1 Кинематическая модель робота с N всенаправленными колесами

Для того, чтобы описать движения робота необходимо некоторым образом смоделировать его поведение. Простейший модель движения робота в пространстве - кинематическая. Эта модель описывает движения исключительно через зависимость координат от времени. То есть в кинематической модели рассматривается движение тела, но не рассматриваются причины, его создающие. Рассмотрим движение тележки с N всенаправленными колесами ($N > 3$) по гладкой двумерной поверхности без учета действующих сил, причем плоскости колес тележки вертикальны и неподвижны относительно платформы тележки. В рамках модели всенаправленные колеса способны скользить в любом направлении с пренебрежимо малой силой трения. Пусть задана глобальная система координат, связанная с поверхностью $[X, Y]$ и локальная, инерциальная относительно глобальной, жестко связанная с тележкой $[X_l, Y_l]$. Не теряя общности начало локальных координат в точке центра масс тележки. Положение тележки определено вектором координат (x, y, φ) где x, y - координаты, и φ - угол поворота системы координат $[X_l, Y_l]$ относительно оси OY в глобальной системе координат. Скорость тележки определяется вектором $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$ где $\omega = \dot{\varphi}$ - угловая скорость тележки.

Для примера на рисунке 2.1 схематически изображена кинематическая модель робота с тремя всенаправленными колесами.

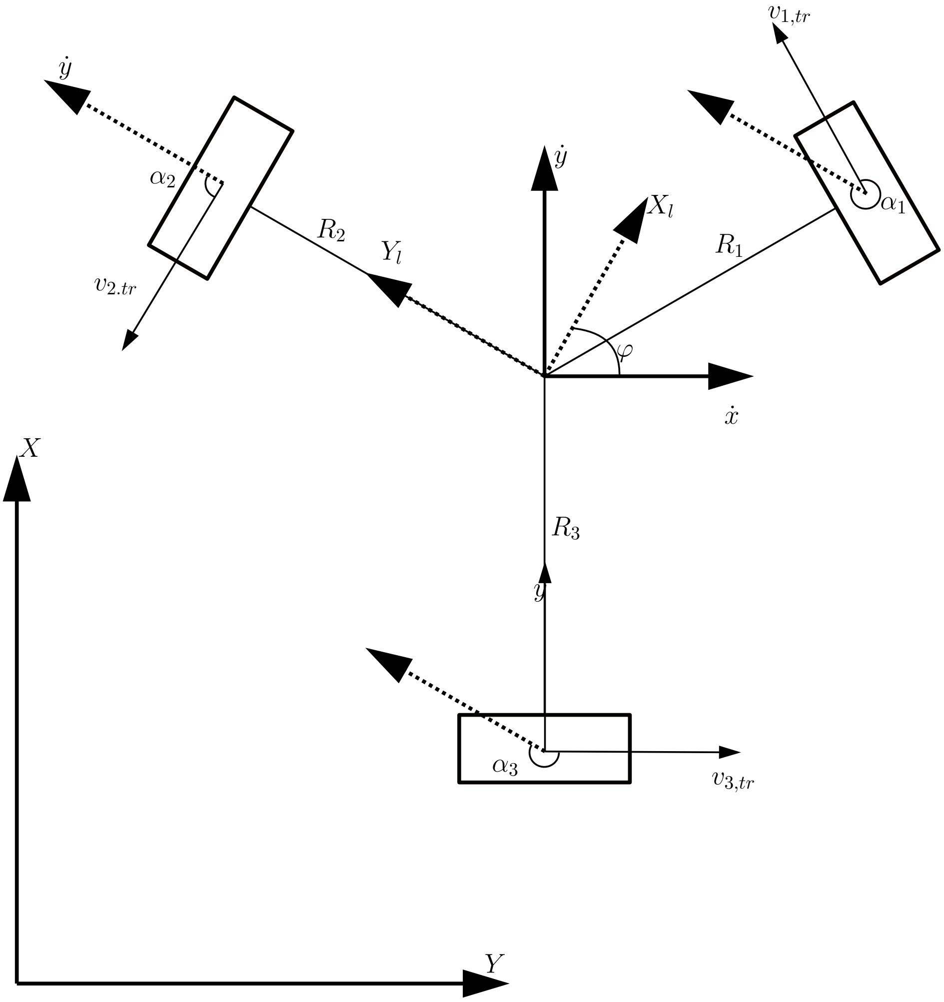

Рисунок 1.1 – кинематическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами.

Рассмотрим величину скорости i- го колеса, v_i, $i = \overline{1, N}$. Разложим её на поступательную и вращательную составляющие:

$$v_i = v_{i,tr} + v_{i,rot} \tag{1.1}$$

Обозначим за α_i -угол между касательной к диску i-го колеса и осью OY_l, что изображено на рисунке 1.2.

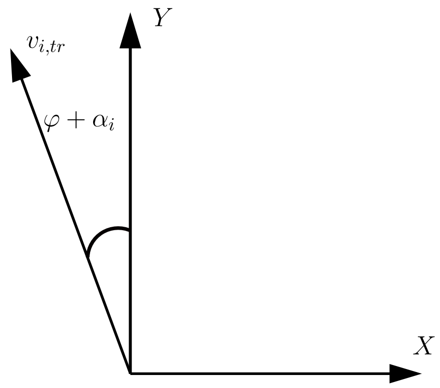

Рисунок 1.2 – расположение векторов модели в плоскости

Вектор поступательной скорости составляет с осью Y угол $\varphi + \alpha_i$. Тогда величину скорости поступательного движения можно представить в виде

$$v_{i,tr} = -sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} \tag{1.2}$$

Величина скорости вращательного движения задается следующим уравнением

$$v_{i,rot} = R_i\omega \tag{1.3}$$

Где R_i - расстояние от оси вращения (точки центра масс) до оси i-го колеса. Таким образом величину скорости можно записать в следующем виде:

$$v_i = -sin(\varphi + \alpha_i)\dot{x} + cos(\varphi + \alpha_i)\dot{y} + R_i\omega \tag{1.4}$$

Соотнесем величину скорости i - го колеса с его угловой скоростью

$$v_i = r_i\omega_i \tag{1.5}$$

Где r_i - радиус i-го колеса тележки, ω_i - его угловая скорость, получим зависимость величины угловой скорости колеса от тройки $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$

$$\omega_i = \frac{1}{r_i}(-sin(\varphi+\alpha_i)\dot{x} + cos(\varphi+\alpha_i)\dot{y} + R_i\omega) \quad (1.6)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ ... \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1}sin(\varphi+\alpha_1) & \frac{1}{r_1}cos(\varphi+\alpha_1) & \frac{1}{r_1}R_1 \\ -\frac{1}{r_2}sin(\varphi+\alpha_2) & \frac{1}{r_2}cos(\varphi+\alpha_2) & \frac{1}{r_2}R_2 \\ ... & ... & ... \\ -\frac{1}{r_N}sin(\varphi+\alpha_N) & \frac{1}{r_N}cos(\varphi+\alpha_N) & \frac{1}{r_N}R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Таким образом, зная координаты траектории пути (x, y, φ) можем получить величину угловой скорость каждого колеса. Для этого необходимо вычислить $(\dot{x}, \dot{y}, \omega)$ и подставить в формулу 1.7.

Кроме того, переходя к локальным координатам

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{y}_l \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Получаем уравнение движения тележки в локальной системе координат

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ ... \\ \dot{\phi}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_1}sin(\varphi+\alpha_1) & \frac{1}{r_1}cos(\varphi+\alpha_1) & \frac{1}{r_1}R_1 \\ -\frac{1}{r_2}sin(\varphi+\alpha_2) & \frac{1}{r_2}cos(\varphi+\alpha_2) & \frac{1}{r_2}R_2 \\ ... & ... & ... \\ -\frac{1}{r_N}sin(\varphi+\alpha_N) & \frac{1}{r_N}cos(\varphi+\alpha_N) & \frac{1}{r_N}R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_l \\ \dot{y}_l \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

где $\dot{x}_l$,$\dot{y}_l$ - величина скорости по направлению X_l и Y_l соответственно.

2 Динамическая модель робота с N всенаправленными колесами

Динамическая модель, в отличие от кинематической, рассматривает движение твердых тел с учетом сил, приводящих это тело в движение.

Для того, чтобы привести тележку в движение, её колесам необходимо передать крутящий момент T. Увеличивая скорость тележки, мы преодолеваем её сопротивления покоя и придаем ей ускорение.

Рассмотрим движение тележки с N всенаправленными колесами ($N > 3$) по негладкой двумерной поверхности с учетом действующих сил. В описании модели используются те же обозначения, что и в кинематической модели. Рассмотрим равнодействующую всех сил, действующих на тележку F. Сила как мера воздействия на тело характеризует поступательное движение модели, в то время как момент сил характеризует вращательное движение. Равнодействующую всех сил можно разложить на поступательную и вращательную составляющие, аналогично кинематической модели, следующим образом:

$$F = \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = B \cdot \ddot{u} \tag{2.1}$$

Где M - масса тележки, J - её момент инерции.

Момент инерции тележки можно считать приближенно равным моменту инерции цилиндра радиуса $R = max_i(R_i)$

$$J = \frac{1}{2} M R^2 \tag{2.2}$$

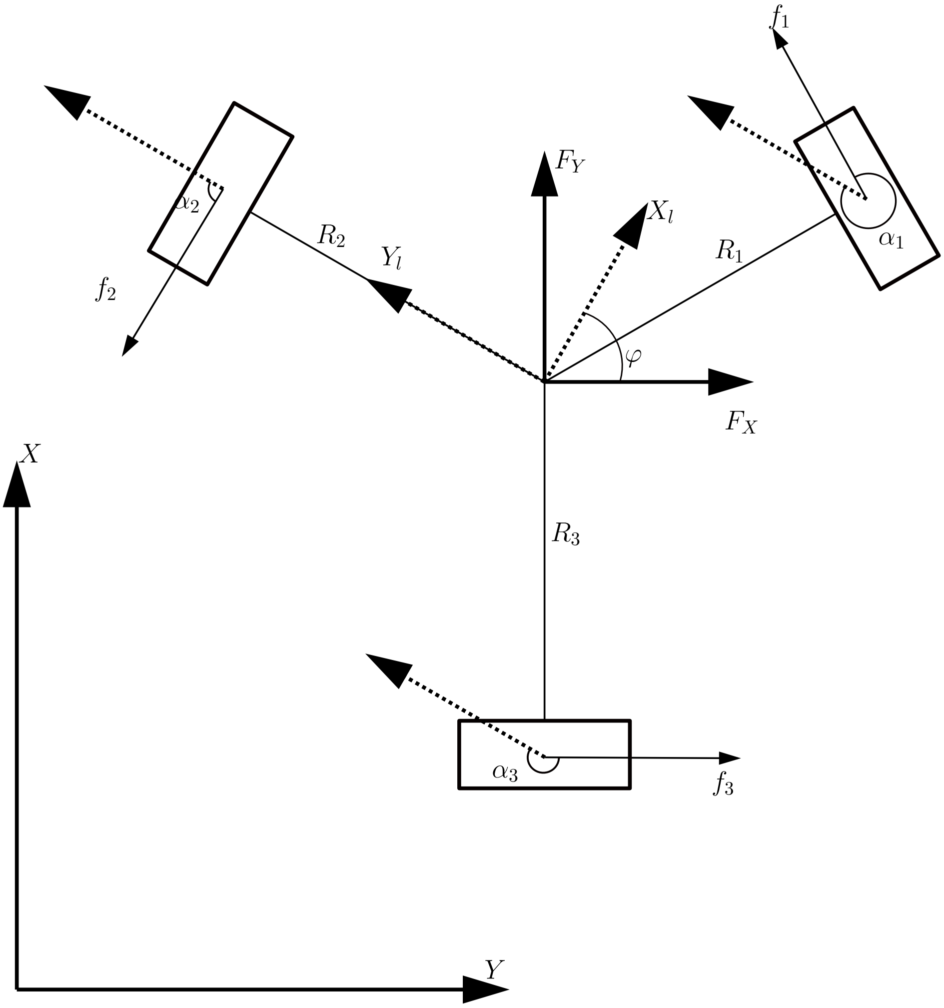

Рисунок 2.1 – динамическая модель тележки с тремя всенаправленными колесами.

В то же время, обозначая

$$A = \begin{bmatrix} -sin(\varphi+\alpha_1) & -sin(\varphi+\alpha_2) & ... & -sin(\varphi+\alpha_N) \\ cos(\varphi+\alpha_1) & cos(\varphi+\alpha_2) & ... & cos(\varphi+\alpha_N) \\ R_1 & R_2 & ... & R_N \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

Проецируя поступательный вектор силы на $[X, Y]$, используя свойство ассоциативности моментов сил можно представить вектор F следующим образом:

$$F = Af \tag{2.5}$$

где f_i - сила, приложенная верхней точке i - го колеса. Разрешая уравнение 2.5 относительно f, получим

$$f = A^{-1} \cdot F = A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u} \tag{2.6}$$

Зная, что вращающий момент колеса равен силе, приложенной в его верхней точке на его радиус и обозначая

$$\overline{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

получим зависимость координат пути (x, y, φ) от крутящих моментов каждого колеса:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_N \end{bmatrix} = \overline{r}(A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u})^T \tag{2.8}$$

В свою очередь величину момента сил каждого колеса можно выразить через его угловое ускорение:

$$T_i = J_i \dot{\omega}_i \tag{2.9}$$

J_i - момент инерции i-го колеса

Учтем силу трения качения модели по некоторой поверхности, предполагая равномерное распределение веса на каждое колесо.

Известно, что сила трения качения противоположна по направлению силе, приводящей колесо в действие и для i-го колеса может быть вычислена по формуле:

$$F_{t_i} = \frac{Mg\eta}{Nr_i} \tag{2.10}$$

Где Mg - сила реакции опоры, равная силе тяжести, η - коэффициент трения качения, зависящий от характеристик поверхности. Тогда зависимость момента сил каждого колеса от координат пути, учитывающая силу трения можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \ldots \\ T_N \end{bmatrix} = \overline{r}(A^{-1} \cdot B \cdot \ddot{u} + \frac{Mg\eta}{N} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \\ \frac{1}{r_2} \\ \ldots \\ \frac{1}{r_N} \end{bmatrix})^T \tag{2.11}$$

Таким образом получаем динамическую модель тележки, учитывающую её массу и силу трения качения.

В работе ref более детально рассматривается динамическая модель тележки на N роликонесущих колесах. Модель тележки строится исходя из предположения о том, что модель роликонесущего колеса — твердый диск, скорость наинизшей точки которого перпендикулярна направлению оси ролика в этой точке. Кроме того, рассмотрен критерий управляемости такой модели, из которого следует ряд ограничений на его конструкцию. Например если сумма угла оси ролика и угла поворота колеса всех роликонесущих колес равна, то такая модель не может двигаться по произвольной трактории. Если же эти углы у двух колес совпадают, то пару колес можно принять за одно виртуальное колесо с радиус вектором $r_{ij} = r_i - r_j$ в локальной системе координат и моментом $T_{ij} = T_i + T_j$.

3 Кинематическая модель роликонесущего колеса

Для нероликового колеса, которое вращается по поверхности без скольжения, мгновенная скорость низшей точки касания равна нулю[Ссылка на источник]. На практике соприкасающиеся тела из-за физических ограничений всегда соприкасаются множеством точек, называемых пятном контакта. В качестве иллюстрации можно привести гусеничную тележку, двигающуюся по поверхности без просткальзываний. Пятно касания гусеницы достаточно большое чтобы заметить, что в определенное мгновение оно не двигается относительно поверхности. При достаточно низкой скорости тележки можно даже заметить, что некоторая подобласть пятна касания гусеницы не двигается относительно поверхности некоторый промежуток времени.

Особенность роликонесущих колес заключается в том, что мговенная точка касания имеет ненулевую скорость относительно поверхности качения, так как укрепленные на колесе ролики под силой тяжести тележки вращаются относительно своей оси. В случае всенаправленного колеса, оси роликов которого параллельны плоскости диска колеса, проскальзывания не происходит, что упрощает процесс построения математической модели

Простейшей неголономной моделью роликонесущего колеса является плоский диск, для которого скорость точки соприкосновения с несущей поверхностью направленная вдоль прямой, составляющий постоянный угол с плоскостью колеса.

В качестве модели роликонесущего колеса рассмотрим диск радиуса R с центром в точке C, причем плоскости колес тележки вертикальны и неподвижны относительно платформы тележки. Обозначим за l -

единичный вектор оси вращения ролика, τ - касательная к плоскости диска, $\delta = \widehat{l\tau}$.Тогда уравнение связи записывается следующим образом:

$$v_M = v_C + \omega \times \overrightarrow{CM} \tag{3.1}$$

где M - точка касания,v_M - скорость точки касания, v_C - скорость центра колеса и ω - угловая скорость колеса. Обозначим $\{O, e_x, e_y, e_z\}$ - глобальная инерциальная система координат, $\{C, E_x, E_y, E_z\}$ - система координат, жестко связанная с диском. Плоскость $\{C, E_x, E_y\}$ параллельна плоскости поверхности. Обозначим φ - угол поворота диска вокруг перпендикулярной плоскости диска оси, проходящей через точку C против часовой стрелки, $\psi = \widehat{\tau e_x}$