

# 1 Кинематическая модель робота с $N$ всенаправленными колесами

Для того, чтобы описать движения робота необходимо некоторым образом смоделировать его поведение. Простейший модель движения робота в пространстве - кинематическая. Эта модель описывает движения исключительно через зависимость координат от времени. То есть в кинематической модели рассматривается движение тела, но не рассматриваются причины, его создающие.

Рассмотрим движение тележки с  $N$  всенаправленными колесами ( $N > 3$ ) по гладкой двумерной поверхности без учета действующих сил, причем плоскости колес тележки вертикальны и неподвижны относительно платформы тележки. В рамках модели всенаправленные колеса способны скользить в любом направлении с пренебрежимо малой силой трения. Пусть задана глобальная система координат, связанная с поверхностью  $\{o, x, y, z\}$  и локальная, инерциальная относительно глобальной, жестко связанная с тележкой  $\{c, x_l, y_l, z_l\}$ , причем плоскость  $x_l y_l$  параллельна плоскости  $xy$ . Не теряя общности начало локальных координат положим в точке центра масс тележки. Положение тележки определено вектором координат  $(x, y, \varphi)$  где  $x, y$  - координаты, и  $\varphi$  - угол между осью  $ox$  и  $cx_l$ . Скорость тележки определяется вектором  $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$  где  $\omega = \dot{\varphi}$  - угловая скорость тележки.

Обозначим за  $\{c_i, x_{w,i}, y_{w,i}, z_{w,i}\}$  - локальную систему координат  $i$  - го колеса, изображенная на рисунке 1.1, где  $c_i$  - ось вращения,  $x_{w,i}$  - ось, направленная из  $c_i$  в сторону точки касания с поверхностью,  $y_{w,i}$  - ось, параллельная поверхности качения, направленная вправо,  $z_{w,i} = x_{w,i} \times y_{w,i}$ .

Для примера на рисунке 1.2 схематически изображена кинематическая модель робота с тремя всенаправленными колесами.

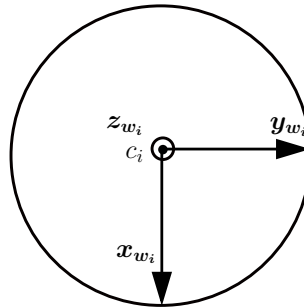


Рисунок 1.1 – координатные оси  $i$ -го колеса.

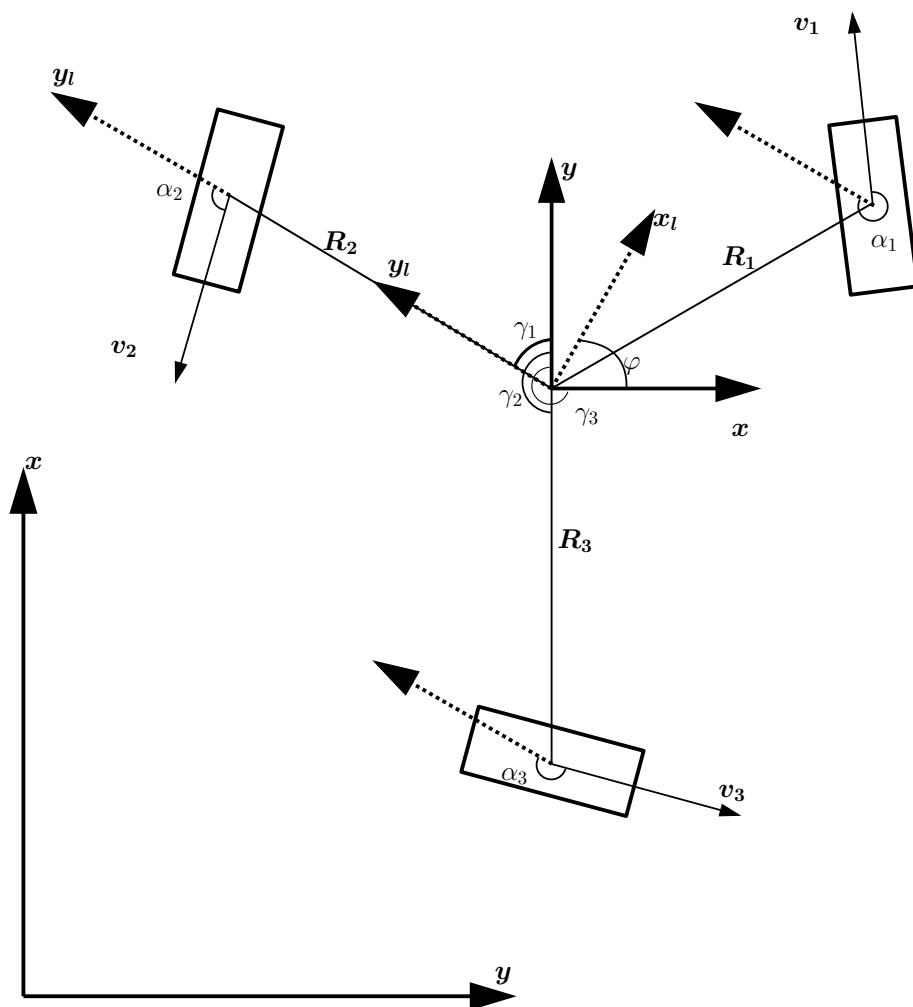


Рисунок 1.2 – кинематическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами.

Рассмотрим вектор скорости  $i$ -го колеса,  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Он направлен по касательной к диску  $i$ -го колеса  $\mathbf{y}_{w,i}$ . Разложим его на поступательную и вращательную составляющие:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i,tr} + \mathbf{v}_{i,rot} \quad (1.1)$$

Обозначим за  $\alpha_i$  - угол между  $\mathbf{y}_{w,i}$  и осью  $\mathbf{y}_l$ . Векторы  $\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{y}_{w,i}$  сонаправлены, и поэтому  $\mathbf{v}_i$  составляет с вектором  $\mathbf{y}_l$  угол  $\alpha_i$ , что изображено на рисунке 1.2.

Рассмотрим вектор поступательной скорости тележки  $\mathbf{v}_{tr} = [\dot{x}, \dot{y}, 0]$ . Для того, чтобы тележка имела скорость  $\mathbf{v}_{tr}$ , величина вектора скорости  $i$ -го колеса должна быть равна проекции  $\mathbf{v}_{tr}$  на направление  $\mathbf{y}_{w,i}$ . Вектор поступательной скорости  $i$ -го колеса составляет с осью  $\mathbf{y}$  угол  $\varphi + \alpha_i$ , что проиллюстрировано на рисунке 1.3. Тогда  $\mathbf{v}_{tr,i}$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{v}_{tr,i} = [-\sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + \cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y}]\mathbf{y}_{w,i} \quad (1.2)$$

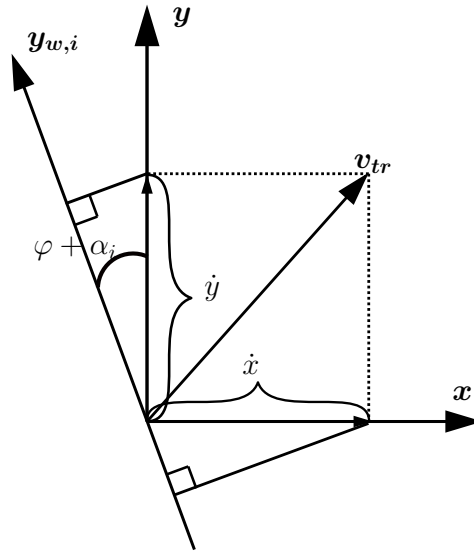


Рисунок 1.3 – иллюстрация проектирования вектора поступательной скорости на направление движения  $i$ -го колеса

Обозначим  $\mathbf{R}_i$  - радиус вектор оси  $i$ -го колеса от оси вращения (точки

центра масс) длины  $R_i$ . Для того, чтобы заставить тележку вращаться вокруг оси вращения  $Cz_l$  с угловой скоростью  $\omega$ , необходимо задать вектор скоростей каждого колеса перпендикулярно  $R_i$ . При этом длина вектора должна составлять  $R_i\omega$ . Таким образом скорости вращательного движения  $i$ -го задается следующим уравнением

$$\mathbf{v}_{rot,i} = \mathbf{R}_i \times \omega \mathbf{z} \quad (1.3)$$

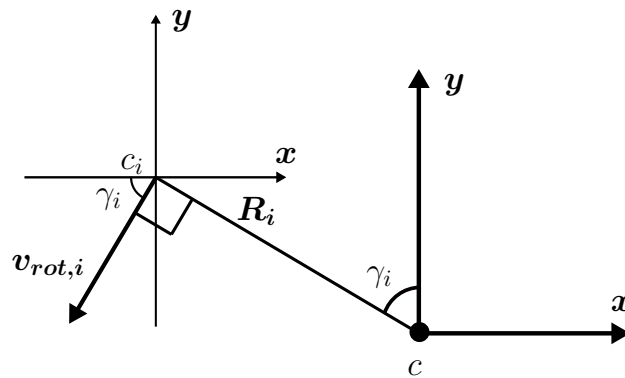


Рисунок 1.4 – проекция вектора вращательной скорости  $i$ -го колеса на глобальную систему координат

Обозначим  $\gamma_i$  - угол между осью  $y$  и  $R_i$ . Тогда сперва проецируя  $\mathbf{v}_{rot,i}$  на  $xy$ , как показано на рисунке 1.4, получим

$$\mathbf{v}_{rot,i} = R_i\omega[-\cos(\gamma_i)\mathbf{x} - \sin(\gamma_i)\mathbf{y}] \quad (1.4)$$

Проецируя  $\mathbf{v}_{rot,i}$  на направление  $\mathbf{y}_{w,i}$ , аналогично уравнению 1.2, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{rot,i} &= R_i\omega[\sin(\varphi + \alpha_i)\cos(\gamma_i) - \cos(\varphi + \alpha_i)\sin(\gamma_i)]\mathbf{y}_{w,i} \\ \mathbf{v}_{rot,i} &= R_i\omega\sin(\varphi + \alpha_i - \gamma_i)\mathbf{y}_{w,i} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Нетрудно видеть, что угол  $\theta_i = \gamma_i - \varphi = const$  есть угол между  $R_i$  и  $\mathbf{y}_l$ , следовательно коэффициент вектора угловой скорости не зависит от  $\varphi$  в

общем случае. Очевидно  $\alpha_i - \theta_i$  - угол между  $\mathbf{y}_{w,i}$  и  $\mathbf{R}_i$ . Если касательная диска  $i$ -го колеса  $\mathbf{y}_{w,i}$  перпендикулярна  $\mathbf{R}_i$ , то  $\alpha_i - \theta_i = \frac{\pi}{2}$ ,  $\mathbf{v}_{rot,i} = R_i\omega$ .

Таким образом вектор скорости  $i$ -го колеса можно записать в виде:

$$\mathbf{v}_i = [-\sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + \cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} + R_i\omega\sin(\alpha_i - \theta_i)]\mathbf{y}_{w,i} \quad (1.6)$$

Обозначим  $\omega_i$  - искомая угловая скорость  $i$ -го колеса. Соотнесем вектор скорости  $i$ -го колеса с его угловой скоростью

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \omega_i \mathbf{z}_{w,i} \quad (1.7)$$

Где  $\mathbf{r}_i$  - вектор, имеющий координаты  $[-r_i, 0, 0]$  в системе координат  $i$ -го колеса тележки,  $r_i$  - радиус  $i$ -го колеса тележки,  $\omega_i$  - угловая скорость этого колеса. Вычисляя векторное произведение в 1.7, получим

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \omega_i \mathbf{z}_{w,i} = \omega_i r_i \mathbf{y}_{w,i} \quad (1.8)$$

Таким образом, выражая из 1.8  $\omega_i$ , подставляя  $\mathbf{v}_i$  из 1.6, получим:

$$\omega_i = \frac{1}{r_i}(-\sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + \cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} + R_i\omega\sin(\alpha_i - \theta_i)) \quad (1.9)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1}\sin(\varphi + \alpha_1) & \frac{1}{r_1}\cos(\varphi + \alpha_1) & \frac{1}{r_1}R_1\sin(\alpha_1 - \theta_1) \\ -\frac{1}{r_2}\sin(\varphi + \alpha_2) & \frac{1}{r_2}\cos(\varphi + \alpha_2) & \frac{1}{r_2}R_2\sin(\alpha_2 - \theta_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{r_N}\sin(\varphi + \alpha_N) & \frac{1}{r_N}\cos(\varphi + \alpha_N) & \frac{1}{r_N}R_N\sin(\alpha_N - \theta_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Таким образом, зная координаты траектории пути  $(x, y, \varphi)$  можем получить величину угловой скорости каждого колеса. Для этого необходимо вычислить  $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$  и подставить в формулу 1.10.

## 2 Динамическая модель робота с $N$ всенаправленными колесами

Динамическая модель, в отличие от кинематической, рассматривает движение твердых тел с учетом сил, приводящих это тело в движение.

Для того, чтобы привести тележку в движение, её колесам необходимо передать крутящий момент  $T$ . Увеличивая скорость тележки, мы преодолеваем её сопротивления покоя и придаем ей ускорение.

Рассмотрим движение тележки с  $N$  всенаправленными колесами ( $N > 3$ ) по негладкой двумерной поверхности с учетом действующих сил. В описании модели используются те же обозначения, что и в кинематической модели за исключением того, что вместо векторов скорости рассматриваются векторы сил  $f_i$ . Сила  $f_i$  приложена к верхней точке  $i$  - го колеса в направлении качения. Для примера на рисунке 2.1 схематически изображена динамическая модель робота с тремя всенаправленными колесами. Рассмотрим равнодействующую всех сил, действующих на тележку  $F$ .

$$F = F_x x + F_y y + M_t z \quad (2.1)$$

Сила как мера воздействия на тело характеризует поступательное движение модели, в то время как момент сил  $M_t z$  характеризует вращательное движение. Равнодействующую всех сил можно разложить на поступательную и вращательную составляющие, аналогично кинематической модели, следующим образом:

$$F = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = B \cdot \ddot{u} \quad (2.2)$$

Где  $M$  - масса тележки,  $J_r$  - её момент инерции.

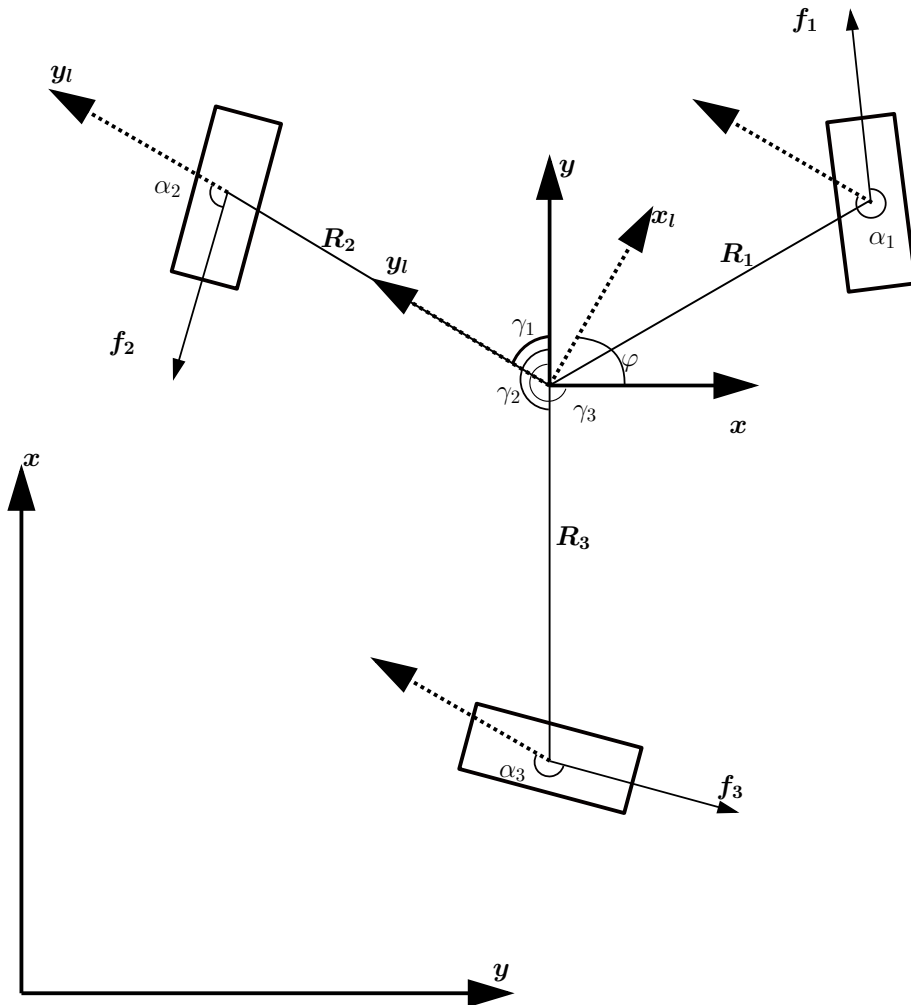


Рисунок 2.1 – динамическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами

Момент инерции тележки можно считать приближенно равным моменту инерции однородного цилиндра радиуса  $R = \max_i(R_i)$

$$J_r = \frac{1}{2}MR^2 \quad (2.3)$$

Кроме того, вектор  $\mathbf{F}$  можно представить в виде:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \quad (2.4)$$

где  $f_i$  - вектор силы, приложенной верхней точке  $i$  - го колеса. Имеет направление  $y_{w,i}$ , величину  $f_i$  и составляет с осью  $y$  угол  $\varphi + \alpha_i$ . Тогда, раскладывая  $F$  по компонентам и проецируя вектора  $f_i$  на координатные оси, получим:

$$F_X = -x \sum_{i=1}^N f_i \sin(\varphi + \alpha_i) \quad (2.5)$$

$$F_Y = y \sum_{i=1}^N f_i \cos(\varphi + \alpha_i) \quad (2.6)$$

$$M_t = \sum_{i=1}^N f_i \times R_i = z \sum_{i=1}^N f_i R_i \sin(\alpha_i - \theta_i) \quad (2.7)$$

Тогда величины компонент вектора сил имеют следующую связь:

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi + \alpha_1) & -\sin(\varphi + \alpha_2) & \dots & -\sin(\varphi + \alpha_N) \\ \cos(\varphi + \alpha_1) & \cos(\varphi + \alpha_2) & \dots & \cos(\varphi + \alpha_N) \\ R_1 \sin(\alpha_1 - \theta_1) & R_2 \sin(\alpha_2 - \theta_2) & \dots & R_N \sin(\alpha_N - \theta_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} = Af \quad (2.8)$$

Получаем уравнение

$$F = Af \quad (2.9)$$

Разрешая уравнение 2.9 относительно  $f$ , получим

$$f = A^{-1} \cdot F = A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u} \quad (2.10)$$

Зная, что вращающий момент колеса равен силе, приложенной в его верхней точке на его радиус и обозначая

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix} \quad (2.11)$$



Получим зависимость координат пути  $(x, y, \varphi)$  от крутящих моментов каждого колеса:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_N \end{bmatrix} = \bar{r} f^T = \bar{r} (A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u})^T \quad (2.12)$$

В свою очередь величину момента сил каждого колеса можно выразить через его угловое ускорение:

$$T_i = J_{w,i} \dot{\omega}_i \quad (2.13)$$

Где  $J_{w,i}$  - момент инерции  $i$ -го колеса,  $\dot{\omega}_i$  - угловое ускорение  $i$  - го колеса.

Учтем силу трения качения модели по некоторой поверхности, предполагая равномерное распределение веса на каждое колесо. Известно, что сила трения качения противоположна по направлению силе, приводящей колесо в действие и для  $i$ -го колеса может быть вычислена по формуле:

$$f_{t_i} = \frac{Mg\eta}{Nr_i} \quad (2.14)$$

Где  $Mg$  - сила реакции опоры, равная силе тяжести робота,  $\eta$  - коэффициент трения качения, зависящий от характеристик поверхности.  $\eta = 0$  в случае, когда трения между колесом и поверхностью не происходит и  $\eta = \infty$  когда трение поверхности непреодолимо сильно. Сила трения качения направлена в противоположную сторону от направления движения колеса. Поэтому для того, чтобы её компенсировать, необходимо увеличить силу, приложенную в верхней точке колеса на величину силы трения.

$$\tilde{f}_i = f_i + f_{t_i} \quad (2.15)$$

Обозначим

$$\tilde{f} = f + \begin{bmatrix} f_{t_1} \\ f_{t_2} \\ \dots \\ f_{t_N} \end{bmatrix} = f + \frac{Mg\eta}{N} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \\ \dots \\ \frac{1}{r_N} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Тогда заменяя в формуле 2.12  $f$  на  $\tilde{f}$ , получим зависимость момента сил каждого колеса от координат пути, учитывающая силу трения:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_N \end{bmatrix} = \bar{r} \left( A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u} + \frac{Mg\eta}{N} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \\ \dots \\ \frac{1}{r_N} \end{bmatrix} \right)^T \quad (2.17)$$

Таким образом получаем динамическую модель тележки, учитывающую её массу и силу трения качения. Зная координаты пути  $(x, y, \varphi)$  и вычисляя ускорение каждой координаты  $(\ddot{x}, \ddot{y}, \dot{\omega})$ , из уравнения 2.17 можем получить соответствующие заданному пути моменты сил каждого колеса.

### **3 Кинематическая модель роликонесущего колеса**

Для нероликонесущего колеса, которое вращается по поверхности без скольжения, мгновенная скорость низшей точки касания равна нулю[Ссылка на источник]. На практике соприкасающиеся тела из-за физических ограничений всегда соприкасаются множеством точек, называемым пятном контакта. В качестве иллюстрации можно привести гусеничную тележку,двигающуюся по поверхности без протекания. Пятно касания гусеницы достаточно большое чтобы заметить, что в определенное мгновение оно не движется относительно поверхности. При достаточно низкой скорости тележки можно даже заметить, что некоторая подобласть пятна касания гусеницы не движется относительно поверхности некоторый промежуток времени.

Особенность роликонесущих колес заключается в том, что мгновенная точка касания имеет ненулевую скорость относительно поверхности качения, так как укрепленные на колесе ролики под силой тяжести тележки вращаются относительно своей оси.

Простейшей неголономной моделью роликонесущего колеса является плоский диск, для которого скорость точки соприкосновения с несущей поверхностью направленная вдоль прямой, составляющей постоянный угол с плоскостью колеса.

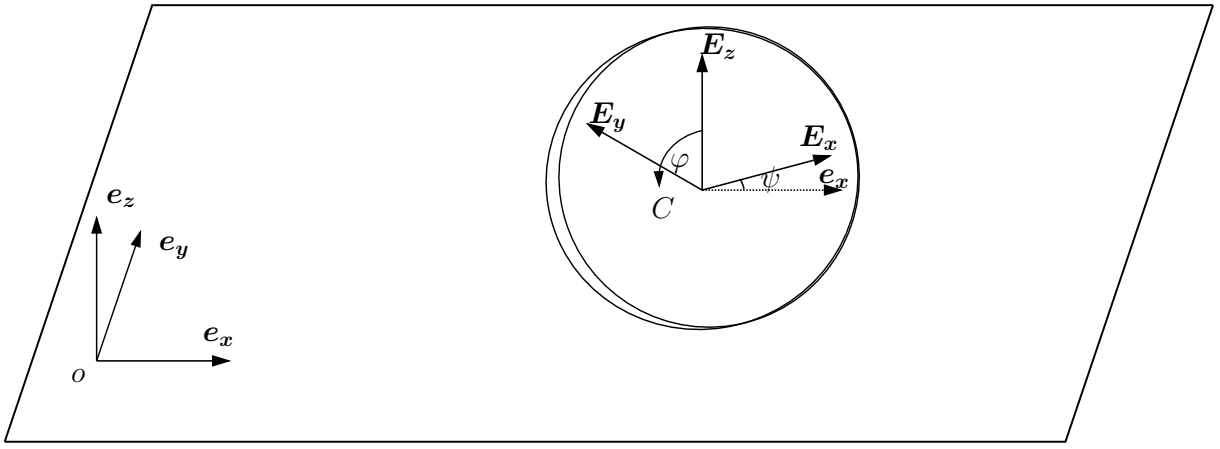


Рисунок 3.1 – модель роликнесущего колеса: вид сбоку

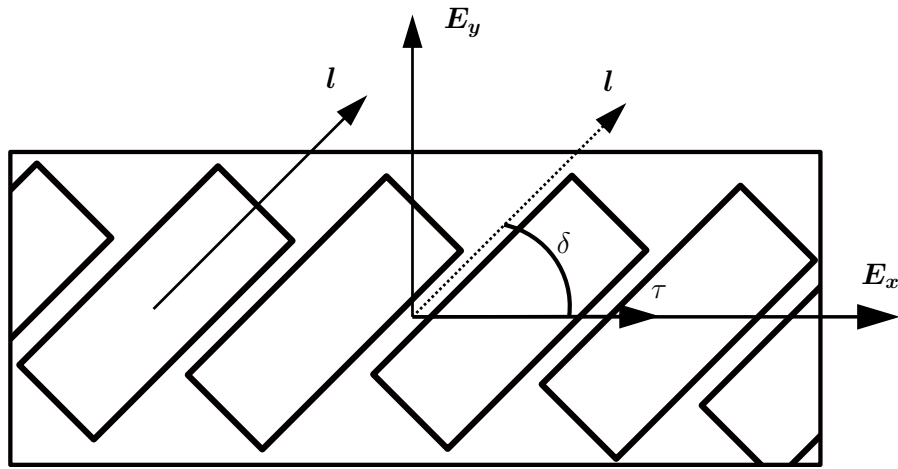


Рисунок 3.2 – модель роликнесущего колеса: вид сверху

В качестве модели роликнесущего колеса рассмотрим диск радиуса  $R$  с центром в точке  $C$ , причем плоскости колес тележки вертикальны и неподвижны относительно платформы тележки. Обозначим за  $l$  - единичный вектор оси вращения ролика,  $\tau$  - касательная к плоскости диска,  $\delta = \widehat{l\tau}$ . Тогда уравнение связи записывается следующим образом:

$$(v_M, l) = 0 \quad (3.1)$$

где  $M$  - точка касания,  $v_M$  - скорость точки касания. Вектор  $v_M$  определяется следующим образом:

$$v_M = v_C + \omega \times CM \quad (3.2)$$

где  $v_C$  - скорость центра колеса,  $\omega$  - вектор угловой скорости колеса. Обозначим  $\{O, e_x, e_y, e_z\}$  - глобальная инерциальная система координат,  $\{C, E_x, E_y, E_z\}$  - система координат, жестко связанная с диском. Плоскость  $\{C, E_x, E_y\}$  параллельна плоскости поверхности. Обозначим  $\varphi$  - угол поворота диска вокруг перпендикулярной плоскости диска оси, проходящей через точку  $C$  против часовой стрелки,  $\psi = \widehat{\tau e_x}$ . Обозначения проиллюстрированы на рисунках 3.1 и 3.2. Тогда вектора  $\omega$  и  $CM$  можно представить в виде:

$$\omega = \dot{\varphi} E_y + \dot{\psi} E_z \quad (3.3)$$

$$CM = -R E_z \quad (3.4)$$

Отсюда справедливо

$$\omega \times CM = -R \dot{\varphi} E_x \quad (3.5)$$

Обозначая за  $x_C$   $y_C$  координаты точки  $C$  в глобальных координатах, проектируя вектор скорости точки  $C$  на локальную систему координат, что проиллюстрировано на рисунке 3.3, можем записать

$$v_C = (\dot{x}_C \cos \psi + \dot{y}_C \sin \psi) E_x + (-\dot{x}_C \sin \psi + \dot{y}_C \cos \psi) E_y \quad (3.6)$$

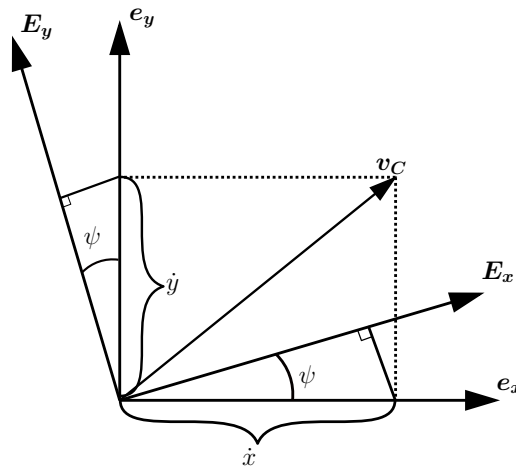


Рисунок 3.3 – иллюстрация проектирования вектора скорости на локальную систему координат

Наконец, проецируя единичный вектор  $l$  на локальную систему координат

$$l = \cos\delta \mathbf{E}_x + \sin\delta \mathbf{E}_y \quad (3.7)$$

Можем записать уравнение связи в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_m, l) &= (\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CM}, l) = \\ &= ((\dot{x}_C \cos\psi + \dot{y}_C \sin\psi - R\dot{\varphi})\mathbf{E}_x + (-\dot{x}_C \sin\psi + \dot{y}_C \cos\psi)\mathbf{E}_y, \cos\delta \mathbf{E}_x + \sin\delta \mathbf{E}_y) = \\ &= (\dot{x}_C \cos\psi + \dot{y}_C \sin\psi - R\dot{\varphi})\cos\delta + (-\dot{x}_C \sin\psi + \dot{y}_C \cos\psi)\sin\delta = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_C \cos(\psi + \delta) + \dot{y}_C \sin(\psi + \delta) = R\dot{\varphi} \cos\delta \quad (3.8)$$

Уравнение 3.8 связывает между собой тройку координат  $(x_C, y_C, \psi)$  с угловой скоростью колеса  $\varphi$ . В работе [ссылка на источник] изучена динамика тележки с  $N$  роликонесущими колесами и сформулирован критерий управляемости: если  $N \geq 3$ , хотя бы одна пара векторов  $l_i, l_j$   $i, j = \overline{1, N}$ , которые соответствуют осям роликов, не параллельна и точки контакта колес не лежат на одной прямой, то для любой траектории всегда возможно найти такие управляющие моменты (то есть функции  $\varphi_i(t)$ ), что тележка, управляемая этими моментами, переместится по заданной траектории.

#### 4 Кинематическая модель тележки на четырех роликонесущих колесах

Рассмотрим кинематическую модель тележки на четырех роликонесущих колесах, проиллюстрированную на рисунке 4.1. Обозначим  $C$  - точка вращения тележки,  $\{O, e_x, e_y, e_z\}$  - глобальная инерциальная система координат,  $\{C, E_x, E_y, E_z\}$  - система координат, жестко связанная с тележкой. Плоскость  $\{C, E_x, E_y\}$  параллельна плоскости поверхности. Обозначим  $r_i$  - радиус  $i$ -го колеса,  $\delta_i$  - угол между касательной к плоскости колеса  $p_i$  и осью ролика  $l_i$ ,  $\psi$  - угол между осью  $e_x$  и  $E_x$ ,  $\alpha_i$  - угол между осью  $E_x$  и радиус вектором  $R_i$  длины  $R_i$ , направленным из точки  $C$  в точку касания с поверхностью  $i$ -го колеса  $C_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

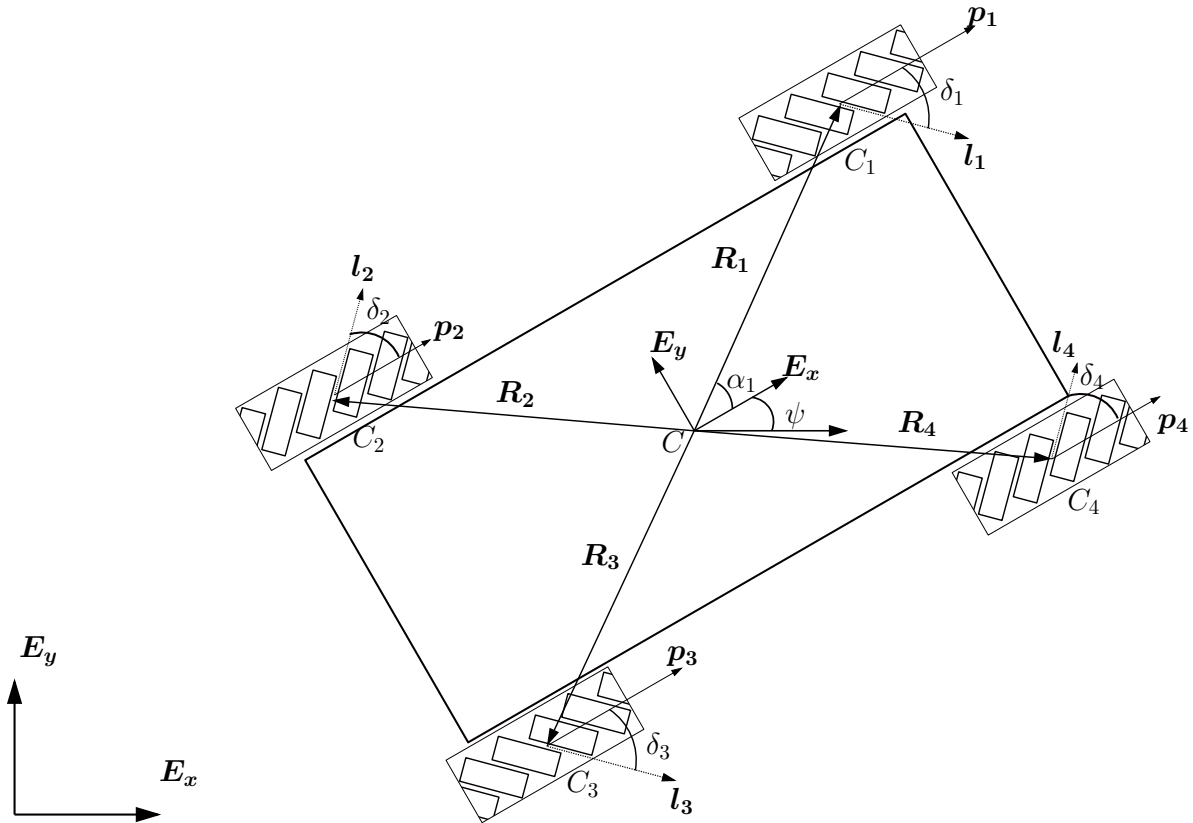


Рисунок 4.1 – модель тележки на четырех роликонесущих колесах

Рассмотрим вектор скорости центра  $i$ -го колеса  $\mathbf{v}_{c,i}$ . Разложим его на поступательную и вращательную составляющие:

$$\mathbf{v}_{c,i} = \mathbf{v}_{tr,i} + \mathbf{v}_{rot,i} \quad (4.1)$$

Вектор поступательной скорости  $\mathbf{v}_{tr,i}$  имеет координаты  $[\dot{x}, \dot{y}, 0]$ . Уравнение связи с угловой скоростью  $i$ -го колеса  $\varphi_i$ , основываясь на уравнении 3.8 имеет вид:

$$\dot{x} \cos(\psi + \delta) + \dot{y} \sin(\psi + \delta) = r_i \dot{\varphi}_i \cos \delta_i \quad (4.2)$$

Где  $[\dot{x}, \dot{y}, 0]$  - координаты вектора поступательной скорости тележки.

Для того, чтобы заставить тележку вращаться вокруг оси вращения  $CE_z$ , необходимо задать вектор скоростей каждого колеса перпендикулярно радиус вектору  $\mathbf{R}_i$ . При этом длина вектора должна составлять  $R_i \dot{\psi}$ . Расположение векторов проиллюстрировано на рисунке 4.2.

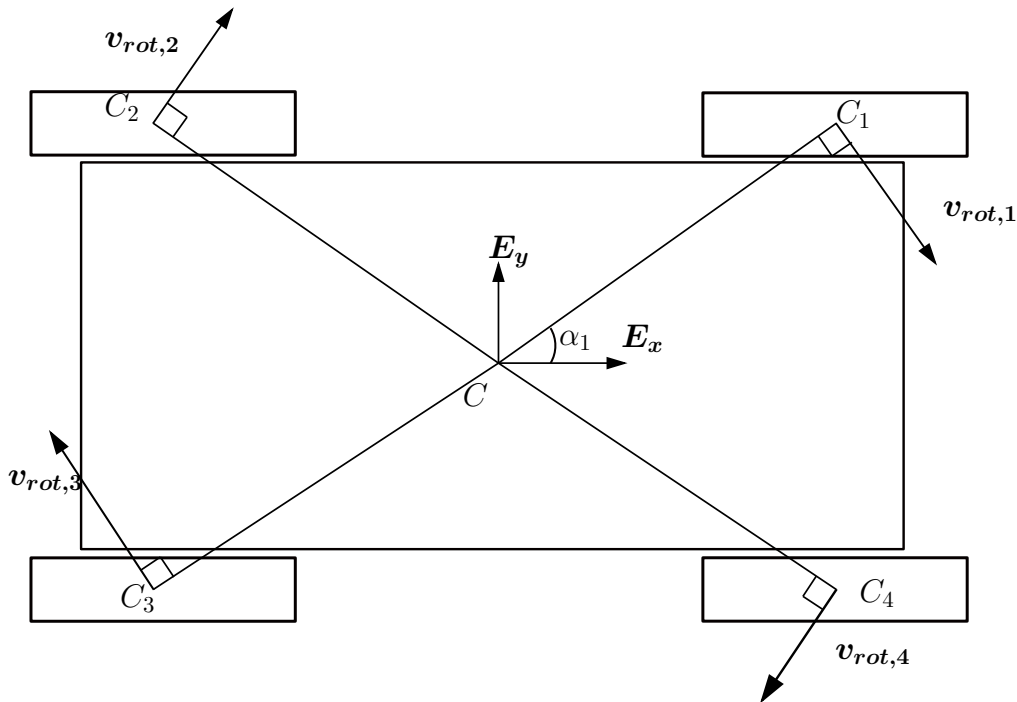


Рисунок 4.2 – иллюстрация вращательного движения тележки на четырех роликонесущих колесах



Рассмотрим вектор вращательной скорости  $i$  - го колеса  $\mathbf{v}_{rot,i}$ . Проектируя его на оси  $\mathbf{E}_x$   $\mathbf{E}_y$ , как показано на рисунке 4.3, получим:

$$\mathbf{v}_{rot,i} = R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i) \mathbf{E}_x - R_i \dot{\psi} \cos(\alpha_i) \mathbf{E}_y \quad (4.3)$$

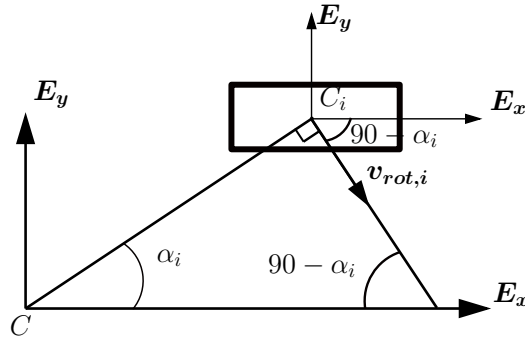


Рисунок 4.3 – проекция вектора вращательной скорости на локальную систему координат

Проектируя вектор  $\mathbf{v}_{rot,i}$  на оси  $\mathbf{e}_x$   $\mathbf{e}_y$ , как показано на рисунке 4.4, получим

$$\mathbf{v}_{rot,i} = R_i \dot{\psi} \sin \alpha_i (\cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y) - R_i \dot{\psi} \cos \alpha_i (-\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{v}_{rot,i} = R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i + \psi) \mathbf{e}_x - R_i \dot{\psi} \cos(\alpha_i + \psi) \mathbf{e}_y \quad (4.4)$$

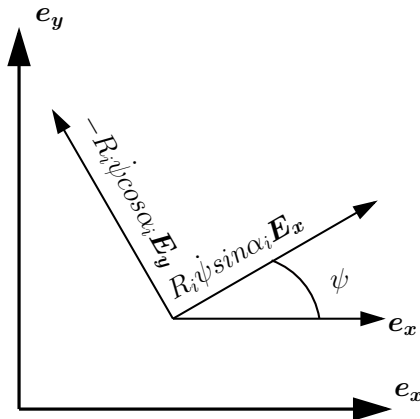


Рисунок 4.4 – проекция вектора вращательной скорости на глобальную систему координат

Тогда подставляя 4.4 в уравнение связи 3.8, получим

$$R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i + \psi) \cos(\psi + \delta_i) - R_i \dot{\psi} \cos(\alpha_i + \psi) \sin(\psi + \delta_i) = r_i \dot{\varphi}_i \cos \delta_i$$

$$R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i - \delta_i) = r_i \dot{\varphi}_i \cos \delta_i \quad (4.5)$$

Тогда уравнение связи для  $v_{c,i}$ , исходя из 4.1, примет вид

$$\dot{x} \cos(\psi + \delta_i) + \dot{y} \sin(\psi + \delta_i) + R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i - \delta_i) = r_i \dot{\varphi}_i \cos \delta_i \quad (4.6)$$

Выражая  $\dot{\varphi}_i$ , получим

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\dot{x} \cos(\psi + \delta_i) + \dot{y} \sin(\psi + \delta_i) + R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i - \delta_i)}{r_i \cos \delta_i} \quad (4.7)$$

При чисто поступательном ( $\dot{\psi}_i = 0$ ) или чисто вращательном ( $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ) движении связь 4.7 является голономной, то есть угловое ускорение каждого колеса не зависит от предыдущих движений робота. В противном случае, для вычисления 4.7 необходимо учитывать текущий угол поворота следующим образом:

$$\psi = \int_{t_0}^{t_{cur}} \dot{\psi}(t) dt \quad (4.8)$$

Где  $t_0, t_{cur}$  - начальный и текущий момент времени соответственно.

Таким образом найдена зависимость величины угловой скорости от координат пути. Для того, чтобы найти угловую скорость  $i$ -го колеса,  $i = \overline{1, 4}$ , соответствующую заданному пути  $(x, y, \psi)$ , необходимо вычислить  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi})$  и подставить в уравнение 4.7.