块稀疏度) K 的关系。

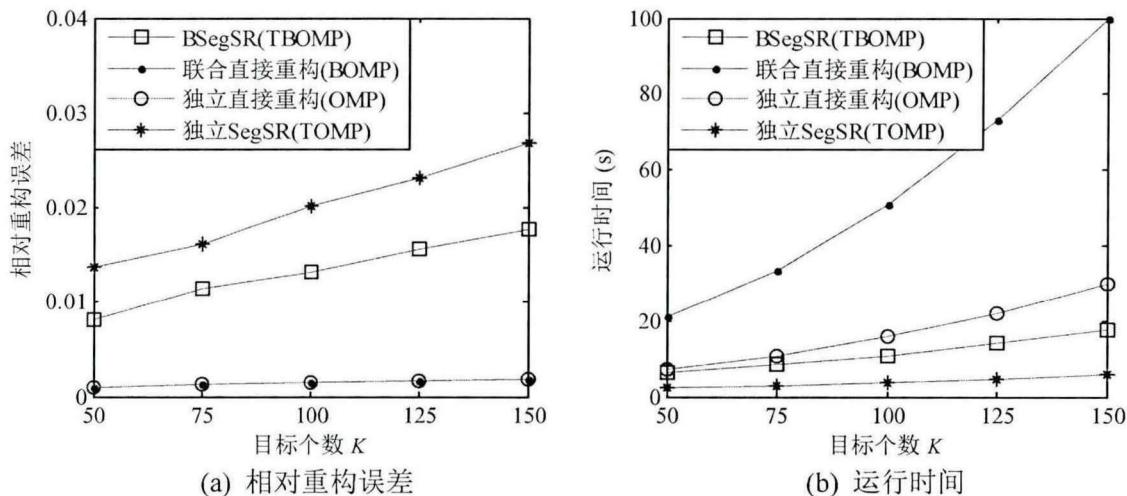


图 5.7 BSegSR 与其它重构方法的相对重构误差和运行时间

由图 5.7(a)可知, 子带独立直接重构和多带联合直接重构的 E_r 几乎完全相同, 而 BSegSR 方法和子带独立 SegSR 方法的 E_r 均高于直接重构的结果, 这是由虚拟噪声导致的。然而, 由图 5.7(a)可知, BSegSR 方法的 E_r 低于子带独立 SegSR 方法。可见, 就块稀疏向量 $\tilde{\nu}$ 的估计精度而言, BSegSR 方法优于子带独立 SegSR 方法。

由图 5.7(b)所示运行时间可知, 多带联合直接重构的运行时间是子带独立直接重构的 3 倍, BSegSR 方法的运行时间是子带独立 SegSR 方法的 3 倍, BSegSR 方法和子带独立 SegSR 方法的运行时间均低于直接重构。以上结果与 5.2.3 小节有关运算量的分析一致。可见, 采用 BSegSR 方法可实现多带联合快速重构。

5.4.3 噪声背景下的重构

假设多带回波信号的每个子带均受到带限、加性高斯白噪声的干扰。记第 j 个子带的噪声为 $n^j(t)$, 其中心频率为 f_0^j 、带宽为 B_0 、功率谱密度为 $N_0/2$ 。设每个子带的输入信噪比(ISNR)相同, 并定义第 j 个子带的 ISNR 为 $ISNR^j = \int_0^T |r^j(t)|^2 dt / (TN_0 B_0)$ 。在评估重构性能时, 采用重构信噪比(RSNR), 其定义为

$$RSNR = \left\| \sum_{j=1}^J \tilde{\psi}^j \tilde{\sigma}^j \right\|_2^2 / E \left[\left\| \sum_{j=1}^J \tilde{\psi}^j (\hat{\sigma}^j - \tilde{\sigma}^j) \right\|_2^2 \right] \quad (5.39)$$

对于多带联合重构(包括直接重构和 BSegSR 方法)而言, 首先根据块稀疏向量 $\tilde{\nu}$ 的估计值 $\hat{\nu}$ 获取 J 个子带稀疏向量的估计值 $\hat{\sigma}^j (j=1, \dots, J)$, 然后根据式(5.39)计算 RSNR。

图 5.8(a)给出了目标个数 $K=100$ 时 RSNR 与 ISNR 的关系; 图 5.8(b)给出了 $ISNR =$

5 dB 时 RSNR 与目标个数 K 的关系。

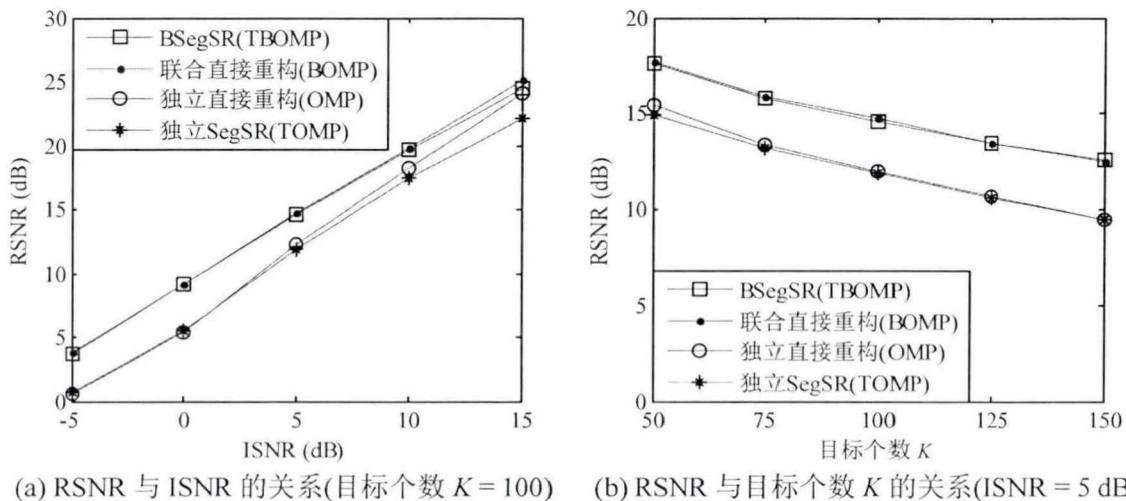


图 5.8 RSNR 与 ISNR 和目标个数 K 的关系

由图 5.8(a)和图 5.8(b)可知, BSegSR 的 RSNR 接近于多带联合直接重构, 并且 ISNR ≤ 5 dB 时, 两者的 RSNR 几乎相同, 这是背景噪声的影响超过虚拟噪声导致的。此外, BSegSR 方法的 RSNR 高于子带独立直接重构和子带独立 SegSR 方法, 特别是 ISNR ≤ 5 dB 时, 差值可达 2.5 dB 以上。可见, 在噪声背景下, BSegSR 方法可实现块稀疏信号的有效重构。

此外,为了直观展示信号波形的重构情况,图 5.9 和图 5.10 分别给出了稀疏度 $K = 50$ 、ISNR = 5 dB 时一次仿真实验中第 1 个子带($j=1$)原始回波信号以及采用上述四种方法恢复的基带回波信号。

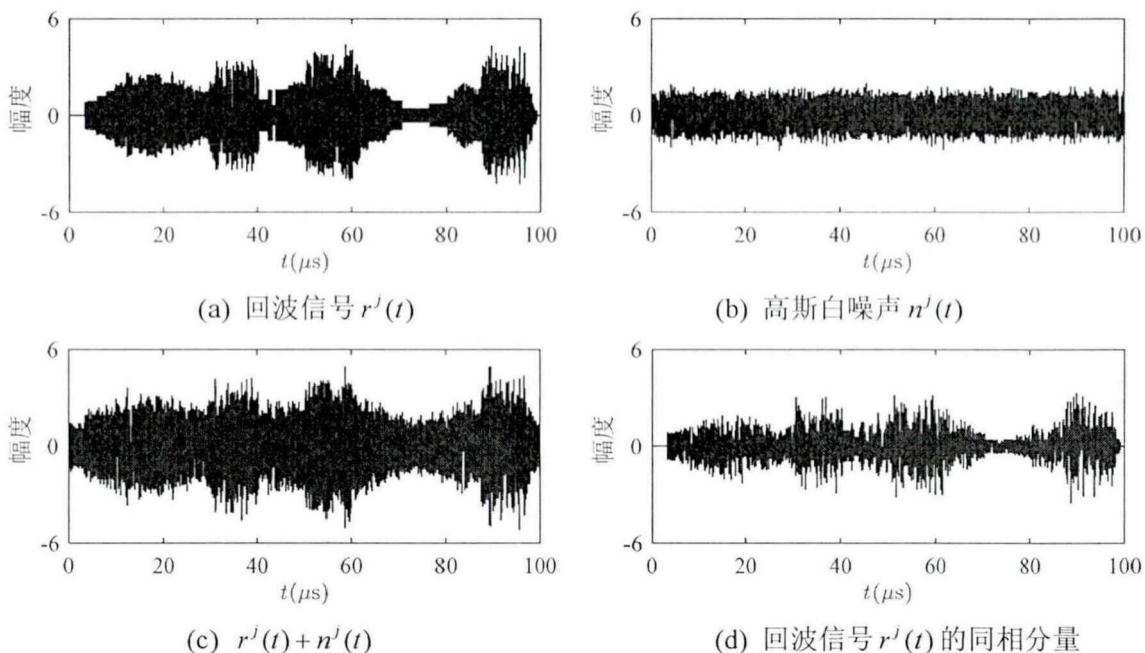


图 5.9 回波信号($K = 50$, ISNR = 5 dB, $j=1$)

图 5.9(a)-(d)分别给出了稀疏度 $K = 50$ 、ISNR = 5 dB 时一次仿真实验中第 1 个子带 ($j=1$) 回波信号 $r^j(t)$ 、高斯白噪声 $n^j(t)$ 、 $r^j(t) + n^j(t)$ 以及 $r^j(t)$ 的同相分量。

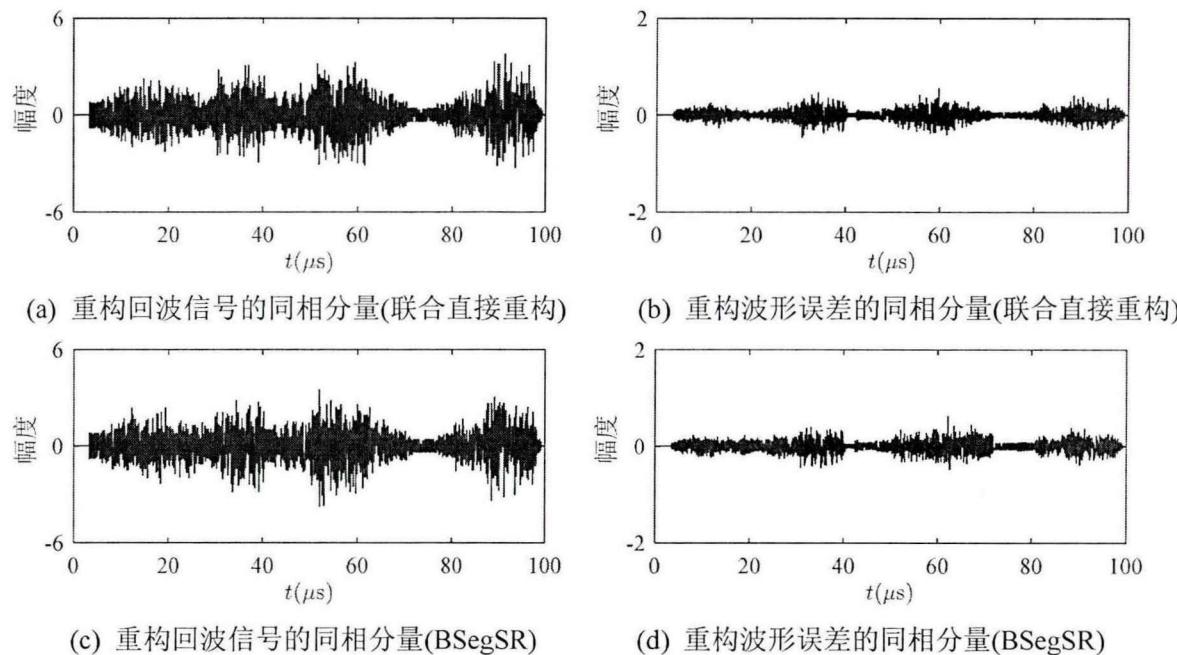


图 5.10 重构回波信号($K = 50$, ISNR = 5 dB, $j=1$)

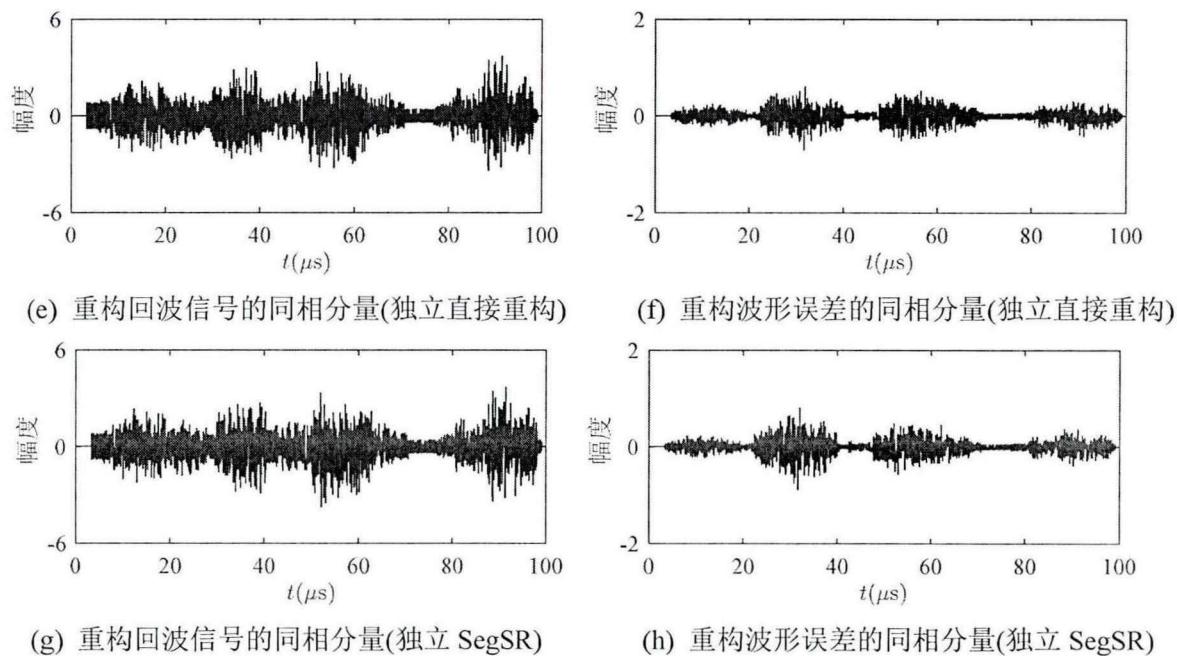


图 5.10(续) 重构回波信号($K = 50$, ISNR = 5 dB, $j=1$)

图 5.10(a)、(c)、(e)和(g)分别是采用联合直接重构、BSegSR 方法、独立直接重构和独立 SegSR 方法恢复的第 1 个子带($j=1$)的 Nyquist 率基带回波信号的同相分量;图 5.10(b)、(d)、(f)和(h)分别是相应的重构波形误差的同相分量。由图 5.10(b)和(d)可知, BSegSR 方法的重构波形误差与联合直接重构的结果相差不大, 小于独立直接重构和独立 SegSR 方法的结果。

5.5 本章小结

本章将 MQCS 系统应用于等带宽多带雷达回波信号采样，研究了每个子带基带信号的快速重构问题，提出了 BSegSR 方法。本章主要从等带宽多带雷达回波信号的块稀疏性、BSegSR 方法的原理及存储量和运算量，以及仿真实验三个方面进行了研究。首先，分析了等带宽多带雷达回波信号的块稀疏性，将多带回波信号重构转化为块稀疏重构问题；然后，阐述了基于测量矩阵的近似带状结构提出的 BSegSR 方法的原理，并分析了存储量和运算量，以及 BSegSR 方法的性能；最后，通过仿真实验分析了 BSegSR 方法的重构性能，仿真结果验证了 BSegSR 方法的有效性。

6 基于压缩采样雷达的运动目标回波信号的快速重构

第3-5章分别基于随机解调、正交压缩采样和多带正交压缩采样雷达系统，分析了静止点目标场景下的大规模稀疏重构问题模型和测量矩阵的结构特性，提出了分段滑动重构(SegSR)、块稀疏分段滑动重构(BSegSR)等快速求解方法，实现了雷达脉冲回波信号的快速重构。本章以随机解调压缩采样雷达为例，研究运动点目标场景下多脉冲基带回波信号的快速重构问题。

目前，在运动点目标场景下，基于压缩采样雷达开展的相关研究^{[129]-[135]}主要考虑两种情形，分别是运动目标在脉冲积累时间内不存在跨距离单元和跨多普勒单元^[170]的情形，以及运动目标在脉冲积累时间内发生跨距离单元或跨多普勒单元的情形。在第一种情形中，不同脉冲回波信号的表示系数具有相同的稀疏位置，因而多脉冲回波信号重构可转化为联合稀疏重构问题，可以采用 BSegSR 方法实现快速重构。在第二种情形中，由于多脉冲回波信号表示系数的稀疏位置和幅度会发生变化，多脉冲回波信号重构可转化为稀疏时变信号重构问题。现有稀疏时变信号重构方法^{[171]-[188]}中，加权稀疏重构方法^[177]采用概率分布模型来拟合稀疏时变向量的稀疏位置变化，通过求解加权稀疏重构问题实现稀疏时变信号重构，非常适用于第二种情形下运动目标多脉冲回波信号重构^[178]。然而，实际雷达应用中，加权稀疏重构问题的规模大，直接求解计算量大，难以实现实时重构。为此，本章主要针对跨距离单元的运动目标情形，研究大规模加权稀疏重构问题的快速求解方法，实现运动目标多脉冲基带回波信号的快速重构。

本质上，加权稀疏重构问题是一种基于先验信息的稀疏重构问题。我们可将针对大规模稀疏重构问题提出的快速重构方法拓展到加权稀疏重构情形。本章考虑将第3章提出的 SegSR 方法拓展到加权稀疏重构情形，发展快速求解大规模加权稀疏重构问题的方法。一种最直接的拓展方法是首先根据 SegSR 方法的分段方式，将大规模压缩测量模型分解为一系列小规模压缩测量子模型，然后构造加权稀疏重构子问题，并通过依次求解每个子问题实现快速重构。然而，根据第3章对 SegSR 方法的分析可知，受分段方式的影响，每个压缩测量子模型中虚拟测量子向量包含了由相邻段引入的前向和后向虚拟噪声，其中后向虚拟噪声水平较高，对子问题重构性能的影响较大。这就意味着，对于上述的直接拓展方法而言，加权稀疏重构子问题的性能会受到虚拟噪声的影响。

为了抑制后向虚拟噪声以提高重构性能，本章根据稀疏位置变化的概率分布模型，利用前一个系数向量的稀疏位置估计，构造当前压缩测量子模型中后向虚拟噪声的正交补空间，然后将虚拟测量子向量投影到这一正交补空间以抑制后向虚拟噪声，提出了一种基于正交投影的后向虚拟噪声抑制策略。继而，本章在 SegSR 方法基础上，将基于正交投影的后向虚拟噪声抑制策略与加权稀疏重构的加权思想相结合，提出了一种基于正

交投影的加权稀疏分段滑动重构(Orthogonal-Projection-based Weighted sparse SegSR, OP-WSegSR)方法。数值仿真验证了方法的有效性。

本章内容安排如下:6.1 节给出信号模型和问题描述;6.2 节阐述 OP-WSegSR 方法;6.3 节给出数值仿真结果; 6.4 节对本章内容进行总结。

6.1 信号模型和问题描述

6.1.1 信号模型

设雷达以脉冲重复间隔 T_r 发射 J 个脉冲信号照射观测场景, 其中每个脉冲信号的载频、带宽和脉冲宽度分别为 f_c , B 和 T_p 。雷达发射的第 j 个脉冲信号可表示为

$$u^j(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{s}_0(t - (j-1)T_r) e^{i2\pi f_c t} \right\}, t \in [(j-1)T_r, jT_r] \quad (6.1)$$

其中 $\tilde{s}_0(t)$ 表示持续时间为 T_p 的复包络, i 表示虚数单位。

若观测场景中存在 K 个运动点目标, 则雷达接收的第 j 个脉冲回波信号可表示为

$$r^j(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \sigma_k^j \tilde{s}_0(t - (j-1)T_r - t_k^j) e^{i[2\pi f_c(t-t_k^j) + \phi_k^j]} \right\}, t \in [(j-1)T_r, jT_r] \quad (6.2)$$

其中 σ_k^j , t_k^j 和 ϕ_k^j 分别是第 k 个目标对于第 j 个发射脉冲的反射系数、时延和相位偏移。

假设目标的回波起伏在脉冲与脉冲之间完全不相关^[189], 则每个脉冲的反射系数 σ_k^j 是独立随机变量。

回波信号 $r^j(t)$ 的复包络可表示为

$$\tilde{s}^j(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{\sigma}_k^j \tilde{s}_0(t - (j-1)T_r - t_k^j), t \in [(j-1)T_r, jT_r] \quad (6.3)$$

其中 $\tilde{\sigma}_k^j = \sigma_k^j e^{i(\phi_k^j - 2\pi f_c t_k^j)}$ 表示第 k 个目标的复反射系数。

令 $\tilde{\psi}(t)$ 表示由复包络 $\tilde{s}_0(t)$ 以时延分辨率 $\tau_0 = 1/B$ 为间隔进行时移形成的波形匹配字典, 即 $\tilde{\psi}(t) = \{\tilde{\psi}_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$, 其中 $\tilde{\psi}_n(t) = \tilde{s}_0(t - n\tau_0)$, $N = \lfloor (T_r - T_p)/\tau_0 \rfloor$ 。若目标时延均是 τ_0 的整数倍, 则复包络 $\tilde{s}^j(t)$ 可表示为

$$\tilde{s}^j(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\sigma}_n^j \tilde{\psi}_n(t - (j-1)T_r) = \tilde{\psi}(t - (j-1)T_r) \tilde{\sigma}^j, t \in [(j-1)T_r, jT_r] \quad (6.4)$$

其中 $\tilde{\sigma}^j = [\tilde{\sigma}_0^j, \tilde{\sigma}_1^j, \dots, \tilde{\sigma}_{N-1}^j]^T$ 是复反射系数向量。令 Γ^j 表示向量 $\tilde{\sigma}^j$ 的支撑集, 则有 $|\Gamma^j| = K$, 即 $\tilde{\sigma}^j$ 中非零元素的个数(稀疏度)等于目标个数 K 。若 $K \ll N$, 则称 $\tilde{s}^j(t)$ 为 K -稀疏信号。

对于高速机动目标而言, 在 JT_r 内目标回波很可能发生跨距离分辨单元的现象。根据式(6.4)可知, 系数向量 $\tilde{\sigma}^1, \dots, \tilde{\sigma}^J$ 中非零元素的位置(稀疏位置)不完全相同。另外, 由于目标的回波起伏在脉冲与脉冲之间完全不相关, 系数向量 $\tilde{\sigma}^1, \dots, \tilde{\sigma}^J$ 中非零元素的幅度

不同。可见，系数向量 $\tilde{\sigma}^j$ 属于稀疏时变向量。

考虑到单目标情形下，向量 $\tilde{\sigma}^j$ 的稀疏位置出现在向量 $\tilde{\sigma}^{j-1}$ 的稀疏位置或其附近区域的可能性很大，出现在越远区域的可能性越小。我们采用高斯概率分布模型^[177]拟合 $\tilde{\sigma}^j$ 的稀疏位置概率分布。令 p_n^j 表示向量 $\tilde{\sigma}^j$ 中第 n 个元素不为零的概率。若向量 $\tilde{\sigma}^{j-1}$ 的稀疏位置为 λ ，则 p_n^j 可表示为

$$p_n^j = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} e^{-(n-\lambda)^2/2b^2} \quad (6.5)$$

其中 b^2 表示高斯分布的方差。由高斯概率分布可知，向量 $\tilde{\sigma}^j$ 的稀疏位置主要分布在 $[\lambda - 3b, \lambda + 3b]$ 内。实际中，我们可以根据相邻脉冲间目标可能跨越的距离单元个数来设置方差 b^2 。

对于多目标情形， p_n^j 可用累积概率分布来描述^[177]，即

$$p_n^j = \sum_{\lambda \in \Gamma^{j-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} e^{-(n-\lambda)^2/2b^2} \quad (6.6)$$

其中 Γ^{j-1} 表示向量 $\tilde{\sigma}^{j-1}$ 的支撑集。

6.1.2 加权稀疏重构问题模型

本小节考虑采用随机解调压缩采样雷达系统获取运动目标每个脉冲回波信号的压缩采样。根据 3.1.2 小节所述随机解调压缩采样雷达的工作原理可知，第 j 个脉冲的压缩测量模型可表示为

$$\tilde{y}^j = \tilde{A}^j \tilde{\sigma}^j \quad (6.7)$$

其中 $\tilde{y}^j \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 表示第 j 个脉冲基带回波信号的复压缩测量， $\tilde{A}^j \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 表示测量矩阵，其第 n 列向量是将波形匹配字典 $\tilde{\psi}(t - (j-1)T_r)$ 的第 n 个原子 $\tilde{\psi}_n(t - (j-1)T_r)$ 经随机解调系统处理后的复压缩测量。

根据式(6.7)，我们可以通过求解稀疏重构问题

$$\hat{\sigma}^j = \arg \min_{\tilde{\sigma}^j} \|\tilde{\sigma}^j\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{y}^j = \tilde{A}^j \tilde{\sigma}^j \quad (6.8)$$

获取 $\tilde{\sigma}^j$ 的估计值 $\hat{\sigma}^j$ 。然而，式(6.8)的稀疏重构问题没有利用 $\tilde{\sigma}^j (j=1, 2, \dots, J)$ 的稀疏时变特性，不是一种有效的重构方法。

在压缩感知理论中，根据式(6.7)重构稀疏时变向量 $\tilde{\sigma}^j$ 的问题通常被称为稀疏时变信号重构问题。目前，人们业已提出了多种稀疏时变信号重构方法^{[171]-[188]}。D. Zonoobi 和 A. A. Kassilll 学者^[177]采用高斯概率分布模型来拟合稀疏时变向量的稀疏位置变化，提出了一种加权稀疏重构方法。该方法利用前一个系数向量的稀疏位置估计，计算当前系数向量的稀疏位置概率分布，然后以稀疏位置概率分布的函数为权值构建加权稀疏重

构问题，最后通过求解加权稀疏重构问题获取当前系数向量的估计。

根据 6.1.1 小节可知， $\tilde{\sigma}^j$ 的稀疏位置变化可以采用高斯概率分布模型来拟合。那么，我们可以采用文献[177]的方法获取 $\tilde{\sigma}^j$ 的估计值 $\hat{\sigma}^j$ 。根据文献[177]，可将式(6.8)转化为加权稀疏重构问题

$$\hat{\sigma}^j = \arg \min_{\tilde{\sigma}^j} \|W^j \tilde{\sigma}^j\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{y}^j = \tilde{A}^j \tilde{\sigma}^j \quad (6.9)$$

其中 $W^j = \text{diag}([w_0^j, w_1^j, \dots, w_{N-1}^j])$ 是加权矩阵， $w_n^j = 2(1 - p_n^j)$ 是向量 $\tilde{\sigma}^j$ 第 n 个元素的权值。

根据 3.1.2 小节所述测量矩阵的产生方式可知，测量矩阵 \tilde{A}^j 的大小与脉冲重复间隔 T_r 有关， T_r 越长，测量矩阵 \tilde{A}^j 的规模越大。例如，对于以脉冲重复间隔 $T_r = 2.5 \text{ ms}$ 发射带宽 $B = 100 \text{ MHz}$ 、脉冲宽度 $T_p = 10 \mu\text{s}$ 的脉冲雷达，若以 $1/5$ Nyquist 采样速率获取回波信号复包络的压缩测量，那么，根据 3.1.2 小节的分析可知，测量矩阵 \tilde{A}^j 占据的内存空间约为 184 GB ，从而使得式(6.9)属于大规模加权稀疏重构问题。然而，采用现有算法直接求解大规模加权稀疏重构问题计算量大，难以实现快速重构。

由于加权稀疏重构问题是一种基于先验信息的稀疏重构问题，我们可将大规模稀疏重构问题的快速求解方法拓展到加权稀疏重构情形，从而实现大规模加权稀疏重构问题的快速求解。根据 3.1.2 小节的分析可知，式(6.9)中的测量矩阵 \tilde{A}^j 具有带状结构。本文利用测量矩阵 \tilde{A}^j 的带状结构，将第 3 章提出的 SegSR 方法应用于加权稀疏重构问题，提出一种基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构(OP-WSegSR)方法。下一节将详细阐述 OP-WSegSR 方法的形成过程和基本原理。

6.2 基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构方法

6.2.1 加权稀疏分段滑动重构

按照 SegSR 方法的分段方式，如图 6.1 所示，将系数向量 $\tilde{\sigma}^j$ 、测量向量 \tilde{y}^j 和测量矩阵 \tilde{A}^j 划分为 L 个系数子向量 $\tilde{\sigma}^{j,l} \in \mathbb{C}^{\tilde{N} \times 1}$ 、测量子向量 $\tilde{y}^{j,l} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times 1}$ 和测量子矩阵 $\tilde{A}^{j,l} \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times \tilde{N}}$ ， $l = 1, 2, \dots, L$ ，其中 $\tilde{N} = SN_p$ ($1 < S < P$ ， $P = \lceil N/N_p \rceil$) 表示系数子向量的长度， $N_p = (d-1)R$ 表示相邻系数子向量间的偏移量， $\tilde{M} = (S+1)M_p$ 表示测量子向量的长度， $M_p = d-1$ 表示相邻测量子向量间的偏移量， $L = P-S+1$ 表示分段个数。

进一步，将 $\tilde{\sigma}^{j,l}$ 等分成 S 个长度为 N_p 的子向量，即 $\tilde{\sigma}^{j,l} = [(\tilde{\sigma}_1^{j,l})^\top, (\tilde{\sigma}_2^{j,l})^\top, \dots, (\tilde{\sigma}_S^{j,l})^\top]^\top$ ；将 $\tilde{A}^{j,l}$ 等分成 S 个 $\tilde{M} \times N_p$ 的子矩阵，即 $\tilde{A}^{j,l} = [\tilde{A}_1^{j,l}, \tilde{A}_2^{j,l}, \dots, \tilde{A}_S^{j,l}]$ 。定义

$$\tilde{A}^{j,l-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^{j,l-1}(M_p + 1 : \tilde{M}, 0 : N_p - 1) \\ \theta_{M_p \times N_p} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$\tilde{A}^{j,l+1} = \begin{bmatrix} \theta_{M_p \times N_p} \\ \tilde{A}_S^{j,l+1}(1 : \tilde{M} - M_p, 0 : N_p - 1) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

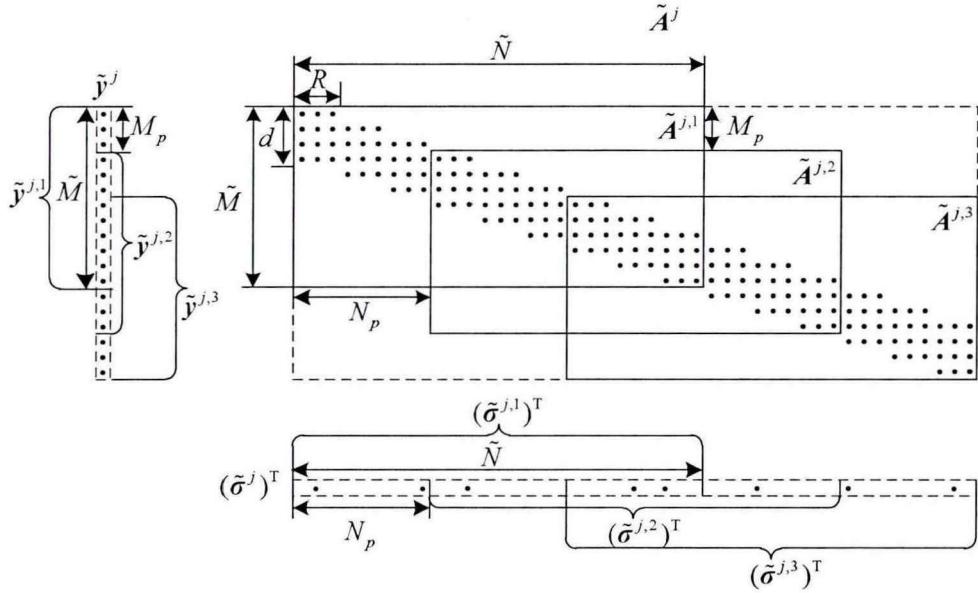


图 6.1 SegSR 方法的划分示意图

则 $\tilde{y}^{j,l}$ 可表示为

$$\tilde{y}^{j,l} = \begin{cases} \tilde{A}^{j,l} \tilde{\sigma}^{j,l} + \tilde{A}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}, & l=1 \\ \underline{\tilde{A}}^{j,l-1} \tilde{\sigma}_1^{j,l-1} + \tilde{A}^{j,l} \tilde{\sigma}^{j,l} + \tilde{A}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}, & l=2, 3, \dots, L-1 \\ \underline{\tilde{A}}^{j,l-1} \tilde{\sigma}_1^{j,l-1} + \tilde{A}^{j,l} \tilde{\sigma}^{j,l}, & l=L \end{cases} \quad (6.12)$$

令 $\hat{\tilde{\sigma}}_1^{j,l-1}$ 表示 $\tilde{\sigma}_1^{j,l-1}$ 的估计值, $\Delta\tilde{\sigma}_1^{j,l-1} = \tilde{\sigma}_1^{j,l-1} - \hat{\tilde{\sigma}}_1^{j,l-1}$ 表示 $\tilde{\sigma}_1^{j,l-1}$ 和 $\hat{\tilde{\sigma}}_1^{j,l-1}$ 之间的误差。定义

$$\underline{\tilde{y}}^{j,l} = \begin{cases} \tilde{y}^{j,l}, & l=1 \\ \tilde{y}^{j,l} - \underline{\tilde{A}}^{j,l-1} \hat{\tilde{\sigma}}_1^{j,l-1}, & l=2, 3, \dots, L \end{cases} \quad (6.13)$$

$$\underline{\tilde{n}}^{j,l} = \begin{cases} \tilde{A}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}, & l=1 \\ \underline{\tilde{A}}^{j,l-1} \Delta\tilde{\sigma}_1^{j,l-1} + \tilde{A}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}, & l=2, 3, \dots, L-1 \\ \underline{\tilde{A}}^{j,l-1} \Delta\tilde{\sigma}_1^{j,l-1}, & l=L \end{cases} \quad (6.14)$$

则式(6.7)可分解为 L 个噪声背景下的压缩测量子模型

$$\underline{\tilde{y}}^{j,l} = \tilde{A}^{j,l} \tilde{\sigma}^{j,l} + \underline{\tilde{n}}^{j,l}, \quad l=1, 2, \dots, L \quad (6.15)$$

但是, $\underline{\tilde{n}}^{j,l}$ 并不是通常意义上的背景噪声, 而是分段产生的。 $\underline{\tilde{n}}^{j,l}$ 包含了估计误差 $\Delta\tilde{\sigma}_1^{j,l-1}$ 和系数子向量 $\tilde{\sigma}_S^{j,l+1}$ 引入的测量 $\underline{\tilde{A}}^{j,l-1} \Delta\tilde{\sigma}_1^{j,l-1}$ 和 $\tilde{A}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}$ 。为了便于描述, 称 $\underline{\tilde{n}}^{j,l}$ 为虚拟噪声子向量, 称 $\underline{\tilde{A}}^{j,l-1} \Delta\tilde{\sigma}_1^{j,l-1}$ 和 $\tilde{A}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}$ 分别为前向和后向虚拟噪声子向量。类似地, 称 $\underline{\tilde{y}}^{j,l}$ 为虚拟测量子向量。

下面利用 $\tilde{\sigma}^{j-1}$ 的稀疏位置估计, 构造加权稀疏重构子问题来估计 $\tilde{\sigma}^{j,l}$ 。首先, 提取估计值 $\hat{\tilde{\sigma}}^{j-1}$ 的支撑集 $\hat{\Gamma}^{j-1}$, 并根据式(6.6)计算向量 $\tilde{\sigma}^j$ 中每个元素的稀疏位置概率分布

$$p_n^j = \sum_{i \in \hat{\Gamma}^{j-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} e^{-(n-i)^2/2b^2}, \quad n=0, 1, \dots, N \quad (6.16)$$

然后计算向量 $\tilde{\sigma}^j$ 中每个元素的权值 $w_n^j = 2(1 - p_n^j)$, $n = 0, 1, \dots, N$, 并构造第 l 个加权子矩阵 $\mathbf{W}^{j,l} \in \mathbb{R}^{\tilde{N} \times \tilde{N}}$, 即

$$\mathbf{W}^{j,l} = \text{diag}([w_{(l-1)N_p}^j, w_{(l-1)N_p+1}^j, \dots, w_{(l-1)N_p+\tilde{N}-1}^j]), \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (6.17)$$

根据式(6.15), 第 l 个加权稀疏重构子问题可表示为

$$\hat{\sigma}^{j,l} = \arg \min_{\tilde{\sigma}^{j,l}} \left\| \mathbf{W}^{j,l} \tilde{\sigma}^{j,l} \right\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \left\| \tilde{\mathbf{y}}^{j,l} - \tilde{\mathbf{A}}^{j,l} \tilde{\sigma}^{j,l} \right\|_2 \leq \eta^{j,l}, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (6.18)$$

这样, 式(6.9)的大规模加权稀疏重构问题就转化为式(6.18)的 L 个加权稀疏重构子问题。

最后, 依次求解式(6.18)的 L 个子问题获取 $\tilde{\sigma}^{j,l}$ 的估计值 $\hat{\sigma}^{j,l}$, $l = 1, 2, \dots, L$, 并根据 $\hat{\sigma}_1^{j,l}$ ($l = 1, 2, \dots, L-1$) 和 $\hat{\sigma}_1^{j,L}$, 可得 $\tilde{\sigma}^j$ 的估计值 $\hat{\sigma}^j = [\hat{\sigma}_1^{j,1}^\top, \hat{\sigma}_1^{j,2}^\top, \dots, \hat{\sigma}_1^{j,L-1}^\top, \hat{\sigma}_1^{j,L}^\top]^\top$ 。

针对式(6.18)的小规模加权稀疏重构子问题, 考虑到相邻系数子向量间的重叠性, 可将估计值 $\hat{\sigma}^{j,l}$ 的后 $(\tilde{N} - N_p)$ 个系数作为第 $(l+1)$ 段的先验信息, 继而采用基于部分先验信息的稀疏重构算法求解, 如 OMP-PKS 算法等。然而, 由式(6.15)可知, 虚拟测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{j,l}$ 中存在相邻段引入的虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{n}}^{j,l}$, 包括前向虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l-1} \Delta \tilde{\sigma}_1^{j,l-1}$ 和后向虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}$ 。根据第 3 章对虚拟噪声的分析可知, 后向虚拟噪声水平较高, 对子问题重构性能的影响较大。那么, 式(6.18)的重构性能受后向虚拟噪声的影响会较大。注意到, 第 3 章在 OMP 和 OMP-PKS 算法基础上, 提出了一种 TOMP 算法, 可以降低后向虚拟噪声的影响, 从而提高重构性能。但是, TOMP 算法无法消除后向虚拟噪声。6.2.2 小节从后向虚拟噪声的构成入手, 提出了一种基于正交投影的后向虚拟噪声抑制策略。

6.2.2 基于正交投影的后向虚拟噪声抑制

考虑到系数向量的稀疏位置可以采用概率分布模型描述, 本小节利用前一个系数向量的稀疏位置估计, 构造当前压缩测量子模型中后向虚拟噪声的正交补空间, 然后将虚拟测量子向量投影到此正交补空间, 从而达到抑制后向虚拟噪声的目的。

根据后向虚拟噪声的定义可知, 在第 j 个脉冲的第 l 个压缩测量子模型(式(6.15))中, 后向虚拟噪声为 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}$ 。令 $\Gamma_S^{j,l+1}$ 表示 $\tilde{\sigma}_S^{j,l+1}$ 的支撑集, 则有 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1}$ 。令 $V^{j,l+1}$ 表示 $\tilde{\mathbf{A}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1}$ 的列向量张成的子空间, 则后向虚拟噪声在 $V^{j,l+1}$ 的正交补空间上的投影为零向量。考虑到 $\tilde{\sigma}_S^{j,l+1}$ 的支撑集 $\Gamma_S^{j,l+1}$ 未知, 我们利用系数向量 $\tilde{\sigma}^{j-1}$ 的稀疏位置估计以及稀疏位置概率分布模型, 构造后向虚拟噪声 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l+1} \tilde{\sigma}_S^{j,l+1}$ 的正交补空间 $\hat{V}^{j,l+1}$, 然后将虚拟测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{j,l}$ 投影到此正交补空间 $\hat{V}^{j,l+1}$ 以抑制后向虚拟噪声。下面给出详细步骤。

从系数向量 $\tilde{\sigma}^{j-1}$ 的估计值 $\hat{\sigma}^{j-1}$ 中提取子向量 $\hat{\sigma}_S^{j-1,l+1}$, 并计算 $\hat{\sigma}_S^{j-1,l+1}$ 的支撑集 $\hat{\Gamma}_S^{j-1,l+1}$, 然后对 $\hat{\Gamma}_S^{j-1,l+1}$ 进行扩充得到 $A_S^{j-1,l+1}$, 即

$$A_S^{j-1,l+1} = \bigcup_{i \in \hat{\Gamma}_S^{j-1,l+1}} \left\{ \max\{0, i-b\}, \dots, i, \dots, \min\{i+b, N_p - 1\} \right\} \quad (6.19)$$

其中 $|A_S^{j-1,l+1}| < M_p$ 。

令 $\tilde{\mathbf{P}}^{j,l+1}$ 表示到 $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1}$ 的列向量张成的子空间 $\hat{\mathcal{V}}^{j,l+1}$ 上的投影算子，即

$$\tilde{\mathbf{P}}^{j,l+1} = \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} \left(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} \right)^+ \quad (6.20)$$

则相应的正交投影算子可表示为

$$\tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{P}}^{j,l+1} = \mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} \left(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} \right)^+ \quad (6.21)$$

记 $\tilde{\mathbf{h}}^{j,l}$ 为虚拟测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{j,l}$ 的正交投影，即 $\tilde{\mathbf{y}}^{j,l}$ 在 $\hat{\mathcal{V}}^{j,l+1}$ 的正交补空间上的投影，则有

$$\tilde{\mathbf{h}}^{j,l} = \tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \underline{\tilde{\mathbf{y}}^{j,l}} \quad (6.22)$$

这样，式(6.15)的压缩测量子模型转化为

$$\tilde{\mathbf{h}}^{j,l} = \tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \tilde{\mathcal{A}}^{j,l} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l} + \tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \underline{\tilde{\mathbf{n}}^{j,l}} \quad (6.23)$$

我们称式(6.23)为基于正交投影的压缩测量子模型。

根据 $\underline{\tilde{\mathbf{n}}^{j,l}}$ 的定义，可将 $\tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \underline{\tilde{\mathbf{n}}^{j,l}}$ 表示为

$$\tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \underline{\tilde{\mathbf{n}}^{j,l}} = \tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \tilde{\mathcal{A}}^{j,l-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,l-1} + \tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \tilde{\mathcal{A}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} \quad (6.24)$$

根据 $\tilde{\mathcal{A}}^{j,l-1}$ 和 $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1}$ 中列向量的非零元素分布情况可知， $\tilde{\mathcal{A}}^{j,l-1}$ 的每一列向量均与 $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1}$ 的列向量正交，那么

$$\tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \tilde{\mathcal{A}}^{j,l-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,l-1} = \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} \left(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} \right)^+ \right) \tilde{\mathcal{A}}^{j,l-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,l-1} = \tilde{\mathcal{A}}^{j,l-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,l-1} \quad (6.25)$$

可见，前向虚拟噪声 $\tilde{\mathcal{A}}^{j,l-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,l-1}$ 经过正交投影没有发生变化。这样，式(6.24)可表示为

$$\tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \underline{\tilde{\mathbf{n}}^{j,l}} = \tilde{\mathcal{A}}^{j,l-1} \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,l-1} + \tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \tilde{\mathcal{A}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} \quad (6.26)$$

显然，若 $\Gamma_S^{j,l+1} \subseteq \mathcal{A}_S^{j-1,l+1}$ ，即 $|\Gamma_S^{j,l+1} \cap \mathcal{A}_S^{j-1,l+1}| = |\Gamma_S^{j,l+1}|$ ，则 $\tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \tilde{\mathcal{A}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} = \mathbf{0}$ 。可见，后向虚拟噪声得到完全抑制。若 $|\Gamma_S^{j,l+1} \cap \mathcal{A}_S^{j-1,l+1}| < |\Gamma_S^{j,l+1}|$ ，则 $\tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \tilde{\mathcal{A}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\Gamma_S^{j,l+1}}^{j,l+1} \neq \mathbf{0}$ 。那么，后向虚拟噪声仅得到部分抑制。6.3 节将通过数值仿真说明后向虚拟噪声的抑制情况。

6.2.3 基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构方法

本小节将 WSegSR 和基于正交投影的后向虚拟噪声抑制策略相结合，提出了 OP-WSegSR 方法。下面详细阐述 OP-WSegSR 方法的流程。

按照 SegSR 方法的分段方式，将压缩测量模型式(6.7)分解为 L 个压缩测量子模型式(6.15)。从估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1}$ 中提取子向量 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^{j-1,l+1}$ ，并计算 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^{j-1,l+1}$ 的支撑集 $\hat{\Gamma}_S^{j-1,l+1}$ ，然后根据式(6.19)对 $\hat{\Gamma}_S^{j-1,l+1}$ 进行扩充得到 $\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}$ ，然后计算正交投影算子 $\tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} = \mathbf{I} - \tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} \left(\tilde{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} \right)^+$ 和正交投影 $\tilde{\mathbf{h}}^{j,l} = \tilde{\mathbf{P}}_\perp^{j,l+1} \underline{\tilde{\mathbf{y}}^{j,l}}$ ，获取基于正交投影的压缩测量子模型式(6.23)。

提取估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1}$ 的支撑集 $\hat{\Gamma}^{j-1}$ ，按照式(6.16)计算 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^j$ 中每个元素的稀疏位置概率分布 p_n^j ， $n=0,1,\dots,N$ ，然后计算 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^j$ 中每个元素的权值 $w_n^j = 2(1-p_n^j)$ ， $n=0,1,\dots,N$ 。

根据式(6.17)构造第 l 个加权子矩阵 $\mathbf{W}^{j,l} \in \mathbb{R}^{\tilde{N} \times \tilde{N}}$, 并基于式(6.23)获取 L 个加权稀疏重构子问题

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l}} \|\mathbf{W}^{j,l} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \left\| \tilde{\mathbf{h}}^{j,l} - \tilde{\mathbf{P}}_{\perp}^{j,l+1} \tilde{\mathbf{A}}^{j,l} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l} \right\|_2 \leq \eta^{j,l}, \quad l=1,2,\dots,L \quad (6.27)$$

然后依次求解式(6.27)的 L 个子问题获取 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l}$, $l=1,2,\dots,L$, 最后根据 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,l}$ ($l=1,2,\dots,L-1$) 和 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j,L}$ 获取 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^j$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^j$, 即 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^j = [(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,1})^T, (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,2})^T, \dots, (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,L-1})^T, (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,L})^T]^T$ 。

算法 6.1 给出了 OP-WSegSR 方法的流程。由算法 6.1 可知, 该方法需要利用前一个系数向量的稀疏位置估计, 因而适用于快速求解式(6.9)中 $2 \leq j \leq J$ 时的加权稀疏重构问题。对于 $j=1$ 时的情形, 可以采用 SegSR 方法实现快速重构。

算法 6.1: OP-WSegSR

输入: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1}$, b , M_p , N_p , S , \tilde{M} , \tilde{N} 和 L

输出: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^j$

步骤:

- 1) 初始化 $l=1$ 。
- 2) 提取 $\tilde{M} \times 1$ 维测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{j,l}$, $\tilde{M} \times \tilde{N}$ 维测量子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l}$ 。
- 3) 根据式(6.13)计算虚拟测量子向量 $\tilde{\mathbf{y}}^{j,l}$ 。
- 4) 从 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1}$ 中提取 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^{j-1,l+1}$, 计算 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_S^{j-1,l+1}$ 的支撑集 $\hat{\Gamma}_S^{j-1,l+1}$, 然后根据式(6.19)获取支撑集 $A_S^{j-1,l+1}$ 。
- 5) 根据式(6.11)产生 $\tilde{M} \times N_p$ 维子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l+1}$, 计算正交投影算子 $\tilde{\mathbf{P}}_{\perp}^{j,l+1} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{A_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1} (\tilde{\mathbf{A}}_{A_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1})^+$ 。
- 6) 计算正交投影 $\tilde{\mathbf{h}}^{j,l} = \tilde{\mathbf{P}}_{\perp}^{j,l+1} \tilde{\mathbf{y}}^{j,l}$ 。
- 7) 计算 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j-1}$ 的支撑集 $\hat{\Gamma}^{j-1}$, 然后根据式(6.16)计算 p_n^j , $n=0,1,\dots,N$ 。
- 8) 计算权值 $w_n^j = 2(1-p_n^j)$, $n=0,1,\dots,N$ 。
- 9) 求解式(6.27)得到稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l}$ 。
- 10) 令 $l=l+1$ 。如果 $l>L$, 执行步骤 11); 否则, 根据式(6.10)产生 $\tilde{M} \times N_p$ 维子矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l+1}$, 并从估计向量 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l+1}$ 中提取子向量 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,l+1}$, 然后执行步骤 2)。
- 11) 形成稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^j$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^j = [(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,1})^T, (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,2})^T, \dots, (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,L-1})^T, (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{j,L})^T]^T$ 。

针对式(6.27)的小规模加权稀疏重构子问题, 考虑到相邻系数子向量间的重叠性, 可将估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l}$ 的后 $(\tilde{N}-N_p)$ 个系数作为第 $(l+1)$ 段的先验信息, 继而采用基于部分先验信息的稀疏重构算法求解, 如 OMP-PKS 算法等。

下面分析 OP-WSegSR 方法的运算量。根据 OP-WSegSR 方法可知, 我们需要求解式(6.27)中的 L 个加权稀疏重构子问题。对于第 l 个子问题, 由于 $\tilde{\mathbf{A}}_{A_S^{j-1,l+1}}^{j,l+1}$ 的前 $(\tilde{M}-M_p)$ 行元素均为零, 计算 $\tilde{\mathbf{h}}^{j,l} = \tilde{\mathbf{P}}_{\perp}^{j,l+1} \tilde{\mathbf{y}}^{j,l}$ 和 $\tilde{\mathbf{P}}_{\perp}^{j,l+1} \tilde{\mathbf{A}}^{j,l}$ 的运算量可表示为 $O(M_p^2 + M_p^2 \tilde{N})$, 对向量 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{j,l}$ 每个元素以及测量矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}^{j,l}$ 的每列向量进行加权的运算量为 $O(\tilde{M} + \tilde{M}\tilde{N})$ 。那么, 采用 OMP-PKS 算法求解第 l 个子问题的运算量为 $O(M_p^2 + M_p^2 \tilde{N} + \tilde{M} + \tilde{M}\tilde{N} + i_{\text{OMP-PKS}}^{(l)} \tilde{M}\tilde{N})$, 其中 $i_{\text{OMP-PKS}}^{(l)}$ 表示迭代次数。由于 $\sum_{l=1}^L i_{\text{OMP-PKS}}^{(l)} \leq K$, 因而 OP-WSegSR 方法的总运算量可表示为 $C_{\text{OP-WSegSR}} = O(\tilde{M}_p^2 L + \tilde{M}_p^2 \tilde{N} L + \tilde{M} L + \tilde{M} \tilde{N} L + K \tilde{M} \tilde{N})$ 。

另外，WSegSR 方法没有 OP-WSegSR 的正交投影步骤，因此 WSegSR 方法的总运算量为 $C_{\text{WSegSR}} = O(\tilde{M}L + \tilde{M}\tilde{N}L + K\tilde{M}\tilde{N})$ 。对于直接重构方法而言，采用 OMP 算法直接求解加权稀疏重构(Weighted Sparse Reconstruction, WSR)问题(式(6.9))的运算量可表示为 $C_{\text{WSR}} = O(M + MN + KMN)$ 。

表 6.1 总结了上述三种方法的运算量。此外，表 6.1 也给出了采用 OMP 算法直接求解和采用 SegSR 方法求解稀疏重构(Sparse Reconstruction, SR)问题式(6.8)的运算量。

表 6.1 运算量比较

方法	SR	SegSR	WSR	WSegSR	OP-WSegSR
运算量	KMN	$K\tilde{M}\tilde{N}$	$M + MN + KMN$	$\tilde{M}L + \tilde{M}\tilde{N}L + K\tilde{M}\tilde{N}$	$M_p^2 L + M_p^2 \tilde{N}L + \tilde{M}L + \tilde{M}\tilde{N}L + K\tilde{M}\tilde{N}$

WSR、WSegSR 和 OP-WSegSR 方法的运算量分别由 KMN 、 $\tilde{M}\tilde{N}(L+K)$ 和 $M_p^2 \tilde{N}L$ 决定。由 $\tilde{M} = (S+1)M/P$ ， $\tilde{N} = SN/P$ 和 $M_p = M/P$ 可知 $\tilde{M}\tilde{N}(L+K) = (S+1)SMN(L+K)/P^2$ 和 $M_p^2 \tilde{N}L = SM^2 NL/P^3$ 。可见，对于给定的 N ，当 $S^2/P^2 \ll K/(P+K)$ 时， $\tilde{M}\tilde{N}(L+K) \ll KMN$ ，从而有 $C_{\text{WSegSR}} \ll C_{\text{WSR}}$ ；当 $S/P^2 \ll K/M$ 时， $M_p^2 \tilde{N}L \ll KMN$ ，从而有 $C_{\text{OP-WSegSR}} \ll C_{\text{WSR}}$ 。6.3.2 小节将基于 MATLAB 仿真平台，评估上述方法的运行时间。需要注意的是， $C_{\text{OP-WSegSR}} \ll C_{\text{WSR}}$ 的条件是基于采用原始方法直接计算矩阵相乘得到的。考虑到 MATLAB 采用优化算法计算矩阵相乘，上述条件可以放宽。

6.3 仿真分析

本节通过仿真实验评估 OP-WSegSR 方法的重构性能，并与 WSegSR 和 SegSR 方法相比较。为便于比较，OP-WSegSR、WSegSR 和 SegSR 方法中用于控制测量子矩阵大小的参数 S 均设为 3。仿真采用 OMP-PKS 算法求解 OP-WSegSR 方法的子问题，采用 TOMP 算法求解 WSegSR 和 SegSR 方法的子问题。此外，本节评估了采用 OMP 算法直接求解稀疏重构问题式(6.8)和加权稀疏重构问题式(6.9)的性能，并用 SR 和 WSR 分别表示两种直接重构方法的结果。除特别说明外，本节的仿真结果均是 500 次蒙特卡洛实验的平均结果。仿真采用的计算机硬件配置为主频 3.1 GHz 的英特尔酷睿 i5-2400 处理器和 4 GB 内存，仿真环境为 MATLAB 2011B。

6.3.1 参数设置

设雷达发射线性调频脉冲信号，带宽 $B = 100 \text{ MHz}$ ，脉冲宽度 $T_p = 10 \mu\text{s}$ ，脉冲重复间隔 $T_r = 2.5 \text{ ms}$ 。假设目标朝向雷达匀速运动，径向速率为 600 m/s ；目标反射系数在 $(0, 1]$ 上均匀分布，且脉冲间相互独立。为使测量矩阵的规模适中以便评估直接重构的性能，设目标的距离范围为 $[150 \text{ km}, 163.5 \text{ km}]$ ；目标初始距离在 $[150.6 \text{ km}, 162.9 \text{ km}]$ 的分辨率格点上(分辨单元 1.5 m)，且 K 个目标呈均匀分布。以 1.5 m 为距离分辨单元，可将 $[150$

km, 163.5 km]划分为 $N = 9000$ 个距离单元。

图 6.2 给出了一次仿真实验中 32 个脉冲内单个目标的位置和幅度分布情况。图 6.2 中, 目标反射系数在脉冲间变化; 目标初始距离为 152.34 km, 位于第 1560 个距离单元; 第 32 个脉冲时目标距离为 152.2925 km, 位于第 1529 个距离单元。可见, 目标在 32 个脉冲内走动的距离是 46.5 m, 共跨越了 31 个距离单元。

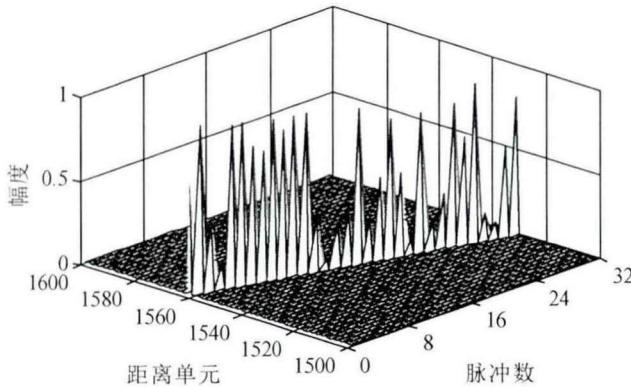


图 6.2 目标的位置和幅度分布

仿真中, 设高斯概率分布模型式(6.6)的方差 $b^2 = 4$; 脉冲个数 $J = 32$, 每个脉冲的观测时间长度为 $T = 100 \mu\text{s}$, 第 j 个脉冲的测量数据由 $[(j-1)T_r + 1000 \mu\text{s}, (j-1)T_r + 1100 \mu\text{s}]$ 内基带回波信号的复压缩测量构成。除特别说明外, 设随机解调系统以 1/5Nyquist 采样速率获取每个脉冲基带回波信号的复压缩测量, 则每个脉冲的复压缩测量个数 $M = 2000$ 。此外, 基于上述参数, 根据第 3 章可知 $N_p = 1000$ 和 $M_p = 200$ 。

6.3.2 无噪声背景下的重构

本小节通过系数向量 $\tilde{\sigma}^j$ 的重构误差和稀疏位置正确发现率, 以及仿真所需运行时间来评估无噪声背景下的重构性能。其中, 重构误差的评估标准为稀疏向量 $\tilde{\sigma}^j$ 与估计值 $\hat{\sigma}^j$ 之间的相对重构误差

$$E_r^j = \left\| \hat{\sigma}^j - \tilde{\sigma}^j \right\|_2 / \left\| \tilde{\sigma}^j \right\|_2 \quad (6.28)$$

稀疏位置正确发现率是指稀疏向量 $\tilde{\sigma}^j$ 中非零元素被正确发现的个数与非零元素总个数的比值, 运行时间通过 CPU 时间来说明。

图 6.3(a)给出了稀疏度 $K=100$ 时每个脉冲系数向量的相对重构误差; 图 6.3(b)给出了相应的稀疏位置正确发现率。图 6.3(a)和(b)中, SR 和 WSR 方法的相对重构误差为 10^{-15} 数量级, 稀疏位置正确发现率为 1。可见, SR 和 WSR 方法均实现了精确重构。由图 6.3(a)可知, OP-WSegSR 方法的相对重构误差明显小于 SegSR 和 WSegSR 方法; 当脉冲个数 $j \geq 3$ 时, OP-WSegSR 方法的相对重构误差接近于 0。由图 6.3(b)可知, OP-WSegSR 方法的稀疏位置正确发现率高于 SegSR 和 WSegSR 方法; 当脉冲个数 $j \geq 3$ 时, OP-WSegSR

方法的稀疏位置正确发现率为 99% 以上。这是由于 OP-WSegSR 方法采用了基于正交投影的后向虚拟噪声抑制方法，有效地抑制了后向虚拟噪声。

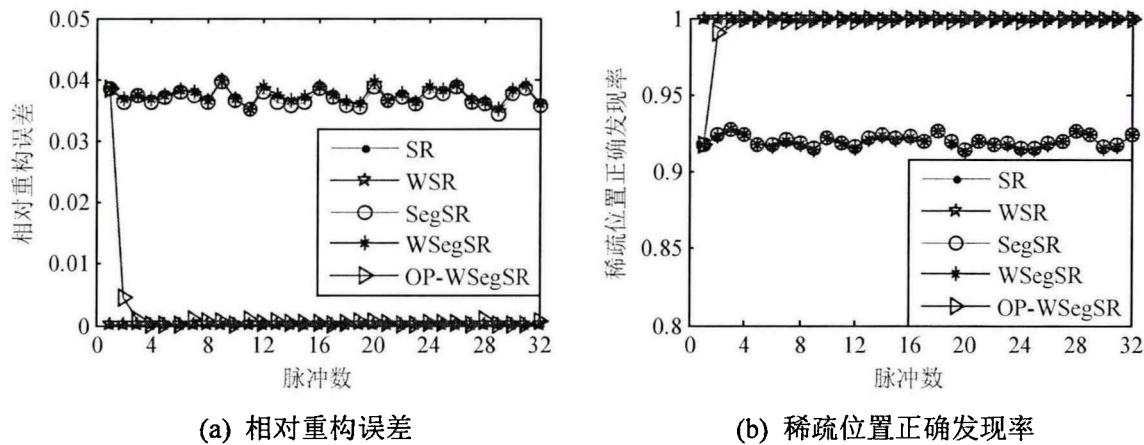


图 6.3 相对重构误差和稀疏位置正确发现率($K = 100$)

为了说明 OP-WSegSR 方法对后向虚拟噪声的抑制情况，图 6.4(a)-(d)给出了脉冲个数 $j=2$ 和 $j=3$ 时第 2 段($l=2$)虚拟噪声子向量在正交投影前后的幅度。图 6.4 的仿真结果均是稀疏度 $K = 100$ 时 500 次蒙特卡洛实验中一次实验的结果。

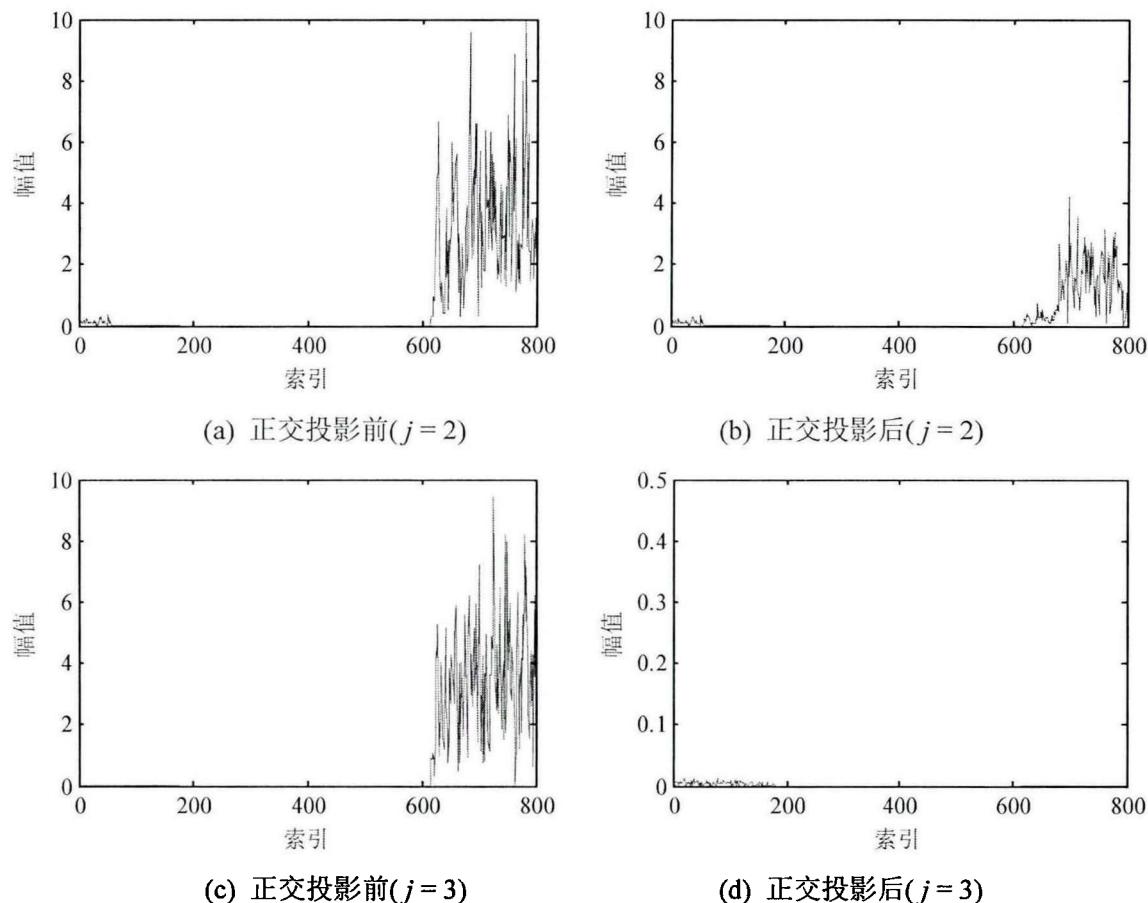


图 6.4 正交投影前后的虚拟噪声子向量($l = 2$)

根据 $S=3$ 和 $M_p=200$ 可知，虚拟噪声子向量的长度 $\tilde{M}=800$ 。由前向和后向虚拟噪
100

声的定义可知，前向和后向虚拟噪声的存在范围分别是[1:200]和[601:800]。从图 6.4 中可以看出，经过正交投影，后向虚拟噪声得到有效抑制。

图 6.5(a)和(b)分别给出了不同稀疏度 K 下脉冲个数 $j=2$ 和 $j=3$ 时系数向量的相对重构误差；图 6.6(a)和(b)分别给出了相应的稀疏位置正确发现率。由图 6.5(a)可知，当脉冲个数 $j=2$ 时，SR 和 WSR 方法均实现了精确重构；SegSR、WSegSR 和 OP-WSegSR 方法的相对重构误差均随稀疏度 K 增大而增大，其中，OP-WSegSR 方法的相对重构误差小于 SegSR 和 WSegSR 方法。由图 6.5(b)可知，当脉冲个数 $j=3$ 时，随着稀疏度 K 的增大，OP-WSegSR 方法的相对重构误差变化不大，而 SegSR 和 WSegSR 方法的相对重构误差逐渐增大。可见，OP-WSegSR 方法的重构性能优于 SegSR 和 WSegSR 方法。此外，由图 6.6 可知，图 6.6 的结论与图 6.5 一致。

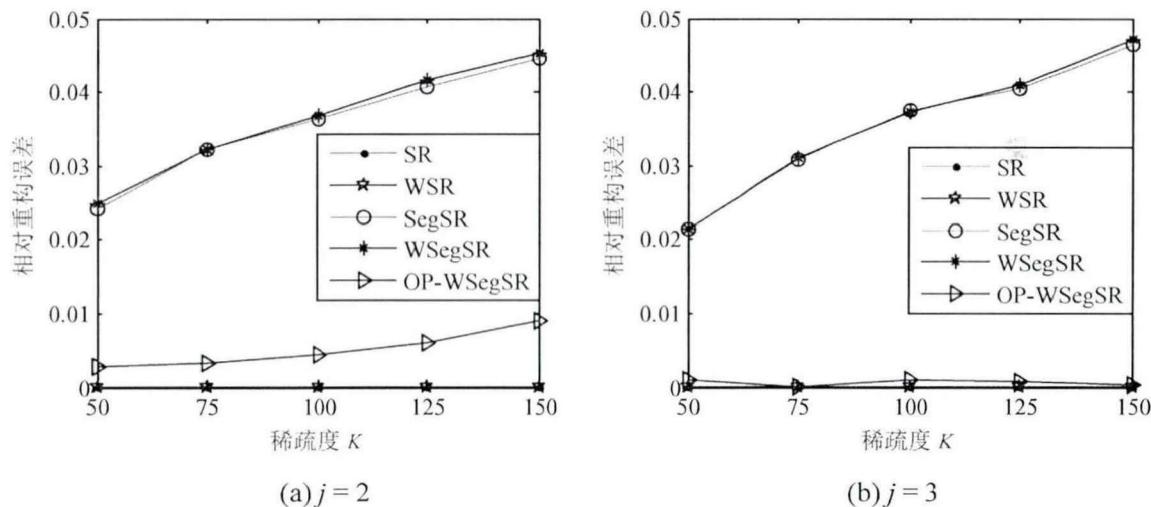


图 6.5 相对重构误差与稀疏度 K 的关系

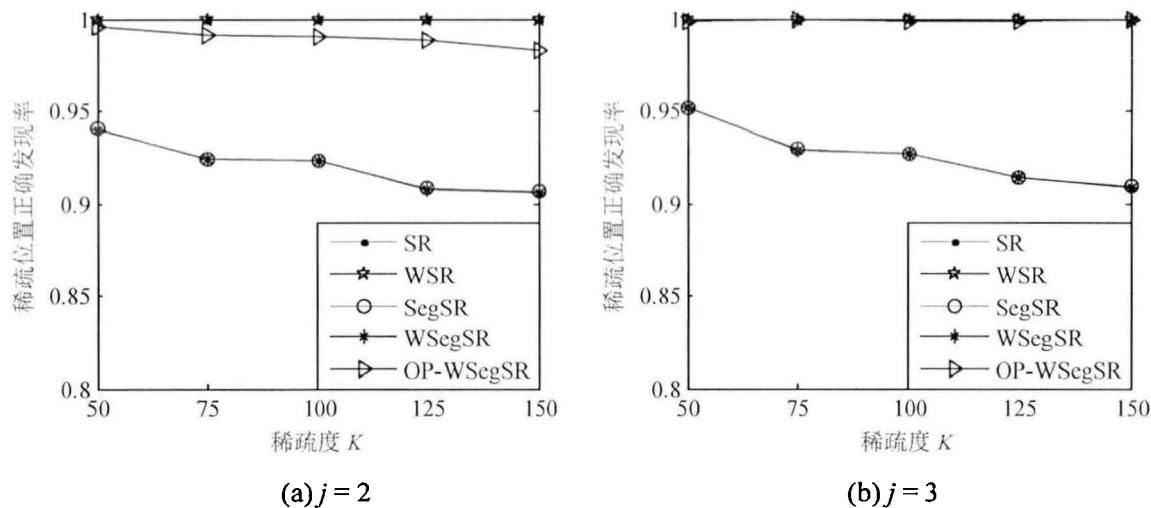


图 6.6 稀疏位置正确发现率与稀疏度 K 的关系

图 6.7(a)和(b)分别给出了 $N=9000$ 时不同稀疏度 K 和测量个数 M 下重构第 3 个脉冲系数向量所需的运行时间。由图 6.7 可知，受加权步骤的影响，WSR 方法的运行时间大

于 SR 方法, WSegSR 方法的运行时间大于 SegSR 方法。此外, 相比于 WSR 方法, OP-WSegSR 和 WSegSR 方法的运行时间短, 可见采用分段重构减少了运行时间, 与 3.3 小节的运算量分析一致。然而, OP-WSegSR 方法的运行时间大于 WSegSR 方法, 这是 OP-WSegSR 方法中的正交投影步骤造成的。综合考虑重构性能和运行时间, 相比于 SegSR 和 WSegSR 方法, OP-WSegSR 方法以增加计算复杂度为代价, 利用正交投影原理有效地抑制了分段产生的后向虚拟噪声, 实现了重构性能的提高。

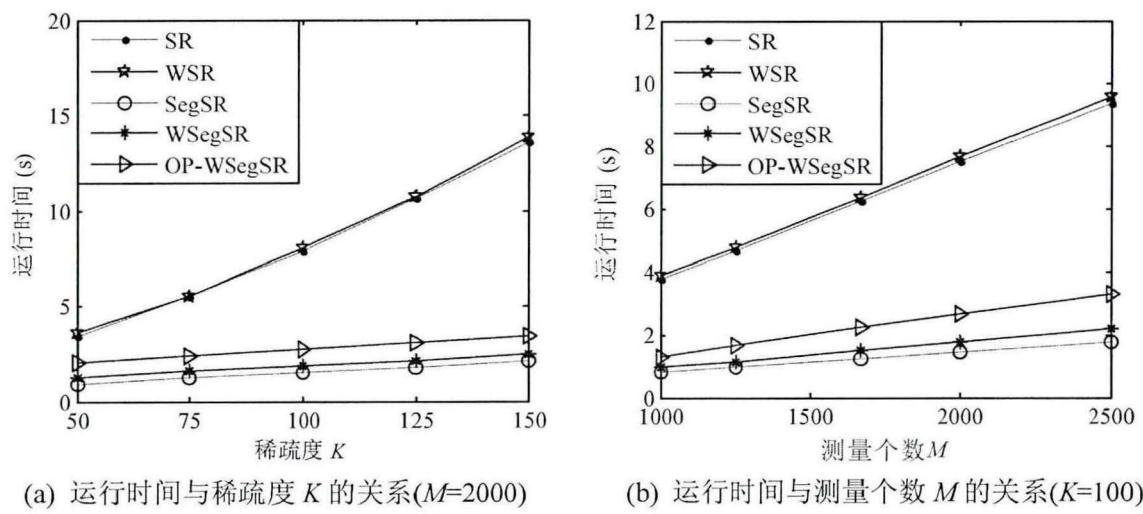


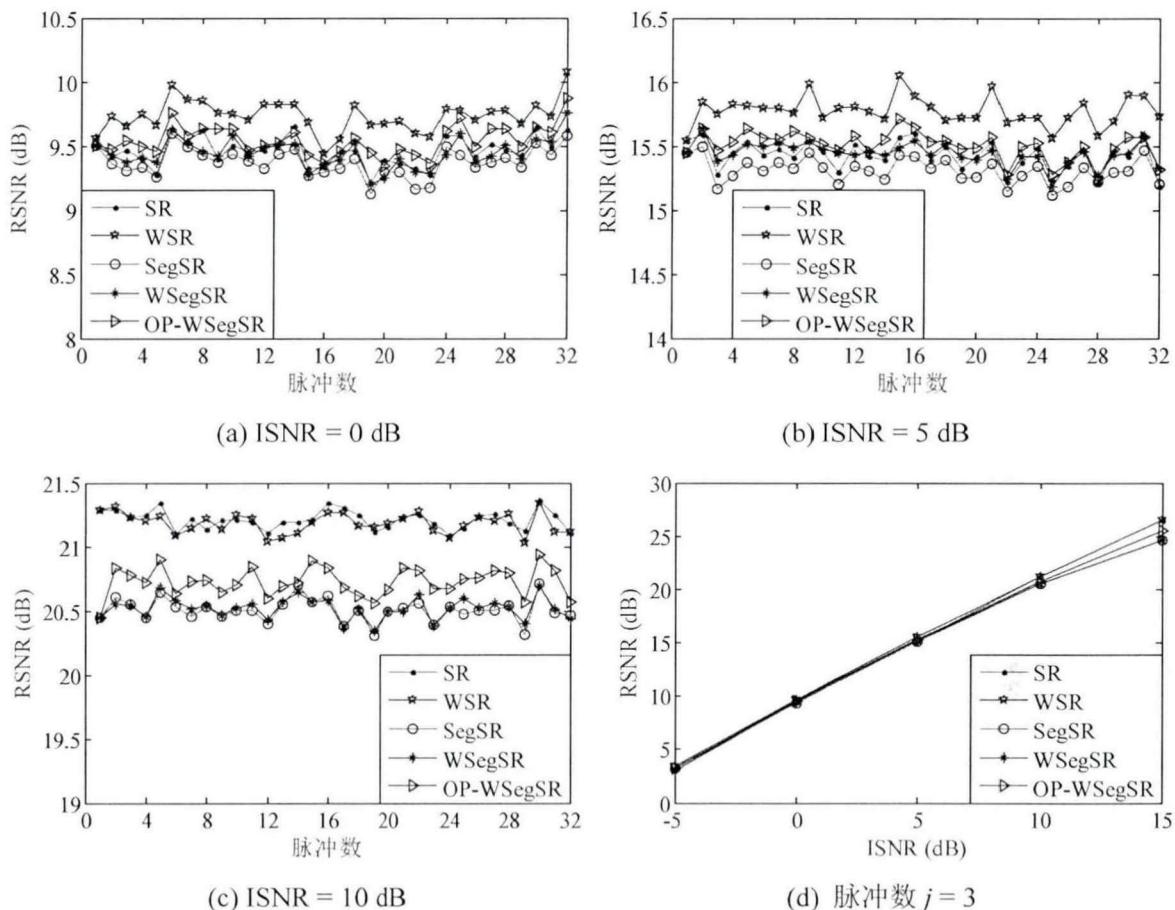
图 6.7 运行时间($N=9000, j=3$)

6.3.3 噪声背景下的重构

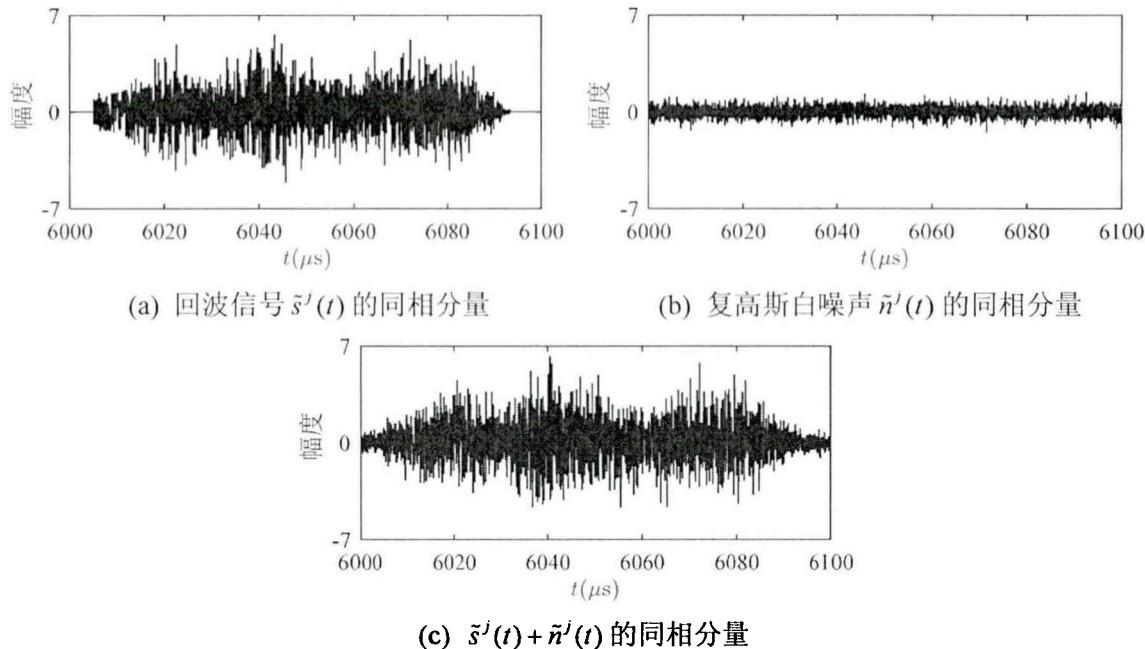
设复包络 $\tilde{s}^j(t)$ 受到带限、加性复高斯白噪声 $\tilde{n}^j(t)$ 的污染, 其中 $\tilde{n}^j(t)$ 的带宽为 $B/2$, 功率谱密度为 $N_0/2$ 。定义第 j 个脉冲重复间隔内的输入信噪比(ISNR)为 $ISNR^j = 2 \int_0^T |\tilde{s}^j(t)|^2 dt / (TBN_0)$ 。设每个脉冲重复间隔内的 ISNR 相同。本小节采用重构信噪比(RSNR)评估噪声背景下的重构性能, 其中第 j 个脉冲重复间隔内的 RSNR 定义为

$$RSNR^j = \left\| \tilde{\psi}^j \tilde{s}^j \right\|_2^2 / E \left[\left\| \tilde{\psi}^j (\hat{\sigma}^j - \tilde{\sigma}^j) \right\|_2^2 \right] \quad (6.29)$$

图 6.8 给出了稀疏度 $K=100$ 时不同重构方法的 RSNR, 其中, 图 6.8(a)-(c)分别是 $ISNR=0$ dB、5 dB 和 10 dB 时每个脉冲的 RSNR, 图 6.8(d)是脉冲个数 $j=3$ 时不同 ISNR 下的 RSNR。由图 6.8(a)-(c)可知, 对于直接重构而言, WSR 方法的 RSNR 高于 SR 方法。可见, 在噪声背景下, WSR 方法通过加权处理提高了重构性能。图 6.8(a)-(d)中, 对比 OP-WSegSR、WSegSR 和 SegSR 三种方法的结果可知, OP-WSegSR 方法的 RSNR 最高。可见, OP-WSegSR 方法结合了正交投影和加权稀疏的优势, 使得重构性能优于 WSegSR 和 SegSR 方法。由图 6.8(d)可知, 在 ISNR 较低($ISNR < 0$ dB)时, OP-WSegSR 方法的性能改善并不明显。这是由于受背景噪声的影响, 该方法对分段引入的虚拟噪声的抑制能力减弱。但是, 随着 ISNR 的增加, OP-WSegSR 方法的性能改善逐渐明显。

图 6.8 重构信噪比 RSNR ($K = 100$)

为了直观展示信号波形的重构情况, 图 6.9 和图 6.10 分别给出了稀疏度 $K = 100$ 、
ISNR = 10 dB 时一次仿真实验中的脉冲个数 $j=3$ 时原始回波信号和恢复出的回波信号。

图 6.9 回波信号($K = 100$, ISNR = 10 dB, $j=3$)

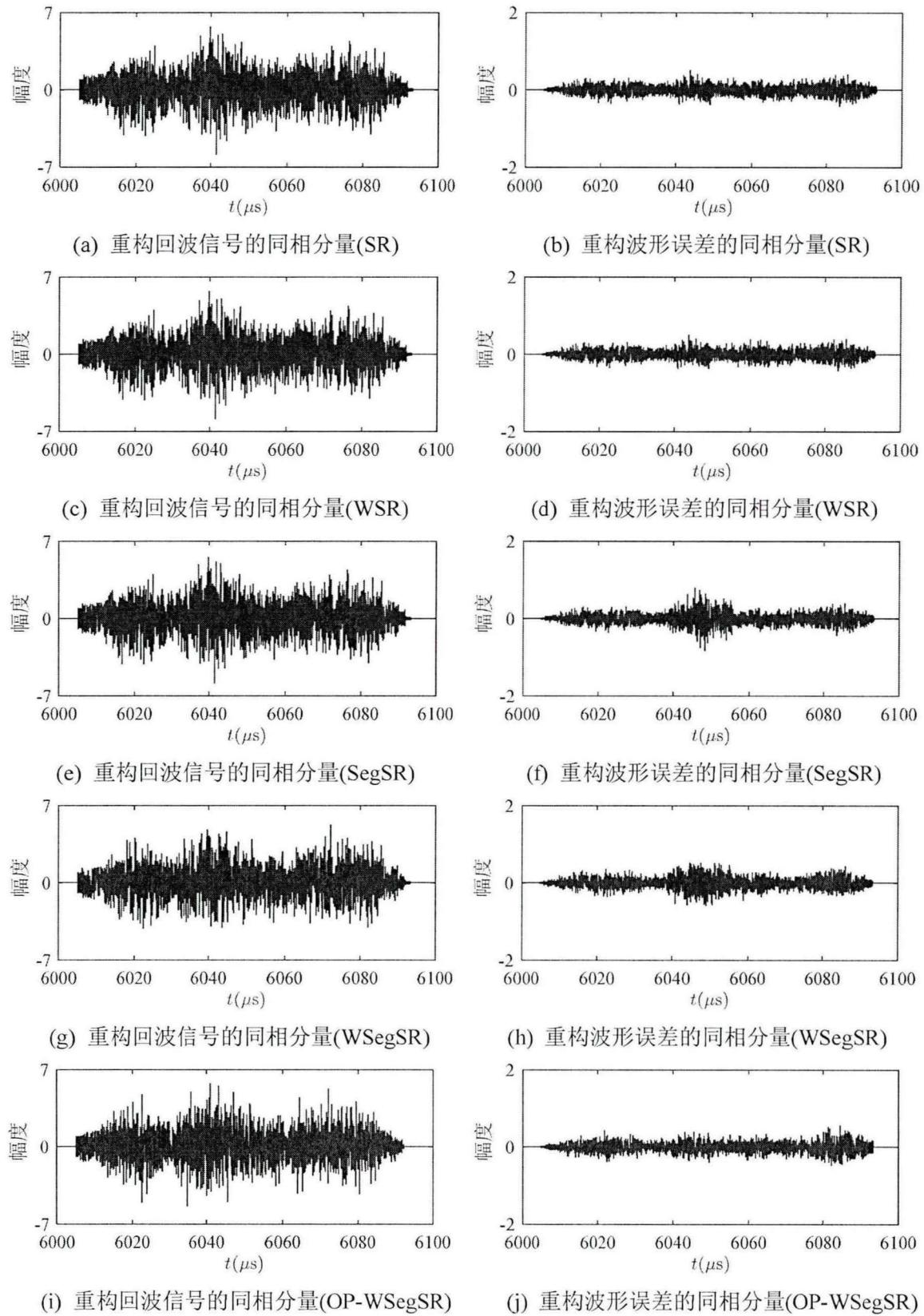
图 6.10 重构回波信号($K = 100$, ISNR = 10 dB, $j=3$)

图 6.9(a)-(c)分别给出了稀疏度 $K = 100$ 、ISNR = 10 dB 时一次仿真实验中脉冲个数 $j=3$ 时回波信号 $\tilde{s}^j(t)$ 、复高斯白噪声 $\tilde{n}^j(t)$ 以及 $\tilde{s}^j(t)+\tilde{n}^j(t)$ 的同相分量。图 6.10(a)、(c)、
104

(e)、(g)和(i)分别是采用 SR、WSR、SegSR、WSegSR 和 OP-WSegSR 方法重构的第 3 个脉冲($j=3$)回波信号的同相分量; 图 6.10(b)、(d)、(f)、(h)和(j)分别是相应的重构波形误差的同相分量。由图 6.10(b)、(d)、(f)、(h)和(j)可知, SR 和 WSR 方法的重构波形误差几乎相同; OP-WSegSR 方法的重构波形误差与 WSR 方法的结果基本接近, 比 SegSR 和 WSegSR 方法的重构波形误差要小。

6.4 本章小结

本章考虑雷达观测运动目标场景时目标在脉冲积累时间内发生跨距离单元的情形, 以随机解调压缩采样雷达以例, 研究了运动目标多脉冲回波信号的快速重构问题, 提出了 OP-WSegSR 方法。本章主要从多脉冲回波信号的稀疏时变性、OP-WSegSR 方法的原理, 以及仿真实验三个方面进行了研究。首先, 分析了多脉冲回波信号的稀疏时变性, 采用概率分布模型描述稀疏位置的变化, 将多脉冲回波信号重构转化为加权稀疏重构问题; 然后详细阐述了 OP-WSegSR 方法的原理和流程, 该方法利用前一个脉冲稀疏位置估计信息, 构造分段产生后向虚拟噪声的正交补空间, 将子段压缩测量投影到构造的正交补空间, 有效地抑制了后向虚拟噪声; 最后, 通过数值仿真验证了方法的有效性。虽然 OP-WSegSR 方法是基于随机解调压缩采样雷达系统提出的, 但是, 如果其它压缩采样雷达系统能产生类似结构的测量矩阵, 也可采用 OP-WSegSR 方法实现运动目标多脉冲回波信号的快速重构。

7 结论

压缩采样雷达接收系统是利用雷达回波信号的稀疏性，基于压缩采样理论和模信转换系统提出的新型雷达接收系统。不同于传统雷达接收系统获取雷达回波信号的 Nyquist 采样，压缩采样雷达接收系统获取雷达回波信号的压缩采样，其采样速率远低于信号的 Nyquist 率，避免了传统宽带和超宽带雷达对高速 ADC 的需要，为宽带和超宽带雷达的发展开辟了新的思路。然而，从压缩采样数据中恢复 Nyquist 率的雷达回波信号通常需要求解大规模稀疏重构问题。目前，采用现有算法直接求解运算量大，实时重构困难。

本文将低通型、带通型和多带型三种模信转换系统分别应用于基带、中频带通和多带雷达信号采样，根据模信转换系统的特性，研究了快速求解大规模稀疏重构的方法，实现了雷达信号的快速重构。本文的主要贡献如下：

1. 将 RD 低通型模信转换应用于雷达基带信号采样，开展了雷达基带回波信号的快速重构方法研究。本文利用测量矩阵的带状结构，提出了 SegSR 方法。本文详细阐述了 SegSR 方法的原理、流程和实现方式，并从理论上分析了 SegSR 方法的重构性能，主要分析了对测量矩阵进行分割时由相邻段产生的虚拟噪声的特性，以及虚拟噪声对当前段稀疏系数位置和幅度估计性能的影响。本文对直接重构和 SegSR 方法的存储量和运算量进行了比较分析，结果表明 SegSR 方法在降低存储量和减少运算量上具有显著优势。仿真实验验证了 SegSR 方法的有效性。

2. 将 QuadCS 带通型模信转换应用于雷达中频信号采样，研究了雷达基带回波信号的快速重构方法。本文在对 QuadCS 系统特性进行分析的基础上，将测量矩阵近似成一种具有带状结构的矩阵，然后采用 SegSR 方法实现快速重构。本文从理论上分析了对测量矩阵进行近似的合理性和可行性。仿真分析表明，在对测量矩阵进行合理近似的基础上，采用 SegSR 方法进行重构可以减少计算时间，实现近似最优的重构性能。

3. 将 MQCS 多带型模信转换应用于多带雷达信号采样，研究了从每个子带回波信号的压缩测量数据中快速重构基带回波信号的方法。本文以探测同一场景的等带宽多带雷达为背景，利用回波信号的块稀疏性，提出采用块稀疏重构模型恢复所有子带回波的方法；同时根据测量矩阵的近似带状结构，发展了块稀疏分段滑动重构方法。仿真分析表明，该方法可以在保障重构性能的前提下，缩短重构时间。

4. 将本文提出的 SegSR 方法应用于压缩采样雷达运动目标多脉冲回波信号的重构，研究了稀疏时变多脉冲回波信号的快速重构方法。本文考虑运动目标在脉冲积累时间内发生跨距离分辨单元的情形，利用多脉冲回波信号表示系数的稀疏时变性，采用概率分布模型描述稀疏位置的变化，将多脉冲回波信号重构转化为加权稀疏重构问题；然后根

据分段滑动重构思想，提出了基于正交投影的加权稀疏分段滑动重构方法来实现快速重构。该方法利用前一个脉冲稀疏位置估计信息，构造相邻段产生的虚拟噪声的正交补空间，将子段压缩测量投影到构造的正交补空间，有效地抑制了虚拟噪声。仿真验证了方法的有效性。

应当注意的是，本文提出的重构方法并不局限于基于上述三种模信转换系统发展的压缩采样雷达系统，对其他具有类似特性的系统，也可采用本文提出的方法实现信号的快速重构。

此外，本文主要针对目标时延位于离散网格点上的情形，研究了压缩采样雷达回波信号的快速重构问题。在实际应用中，目标时延可能偏离网格点，即 off-grid 情形。本文未来的一项研究工作是在 off-grid 情形下发展有效的快速重构方法。

致 谢

岁月不居，时节如流。转眼间，博士求学生涯即将结束。回首求学路上的点点滴滴，心中的感激之情溢于言表。

首先衷心感谢我的第一导师刘中教授。本文的研究工作倾注了导师大量的精力和心血。从论文的选题、研究方案的确定到论文的撰写，整个过程都是在导师的悉心指导下进行的。此刻，我的脑海中不禁浮现出一幕幕导师帮助我分析研究方案的可行性、梳理论文框架、逐字逐句修改论文的场景。导师渊博的学识、严谨的科研态度、敏捷的学术思维、迅速把握问题本质的能力以及诲人不倦的师者风范，潜移默化地影响着我，是我终生学习的楷模。导师的言传身教，不仅让我学到了对待科学的态度、开展科学的方法，也让我学到了做人的道理，这将使我受益终生。在此，谨向恩师刘中教授致以崇高的敬意和诚挚的感谢！

衷心感谢我的第二导师席峰副教授。席老师对学术前沿思想的敏锐洞悉，对论文主旨和结构的精准把控，对细节和用词的严格考究以及对问题模型的精确提炼和深入分析的能力，深深地感染和激励着我，使我受益良多。本文的研究工作离不开席老师的帮助和指导。在此，我再次表达对您的感激和敬意！

感谢陈胜垚副教授在科研道路上对我的耐心指导、无私帮助和不懈支持！陈老师理论功底深厚，看问题深入透彻，对学术前沿思想敏锐，对知识点运用灵活。在我遇到学术难题时，帮助我认清问题的本质、开拓解决问题的思路。在学术论文写作过程中，帮我理清写作思路，提出了许多有益的建议和意见，使我受益颇多。

感谢张毅民教授在科研过程中的悉心指导和无私帮助，感谢您提出的宝贵意见和建议，以及对英文论文进行的润色和修改！张毅民教授渊博的学识、严谨细致的学术态度、高效的工作作风以及谦和的学者风范，深深地影响着我，使我受益匪浅。

感谢教研室刘兆霆博士、孙黎阳博士、武花干博士、程智勇、刘超、马硕鳌、凌花、邓文立、陆华静、姜晓涛、盛积饶、张云贞、杨会章、蔡杰松、雷蕾、尹佳、赵子豪、施江南、黄慧、吕亨达、陈成志、王雅婷、薛城以及其他师弟师妹们给我的帮助和支持！感谢在科研道路上有你们为伴！

感谢校研究生院、电子工程与光电技术学院和其他部门所有给予过我指导和帮助的老师！感谢杨洪祥老师对我学习生活的悉心关照！

感谢刘华、薄超等同学，钟素婷、张晶晶、包佳妮、韩云霞等舍友，以及其它亲朋好友对我的关怀和帮助！特别感谢我的父母和家人，感谢他们给予我极大地宽容、充分地理解和全力地支持！

最后，向审阅本文的专家教授致以诚挚的谢意！

参考文献

- [1] Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 1928, 47(2): 617-644
- [2] Shannon C E. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, 1949, 37(1): 10-21
- [3] Jerri A J. The Shannon sampling theorem—its various extensions and applications: a tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 1977, 65(11): 1565-1596
- [4] Unser M. Sampling—50 years after Shannon. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(4): 569-587
- [5] Walden R H. Analog-to-digital converter survey and analysis. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1999, 17(4): 539-550
- [6] Le B, Rondeau T W, Reed J H, Bostian C W. Analog-to-digital converters: a review of past, present and future. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2005, 22(6): 69-77
- [7] Vaughan R G, Scott N L, White D R. The theory of bandpass sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(9): 1973-1984
- [8] Akos D M, Stockmaster M, Tsui J B Y, Caschera J. Direct bandpass sampling of multiple distinct RF signals. *IEEE Transactions on Communications*, 1999, 47(7): 983-988
- [9] Tseng C H, Chou S C. Direct downconversion of multiband RF signals using bandpass sampling. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2006, 5(1): 72-76
- [10] Bae J, Park J. An efficient algorithm for bandpass sampling of multiple RF signals. *IEEE Signal Processing Letters*, 2006, 13(4): 193-196
- [11] Mahajan A, Agarwal M, Chaturvedi A K. A novel method for down-conversion of multiple bandpass signals. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2006, 5(2): 427-434
- [12] Bose S, Khaitan V, Chaturvedi A. A low-cost algorithm to find the minimum sampling frequency for multiple bandpass signals. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, 15: 877-880
- [13] Landau H J. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. *Acta Mathematica*, 1967, 117(1): 37-52
- [14] Candès E J. Compressive sampling. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, 2006: 1433-1452

- [15] Candès E J, Romberg J K, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509
- [16] Candès E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223
- [17] Candès E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(12): 5406-5425
- [18] Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306
- [19] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21-30
- [20] Donoho D L, Stark P B. Uncertainty principles and signal recovery. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 1989, 49(3): 906-931
- [21] Mallat S G, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397-3415
- [22] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, 20(1): 33-61
- [23] Donoho D L, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2001, 47(7): 2845-2862
- [24] Elad M. Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing. New York: Springer, 2010
- [25] Donoho D L, Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2003, 100(5): 2197-2202
- [26] Cohen A, Dahmen W, Devore R. Compressed sensing and best k-term approximation. *Journal of the American Mathematical Society*, 2009, 22(1): 211-231
- [27] Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203-4215
- [28] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathematique*, 2008, 346(9-10): 589-592
- [29] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete

- representations in the presence of noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(1): 6-18
- [30] Mendelson S, Pajor A, Tomczak-Jaegermann N. Uniform uncertainty principle for Bernoulli and subgaussian ensembles. *Constructive Approximation*, 2008, 28(3): 277-289
- [31] Baraniuk R, Davenport M, DeVore R, Wakin M. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constructive Approximation*, 2008, 28(3): 253-263
- [32] Rauhut H, Schnass K, Vandergheynst P. Compressed sensing and redundant dictionaries. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(5): 2210-2219
- [33] Bajwa W U, Haupt J D, Raz G M, Wright S J, Nowak R D. Toeplitz-structured compressed sensing matrices. *Proceedings of the IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing*, Madison, WI, USA, 2007: 294-298
- [34] Haupt J, Bajwa W U, Raz G, Nowak R. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(11): 5862-5875
- [35] Sanandaji B M, Vincent T L, Wakin M B. Concentration of measure inequalities for Toeplitz matrices with applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(1): 109-117
- [36] Rauhut H, Romberg J, Tropp J A. Restricted isometries for partial random circulant matrices. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2012, 32(2): 242-254
- [37] Wakin M B, Park J Y, Yap H L, Rozell C J. Concentration of measure for block diagonal measurement matrices. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Dallas, TX, USA, 2010: 3614-3617
- [38] Rozell C J, Yap H L, Park J Y, Wakin M B. Concentration of measure for block diagonal matrices with repeated blocks. *Proceedings of the 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*, Princeton, NJ, USA, 2010: 1-6
- [39] Park J Y, Yap H L, Rozell C J, Wakin M B. Concentration of measure for block diagonal matrices with applications to compressive signal processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(12): 5859-5875
- [40] Yap H L, Eftekhari A, Wakin M B, Rozell C J. The restricted isometry property for block diagonal matrices. *Proceedings of the 45th Annual Conference on Information*

- Sciences and Systems (CISS), Baltimore, MD, USA, 2011: 1-6
- [41] Eftekhari A, Yap H L, Rozell C J, Wakin M B. The restricted isometry property for random block diagonal matrices. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2015, 38(1): 1-31
- [42] Castorena J, Creusere C D. The restricted isometry property for banded random matrices. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(19): 5073-5084
- [43] Dehghan H, Dansereau R M, Chan A D C. Restricted isometry property on banded block Toeplitz matrices with application to multi-channel convolutive source separation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(21): 5665-5676
- [44] Kim S J, Koh K, Lustig M, Boyd S, Gorinevsky D. An interior-point method for large-scale ℓ_1 regularized least squares. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 606-617
- [45] Figueiredo M A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 586-597
- [46] Donoho D L, Tsaig Y. Fast solution of ℓ_1 -norm minimization problems when the solution may be sparse. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(11): 4789-4812
- [47] Daubechies I, Defrise M, De Mol C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(11): 1413-1457
- [48] Yin W, Osher S, Goldfarb D, Darbon J. Bregman iterative algorithms for ℓ_1 -minimization with applications to compressed sensing. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, 1(1): 143-168
- [49] Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(10): 707-710
- [50] Daubechies I, Devore R, Fornasier M, Güntürk C S. Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2010, 63(1): 1-38
- [51] Candès E J, Wakin M, Boyd S. Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14: 877-905
- [52] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed ℓ_0 norm. *IEEE Transactions on Signal Processing*,

- 2009, 57(1): 289-301
- [53] Mourad N, Reilly J P. Minimizing nonconvex functions for sparse vector reconstruction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(7): 3485-3496
- [54] Gasso G, Rakotomamonjy A, Canu S. Recovering sparse signals with a certain family of nonconvex penalties and DC programming. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(12): 4686-4698
- [55] Pati Y C, Rezaifar R, Krishnaprasad P S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. *Proceedings of the 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, CA, USA, 1993, 1: 40-44
- [56] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666
- [57] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(3): 317-334
- [58] Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 310-316
- [59] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 26(3): 301-321
- [60] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5): 2230-2249
- [61] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, Starck J L. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(2): 1094-1121
- [62] Blumensath T, Davies M E. Iterative hard thresholding for compressed sensing. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 27(3): 265-274
- [63] Foucart S. Hard thresholding pursuit: an algorithm for compressive sensing. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2011, 49(6): 2543-2563
- [64] Wipf D P, Rao B D. Sparse Bayesian learning for basis selection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(8): 2153-2164
- [65] Ji S, Xue Y, Carin L. Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions on Signal*

- Processing, 2008, 56(6): 2346-2356
- [66] Babacan S D, Molina R, Katsaggelos A K. Bayesian compressive sensing using Laplace priors. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(1): 53-63
- [67] Baron D, Sarvotham S, Baraniuk R G. Bayesian compressive sensing via belief propagation. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(1): 269-280
- [68] Stojnic M, Parvaresh F, Hassibi B. On the reconstruction of block-sparse signals with an optimal number of measurements. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(8): 3075-3085
- [69] Eldar Y C, Mishali M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(11): 5302-5316
- [70] Lin J H, Li S. Block sparse recovery via mixed ℓ_2/ℓ_1 minimization. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2013, 29(7): 1401-1412
- [71] Eldar Y C, Kuppinger P, Bolcskei H. Block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(6): 3042-3054
- [72] Lv X, Wan C, Bi G. Block orthogonal greedy algorithm for stable recovery of block-sparse signal representations. Signal Processing, 2010, 90(12): 3265-3277
- [73] 陈鹏, 王成, 孟晨. 基于约束等距的块稀疏压缩采样匹配追踪算法. 系统工程与电子技术, 2015, 37(2): 239-245
- [74] Elhamifar E, Vidal R. Block-sparse recovery via convex optimization. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(8): 4094-4107
- [75] Zeinalkhani Z, Banihashemi A H. Iterative reweighted ℓ_2/ℓ_1 recovery algorithms for compressed sensing of block sparse signals. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(17): 4516-4531
- [76] Yuan M, Lin Y. Model selection and estimation in regression with grouped variables. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2006, 68(1): 49-67
- [77] Lv X, Bi G, Wan C. The group lasso for stable recovery of block-sparse signal representations. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(4): 1371-1382
- [78] Majumdar A, Ward R K. Compressed sensing of color images. Signal Processing, 2010, 90(12): 3122-3127
- [79] Wang Y, Wang J, Xu Z. On recovery of block-sparse signals via mixed ℓ_2/ℓ_q ($0 < q \leq 1$) norm minimization. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2013, 2013(76): 1-17

- [80] Baraniuk R G, Cevher V, Duarte M F, Hegde C. Model-based compressive sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(4): 1982-2001
- [81] Huang B X, Zhou T. Recovery of block sparse signals by a block version of StOMP. *Signal Processing*, 2015, 106: 231-244
- [82] Fu Y, Li H, Zhang Q, Zou J. Block-sparse recovery via redundant block OMP. *Signal Processing*, 2014, 97: 162-171
- [83] Ben-Haim Z, Eldar Y C. Near-oracle performance of greedy block-sparse estimation techniques from noisy measurements. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(5): 1032-1047
- [84] Zhang Z, Rao B D. Sparse signal recovery with temporally correlated source vectors using sparse Bayesian learning. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(5): 912-926
- [85] Zhang Z, Rao B D. Recovery of block sparse signals using the framework of block sparse Bayesian learning. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Kyoto, Japan, 2012: 3345-3348
- [86] Yu L, Sun H, Barbot J P, Zheng G. Bayesian compressive sensing for cluster structured sparse signals. *Signal Processing*, 2012, 92(1): 259-269
- [87] Korki M, Zhang J, Zhang C, Zayyani H. An iterative Bayesian algorithm for block-sparse signal reconstruction. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Brisbane, QLD, Australia, 2015: 2174-2178
- [88] Laska J, Kirolos S, Massoud Y, Baraniuk R, Gilbert A, Iwen M, Strauss M. Random sampling for analog-to-information conversion of wideband signals. *Proceedings of the IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software(DCAS)*, Richardson, TX, USA, 2006: 119-122
- [89] Kirolos S, Laska J, Wakin M, Duarte M, Baron D, Ragheb T, Massoud Y, Baraniuk R. Analog-to-information conversion via random demodulation. *Proceedings of the IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software (DCAS)*, Richardson, TX, USA, 2006: 71-74
- [90] Laska J N, Kirolos S, Duarte M F, Ragheb T S, Baraniuk R G, Massoud Y. Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, New Orleans, LA, USA, 2007: 1959-1962

- [91] Ragheb T, Laska J N, Nejati H, Kirolos S, Baraniuk R G, Massoud Y. A prototype hardware for random demodulation based compressive analog-to-digital conversion. Proceedings of the 51st Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), Knoxville, TN, USA, 2008: 37-40
- [92] Tropp J A, Laska J N, Duarte M F, Romberg J K, Baraniuk R G. Beyond Nyquist: efficient sampling of sparse bandlimited signals. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(1): 520-544
- [93] Tropp J A, Wakin M B, Duarte M F, Baron D, Baraniuk R G. Random filters for compressive sampling and reconstruction. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Toulouse, France 2006, 3: 872-875
- [94] Harms A, Bajwa W U, Calderbank R. A constrained random demodulator for sub-Nyquist sampling. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(3): 707-723
- [95] Becker S R. Practical compressed sensing: modern data acquisition and signal processing. Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2011
- [96] Taheri O, Vorobyov S A. Segmented compressed sampling for analog-to-information conversion. Proceedings of the IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), Aruba, Dutch Antilles, Netherlands, 2009: 113-116
- [97] Taheri O, Vorobyov S A. Segmented compressed sampling for analog-to-information conversion: method and performance analysis. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2): 554-572
- [98] Chen X, Yu Z, Hoyos S, Sadler B M, Silva-Martinez J. A sub-Nyquist rate sampling receiver exploiting compressive sensing. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(3): 507-520
- [99] Juhwan Y, Becker S, Loh M, Monge M, Candès E, Emami-Neyestanak A. A 100MHz-2GHz 12.5x sub-Nyquist rate receiver in 90nm CMOS. Proceedings of the IEEE Radio Frequency Integrated Circuits Symposium (RFIC), Montreal, QC, Canada, 2012: 31-34
- [100] Xi C, Sobhy E A, Yu Z, Hoyos S, Silva-Martinez J, Palermo S, Sadler B M. A sub-Nyquist rate compressive sensing data acquisition front-end. IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, 2012, 2(3): 542-551

- [101] Mamaghanian H, Khaled N, Atienza D, Vanderghenst P. Design and exploration of low-power analog to information conversion based on compressed sensing. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 2012, 2(3): 493-501
- [102] Chen F, Chandrakasan A P, Stojanovic V M. Design and analysis of a hardware-efficient compressed sensing architecture for data compression in wireless sensors. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 2012, 47(3): 744-756
- [103] Xi F, Chen S, Liu Z. Quadrature compressive sampling for radar echo signals. *Proceedings of the International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP)*, Nanjing, China, 2011: 1-5
- [104] Xi F, Chen S, Liu Z. Quadrature compressive sampling for radar signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(11): 2787-2802
- [105] Mishali M, Eldar Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 375-391
- [106] Mishali M, Eldar Y C, Dounaevsky O, Shoshan E. Xampling: analog to digital at sub-Nyquist rates. *IET Circuits, Devices and Systems*, 2011, 5(1): 8-20
- [107] Mishali M, Eldar Y C, Elron A J. Xampling: signal acquisition and processing in union of subspaces. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(10): 4719-4734
- [108] Yang X, Tao X, Guo Y J, Huang X, Cui Q. Subsampled circulant matrix based analogue compressed sensing. *Electronics Letters*, 2012, 48(13): 767-768
- [109] Zhang J, Fu N, Peng X. Compressive circulant matrix based analog to information conversion. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(4): 428-431
- [110] Wang C, Xu W, Lin J, Cui Y. A diagonal structure for analog-to-information conversion in compressed sampling. *Proceedings of the IEEE 81st Vehicular Technology Conference*, Glasgow, UK, 2015: 1-5
- [111] Zhao Y, Hu Y H, Liu J. Random triggering-based sub-Nyquist sampling system for sparse multiband signal. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2017, 66(7): 1789-1797
- [112] Haque T, Yazicigil R T, Pan K J L, Wright J, Kinget P R. Theory and design of a quadrature analog-to-information converter for energy-efficient wideband spectrum sensing. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2015, 62(2): 527-535
- [113] Yazicigil R T, Haque T, Whalen M R, Yuan J, Wright J, Kinget P R. 19.4 A

- 2.7-to-3.7GHz rapid interferer detector exploiting compressed sampling with a quadrature analog-to-information converter. Proceedings of the IEEE International Solid-State Circuits Conference (ISSCC), San Francisco, CA, USA, 2015: 1-3
- [114] Yazicigil R T, Haque T, Whalen M R, Yuan J, Wright J, Kinget P R. Wideband rapid interferer detector exploiting compressed sampling with a quadrature analog-to-information converter. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2015, 50(12): 3047-3064
- [115] Chen S, Xi F, Liu Z, Bao B. Quadrature compressive sampling of multiband radar signals at sub-Landau rate. Proceedings of the IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP), Singapore, 2015: 234-238
- [116] Munoz-Ferreras J M, Gomez-Garcia R, Perez-Martinez F. Multi-band radar receiver design approach for minimum bandpass sampling. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(2): 774-785
- [117] Lamentowski L, Brenner T, Kasprzak P. Simulation scenario for multi-band radar system. Proceedings of the 15th International Radar Symposium (IRS), Lille, France, 2014: 1-4
- [118] 张弓, 文方青, 陶宇, 刘苏, 贲德. 模拟-信息转换器研究进展. 系统工程与电子技术, 2015, 37(2): 229-238
- [119] Daponte P, Vito L D, Rapuano S, Tudosa I. Analog-to-information converters in the wideband RF measurement for aerospace applications: current situation and perspectives. IEEE Instrumentation and Measurement Magazine, 2017, 20(1): 20-28
- [120] Skolnik M. Radar Handbook. New York, NY: McGraw Hill, 1970
- [121] Richards M A, Scheer J A, Holm W A. Principles of Modern Radar: Basic Principles. Edison, NJ, USA: SciTech Publishing, 2010
- [122] Mirabbasi S, Martin K. Classical and modern receiver architectures. IEEE Communications Magazine, 2000, 38(11): 132-139
- [123] Ender J H G. On compressive sensing applied to radar. Signal Processing, 2010, 90(5): 1402-1414
- [124] Ender J. A brief review of compressive sensing applied to radar. Proceedings of the 14th International Radar Symposium (IRS), Dresden, Germany, 2013, 1: 3-16
- [125] Herman M, Strohmer T. Compressed sensing radar. Proceedings of the IEEE Radar Conference, Rome, Italy, 2008: 1-6
- [126] Herman M A, Strohmer T. High-resolution radar via compressed sensing. IEEE

- Transactions on Signal Processing, 2009, 57(6): 2275-2284
- [127] Baraniuk R, Steeghs P. Compressive radar imaging. Proceedings of the IEEE Radar Conference, Boston, MA, USA, 2007: 128-133
- [128] Shi G, Lin J, Chen X, Qi F, Liu D, Zhang L. UWB echo signal detection with ultra-low rate sampling based on compressed sensing. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2008, 55(4): 379-383
- [129] Smith G E, Diethe T, Hussain Z, Shawe-Taylor J, Haroon D R. Compressed sampling for pulse Doppler radar. Proceedings of the IEEE Radar Conference, Washington, DC, USA, 2010: 887-892
- [130] 刘记红, 徐少坤, 高勋章, 黎湘. 基于随机卷积的压缩感知雷达成像. 系统工程与电子技术, 2011, 33(7): 1485-1490
- [131] Yoo J, Turnes C, Nakamura E B, Le C K, Becker S, Sovero E A, Wakin M B, Grant M C, Romberg J, Emami-Neyestanak A, Candès E. A compressed sensing parameter extraction platform for radar pulse signal acquisition. IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, 2012, 2(3): 626-638
- [132] Baransky E, Itzhak G, Wagner N, Shmuel I, Shoshan E, Eldar Y. Sub-Nyquist radar prototype: hardware and algorithm. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2014, 50(2): 809-822
- [133] Bar-Ilan O, Eldar Y C. Sub-Nyquist radar via Doppler focusing. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(7): 1796-1811
- [134] Liu C, Xi F, Chen S, Liu Z. A pulse-Doppler processing scheme for quadrature compressive sampling radar. Proceedings of the 19th International Conference on Digital Signal Processing (DSP), Hong Kong, China, 2014: 676-681
- [135] Liu C, Xi F, Chen S, Zhang Y D, Liu Z. Pulse-Doppler signal processing with quadrature compressive sampling. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(2): 1217-1230
- [136] 刘记红, 徐少坤, 高勋章, 黎湘, 庄钊文. 压缩感知雷达成像技术综述. 信号处理, 2011, 27(2): 251-260
- [137] 李少东, 杨军, 陈文峰, 马晓岩. 基于压缩感知理论的雷达成像技术与应用研究进展. 电子与信息学报, 2016, 38(2): 495-508
- [138] Yang J, Thompson J, Huang X, Jin T, Zhou Z. Segmented reconstruction for compressed sensing SAR imaging. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(7): 4214-4225

- [139] Qin S, Zhang Y D, Wu Q, Amin M G. Large-scale sparse reconstruction through partitioned compressive sensing. Proceedings of the 19th International Conference on Digital Signal Processing (DSP 2014), Hong Kong, China, 2014: 837-840
- [140] Petros T B, Asif M S. Compressive sensing for streaming signals using the streaming greedy pursuit. Proceedings of the Military Communications Conference (MILCOM), San Jose, CA, USA, 2010: 1205-1210
- [141] Boufounos P, Asif M S. Compressive sampling for streaming signals with sparse frequency content. Proceedings of the 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS), Princeton, NJ, USA, 2010: 1-6
- [142] Asif M S, Romberg J. Sparse recovery of streaming signals using ℓ_1 homotopy. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(16): 4209-4223
- [143] Wijewardhana U L, Codreanu M. Streaming signal recovery using sparse Bayesian learning. Proceedings of the the 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, CA, USA, 2014: 1225-1230
- [144] Wijewardhana U L, Codreanu M. A Bayesian approach for online recovery of streaming signals from compressive measurements. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(1): 184-199
- [145] Eldar Y, Kutyniok G. Compressed Sensing: Theory and Applications. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2012
- [146] Davenport M A. Random observations on random observations: sparse signal acquisition and processing. Ph.D. dissertation, Rice University, Houston, Texas, 2010
- [147] Welch L. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(3): 397-399
- [148] Cai T T, Xu G, Zhang J. On recovery of sparse signals via ℓ_1 minimization. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(7): 3388-3397
- [149] Sturm B L, Christensen M G. Comparison of orthogonal matching pursuit implementations. Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Bucharest, Romania, 2012: 220-224
- [150] Tropp J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10): 2231-2242
- [151] Duarte M F, Eldar Y C. Structured compressed sensing: from theory to applications. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9): 4053-4085
- [152] Natarajan B K. Sparse approximate solutions to linear systems. SIAM Journal on

Computing, 1995, 24(2): 227-234

- [153] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1996, 58(1): 267-288
- [154] Candès E J, Tao T. The Dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n. The Annals of Statistics, 2007, 35(6): 2313-2351
- [155] Davenport M A, Wakin M B. Analysis of orthogonal matching pursuit using the restricted isometry property. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(9): 4395-4401
- [156] Mo Q, Shen Y. A remark on the restricted isometry property in orthogonal matching pursuit. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(6): 3654-3656
- [157] Wang J, Shim B. On the recovery limit of sparse signals using orthogonal matching pursuit. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(9): 4973-4976
- [158] Chang L-H, Wu J-Y. An improved RIP-based performance guarantee for sparse signal recovery via orthogonal matching pursuit. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(9): 5702-5715
- [159] Cai T T, Wang L. Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(7): 4680-4688
- [160] Dan W, Wang R. Robustness of orthogonal matching pursuit under restricted isometry property. Science China Mathematics, 2014, 57(3): 627-634
- [161] Wu R, Huang W, Chen D. The exact support recovery of sparse signals with noise via orthogonal matching pursuit. IEEE Signal Processing Letters, 2013, 20(4): 403-406
- [162] Wang J. Support recovery with orthogonal matching pursuit in the presence of noise. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(21): 5868-5877
- [163] Carrillo R E, Polania L F, Barner K E. Iterative algorithms for compressed sensing with partially known support. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Dallas, TX, USA, 2010: 3654-3657
- [164] Zhang P, Gan L, Sun S, Ling C. Modulated unit-norm tight frames for compressed sensing. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(15): 3974-3985
- [165] Tropp J A, Dhillon I S, Heath R W, Strohmer T. Designing structured tight frames via an alternating projection method. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(1): 188-209
- [166] Cline R E. Representations for the generalized inverse of a partitioned matrix. Journal

- of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1964, 12(3): 588-600
- [167] Herman M A, Strohmer T. General deviants: an analysis of perturbations in compressed sensing. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 342-349
- [168] Herman M A, Needell D. Mixed operators in compressed sensing. Proceedings of the 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS), Princeton, NJ, USA, 2010: 1-6
- [169] Ding J, Chen L, Gu Y. Perturbation analysis of orthogonal matching pursuit. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(2): 398-410
- [170] Richards M A. Fundamentals of Radar Signal Processing. New York: McGraw-Hill, 2005
- [171] Vaswani N. Kalman filtered compressed sensing. Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), San Diego, CA, USA, 2008: 893-896
- [172] Asif M S, Romberg J. Dynamic updating for sparse time varying signals. Proceedings of the 43rd Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS), Baltimore, MD, USA, 2009: 3-8
- [173] Carmi A, Gurfil P, Kanevsky D. Methods for sparse signal recovery using Kalman filtering with embedded pseudo-measurement norms and quasi-norms. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(4): 2405-2409
- [174] Vaswani N. LS-CS-residual (LS-CS): compressive sensing on least squares residual. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(8): 4108-4120
- [175] Vaswani N, Lu W. Modified-CS: modifying compressive sensing for problems with partially known support. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(9): 4595-4607
- [176] Lu W, Vaswani N. Regularized modified BPDN for noisy sparse reconstruction with partial erroneous support and signal value knowledge. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(1): 182-196
- [177] Zonoobi D, Kassim A A. On the reconstruction of sequences of sparse signals – the weighted-CS. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2013, 24(2): 196-202
- [178] 马硕骜. 稀疏时变信号压缩感知重构算法的研究. 南京理工大学, 2014
- [179] Ziniel J, Schniter P. Dynamic compressive sensing of time-varying signals via approximate message passing. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(21):

5270-5284

- [180] Charles A S, Balavoine A, Rozell C J. Dynamic filtering of time-varying sparse signals via l_1 minimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(21): 5644-5656
- [181] Chen Y, Gu Y, Hero III A O. Sparse LMS for system identification. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Taipei, Taiwan, 2009: 3125-3128
- [182] Gu Y, Jin J, Mei S. L_0 norm constraint LMS algorithm for sparse system identification. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, 16(9): 774-777
- [183] Wang X, Gu Y, Chen L. Proof of convergence and performance analysis for sparse recovery via zero-point attracting projection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(8): 4081-4093
- [184] Babadi B, Kalouptsidis N, Tarokh V. SPARLS: the sparse RLS algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4013-4025
- [185] Angelosante D, Bazerque J A, Giannakis G B. Online adaptive estimation of sparse signals: where RLS meets the l_1 -norm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(7): 3436-3447
- [186] Dumitrescu B, Onose A, Helin P, Tabus I. Greedy sparse RLS. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(5): 2194-2207
- [187] Kopsinis Y, Slavakis K, Theodoridis S. Online sparse system identification and signal reconstruction using projections onto weighted l_1 balls. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(3): 936-952
- [188] Vaswani N, Zhan J. Recursive recovery of sparse signal sequences from compressive measurements: a review. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(13): 3523-3549
- [189] 丁鹭飞, 耿富录. 雷达原理(第3版). 西安: 西安电子科技大学出版社, 2002

附录

附录 A 攻读博士学位期间撰写的论文

1. Zhang Suling, Xi Feng, Chen Shengyao, Zhang Yimin, Liu Zhong. Segment-sliding reconstruction of pulsed radar echoes with sub-Nyquist sampling. *Science China Information Sciences*, 2016, 59(12): 122309. (SCI 收录号: WOS:000383462800008, EI 收录号: 20163802830537)
2. 张素玲, 席峰, 陈胜垚, 刘中. 基于正交压缩采样系统的脉冲雷达回波信号实时重构方法. *电子与信息学报*, 2016, 38(5): 1064-1071. (EI 收录号: 20162202444186)
3. 张素玲, 陈胜垚, 席峰, 刘中. 多带正交压缩采样雷达回波信号的快速重构. *系统工程与电子技术*, 2017, 39(9):25-32. (EI 收录号: 20174704434819)
4. Zhang Suling, Xi Feng, Chen Shengyao, Zhang Yimin, Liu Zhong. A segment-sliding reconstruction scheme for pulsed radar echoes with sub-Nyquist sampling. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Shanghai, China, 2016: 4603-4607. (EI 收录号: 20162402488727)
5. 张素玲, 陈胜垚, 席峰, 刘中. 亚奈奎斯特采样雷达的运动目标回波信号的快速重构. *电子学报*, 已录用.

附录 B 攻读博士学位期间参与的科研项目

1. 参与国家自然科学基金面上项目
项目名称: 正交压缩采样理论与实践
项目编号: 61171166
起止时间: 2012.01-2015.12
2. 参与国家自然科学基金青年基金项目
项目名称: 多带射频信号的正交压缩采样研究
项目编号: 61401210
起止时间: 2015.01-2017.12