

# 1 Кинематическая модель робота с $N$ всенаправленными колесами

Описание движения робота требует моделирования его поведения. Простейший модель движения робота в пространстве - кинематическая. Эта модель описывает движения исключительно через зависимость координат от времени. То есть в кинематической модели рассматривается движение тела, но не рассматриваются причины, его создающие.

Рассматривается движение тележки с  $N$  всенаправленными колесами ( $N > 3$ ) по гладкой двумерной поверхности без учета действующих сил, причем плоскости колес тележки вертикальны и неподвижны относительно платформы тележки. В рамках модели всенаправленные колеса способны скользить в любом направлении с пренебрежимо малой силой трения. В рамках модели задается глобальная система координат, связанная с поверхностью  $\{o, x, y, z\}$  и локальная, инерциальная относительно глобальной, жестко связанная с тележкой  $\{c, x_l, y_l, z_l\}$ , причем плоскость  $x_l y_l$  параллельна плоскости  $xy$ . Не теряя общности начало локальных координат положим в точке центра масс тележки. Положение тележки определяется вектором координат  $(x, y, \varphi)$  где  $x, y$  - координаты, и  $\varphi$  - угол между осью  $ox$  и  $cx_l$ . Скорость тележки определяется вектором  $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$  где  $\omega = \dot{\varphi}$  - угловая скорость тележки.

$\{c_i, x_{w,i}, y_{w,i}, z_{w,i}\}$  - обозначение локальной системы координат  $i$ -го колеса, изображенное на рисунке 1.1, где  $c_i$  - ось вращения,  $x_{w,i}$  - ось, направленная из  $c_i$  в сторону точки касания с поверхностью,  $y_{w,i}$  - ось, параллельная поверхности качения, направленная вправо,  $z_{w,i} = x_{w,i} \times y_{w,i}$ .

Для примера на рисунке 1.2 схематически изображена

кинематическая модель робота с тремя всенаправленными колесами.

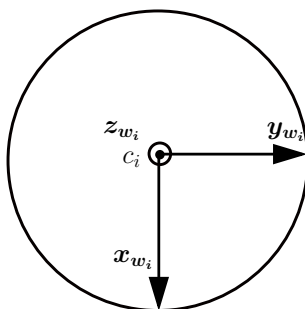


Рисунок 1.1 – координатные оси  $i$ -го колеса.

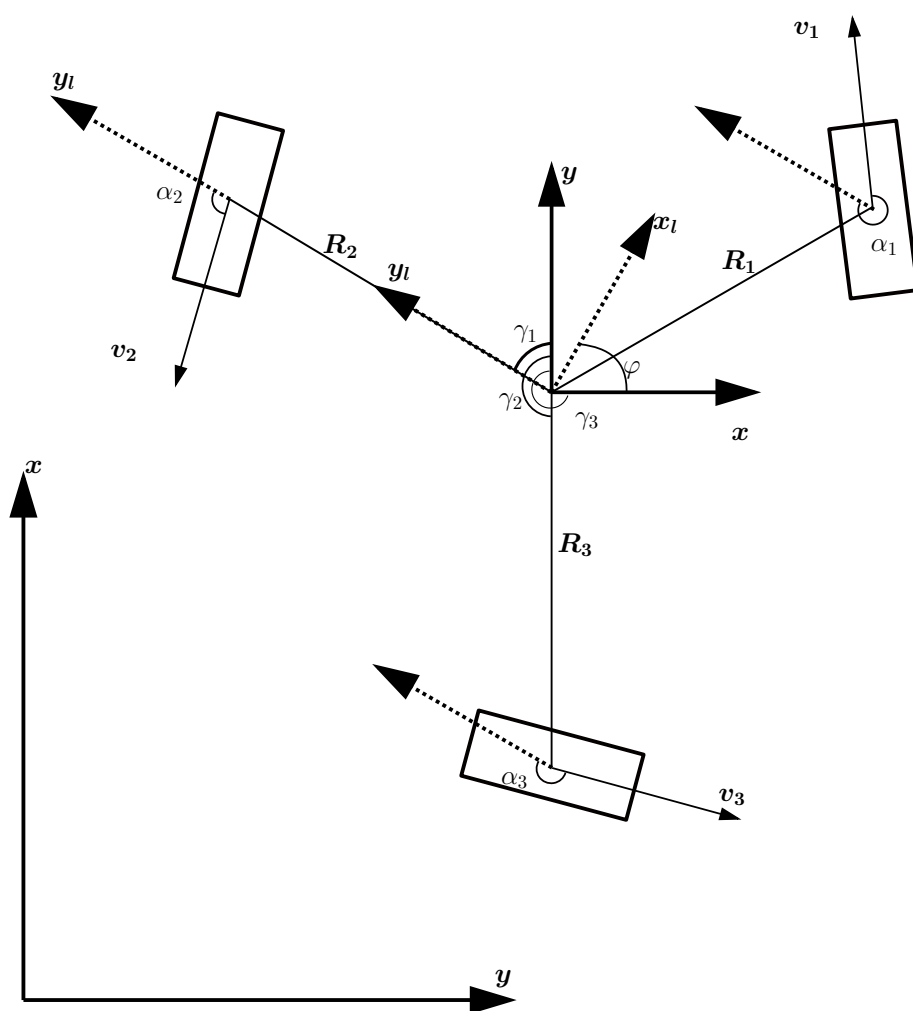


Рисунок 1.2 – кинематическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами.

Вектор скорости  $i$ -го колеса обозначается как  $v_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Он

направлен по касательной к диску  $i$  - го колеса  $\mathbf{y}_{w,i}$ . Его разложение на поступательную и вращательную составляющие имеет вид:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i,tr} + \mathbf{v}_{i,rot} \quad (1.1)$$

Обозначения:  $\alpha_i$  - угол между  $\mathbf{y}_{w,i}$  и осью  $\mathbf{y}_l$ . Векторы  $\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{y}_{w,i}$  сонаправлены, и поэтому  $\mathbf{v}_i$  составляет с вектором  $\mathbf{y}_l$  угол  $\alpha_i$ , что иллюстрируется на рисунке 1.2.

Рассматривается вектор поступательной скорости тележки  $\mathbf{v}_{tr} = [\dot{x}, \dot{y}, 0]$ . Для того, чтобы тележка имела скорость  $\mathbf{v}_{tr}$ , величина вектора скорости  $i$  - го колеса должна быть равна проекции  $\mathbf{v}_{tr}$  на направление  $\mathbf{y}_{w,i}$ . Вектор поступательной скорости  $i$  - го колеса составляет с осью  $\mathbf{y}$  угол  $\varphi + \alpha_i$ , что иллюстрируется на рисунке 1.3. Тогда  $\mathbf{v}_{tr,i}$  представляется в виде

$$\mathbf{v}_{tr,i} = [-\sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + \cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y}]\mathbf{y}_{w,i} \quad (1.2)$$

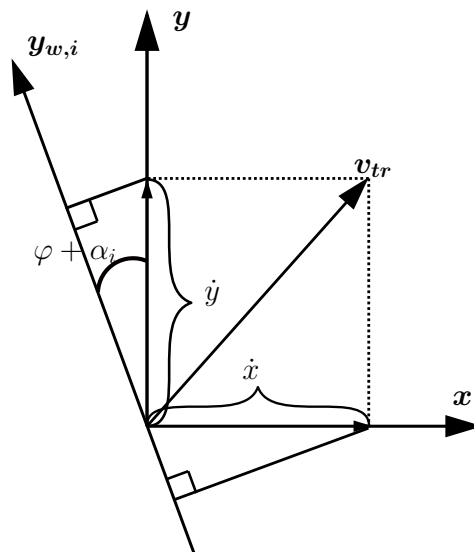


Рисунок 1.3 – иллюстрация проектирования вектора поступательной скорости на направление движения  $i$  - го колеса

Вводятся обозначения:  $R_i$  - радиус вектор оси  $i$ -го колеса от оси вращения (точки центра масс) длины  $R_i$ . Для того, чтобы заставить

тележку вращаться вокруг оси вращения  $Cz_l$  с угловой скоростью  $\omega$ , необходимо задать вектор скоростей каждого колеса перпендикулярно  $R_i$ . При этом длина вектора должна составлять  $R_i\omega$ . Таким образом скорости вращательного движения  $i$  - го задается следующим уравнением

$$v_{rot,i} = R_i \times \omega z \quad (1.3)$$

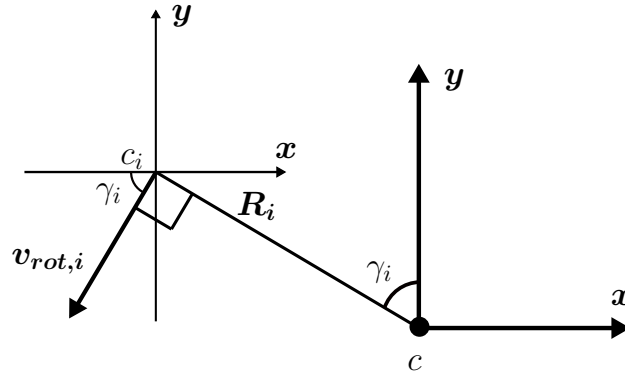


Рисунок 1.4 – проекция вектора вращательной скорости  $i$  - го колеса на глобальную систему координат

Вводятся обозначения:  $\gamma_i$  - угол между осью  $y$  и  $R_i$ . Тогда результатом проекции  $v_{rot,i}$  на  $xy$ , что иллюстрируется на рисунке 1.4 является уравнение

$$v_{rot,i} = R_i\omega[-\cos(\gamma_i)x - \sin(\gamma_i)y] \quad (1.4)$$

Результатом проекции  $v_{rot,i}$  на направление  $y_{w,i}$ , аналогично уравнению 1.2, является

$$v_{rot,i} = R_i\omega[\sin(\varphi + \alpha_i)\cos(\gamma_i) - \cos(\varphi + \alpha_i)\sin(\gamma_i)]y_{w,i}$$

$$v_{rot,i} = R_i\omega\sin(\varphi + \alpha_i - \gamma_i)y_{w,i} \quad (1.5)$$

Угол  $\theta_i = \gamma_i - \varphi = const$  есть угол между  $R_i$  и  $y_l$ , следовательно коэффициент вектора угловой скорости не зависит от  $\varphi$  в общем случае.

Очевидно  $\alpha_i - \theta_i$  - угол между  $\mathbf{y}_{w,i}$  и  $\mathbf{R}_i$ . Если касательная диска  $i$  - го колеса  $\mathbf{y}_{w,i}$  перпендикулярна  $\mathbf{R}_i$ , то  $\alpha_i - \theta_i = \frac{\pi}{2}$ ,  $\mathbf{v}_{rot,i} = R_i\omega$ .

Таким образом вектор скорости  $i$  - го колеса записывается в виде:

$$\mathbf{v}_i = [-\sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + \cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} + R_i\omega\sin(\alpha_i - \theta_i)]\mathbf{y}_{w,i} \quad (1.6)$$

Вводятся обозначения:  $\omega_i$  - искомая угловая скорость  $i$  - го колеса. Результатом соотношения вектора скорости  $i$  - го колеса с его угловой скоростью является

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \omega_i \mathbf{z}_{w,i} \quad (1.7)$$

Где  $\mathbf{r}_i$  - вектор, имеющий координаты  $[-r_i, 0, 0]$  в системе координат  $i$ -го колеса тележки,  $r_i$  - радиус  $i$  -го колеса тележки,  $\omega_i$  - угловая скорость этого колеса. Результатом вычисления векторного произведения в 1.7 является

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i \times \omega_i \mathbf{z}_{w,i} = \omega_i r_i \mathbf{y}_{w,i} \quad (1.8)$$

Таким образом, выражая из 1.8  $\omega_i$ , подставляя  $\mathbf{v}_i$  из 1.6, получим:

$$\omega_i = \frac{1}{r_i}(-\sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + \cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} + R_i\omega\sin(\alpha_i - \theta_i)) \quad (1.9)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1}\sin(\varphi + \alpha_1) & \frac{1}{r_1}\cos(\varphi + \alpha_1) & \frac{1}{r_1}R_1\sin(\alpha_1 - \theta_1) \\ -\frac{1}{r_2}\sin(\varphi + \alpha_2) & \frac{1}{r_2}\cos(\varphi + \alpha_2) & \frac{1}{r_2}R_2\sin(\alpha_2 - \theta_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{r_N}\sin(\varphi + \alpha_N) & \frac{1}{r_N}\cos(\varphi + \alpha_N) & \frac{1}{r_N}R_N\sin(\alpha_N - \theta_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Таким образом, координаты траектории пути  $(x, y, \varphi)$  однозначно определяют величину угловой скорость каждого колеса. Для нахождения угловой скорости каждого колеса необходимо вычислить  $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$  и подставить в формулу 1.10.

## 2 Динамическая модель робота с $N$ всенаправленными колесами

Динамическая модель, в отличие от кинематической, рассматривает движение твердых тел с учетом сил, приводящих это тело в движение.

Тележка приводится в движения за счет крутящего момента  $T$ . Увеличивая скорость тележки, её сопротивления покоя преодолевается и ей придается ускорение.

В рамках этой главы рассматривается движение тележки с  $N$  всенаправленными колесами ( $N > 3$ ) по негладкой двумерной поверхности с учетом действующих сил. В описании модели используются те же обозначения, что и в кинематической модели за исключением того, что вместо векторов скорости рассматриваются векторы сил  $f_i$ . Сила  $f_i$  приложена к верхней точке  $i$  - го колеса в направлении качения. Для примера на рисунке 2.1 схематически изображена динамическая модель робота с тремя всенаправленными колесами. Равнодействующая всех сил, действующих на тележку  $F$  имеет вид:

$$F = F_x x + F_y y + M_t z \quad (2.1)$$

Сила как мера воздействия на тело характеризует поступательное движение модели, в то время как момент сил  $M_t z$  характеризует вращательное движение. Равнодействующую всех сил можно разложить на поступательную и вращательную составляющие, аналогично кинематической модели, следующим образом:

$$F = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = B \cdot \ddot{u} \quad (2.2)$$

Где  $M$  - масса тележки,  $J_r$  - её момент инерции.

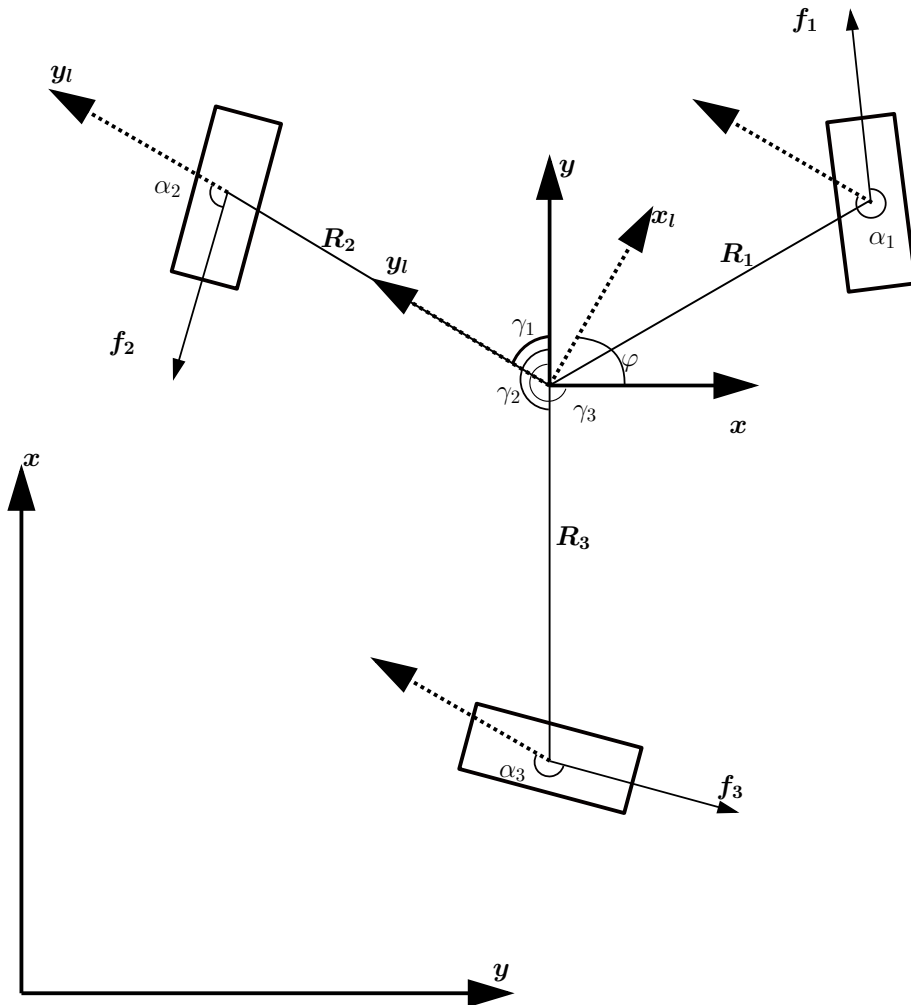


Рисунок 2.1 – динамическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами

Момент инерции тележки можно считать приближенно равным моменту инерции однородного цилиндра радиуса  $R = \max_i(R_i)$

$$J_r = \frac{1}{2}MR^2 \quad (2.3)$$

Кроме того, вектор  $\mathbf{F}$  можно представить в виде:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \quad (2.4)$$

где  $f_i$  - вектор силы, приложенной верхней точке  $i$  - го колеса. Имеет направление  $y_{w,i}$ , величину  $f_i$  и составляет с осью  $y$  угол  $\varphi + \alpha_i$ . Тогда, результатом разложения  $F$  по компонентам и проекции вектора  $f_i$  на координатные оси является

$$F_X = -x \sum_{i=1}^N f_i \sin(\varphi + \alpha_i) \quad (2.5)$$

$$F_Y = y \sum_{i=1}^N f_i \cos(\varphi + \alpha_i) \quad (2.6)$$

$$M_t = \sum_{i=1}^N f_i \times R_i = z \sum_{i=1}^N f_i R_i \sin(\alpha_i - \theta_i) \quad (2.7)$$

Тогда величины компонент вектора сил связываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi + \alpha_1) & -\sin(\varphi + \alpha_2) & \dots & -\sin(\varphi + \alpha_N) \\ \cos(\varphi + \alpha_1) & \cos(\varphi + \alpha_2) & \dots & \cos(\varphi + \alpha_N) \\ R_1 \sin(\alpha_1 - \theta_1) & R_2 \sin(\alpha_2 - \theta_2) & \dots & R_N \sin(\alpha_N - \theta_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} = Af \quad (2.8)$$

Результатом является уравнение

$$F = Af \quad (2.9)$$

Результатом разрешения уравнение 2.9 относительно  $f$  является

$$f = A^{-1} \cdot F = A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u} \quad (2.10)$$

Зная, что вращающий момент колеса равен силе, приложенной в его



верхней точке на его радиус и обозначая

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Можем описать зависимость координат пути  $(x, y, \varphi)$  от крутящих моментов каждого колеса:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_N \end{bmatrix} = \bar{r} f^T = \bar{r} (A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u})^T \quad (2.12)$$

В свою очередь величину момента сил каждого колеса можно выразить через его угловое ускорение:

$$T_i = J_{w,i} \dot{\omega}_i \quad (2.13)$$

Где  $J_{w,i}$  - момент инерции  $i$ -го колеса,  $\dot{\omega}_i$  - угловое ускорение  $i$  - го колеса.

Учтя силу трения качения модели по некоторой поверхности, предполагая равномерное распределение веса на каждое колесо. Известно, что сила трения качения противоположна по направлению силе, приводящей колесо в действие и для  $i$ -го колеса может быть вычислена по формуле:

$$f_{t_i} = \frac{Mg\eta}{Nr_i} \quad (2.14)$$

Где  $Mg$  - сила реакции опоры, равная силе тяжести робота,  $\eta$  - коэффициент трения качения, зависящий от характеристик поверхности.  $\eta = 0$  в случае, когда трения между колесом и поверхностью не происходит

и  $\eta = \infty$  когда трение поверхности непреодолимо сильно. Сила трения качения направлена в противоположную сторону от направления движения колеса. Поэтому для того, чтобы её компенсировать, необходимо увеличить силу, приложенную в верхней точке колеса на величину силы трения.

$$\tilde{f}_i = f_i + f_{t_i} \quad (2.15)$$

Обозначим

$$\tilde{f} = f + \begin{bmatrix} f_{t_1} \\ f_{t_2} \\ \dots \\ f_{t_N} \end{bmatrix} = f + \frac{Mg\eta}{N} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \\ \dots \\ \frac{1}{r_N} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Тогда заменяя в формуле 2.12  $f$  на  $\tilde{f}$ , получим зависимость момента сил каждого колеса от координат пути, учитывающая силу трения:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_N \end{bmatrix} = \bar{r} \left( A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u} + \frac{Mg\eta}{N} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \\ \dots \\ \frac{1}{r_N} \end{bmatrix} \right)^T \quad (2.17)$$

Таким образом получаем динамическую модель тележки, учитывающую её массу и силу трения качения. Зная координаты пути  $(x, y, \varphi)$  и вычисляя ускорение каждой координаты  $(\ddot{x}, \ddot{y}, \dot{\omega})$ , из уравнения 2.17 можем получить соответствующие заданному пути моменты сил каждого колеса.

### **3 Кинематическая модель роликонесущего колеса**

Для нероликонесущего колеса, которое вращается по поверхности без скольжения, мгновенная скорость низшей точки касания равна нулю[Ссылка на источник]. На практике соприкасающиеся тела из-за физических ограничений всегда соприкасаются множеством точек, называемым пятном контакта. В качестве иллюстрации можно привести гусеничную тележку,двигающуюся по поверхности без протекания. Пятно касания гусеницы достаточно большое чтобы заметить, что в определенное мгновение оно не движется относительно поверхности. При достаточно низкой скорости тележки можно заметить, что некоторая подобласть пятна касания гусеницы не движется относительно поверхности некоторый промежуток времени.

Особенность роликонесущих колес заключается в том, что мгновенная точка касания имеет ненулевую скорость относительно поверхности качения, так как укрепленные на колесе ролики под силой тяжести тележки вращаются относительно своей оси.

Простейшей неголономной моделью роликонесущего колеса является плоский диск, для которого скорость точки соприкосновения с несущей поверхностью направленная вдоль прямой, составляющей постоянный угол с плоскостью колеса.

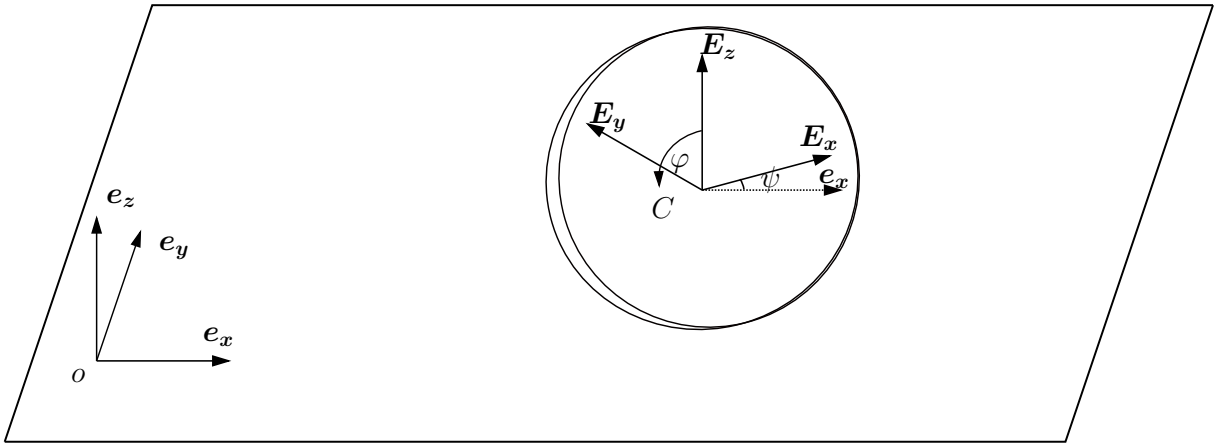


Рисунок 3.1 – модель роликнесущего колеса: вид сбоку

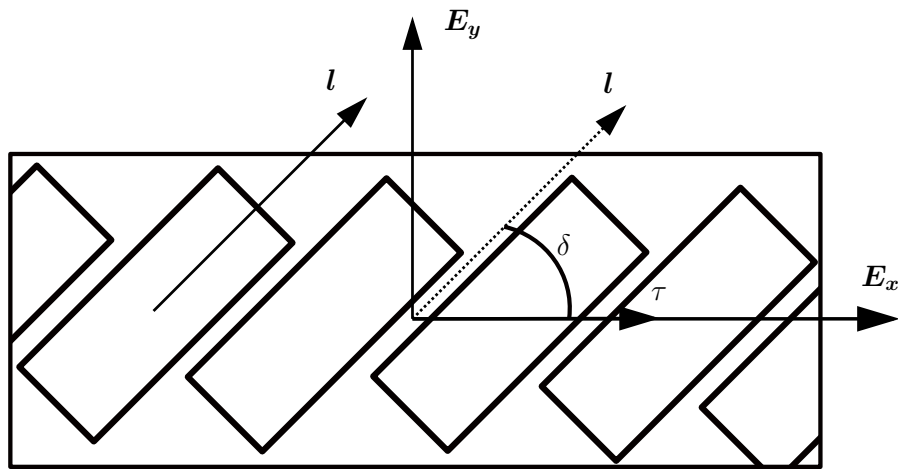


Рисунок 3.2 – модель роликнесущего колеса: вид сверху

В качестве модели роликнесущего колеса рассматривается диск радиуса  $R$  с центром в точке  $C$ , причем плоскости колес тележки вертикальны и неподвижны относительно платформы тележки. Обозначения:  $l$  - единичный вектор оси вращения ролика,  $\tau$  - касательная к плоскости диска,  $\delta = \widehat{l\tau}$ . Тогда уравнение связи имеет вид:

$$(v_M, l) = 0 \quad (3.1)$$

где  $M$  - точка касания,  $v_M$  - скорость точки касания. Вектор  $v_M$  определяется следующим образом:

$$v_M = v_C + \omega \times CM \quad (3.2)$$

где  $v_C$  - скорость центра колеса,  $\omega$  - вектор угловой скорости колеса. Обозначения:  $\{O, e_x, e_y, e_z\}$  - глобальная инерциальная система координат,  $\{C, E_x, E_y, E_z\}$  - система координат, жестко связанная с диском. Плоскость  $\{C, E_x, E_y\}$  параллельна плоскости поверхности.  $\varphi$  - угол поворота диска вокруг перпендикулярной плоскости диска оси, проходящей через точку  $C$  против часовой стрелки,  $\psi = \widehat{\tau e_x}$ . Обозначения иллюстрируются на рисунках 3.1 и 3.2. Тогда вектора  $\omega$  и  $CM$  можно представить в виде:

$$\omega = \dot{\varphi} E_y + \dot{\psi} E_z \quad (3.3)$$

$$CM = -R E_z \quad (3.4)$$

Отсюда справедливо

$$\omega \times CM = -R \dot{\varphi} E_x \quad (3.5)$$

Обозначая за  $x_C$   $y_C$  координаты точки  $C$  в глобальных координатах, проектируя вектор скорости точки  $C$  на локальную систему координат, что иллюстрируется на рисунке 3.3, можем записать

$$v_C = (\dot{x}_C \cos \psi + \dot{y}_C \sin \psi) E_x + (-\dot{x}_C \sin \psi + \dot{y}_C \cos \psi) E_y \quad (3.6)$$

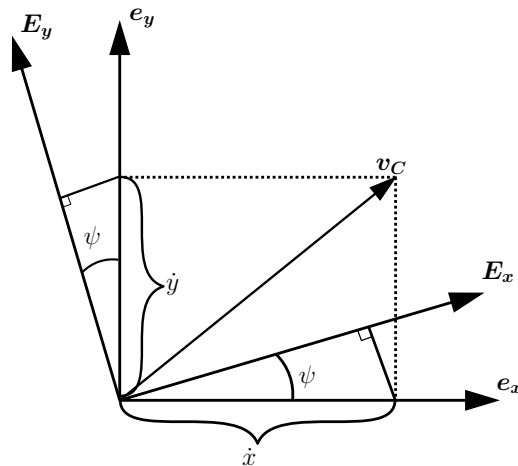


Рисунок 3.3 – иллюстрация проектирования вектора скорости на локальную систему координат

Наконец, проецируя единичный вектор  $l$  на локальную систему координат

$$l = \cos\delta \mathbf{E}_x + \sin\delta \mathbf{E}_y \quad (3.7)$$

Можем записать уравнение связи в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_m, l) &= (\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CM}, l) = \\ &= ((\dot{x}_C \cos\psi + \dot{y}_C \sin\psi - R\dot{\varphi})\mathbf{E}_x + (-\dot{x}_C \sin\psi + \dot{y}_C \cos\psi)\mathbf{E}_y, \cos\delta \mathbf{E}_x + \sin\delta \mathbf{E}_y) = \\ &= (\dot{x}_C \cos\psi + \dot{y}_C \sin\psi - R\dot{\varphi})\cos\delta + (-\dot{x}_C \sin\psi + \dot{y}_C \cos\psi)\sin\delta = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{x}_C \cos(\psi + \delta) + \dot{y}_C \sin(\psi + \delta) = R\dot{\varphi} \cos\delta \quad (3.8)$$

Уравнение 3.8 связывает между собой тройку координат  $(x_C, y_C, \psi)$  с угловой скоростью колеса  $\varphi$ . В работе [ссылка на источник] изучена динамика тележки с  $N$  роликонесущими колесами и сформулирован критерий управляемости: если  $N \geq 3$ , хотя бы одна пара векторов  $l_i, l_j$   $i, j = \overline{1, N}$ , которые соответствуют осям роликов, не параллельна и точки контакта колес не лежат на одной прямой, то для любой траектории всегда возможно найти такие управляющие моменты (то есть функции  $\varphi_i(t)$ ), что тележка, управляемая этими моментами, переместится по заданной траектории.

#### 4 Кинематическая модель тележки на четырех роликонесущих колесах

В рамках данной главы рассматривается кинематическую модель тележки на четырех роликонесущих колесах, проиллюстрированная на рисунке 4.1. Обозначения:  $C$  - точка вращения тележки,  $\{O, e_x, e_y, e_z\}$  - глобальная инерциальная система координат,  $\{C, E_x, E_y, E_z\}$  - система координат, жестко связанная с тележкой. Плоскость  $\{C, E_x, E_y\}$  параллельна плоскости поверхности.  $r_i$  - радиус  $i$ -го колеса,  $\delta_i$  - угол между касательной к плоскости колеса  $p_i$  и осью ролика  $l_i$ ,  $\psi$  - угол между осью  $e_x$  и  $E_x$ ,  $\alpha_i$  - угол между осью  $E_x$  и радиус вектором  $R_i$  длины  $R_i$ , направленным из точки  $C$  в точку касания с поверхностью  $i$ -го колеса  $C_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

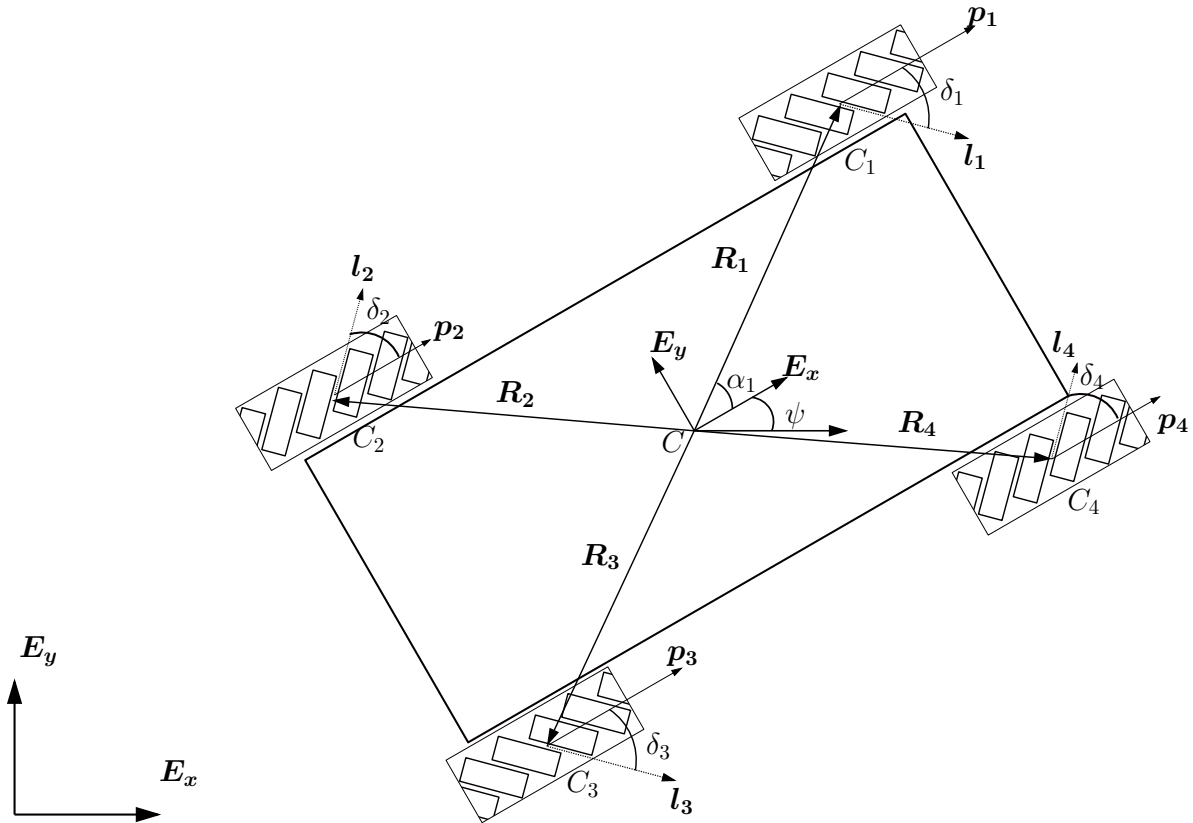


Рисунок 4.1 – модель тележки на четырех роликонесущих колесах

Рассматривается вектор скорости центра  $i$ -го колеса  $v_{c,i}$ . Результатом его разложения на поступательную и вращательную составляющие является

$$v_{c,i} = v_{tr,i} + v_{rot,i} \quad (4.1)$$

Вектор поступательной скорости  $v_{tr,i}$  имеет координаты  $[\dot{x}, \dot{y}, 0]$ . Уравнение связи с угловой скоростью  $i$  - го колеса  $\dot{\varphi}_i$ , основываясь на уравнении 3.8 имеет вид:

$$\dot{x} \cos(\psi + \delta) + \dot{y} \sin(\psi + \delta) = r_i \dot{\varphi}_i \cos \delta_i \quad (4.2)$$

Где  $[\dot{x}, \dot{y}, 0]$  - координаты вектора поступательной скорости тележки.

Для того, чтобы заставить тележку вращаться вокруг оси вращения  $CE_z$ , необходимо задать вектор скоростей каждого колеса перпендикулярно радиус вектору  $R_i$ . При этом длинна вектора должна составлять  $R_i \dot{\psi}$ . Расположение векторов иллюстрируется на рисунке 4.2.

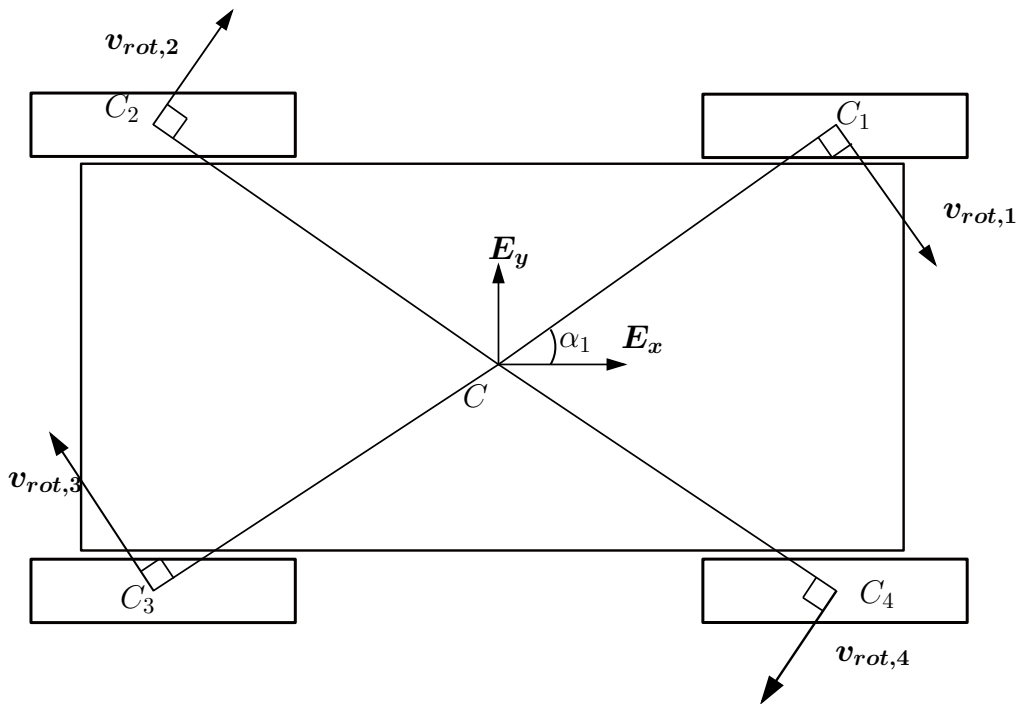


Рисунок 4.2 – иллюстрация вращательного движения тележки на четырех роликонесущих колесах



Рассматривается вектор вращательной скорости  $i$ -го колеса  $\mathbf{v}_{rot,i}$ .  
 Результатом его проекции на оси  $\mathbf{E}_x$   $\mathbf{E}_y$ , как показано на рисунке 4.3,  
 является

$$\mathbf{v}_{rot,i} = R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i) \mathbf{E}_x - R_i \dot{\psi} \cos(\alpha_i) \mathbf{E}_y \quad (4.3)$$

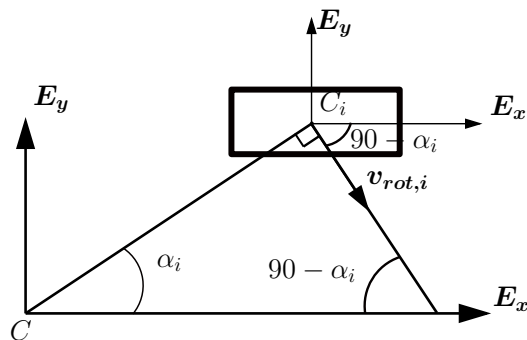


Рисунок 4.3 – проекция вектора вращательной скорости на локальную систему координат

Результатом проекции вектора  $\mathbf{v}_{rot,i}$  на оси  $\mathbf{e}_x$   $\mathbf{e}_y$ , как изображается на рисунке 4.4 , является

$$\mathbf{v}_{rot,i} = R_i \dot{\psi} \sin \alpha_i (\cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y) - R_i \dot{\psi} \cos \alpha_i (-\sin \psi \mathbf{e}_x + \cos \psi \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{v}_{rot,i} = R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i + \psi) \mathbf{e}_x - R_i \dot{\psi} \cos(\alpha_i + \psi) \mathbf{e}_y \quad (4.4)$$

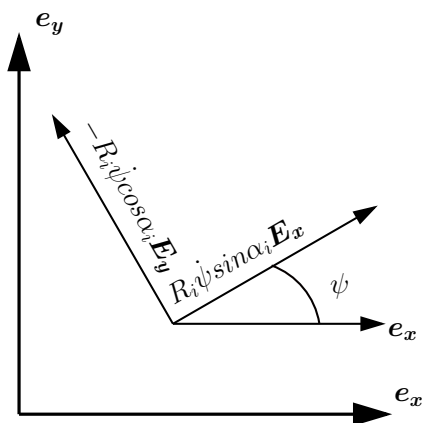


Рисунок 4.4 – проекция вектора вращательной скорости на глобальную систему координат

Тогда результатом подстановки 4.4 в уравнение связи 3.8 является

$$R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i + \psi) \cos(\psi + \delta_i) - R_i \dot{\psi} \cos(\alpha_i + \psi) \sin(\psi + \delta_i) = r_i \dot{\varphi}_i \cos \delta_i$$

$$R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i - \delta_i) = r_i \dot{\varphi}_i \cos \delta_i \quad (4.5)$$

Тогда уравнение связи для  $v_{c,i}$ , исходя из 4.1, принимает вид

$$\dot{x} \cos(\psi + \delta_i) + \dot{y} \sin(\psi + \delta_i) + R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i - \delta_i) = r_i \dot{\varphi}_i \cos \delta_i \quad (4.6)$$

Результатом выражения  $\dot{\varphi}_i$  является

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\dot{x} \cos(\psi + \delta_i) + \dot{y} \sin(\psi + \delta_i) + R_i \dot{\psi} \sin(\alpha_i - \delta_i)}{r_i \cos \delta_i} \quad (4.7)$$

При чисто поступательном ( $\dot{\psi}_i = 0$ ) или чисто вращательном ( $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ) движении связь 4.7 является голономной, то есть угловое ускорение каждого колеса не зависит от предыдущих движений робота. В противном случае, для вычисления 4.7 необходимо учитывать текущий угол поворота следующим образом:

$$\psi = \int_{t_0}^{t_{cur}} \dot{\psi}(t) dt \quad (4.8)$$

Где  $t_0, t_{cur}$  - начальный и текущий момент времени соответственно.

Таким образом представляется зависимость величины угловой скорости от координат пути. Для того, чтобы найти угловую скорость  $i$ -го колеса,  $i = \overline{1, 4}$ , соответствующую заданному пути  $(x, y, \psi)$ , необходимо вычислить  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi})$  и подставить в уравнение 4.7.