

Pré-requis de statistique : Essentiels de théorie de la mesure

Notes de cours, Master Maths & IA

Guillermo Durand

26 août 2025

Tribu ou σ -algèbre sur Ω : $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, \mathcal{A} stable par complémentaire et par union dénombrable.

(Ω, \mathcal{A}) s'appelle un espace mesurable, et $A \in \mathcal{A}$ une partie mesurable ou un ensemble mesurable.

Propriétés : $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$, \mathcal{A} stable par intersection dénombrable (Exercice).

Tribu engendrée par $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ noté $\sigma(\mathcal{C})$: plus petite tribu qui contient \mathcal{C} , intersection de toutes les tribus qui contiennent \mathcal{C} .

Exemples : $\mathcal{P}(\Omega)$, $\{\emptyset, \Omega\}$, $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\} = \sigma(\{A\})$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu borélienne de \mathbb{R}^d engendrée par les ouverts.

Tribu produit de \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 notée $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ engendrée par les $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$. **Remarque** : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ça se démontre).

Exercice : soit $f : \Omega_1 \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ est une tribu appelée tribu image réciproque de \mathcal{A}_2 . (Moins utile :) soit $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow \Omega_2$, $\{B \in \mathcal{P}(\Omega_2) : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ est une tribu appelée tribu image de \mathcal{A}_1 . **ATTENTION** ce n'est pas $f(\mathcal{A}_1)$!! (Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ constante, $f(\mathcal{A}_1)$ n'est même pas une tribu)

La tribu engendrée par une famille d'applications $f_i : \Omega \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, est $\sigma(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i))$.

$f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ est mesurable si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$. Trivialement, $f : (\Omega_1, f^{-1}(\mathcal{A}_2)) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ et $f : (\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1)) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ sont toujours mesurables.

Mesure : fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$ si les E_n sont deux à deux disjoints.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ s'appelle un espace mesuré.

Propriétés : $\mu \left(\bigcup_{1 \leq n \leq N} E_n \right) = \sum_{1 \leq n \leq N} \mu(E_n)$ si les E_n sont deux à deux disjoints. Si $A \subseteq B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$, et si de plus $\mu(A) < \infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. $\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$ (borne d'union). $\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ si les E_n sont croissants pour l'inclusion, $\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ si les E_n sont décroissants pour l'inclusion et de mesure finie à partir d'un certain rang (Exercice).

μ est σ -finie si $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ avec $E_n \in \mathcal{A}$, $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n . μ est fini si $\mu(\Omega) < \infty$. μ est une mesure de probabilité si $\mu(\Omega) = 1$.

Si μ est de probabilité, on la note plutôt \mathbb{P} . On dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, Ω est appelé un univers, et une partie mesurable $A \in \mathcal{A}$ est plutôt appelée un événement.

Exemples : mesure de comptage sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, σ -finie si et seulement si Ω est dénombrable (Exercice). Mesure de Dirac $\delta_y : A \mapsto \mathbb{1}_{\{y \in A\}}$, de proba. Combinaison dénombrable et positive de Dirac $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{y_n}$ toujours σ -finie (on suppose que la tribu contient les $\{y_n\}$), finie ou de proba selon la convergence de la série $\sum \alpha_n$. Mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^d) : la seule mesure λ (resp. λ_d) invariante par translation et telle que $\lambda([0, 1]) = 1$ (resp. $\lambda_d([0, 1]^d) = 1$). Elle est σ -finie. Toutes les mesures de probabilité induites par les lois réelles usuelles, par exemple $\mathcal{N}(0, 1) : A \mapsto \int \mathbb{1}_{\{x \in A\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx$.

Exercice : toute μ σ -finie ne peut charger au plus qu'un nombre dénombrable de points : $\{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ est au plus dénombrable.

Mesure produit de μ_1 et μ_2 sur $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$: μ telle que $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$. Existe toujours, et est unique si μ_1 et μ_2 σ -finies (admis), dans ce dernier cas on la note $\mu_1 \otimes \mu_2$. Exemple : la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d : $\lambda_d = \lambda \otimes \dots \otimes \lambda = \bigotimes_{i=1}^d \lambda = \lambda^{\otimes d}$.

Si $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ est mesurable et μ est une mesure sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, on note $f_{\#}\mu$ la mesure "push-forward", ou mesure induite, ou mesure image, définie sur $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ par $f_{\#}\mu(A_2) = \mu(f^{-1}(A_2))$. Dans le cas où $\mu = \mathbb{P}$ est une mesure de probabilité et $f = X$, on dit que X est une variable aléatoire, et sa mesure induite est souvent notée \mathbb{P}_X ou $\mathcal{L}(X)$ plutôt que $X_{\#}\mathbb{P}$. La loi de X ou distribution de X sont en fait formellement définies comme étant exactement sa push-forward \mathbb{P}_X . Exercice : la loi de X est elle-même une mesure de probabilité.

Ensemble négligeable $N \subseteq \Omega$: il existe $Z \in \mathcal{A}$ de mesure nulle avec $N \subseteq Z$. On dit que la tribu \mathcal{A} est complète pour la mesure μ ou que l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet si \mathcal{A} contient tous les ensembles négligeables. Tribu com-

plétée $\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \text{ négligeable}\}$, c'est bien une tribu (Exercice), μ s'étend dessus en $\bar{\mu}$ (Exercice) et $\bar{\mathcal{A}}$ contient tous les négligeables de la mesure complétée donc $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ est complet (Exercice). Exemple : tribu de Lebesgue (parfois la mesure non-complétée est appelée mesure de Borel-Lebesgue pour la distinguer). Une propriété $P(\omega)$ dite vraie μ -presque partout si $\{\omega \in \Omega : \neg P(\omega)\}$ est négligeable (dépend de la mesure μ). On dit plutôt “presque sûrement” si de plus μ est une mesure de probabilité.

Intégration de fonctions mesurables à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

— si f étagée positive, nombre fini de valeurs $\alpha_1, \dots, \alpha_N$:

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu = \int f(x) \mu(dx) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_{\# \mu}(\{\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(f^{-1}(\{\alpha_i\})) \in [0, \infty],$$

— si f positive,

$$\int f(x) d\mu(x) = \sup_{\substack{h \text{ étagée positive} \\ h \leq f}} \int h(x) d\mu(x) \in [0, \infty],$$

— si $\int |f| d\mu < \infty$, on dit que f est μ -intégrable et

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \in \mathbb{R}.$$

Théorème (admis) : chacune de ces définitions existe, est bien posée, et cohérente avec les précédentes.

FAIRE UN DESSIN

Pour $p > 0$, on note $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ l'ensemble des fonctions f mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable. En particulier, $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ est l'ensemble des fonctions f mesurables intégrables.

Propriétés : linéarité, croissance. $\mu(A) = \int \mathbf{1}_A d\mu$. Si $f \geq 0$, $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ presque partout (admis). Conséquence : $\int |f - g| d\mu = 0 \Leftrightarrow f = g$ presque partout.

Si μ = la mesure de Lebesgue λ , c'est l'intégrale de Lebesgue et on écrit en général juste dx au lieu de $\lambda(dx)$. Si $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{y_n}$, $\int f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n f(y_n)$ (si défini). Si $\mu = \mathbb{P}$, l'intégrale de la v.a. $X : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par rapport à \mathbb{P} (si elle existe) est ce que l'on appelle aussi son espérance $\mathbb{E}[X] = \int X d\mathbb{P} = \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$ mais on ne calcule jamais une espérance comme cela, on utilise le théorème de transfert qui dit que $\mathbb{E}[X] = \int_{x \in F} x d\mathbb{P}_X(x)$: on passe donc d'une intégrale sur Ω par rapport à la mesure \mathbb{P} à une intégrale sur \mathbb{R} par rapport à la mesure induite \mathbb{P}_X .

Soit μ et ν deux mesures. ν domine μ , ou μ est absolument continue par rapport à ν , et on note $\mu \ll \nu$, si $\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$. **Remarque :** toute mesure est dominée par la mesure de comptage (mais ce n'est pas très intéressant car elle est rarement σ -finie).

Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue : Soit μ et ν deux mesures σ -finies, avec $\mu \ll \nu$. Il existe une fonction h réelle positive mesurable, et unique ν -presque partout, telle que $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \int \mathbf{1}_A h d\nu$. h s'appelle la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à ν ou la **densité** de μ par rapport à ν . On la note aussi $h = \frac{d\mu}{d\nu}$. La réciproque est vraie.

Exemple : la densité de $\mathcal{N}(0, 1)$ par rapport à λ est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$.

Remarque : on doit en principe dire “une” densité mais on peut se permettre de dire “la” grâce à l'unicité λ -p.p.

Remarque : la théorie de la mesure donne un cadre unifié pour traiter des distributions de probabilité discrètes et continues.

Lemme des classes monotones. π -système : une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection. Exemple : toute tribu. Classe monotone ou λ -système : une partie \mathcal{M} de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

1. $\Omega \in \mathcal{M}$
2. $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subseteq B$ entraînent que $B \setminus A \in \mathcal{M}$
3. $A_i \in \mathcal{M}, i \in \mathbb{N}$ avec $A_i \subseteq A_{i+1}$ entraînent que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}$

\mathcal{M} est donc stable par différence ensembliste et par union dénombrable croissante. Exemple : toute tribu. Lemme des classes monotones (ou théorème π - λ de Sierpiński-Dynkin) : soit \mathcal{C} un π -système, alors la classe monotone engendrée par \mathcal{C} contient la tribu engendrée par \mathcal{C} (elles sont même égales vu qu'une tribu est une classe monotone).

Application très utile : soit 2 mesures de probabilité \mathbb{P} et \mathbb{Q} qui coïncident sur un π -système $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, alors elles coïncident sur $\sigma(\mathcal{C})$. En effet, $\{A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A)\}$ est une classe monotone (Exercice). Conséquence : la cdf d'une loi caractérise cette loi.