# 1 Кинематическая модель робота с N всенаправленными колесами

Для того, чтобы описать движения робота необходимо некоторым образом смоделировать его поведение. Простейший модель движения робота в пространстве - кинематическая. Эта модель описывает движения исключительно через зависимость координат от времени. То есть в кинематической модели рассматривается движение тела, но не рассматриваются причины, его создающие. Рассмотрим движение тележки с $N$ всенаправленными колесами ($N > 3$) по гладкой двумерной поверхности без учета действующих сил, причем плоскости колес тележки вертикальны и неподвижны относительно платформы тележки. В рамках модели всенаправленные колеса способны скользить в любом направлении с пренебрежимо малой силой трения. Пусть задана глобальная система координат, связанная с поверхностью $[X, Y]$ и локальная, инерциальная относительно глобальной, жестко связанная с тележкой $[X_l, Y_l]$. Не теряя общности начало локальных координат в точке центра масс тележки. Положение тележки определено вектором координат $(x, y, \varphi)$ где $x, y$ - координаты, и $\varphi$ - угол поворота системы координат $[X_l, Y_l]$ относительно оси $OY$ в глобальной системе координат. Скорость тележки определяется вектором $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$ где $\omega = \dot{\varphi}$ - угловая скорость тележки.

Для примера на рисунке 1.1 схематически изображена кинематическая модель робота с тремя всенаправленными колесами.

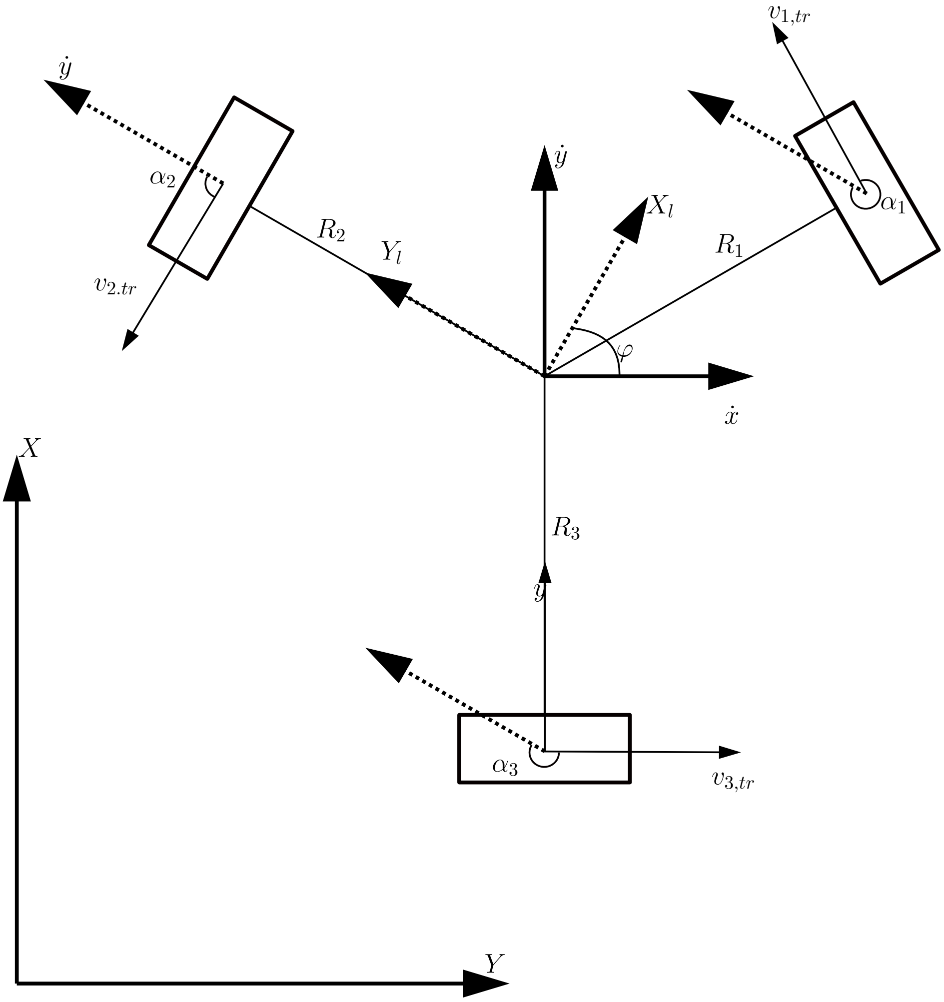


Рисунок 1.1 – кинематическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами.

Рассмотрим величину скорости $i$- го колеса, $v_i$, $i = \overline{1, N}$. Разложим её на поступательную и вращательную составляющие:

$$v_i = v_{i,tr} + v_{i,rot} \tag{1.1}$$

Обозначим за $\alpha_i$ -угол между касательной к диску $i$-го колеса и осью $OY_l$, что изображено на рисунке 1.2.

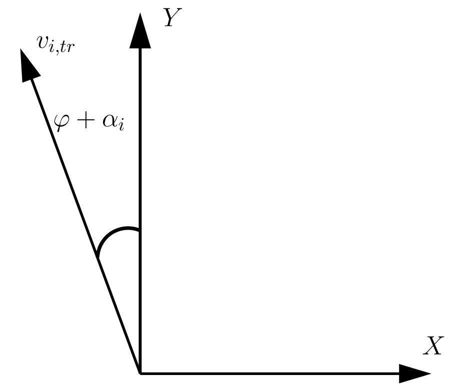


Рисунок 1.2 – расположение векторов модели в плоскости

Вектор поступательной скорости составляет с осью $Y$ угол $\varphi + \alpha_i$. Тогда величину скорости поступательного движения можно представить в виде

$$v_{i,tr} = -sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} \tag{1.2}$$

Величина скорости вращательного движения задается следующим уравнением

$$v_{i,rot} = R_i\omega \tag{1.3}$$

Где $R_i$ - расстояние от оси вращения (точки центра масс) до оси $i$-го колеса. Таким образом величину скорости можно записать в следующем виде:

$$v_i = -sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} + R_i\omega \tag{1.4}$$

Соотнесем величину скорости $i$ - го колеса с его угловой скоростью

$$v_i = r_i\omega_i \tag{1.5}$$

Где $r_i$ - радиус $i$-го колеса тележки, $\omega_i$ - его угловая скорость, получим зависимость величины угловой скорости колеса от тройки $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$

$$\omega_i = \frac{1}{r_i}(-sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} + R_i\omega) \tag{1.6}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ ... \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1}sin(\varphi+\alpha_1) & \frac{1}{r_1}cos(\varphi+\alpha_1) & \frac{1}{r_1}R_1 \\ -\frac{1}{r_2}sin(\varphi+\alpha_2) & \frac{1}{r_2}cos(\varphi+\alpha_2) & \frac{1}{r_2}R_2 \\ ... & ... & ... \\ -\frac{1}{r_N}sin(\varphi+\alpha_N) & \frac{1}{r_N}cos(\varphi+\alpha_N) & \frac{1}{r_N}R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \omega \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Таким образом, зная координаты траектории пути $(x, y, \varphi)$ можем получить величину угловой скорость каждого колеса. Для этого необходимо вычислить $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$ и подставить в формулу 1.7.

Кроме того, переходя к локальным координатам

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{y}_l \\ \omega \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Получаем уравнение движения тележки в локальной системе координат

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ ... \\ \dot{\phi}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1}sin(\varphi+\alpha_1) & \frac{1}{r_1}cos(\varphi+\alpha_1) & \frac{1}{r_1}R_1 \\ -\frac{1}{r_2}sin(\varphi+\alpha_2) & \frac{1}{r_2}cos(\varphi+\alpha_2) & \frac{1}{r_2}R_2 \\ ... & ... & ... \\ -\frac{1}{r_N}sin(\varphi+\alpha_N) & \frac{1}{r_N}cos(\varphi+\alpha_N) & \frac{1}{r_N}R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{y}_l \\ \omega \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

где $\dot{x}_l$,$\dot{y}_l$ - величина скорости по направлению $X_l$ и $Y_l$ соответственно.

## 2 Динамическая модель робота с N всенаправленными колесами

Динамическая модель, в отличие от кинематической, рассматривает движение твердых тел с учетом сил, приводящих это тело в движение.

Для того, чтобы привести тележку в движение, её колесам необходимо передать крутящий момент $T$. Увеличивая скорость тележки, мы преодолеваем её сопротивления покоя и придаем ей ускорение.

Рассмотрим движение тележки с $N$ всенаправленными колесами ($N > 3$) по негладкой двумерной поверхности с учетом действующих сил. В описании модели используются те же обозначения, что и в кинематической модели. Для примера на рисунке 2.1 схематически изображена динамическая модель робота с тремя всенаправленными колесами. Рассмотрим равнодействующую всех сил, действующих на тележку $F$. Сила как мера воздействия на тело характеризует поступательное движение модели, в то время как момент сил характеризует вращательное движение. Равнодействующую всех сил можно разложить на поступательную и вращательную составляющие, аналогично кинематической модели, следующим образом:

$$F = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = B \cdot \ddot{u} \qquad (2.1)$$

Где $M$ - масса тележки, $J$ - её момент инерции.

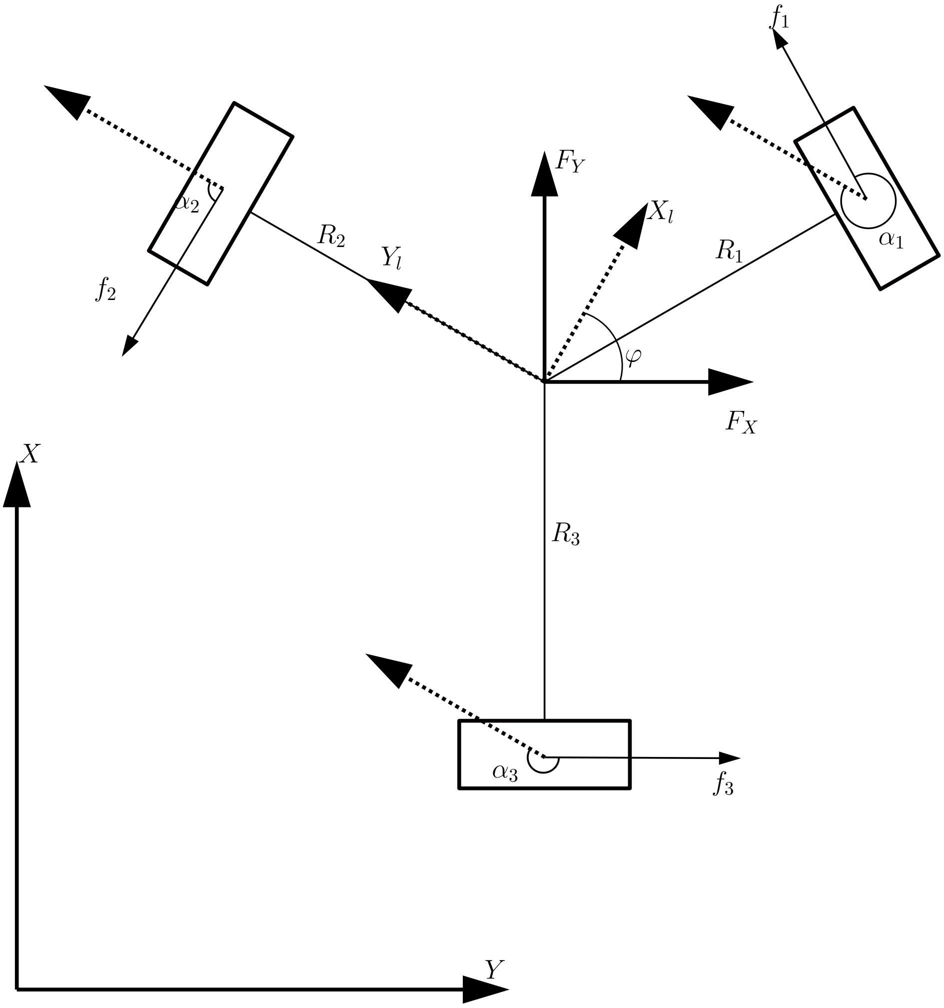


Рисунок 2.1 – динамическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами

Момент инерции тележки можно считать приближенно равным моменту инерции цилиндра радиуса $R = max_i(R_i)$

$$J = \frac{1}{2}MR^2 \tag{2.2}$$

Аналогично кинематической модели, проецируя поступательный вектор силы на $[X, Y]$, используя свойство ассоциативности моментов сил можно представить компоненты вектора $F$ как сумму проекций на соответствующие оси:

$$F_X = -\sum_{i=1}^{N} f_i sin(\varphi + \alpha_i) \tag{2.3}$$

$$F_Y = \sum_{i=1}^{N} f_i cos(\varphi + \alpha_i) \tag{2.4}$$

$$M_t = \sum_{i=1}^{N} f_i R_i \tag{2.5}$$

где $f_i$ - сила, приложенная верхней точке $i$ - го колеса.

Записывая в матричной форме

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin(\varphi + \alpha_1) & -sin(\varphi + \alpha_2) & ... & -sin(\varphi + \alpha_N) \\ cos(\varphi + \alpha_1) & cos(\varphi + \alpha_2) & ... & cos(\varphi + \alpha_N) \\ R_1 & R_2 & ... & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} = Af \tag{2.6}$$

Получаем уравнение

$$F = Af \tag{2.7}$$

Разрешая уравнение 2.7 относительно $f$, получим

$$f = A^{-1} \cdot F = A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u} \tag{2.8}$$

Зная, что вращающий момент колеса равен силе, приложенной в его верхней точке на его радиус и обозначая

$$\overline{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ ... \\ r_N \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

получим зависимость координат пути $(x, y, \varphi)$ от крутящих моментов каждого колеса:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ ... \\ T_N \end{bmatrix} = \overline{r} f^T = \overline{r}(A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u})^T \tag{2.10}$$

В свою очередь величину момента сил каждого колеса можно выразить через его угловое ускорение:

$$T_i = J_i \dot{\omega}_i \tag{2.11}$$

$J_i$ - момент инерции $i$-го колеса

Учтем силу трения качения модели по некоторой поверхности, предполагая равномерное распределение веса на каждое колесо. Известно, что сила трения качения противоположна по направлению силе, приводящей колесо в действие и для $i$-го колеса может быть вычислена по формуле:

$$f_{t_i} = \frac{Mg\eta}{Nr_i} \tag{2.12}$$

Где $Mg$ - сила реакции опоры, равная силе тяжести, $\eta$ - коэффициент трения качения, зависящий от характеристик поверхности. Сила трения качения направлена в противоположную сторону от направления движения колеса. Поэтому для того, чтобы её компенсировать, необходимо увеличить силу, приложенную в верхней точке колеса на величину силы трения.

$$\tilde{f}_i = f_i + f_{i_t} \tag{2.13}$$

Обозначим

$$\tilde{f} = f + \begin{bmatrix} f_{t_1} \\ f_{t_2} \\ ... \\ f_{t_N} \end{bmatrix} = f + \frac{Mg\eta}{N} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \\ ... \\ \frac{1}{r_N} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Тогда заменяя в формуле 2.10 $f$ на $\tilde{f}$, получим зависимость момента сил каждого колеса от координат пути, учитывающая силу трения:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ ... \\ T_N \end{bmatrix} = \overline{r}(A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u} + \frac{Mg\eta}{N} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \\ ... \\ \frac{1}{r_N} \end{bmatrix})^T \tag{2.15}$$

Таким образом получаем динамическую модель тележки, учитывающую её массу и силу трения качения.

## 3 Кинематическая модель роликонесущего колеса

Для нероликового колеса, которое вращается по поверхности без скольжения, мгновенная скорость низшей точки касания равна нулю[Ссылка на источник]. На практике соприкасающиеся тела из-за физических ограничений всегда соприкасаются множеством точек, называемым пятном контакта. В качестве иллюстрации можно привести гусеничную тележку, двигающуюся по поверхности без просткальзываний. Пятно касания гусеницы достаточно большое чтобы заметить, что в определенное мгновение оно не двигается относительно поверхности. При достаточно низкой скорости тележки можно даже заметить, что некоторая подобласть пятна касания гусеницы не двигается относительно поверхности некоторый промежуток времени.

Особенность роликонесущих колес заключается в том, что мговенная точка касания имеет ненулевую скорость относительно поверхности качения, так как укрепленные на колесе ролики под силой тяжести тележки вращаются относительно своей оси. В случае всенаправленного колеса, оси роликов которого параллельны плоскости диска колеса, проскальзывания не происходит, что упрощает процесс построения математической модели

Простейшей неголономной моделью роликонесущего колеса является плоский диск, для которого скорость точки соприкосновения с несущей поверхностью направленная вдоль прямой, составляющий постоянный угол с плоскостью колеса.

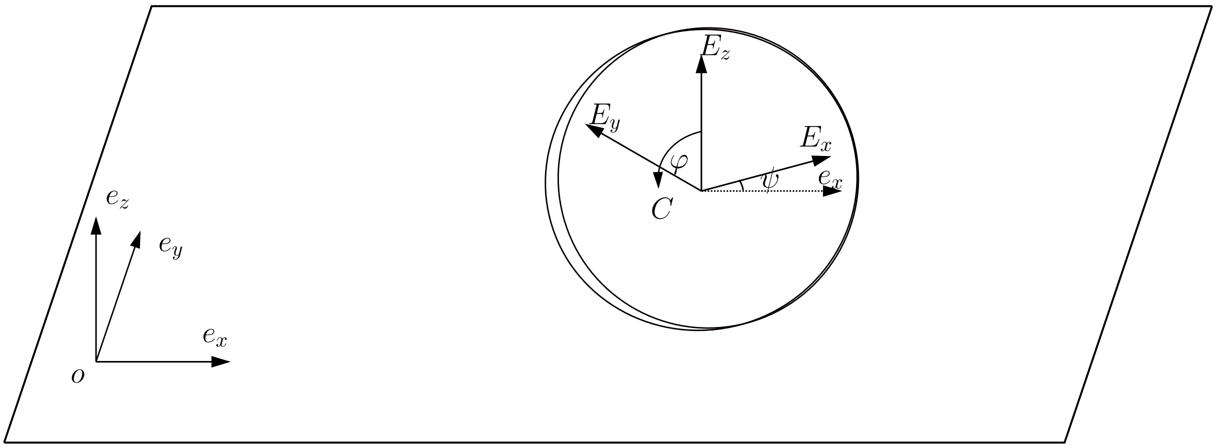


Рисунок 3.1 – модель роликового колеса: вид сбоку

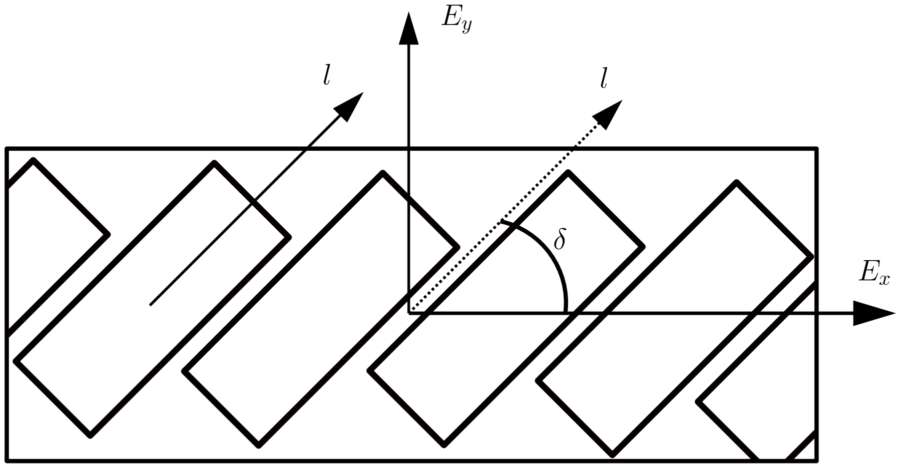


Рисунок 3.2 – модель роликового колеса: вид сверху

В качестве модели роликонесущего колеса рассмотрим диск радиуса $R$ с центром в точке $C$, причем плоскости колес тележки вертикальны и неподвижны относительно платформы тележки. Обозначим за $l$ - единичный вектор оси вращения ролика, $\tau$ - касательная к плоскости диска, $\delta = \widehat{l\tau}$.Тогда уравнение связи записывается следующим образом:

$$v_M \cdot l = 0 \tag{3.1}$$

где $M$ - точка касания,$v_M$ - скорость точки касания. Вектор $v_M$ определяется следующим образом:

$$v_M = v_C + \omega \times \overrightarrow{CM} \tag{3.2}$$

$v_C$ - скорость центра колеса и $\omega$ - угловая скорость колеса. Обозначим $\{O, e_x, e_y, e_z\}$ - глобальная инерциальная система координат, $\{C, E_x, E_y, E_z\}$ - система координат, жестко связанная с диском. Плоскость $\{C, E_x, E_y\}$ параллельна плоскости поверхности. Обозначим $\varphi$ - угол поворота диска вокруг перпендикулярной плоскости диска оси, проходящей через точку $C$ против часовой стрелки, $\psi = \widehat{\tau e_x}$. Обозначения проиллюстрированы на рисунках 3.1 и 3.2. Тогда вектора $\omega$ и $\overrightarrow{CM}$ примут вид:

$$\omega = \dot{\varphi} E_y + \dot{\psi} E_z \tag{3.3}$$

$$\overrightarrow{CM} = -R E_z \tag{3.4}$$

Отсюда справедливо

$$\omega \times \overrightarrow{CM} = -R\dot{\varphi} E_x \tag{3.5}$$

Обозначая за $x_C$ $y_C$ координаты точки $C$ в глобальных координатах, проектируя вектор скорости точки $C$ на локальную систему координат, что проиллюстрировано на рисунке 3.3, можем записать

$$v_C = (\dot{x_C} cos\psi + \dot{y_C} sin\psi) E_x + (-\dot{x_C} sin\psi + \dot{y_C} cos\psi) E_y \tag{3.6}$$

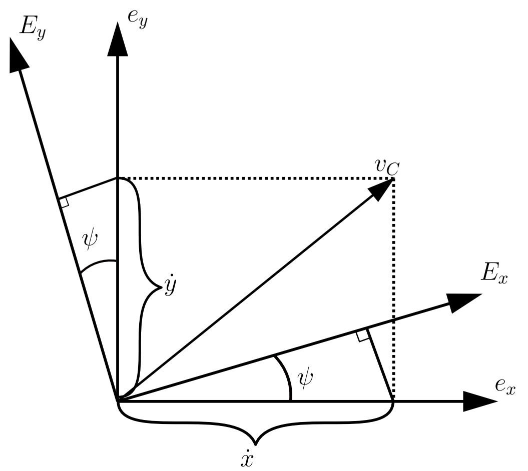


Рисунок 3.3 – иллюстрация проектирования вектора скорости на локальную систему координат

Наконец проецируя единичный вектор $l$ на локальную систему координат

$$l = cos\delta E_x + sin\delta E_y \tag{3.7}$$

Можем записать уравнение связи в виде

$$v_m \cdot l = (v_c + \omega \times \overrightarrow{CM}, l) =$$
$$((\dot{x_C}cos\psi + \dot{y_C}sin\psi - R\dot{\varphi})E_x + (-\dot{x_C}sin\psi + \dot{y_C}cos\psi)E_y, cos\delta E_x + sin\delta E_y) =$$
$$(\dot{x_C}cos\psi + \dot{y_C}sin\psi - R\dot{\varphi})cos\delta + (-\dot{x_C}sin\psi + \dot{y_C}cos\psi)sin\delta = 0$$

$$\dot{x_C}cos(\psi + \delta) + \dot{y_C}sin(\psi + \delta) = R\dot{\varphi}cos\delta \tag{3.8}$$

Уравнение 3.8 связывает между собой тройку координат $(x_C, y_C, \psi)$ с угловой скоростью колеса $\varphi$. В работе [ссылка на источник] изучена динамика тележки с $N$ роликонесущими колесами и сформулирован критерий управляемости: если $N \geq 3$, хотя бы одна пара векторов $l_i, l_j$ $i, j = \overline{1, N}$, которые соответствуют осям роликов, не параллельна и точки контакта колес не лежат на одной прямой, то для любой траектории всегда возможно найти такие управляющие моменты (то есть функции $\varphi_i(t)$), что тележка, управляемая этими моментами, переместится по заданной траектории.

# 4 Кинематическая модель тележки на четырех роликонесущих колесах