Fyzikálny model dynamiky *n*-kolesového robota

verzia 1.2

Fyzikálny model dynamiky n-kolesového robota

Kolesový robot z hľadiska dynamiky môžeme analyzovať ako newtonovský systém. Platia základné rovnice dynamiky:

$$m_R \dot{\boldsymbol{v}}_T = \sum \boldsymbol{F}_i$$

$$\boldsymbol{J}_R \boldsymbol{\omega} = \sum (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_T) \times \boldsymbol{F}_i$$

kde $\boldsymbol{v}_T$ je rýchlosť ťažiska, $\boldsymbol{\omega}$ je uhlová rýchlosť rotácie robotu, $\boldsymbol{r}_T$ je poloha ťažiska v globálnych súradniciach, $\boldsymbol{F}_i$ sú sily pôsobiace na objekt a $\boldsymbol{r}_i$ sú ich pôsobiská, m_R je hmotnosť robota, $\boldsymbol{J}_R$ je tenzor momentu zotrvačnosti.

Poloha dotykových bodov jednotlivých kolies je:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{R}_\psi \boldsymbol{r}'_{Ci} - e_i \boldsymbol{n}_i \text{ ,}$$

kde $\boldsymbol{r}_0$ je poloha stredu kinematiky robota, $\boldsymbol{R}_\psi$ je rotačná matica transformujúca z lokálnych do globálnych súradníc, $\boldsymbol{r}'_{Ci}$ je poloha osi kastoru (pri riaditeľných aj neriaditeľných kolesách je to poloha dotykového bodu) v lokálnych súradniciach vzhľadom na stred kinematiky (konštantný vektor), e_i je ofset kastoru, $\boldsymbol{n}_i$ je vektor orientácie kolesa. Je zrejmé, že platí:

$$\boldsymbol{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \end{bmatrix}^T$$

kde ψ je uhol natočenia robota okolo zvislej osi, α_i je uhol natočenia kolesa v globálnych súradniciach.

Poloha ťažiska je:

$$\boldsymbol{r}_T = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{R}_\psi \boldsymbol{r}_T{}'$$

kde $\boldsymbol{r}_T{}'$ je poloha ťažiska v lokálnych súradniciach robota vzhľadom na stred kinematiky.

Rýchlosť dotykového bodu kolesa sa rovná:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0) - R_i \Omega_i \boldsymbol{n}_i$$

kde R_i je polomer kolesa a Ω_i je uhlová rýchlosť rotácie kolesa. Ak koleso nešmýka, rýchlosť dotykového bodu je nulová. Ak koleso šmýka, potom trecia sila sa rovná:

$$\boldsymbol{T}_i = -\mu_i N_i \frac{\boldsymbol{v}_i}{|\boldsymbol{v}_i|}$$

Sily pôsobiace na kolesá môžeme vyjadriť pomocou dvoch zložiek horizontálnej trecej sily **T** a zvislej normálovej sily **N** za predpokladu, že robot sa pohybuje po vodorovnej ploche. Pre rotáciu kolesa platí dynamika:

$$J_{Wi}\dot{\Omega}_i = M_i - R_i \boldsymbol{T}_i \cdot \boldsymbol{n}_i$$

kde J_{Wi} je moment zotrvačnosti kolesa, M_i je krútiaci moment na hriadeli motoru (prevodovky) a $\dot{\Omega}_i$ je uhlové zrýchlenie kolesa.

Pre rotáciu kastoru (riadenia) platí:

$$J_{Ci}\ddot{\alpha}_i = M_{Ci} - e_i \boldsymbol{n}_i \times \boldsymbol{T}_i$$

kde J_{Ci} je moment zotrvačnosti kastoru vzhľadom na zvislú os a M_{Ci} je krútiaci moment steering motoru (pri kastore nulový resp. zodpovedá trecej sile).

Rozpísaním do zložiek dostávame:

$$\boldsymbol{r}_T' = \begin{bmatrix} x_T' & y_T' & z_T' \end{bmatrix}^T = konšt$$

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{x0} & v_{y0} & v_{z0} \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{r}_i = \begin{bmatrix} x_0 + x_i' \cos\psi - y_i' \sin\psi - e_i \cos\alpha_i \\ y_0 + y_i' \cos\psi + x_i' \sin\psi - e_i \sin\alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 - x_i'\omega \sin\psi - y_i'\omega \cos\psi + e_i \dot{\alpha}_i \sin\alpha_i \\ \dot{y}_0 - y_i'\omega \sin\psi + x_i'\omega \cos\psi - e_i \dot{\alpha}_i \cos\alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{v}_i$$

$$\boldsymbol{r}_T = \begin{bmatrix} x_0 + x_T' \cos\psi - y_T' \sin\psi \\ y_0 + y_T' \cos\psi + x_T' \sin\psi \\ z_T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_T = \begin{bmatrix} v_{x0} - \omega x_T' \sin\psi - \omega y_T' \cos\psi \\ v_{y0} - \omega y_T' \sin\psi + \omega x_T' \cos\psi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xT} \\ v_{yT} \\ v_{zT} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_T = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x0} - \dot{\omega} x_T' \sin\psi - \omega^2 x_T' \cos\psi - \dot{\omega} y_T' \cos\psi + \omega^2 y_T' \sin\psi \\ \dot{v}_{y0} - \dot{\omega} y_T' \sin\psi - \omega^2 y_T' \cos\psi + \dot{\omega} x_T' \cos\psi - \omega^2 x_T' \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{xT} \\ \dot{v}_{yT} \\ \dot{v}_{zT} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{bmatrix} v_{x0} - \omega\left(y_i - y_0\right) - R_i \Omega_i \cos\alpha_i \\ v_{y0} + \omega\left(x_i - x_0\right) - R_i \Omega_i \sin\alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_i = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x0} - \dot{\omega}\left(y_i - y_0\right) - \omega\left(\dot{y}_0 - y_i'\omega \sin\psi + x_i'\omega \cos\psi - e_i \dot{\alpha}_i \cos\alpha_i - v_{y0}\right) - R_i \dot{\Omega}_i \cos\alpha_i + R_i \Omega_i \dot{\alpha}_i \sin\alpha_i \\ \dot{v}_{y0} + \dot{\omega}\left(x_i - x_0\right) + \omega\left(\dot{x}_0 - x_i'\omega \sin\psi - y_i'\omega \cos\psi + e_i \dot{\alpha}_i \sin\alpha_i - v_{x0}\right) - R_i \dot{\Omega}_i \sin\alpha_i - R_i \Omega_i \dot{\alpha}_i \cos\alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{xi} \\ \dot{v}_{yi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Výsledné rovnice opisujúce pohyb sú:

$$m_R\left(\dot{v}_{x0}-\dot{\omega}x_T'\sin\psi-\omega^2x_T'\cos\psi-\dot{\omega}y_T'\cos\psi+\omega^2y_T'\sin\psi\right)=\sum T_{xi} \qquad (1)$$

$$m_R\left(\dot{v}_{y0}-\dot{\omega}y_T'\sin\psi-\omega^2y_T'\cos\psi+\dot{\omega}x_T'\cos\psi-\omega^2x_T'\sin\psi\right)=\sum T_{yi} \qquad (2)$$

$$m_Rg=\sum N_i \qquad (3)$$

$$0=\sum\left(y_i-y_T\right)N_i-\sum\left(z_i-z_T\right)T_{yi} \qquad (4)$$

$$0=\sum\left(z_i-z_T\right)T_{xi}-\sum\left(x_i-x_T\right)N_i \qquad (5)$$

$$J_R\dot{\omega}=\sum\left(x_i-x_T\right)T_{yi}-\sum\left(y_i-y_T\right)T_{xi} \qquad (6)$$

$$J_i\dot{\Omega}_i=M_i-R_iT_{xi}\cos\alpha_i-R_iT_{yi}\sin\alpha_i \qquad (7)$$

$$J_{Ci}\ddot{\alpha}_i=M_{Ci}-e_iT_{yi}\cos\alpha_i+e_iT_{xi}\sin\alpha_i \qquad (8)$$

Ak koleso šmýka, potom platia rovnice:

$$T_{xi}+\mu_iN_i\frac{v_{xi}}{\sqrt{v_{xi}^{\ 2}+v_{yi}^{\ 2}}}=0 \qquad (9a)$$

$$T_{yi}+\mu_iN_i\frac{v_{yi}}{\sqrt{v_{xi}^{\ 2}+v_{yi}^{\ 2}}}=0 \qquad (10a)$$

Ak koleso nešmýka, potom platia rovnice:

$$\dot{v}_{x0}-\dot{\omega}\left(y_i-y_0\right)-\omega\left(\dot{y}_0-y_i'\omega\sin\psi+x_i'\omega\cos\psi-e_i\dot{\alpha}_i\cos\alpha_i-v_{y0}\right)-R_i\dot{\Omega}_i\cos\alpha_i+R_i\Omega_i\dot{\alpha}_i\sin\alpha_i=0 \qquad (9b)$$

$$\dot{v}_{y0}+\dot{\omega}\left(x_i-x_0\right)+\omega\left(\dot{x}_0-x_i'\omega\sin\psi-y_i'\omega\cos\psi+e_i\dot{\alpha}_i\sin\alpha_i-v_{x0}\right)-R_i\dot{\Omega}_i\sin\alpha_i-R_i\Omega_i\dot{\alpha}_i\cos\alpha_i=0 \qquad (10b)$$

Celkovo teda máme (6 + 4 x počet kolies) rovníc. Neznámymi nestavovými premennými sú:

$\dot{v}_{x0}$, $\dot{v}_{y0}$, $\dot{\omega}$, T_{xi}, T_{yi}, N_i, $\dot{\Omega}_i$, $\ddot{\alpha}_i$ (3 + 5 x počet kolies)

Vstupnými premennými sú momenty síl:

M_i, M_{Ci} (2x počet kolies)

Stavové veličiny sú:

x_0 , y_0 , ψ , v_{x0}, v_{y0} , ω , Ω_i , α_i , $\dot{\Omega}_i$, $\dot{\alpha}_i$ (6 + 4x počet kolies)

Ostatné veličiny sú kvázi konštantnými parametrami modelu.

Ak máme 3 kolesá, máme 6+4x3 = 18 rovníc a 3 + 5x3 = 18 neznámych nestavových veličín, t. j. systém je úplný. Menší počet kolies (2 resp. 1) sa používa iba zriedka (diferenciálne riadený podvozok má pomocné kastorové koleso). Pre 4-kolesový robot pridáme predpoklad, že pre jednotlivé normálové sily platí vzťah:

$$N_1 = \frac{mg}{4} + N_x + N_y$$

$$N_2 = \frac{mg}{4} + N_x - N_y$$

$$N_3 = \frac{mg}{4} - N_x - N_y$$

$$N_4 = \frac{mg}{4} - N_x + N_y$$

kde N_x a N_y sú ďalšie nestavové neznáme premenné zodpovedajúce pozdĺžnemu a priečnemu nesúladu medzi normálovými silami kolesa. Tieto 4 rovnice nahradia rovnicu (3), Dostávame teda systém pozostávajúci z:

6 + 4x4 + 4 - 1 = 25 rovníc a 3 + 5x4 + 2 = 25 neznámych, a teda úplný systém.

V prípade 6 kolies (napr. 4 podporné kastorové kolesá a dve diferenciálne riadené kolesá) nahradíme rovnicu (3) rovnicami:

$$N_1 = \frac{mg}{6} + N_x + N_y$$

$$N_2 = \frac{mg}{6} + N_x - N_y$$

$$N_3 = \frac{mg}{6} - N_x - N_y$$

$$N_4 = \frac{mg}{6} - N_x + N_y$$

$$N_5 = \frac{mg}{6} + N_y$$

$$N_6 = \frac{mg}{6} - N_y$$

Dostávame teda systém:

6 + 4x6 + 6 - 1 = 35 rovníc a 3 + 5x6 + 2 = 35 neznámych, a teda opäť úplný systém.

Acknowledgement

Tento document vznikol v rámci projektu APVV SK-IL-RD-0002: Advanced Localization Sensors and Techniques for Autonomous vehicles and Robots (ALoSTAR).