第二章部分题目答案

2-21. 求正弦信号 $x(t)=A\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ 的单边、双边频谱、实频图、虚频图，如该信号延时 $T/4$ 后，其各频谱如何变化？

解： (1)由于 $x(t)=A\sin(\frac{2\pi}{T}t)=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2})$ ，符合三角函数展开形式，则

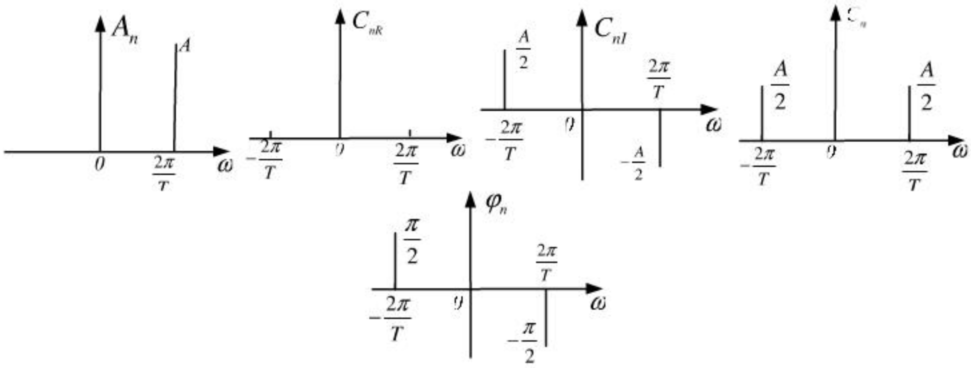
在 $\frac{2\pi}{T}$ 处： $A_n=1$ ，所以，单边频谱图为图 1 的（a）。

对 $x(t)=A\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ 进行复指数展开：由于 $x(t)=A\sin(\frac{2\pi}{T}t)=\frac{jA}{2}(e^{-j\frac{2\pi}{T}t}-e^{j\frac{2\pi}{T}t})$

所以，在 $-\frac{2\pi}{T}$ 处： $C_n=\frac{jA}{2}$ ， $C_{nR}=0$ ， $C_{nI}=\frac{A}{2}$ ， $|C_n|=\frac{A}{2}$ ， $\theta_n=\frac{\pi}{2}$

在 $\frac{2\pi}{T}$ 处： $C_n=-\frac{jA}{2}$ ， $C_{nR}=0$ ， $C_{nI}=-\frac{A}{2}$ ， $|C_n|=\frac{A}{2}$ ， $\theta_n=-\frac{\pi}{2}$

所以，实频图、虚频图、双边幅频图、双边相频图分别如图 1 的(b)、(c)、(d)、(e)。



(a)单边幅频图 (b) 实频图 (c) 虚频图 (d))双边幅频图 (e) 双边相频图

图 1 正弦信号 x(t)的频谱

（2）当延迟 $T/4$ 后， $x(t)$ 变为 $x(t)=A\sin\left[\frac{2\pi}{T}(t-\frac{T}{4})\right]$，由于

$x(t)=A\sin\left[\frac{2\pi}{T}(t-\frac{T}{4})\right]=A\cos\left[\frac{2\pi}{T}(t-\frac{T}{4})-\frac{\pi}{2}\right]=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\pi\right)$，符合三角函数展开形式，则

在 $\frac{2\pi}{T}$ 处： $A_n=1$ ，所以，单边频谱图为图 2 的（a）。

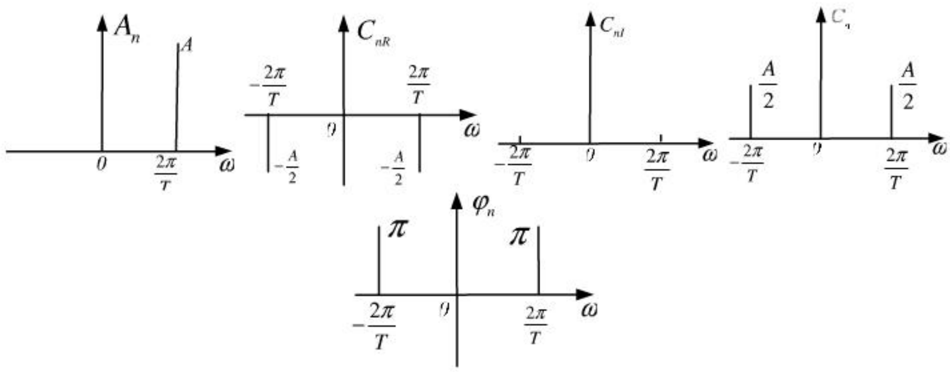
对 $x(t)=A\sin\left[\frac{2\pi}{T}(t-\frac{T}{4})\right]=A\sin(\frac{2\pi}{T}t-\frac{T}{2})=-A\cos(\frac{2\pi}{T}t)$ 进行复指数展开，

由于 $x(t)=-A\cos(\frac{2\pi}{T}t)=\frac{-A}{2}(e^{-j\frac{2\pi}{T}t}+e^{j\frac{2\pi}{T}t})$

所以，在 $-\dfrac{2\pi}{T}$ 处：$C_n=-\dfrac{A}{2}$，$C_{nR}=-\dfrac{A}{2}$，$C_{nI}=0$，$|C_n|=\dfrac{A}{2}$，$\theta_n=\pi$

在 $\dfrac{2\pi}{T}$ 处：$C_n=-\dfrac{A}{2}$，$C_{nR}=-\dfrac{A}{2}$，$C_{nI}=0$，$|C_n|=\dfrac{A}{2}$，$\theta_n=\pi$

所以，实频图、虚频图、双边幅频图、双边相频图分别如图 2 的(b)、(c)、(d)、(e)。



(a)单边幅频图　　(b) 实频图　　(c) 虚频图　　(d))双边幅频图　　(e) 双边相频图

图 2 正弦信号 x(t)延迟后的频谱

2-22．已知方波的傅立叶级数展开式为

$$f(t)=\frac{4A_0}{\pi}\left(\cos\omega_0 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t-\cdots\right)$$

求该方波的均值、频率成分、各频率的幅值，并画出单边幅频谱图。

解：均值 a_0=0；该方波各谐波的频率分别为 ω_0、$3\omega_0$、$5\omega_0$ …；对应的幅值分别为 $\dfrac{4A_0}{\pi}$、$\dfrac{4A_0}{3\pi}$、$\dfrac{4A_0}{5\pi}$ …，即 $\dfrac{4A}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, n=1,3,5,...$，该方波的单边幅频谱图如图 3 所示。

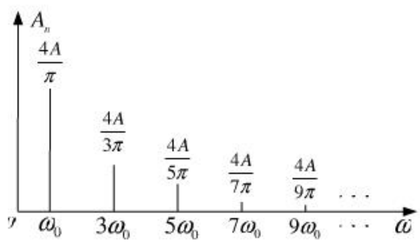


图 3　方波的单边幅频谱

2-23 试求图 2.55 所示信号的频谱函数(提示：可将 $f(t)$ 看成矩形窗函数与 $\delta(t-2)$、$\delta(t+2)$ 脉冲函数的卷积)。

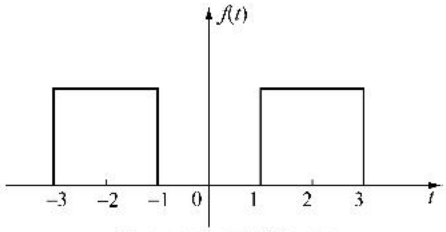


图 2.55　习题 2-23

解：f(t)可以看作位于原点、宽度为 2 的如下式的窗函数与 δ(t-2)、δ(t+2)的卷积：

$$w(t)=\begin{cases}1 & |t|\le 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

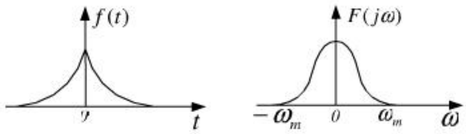
即，$f(t)=w(t)*[\delta(t+2)+\delta(t-2)]$

而 $w(t)\Rightarrow W(jf)=2\sin C(2\pi f)$，根据时移特性：$\delta(t+2)\Rightarrow e^{j2\pi f\cdot 2}$；$\delta(t-2)\Rightarrow e^{-j2\pi f\cdot 2}$

则 $f(t)$ 的频谱函数为：

$$\begin{aligned}
&f(t)=w(t)*[\delta(t+2)+\delta(t-2)]\\
&\Rightarrow W(jf)\cdot[F(\delta(t+2)+F(\delta(t-2)]\\
&=2\sin C(2\pi f)\cdot(e^{j2\pi f\cdot 2}+e^{-j2\pi f\cdot 2})\\
&=2\sin C(2\pi f)\cdot(e^{j4\pi f}+e^{-j4\pi f})
\end{aligned}$$

2-24．一时间函数 $f(t)$ 及其频谱函数图如图 2.56 所示，已知函数 $x(t)=f(t)\cos\omega_0 t$ 设 $\omega_0>\omega_m$ [ω_m 为 $f(t)$ 中最高频率分量的角频率]，试出 $x(t)$ 和 $x(t)$ 的双边幅频谱 $X(j\omega)$ 的示意图形，当 $\omega_0<\omega_m$ 时，$X(j\omega)$ 的图形会出现什么样的情况？



(a) $f(t)$ 的时域波形　　(b) $f(t)$ 的频谱

图 2.56 $f(t)$ 的时域波形及其频谱

解：令 $x_1(t)=\cos\omega_0 t$，则 $x(t)=f(t)x_1(t)$，即为 $f(t)$ 和 $\cos\omega_0 t$ 的乘积，所以其图形如图 4(a)所示。

若 $x_1(t)\Leftrightarrow X_1(j\omega)$，$f(t)\Leftrightarrow F(j\omega)$，则 $x(t)=f(t)x_1(t)\Leftrightarrow X(j\omega)=X_1(j\omega)*F(j\omega)$

由于 $X_1(j\omega)=\frac{1}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$，其双边幅频图如图 4(b)所示。

根据 $x_1(t)x_2(t)\Leftrightarrow X_1(j\omega)*X_2(j\omega)$，则

$$X(j\omega)=X_1(j\omega)*F(j\omega)=\frac{1}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]*F(j\omega)$$

根据 $x(j\omega)*\delta(j\omega)=x(j\omega)$，$x(\omega)*\delta(\omega-\omega_0)=x(\omega-\omega_0)$ 和 $x(\omega)*\delta(\omega+\omega_0)=x(\omega+\omega_0)$ 则

$$X(j\omega)=X_1(j\omega)*F(j\omega)=\frac{1}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]*F(j\omega)=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$$

$$|X(j\omega)|=|X_1(j\omega)|*F(j\omega)=\frac{1}{2}[|\delta(\omega-\omega_0)|+|\delta(\omega+\omega_0)|]*F(j\omega)=\frac{1}{2}[|F(\omega-\omega_0)|+|F(\omega+\omega_0)|]$$

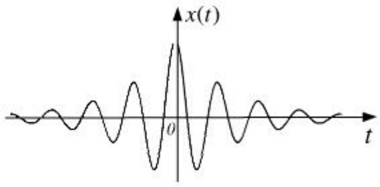
$\frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)$ 表示把 $\frac{1}{2}F(\omega)$ 的图形搬移到 ω_0 处，图形的最大幅值为 $\frac{1}{2}F(\omega)$；

$\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$ 表示把 $\frac{1}{2}F(\omega)$ 的图形搬移到 $-\omega_0$ 处，图形的最大幅值为 $\frac{1}{2}F(\omega)$；

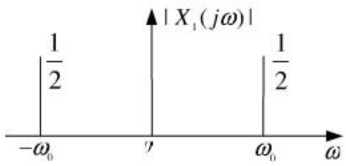
$\frac{1}{2}|F(\omega-\omega_0)|$ 表示把 $\frac{1}{2}|F(\omega)|$ 的图形搬移到 ω_0 处，图形的最大幅值为 $\frac{1}{2}|F(\omega)|$；

$\frac{1}{2}|F(\omega+\omega_0)|$ 表示把 $\frac{1}{2}|F(\omega)|$ 的图形搬移到 $-\omega_0$ 处，图形的最大幅值为 $\frac{1}{2}|F(\omega)|$；

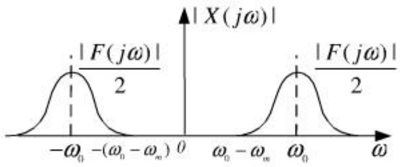
由于 $x_1(t)$ 的频谱图用双边幅频图表示，所以 $x(t)$ 的双边幅频图 $|X(j\omega)|$ 如图 4(c)所示，当 $\omega_0 < \omega_m$ 时， $x(t)$ 的双边幅频图 $|X(j\omega)|$ 如图 4(d)所示。



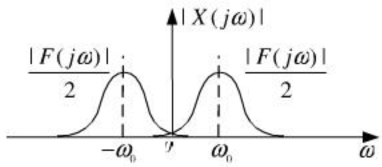
(a) $x(t)$ 的时域波形



(b) $x_1(t)=\cos\omega_0 t$ 的频谱



(c) $x(t)$ 的频谱



(d) $\omega_0 < \omega_m$ 时， $x(t)$ 的频谱

图 4 习题 2-23 的示意图

2-25．图 2.57 所示周期三角波的数学表达式为

$$x(t)=\begin{cases} A+\dfrac{4A}{T}t & -\dfrac{T}{2}\le t\le 0 \\ A-\dfrac{4A}{T}t & 0\le t\le \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

求出傅立叶级数的三角函数展开式并画出单边频谱图。

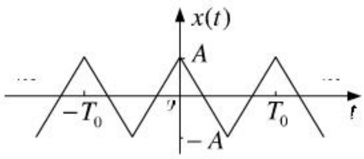
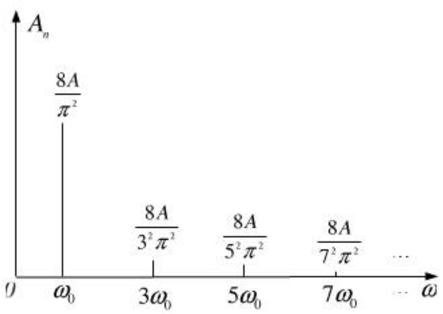


图 2.57 周期性三角波

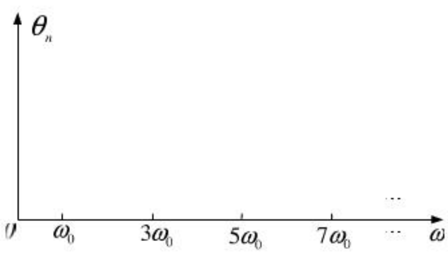
解：周期三角波的傅立叶级数展开式为：

$$x(t)=\frac{8A}{\pi^2}(\cos\omega_0 t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega_0 t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega_0 t+\cdots)$$

其单边频谱图如图 5 所示。



(a) 幅频图



(b) 相频图

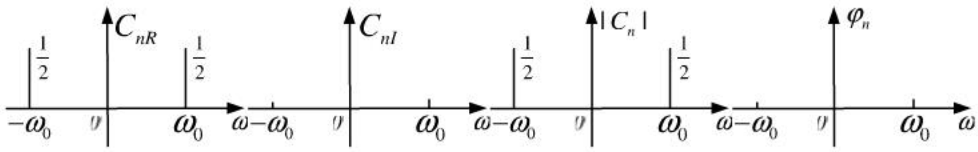
图 5 周期性三角波的频谱

补充：画出 $\cos\omega_0 t$ 、 $\sin\omega_0 t$ 复指数展开的实、虚频谱，双边幅频谱、双边相频谱，并验证是否满足信号的时移定理。

解：$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}\right)$

在 $-\omega_0$ 处：$C_n=\frac{1}{2}$，$C_{nR}=\frac{1}{2}$，$C_{nI}=0$，$|C_n|=\frac{1}{2}$，$\theta_n=0$

在 ω_0 处：$C_n=\frac{1}{2}$，$C_{nR}=\frac{1}{2}$，$C_{nI}=0$，$|C_n|=\frac{1}{2}$，$\theta_n=0$



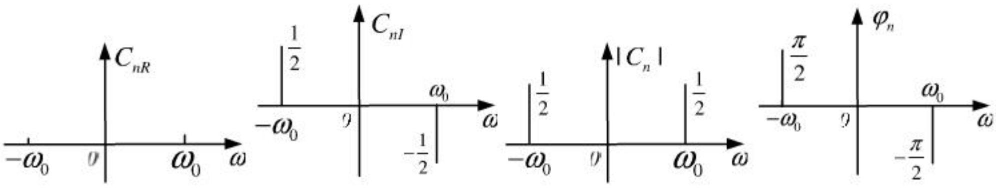
(a) 实频图 (b) 虚频图 (c)双边幅频图 (d) 双边相频图

图 6

$\sin\omega_0 t=\frac{j}{2}\left(e^{-j\omega_0 t}-e^{j\omega_0 t}\right)$

在 $-\omega_0$ 处：$C_n=\frac{j}{2}$，$C_{nR}=0$，$C_{nI}=\frac{1}{2}$，$|C_n|=\frac{1}{2}$，$\theta_n=\frac{\pi}{2}$

在 ω_0 处：$C_n=-\frac{j}{2}$，$C_{nR}=0$，$C_{nI}=-\frac{1}{2}$，$|C_n|=\frac{1}{2}$，$\theta_n=-\frac{\pi}{2}$



(a) 实频图 (b) 虚频图 (c))双边幅频图 (d) 双边相频图

图 7

$\sin\omega_0 t=\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})=\cos\left[\omega_0(t-\frac{\pi}{2\omega_0})\right]$，则 $t_0=\frac{\pi}{2\omega_0}$

在 $-\omega_0$ 处：相移：$-(-\omega_0)t_0=-(-\omega_0)\frac{\pi}{2\omega_0}=\frac{\pi}{2}$

在 ω_0 处：相移：$-\omega_0 t_0=-\omega_0\frac{\pi}{2\omega_0}=-\frac{\pi}{2}$

有图 6 和 7 比较可知，$\sin\omega_0 t$ 比 $\cos\omega_0 t$ 在 $-\omega_0$ 、ω_0 处的相移为 $\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$，因此满足信号的时移定理。

第三章部分题目答案

3-19 若压电式力传感器灵敏度为 90 pC/MPa，电荷放大器的灵敏度为 0.05V/pC，若压力变化 25MPa，为使记录笔在记录纸上的位移不大于 50mm，则笔式记录仪的灵敏度应选多大？

解：压电式力传感器、电荷放大器和笔式记录仪的灵敏度分别为 S1、S2 和 S3，它们串联后的总灵敏度为：$S = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，其中 S1=90 pC/MPa，S2＝0.05V/pC ，Δx=25MPa，Δy=50mm，则 $S_3 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x \cdot S_1 \cdot S_2} = \dfrac{50mm}{25MPa \cdot 90pC/MPa \cdot 0.05V/pC} = \dfrac{4}{9}\dfrac{mm}{V} = 0.4444\dfrac{mm}{V}$

3-20 图 3.24 为一测试系统的框图，试求该系统的总灵敏度。

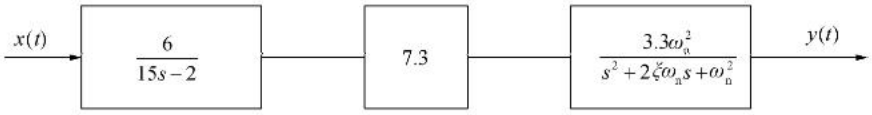


图 4.24　习题 3-20 图

解：第一个框图为一阶系统，由于 $\dfrac{6}{15s+2} = \dfrac{6/2}{15/2s+1} = \dfrac{3}{7.5s+1}$，而 $\dfrac{K}{\tau s+1} = \dfrac{3}{7.5s+1}$，所以其灵敏度为 3;

第二个框图的灵敏度为 7.3;

第三个框图为二阶系统，由于 $\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \dfrac{3.3\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$，所以其灵敏度为 3.3;

系统为三个环节的串联，故系统的总灵敏度为 3×7.3×3.3=72.27。

3-21 由传递函数为 $H_1(s) = \dfrac{1.5}{3.5s+0.5}$ 和 $H_2(s) = \dfrac{100\omega_n^2}{s^2+1.4\omega_n s+\omega_n^2}$ 的两个环节，串联组成一个测试系统，问此系统的总灵敏度是多少？

解：显然，$H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ 和一阶、二阶系统传递函数的形式接近，分别写成一阶和二阶形式的形式，则

$$H_1(s) = \frac{K}{\tau s+1} = \frac{1.5}{3.5s+0.5} = \frac{3}{7s+1} \qquad K=3$$

$$H_2(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{100\omega_n^2}{s^2+1.4\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{100\omega_n^2}{s^2+2\cdot 0.7\omega_n s+\omega_n^2} \qquad K=100$$

而系统是两个环节的串联，因此，总的灵敏度为 3*100=300.

3-22 用时间常数为 2s 的一阶装置测周期为 2s、4s 的正弦信号，试求周期为 4s 装置产生的幅

值误差和相位滞后量分别是 2s 装置的几倍？
解：由题知，一阶装置的时间常数 τ=2，正弦信号周期为 2s 时，

$$A(\omega_1)=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega_1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\frac{2\pi}{T_1})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(2\cdot\frac{2\pi}{2})^2}}=0.1572$$

$$\varphi(\omega_1)=-\arctan(\tau\frac{2\pi}{T_1})=-\arctan(2\cdot\frac{2\pi}{2})=-80.97^o$$

正弦信号周期为 4s 时，

$$A(\omega_2)=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega_2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\frac{2\pi}{T_2})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(2\cdot\frac{2\pi}{4})^2}}=0.3033$$

$$\varphi(\omega_2)=-\arctan(\tau\frac{2\pi}{T_2})=-\arctan(2\cdot\frac{2\pi}{4})=-72.32^o$$

由于 $\frac{A(\omega_2)}{A(\omega_1)}=2$ ， $\frac{\varphi(\omega_2)}{\varphi(\omega_2)}=\frac{-72.32}{-80.97}=0.8936$ ，则周期为 4s 装置产生的幅值误差和相位滞后量分别是 2s 装置的 2 和 0.8936 倍。

3-23 用时间常数为 2s 的一阶装置测量烤箱内的温度，箱内的温度近似地按周期为 160s 作正弦规律变化，且温度在 500～1000℃范围内变化，试求该装置所指示的最大值和最小值各是多少？

解：由题知，一阶装置的时间常数 τ=2，输入信号的周期为 160s，最大幅值 1000，最小幅值 500 ，则该装置所指示的最大值为：

$$1000\cdot A(\omega_1)=\frac{1000}{\sqrt{1+(\tau\omega_1)^2}}=\frac{1000}{\sqrt{1+(\tau\frac{2\pi}{T})^2}}=\frac{1000}{\sqrt{1+(2\cdot\frac{2\pi}{160})^2}}=996.93$$

该装置所指示的最小值为：

$$500\cdot A(\omega_1)=\frac{500}{\sqrt{1+(\tau\omega_1)^2}}=\frac{500}{\sqrt{1+(\tau\frac{2\pi}{T})^2}}=\frac{500}{\sqrt{1+(2\cdot\frac{2\pi}{160})^2}}=498.465$$

3-24 设用时间常数为 0.2s 的一阶装置测量正弦信号：x(t)=sin4t+0.4sin40t (K=1)，试求其输出信号。

解：由题知，一阶装置的时间常数 τ=0.2，输入信号 x(t)为正弦信号 $x_1(t)$=sin4t 和 $x_2(t)$=0.4sin40t 的叠加。

对 $x_1(t)$：角频率 $\omega_1=4$，幅值 $A_1=1$，初相位 $\varphi_1=0$；则

$$A(\omega_1)=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega_1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(0.2\cdot 4)^2}}=0.78$$

$$\varphi(\omega_1)=-\arctan(\tau\omega_1)=-\arctan(0.2\cdot 4)=-38.66^o$$

其输出信号的幅值为： $A(\omega_1)*A_1=0.78*1=0.78$
相位为：$\varphi_2-\varphi_1=\varphi(\omega_1)\rightarrow\varphi_2=\varphi(\omega_1)+\varphi_1=-38.66^o$
其输出信号为：$y_1(t)=0.78\sin(4t-38.66^o)$
对 $x_2(t)$：角频率 $\omega_2=40$，幅值 $A_2=0.4$；则

$$A(\omega_2)=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega_2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(0.2\cdot 40)^2}}=0.124$$

$$\varphi(\omega_2)=-\arctan(\tau\omega_2)=-\arctan(0.2\cdot 40)=-82.875^o$$

其输出信号的幅值为：$A(\omega_2)*A_2=0.124*0.4=0.05$
相位为：$\varphi_2-\varphi_1=\varphi(\omega_1) \to \varphi_2=\varphi(\omega_1)+\varphi_1=-82.875^o$
其输出信号为：$y_2(t)=0.496\sin(4t-82.875^o)$

所以，x(t)为输入信号时，输出信号为：
$y(t)=y_1(t)+y_2(t)=0.78\sin(4t-38.66^o)+0.05\sin(4t-82.875^o)$

3-25 用一阶系统对 100Hz 正弦信号进行测量，如果要求振幅误差在 5%以内，则时间常数应取多少？如用具有该时间常数的同一系统作 50Hz 正弦信号的测试，问此时的振幅误差和相位差是多少？

1．解：(1) 因为 $\delta=|1-A(\omega)|$，故当 $|\delta|\leqslant 5\%=0.05$ 时，即要求 $1-A(\omega)\leqslant 0.05$，所以 $1-\dfrac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2+1}}\leqslant 0.05$。化简得 $(\omega\tau)^2\leqslant\dfrac{1}{0.95^2}-1=0.108$，则

$$\tau\leqslant\sqrt{1.08}\cdot\frac{1}{2\pi f}=\sqrt{1.08}\cdot\frac{1}{2\pi\times 100\mathrm{s}}=5.23\times 10^{-4}\mathrm{s}$$
（2 分）

(2) 当作 50Hz 信号测试时，有（4 分）

$$\delta=1-\frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{(2\pi f\tau)^2+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{(2\pi\times 50\times 5.23\times 10^{-4})^2+1}}=1-0.9868=1.32\%$$

$$\varphi=\arctan(-\omega\tau)=\arctan(-2\pi f\tau)=\arctan(-2\pi\times 50\times 5.23\times 10^{-4})=-9^o19'50''$$

3-26 已知某线性装置 $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+0.01\omega^2}}$，$\varphi(\omega)=-\arctan 0.1\omega$，现测得该系统稳态输出 y(t)=10sin(30t-45°)，试求系统的输入信号 x(t)。

解：根据频率保持特性：输入信号的频率 ω=30，则该装置的幅频特性和相频特性分别为：

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+0.01\cdot 30^2}}=0.3162 \qquad \varphi(\omega)=-\arctan(0.1\cdot 30)=-71.565^o$$

则输入信号的幅值和相位分别为：

$A=10/A(\omega)=10/0.3162=31.6256$ $\quad\varphi_1=\varphi_2-\varphi(\omega)=-45^o+71.565^o=26.5651^o$

则输入信号为：$x(t)=31.6256\sin(30t+26.5651^o)$

3-27 将温度计从 20℃的空气中突然插入 100℃的水中，若温度计的时间常数 τ=2.5s，则 2s 后的温度计指示值是多少？

3-28 某测量装置的频率响应函数为 $H(j\omega)=\dfrac{1}{1+0.05j\omega}$，试问：1)该系统是什么系统？ 2)若输入周期信号 $x(t)=2\cos 10t+0.8\cos(100t-30^\circ)$，试求其稳态响应 y(t)。

答: 1)一阶系统，

2) 一阶系统: $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$ $\quad\varphi(\omega)=-\arctan(\omega\tau)$

当 ω=10 时，$A(\omega)=A(10)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+(0.05*10)^2}}=0.8944$

$$\varphi(\omega)=\varphi(10)=-\arctan(\omega\tau)=-\arctan(10*0.05)=-26.57^o$$

当 ω=100 时，$A(\omega)=A(100)=\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+(0.05*100)^2}}=0.1961$

$$\varphi(\omega)=\varphi(100)=-\arctan(\omega\tau)=-\arctan(100*0.05)=-78.69^{o}$$

所以，

$$y(t)=2\ A(10)\ \cos(10t-\varphi(10))+0.8A(100)\ \cos(10t-30^{0}-\varphi(100))$$
$$=1.78\cos(10t-26.56^{0})+0.156\cos(10t-108.69^{0})$$

3-29 用时间常数为 0.5 的一阶装置进行测量，若被测参数按正弦规律变化，若要求装置指示值的幅值误差小于 2%，问被测参数变化的最高频率是多少？如果被测参数的周期是 2s 和 5s，问幅值误差是多少？

解：由题意可知：τ=0.5s, δ=|1-A(2πf)|×100％=(1-A(2πf))×100％<2% 则 $1-\dfrac{1}{\sqrt{1+(0.5\cdot 2\pi f)^{2}}}<0.02$，即 f<0.0646Hz

被测参数的周期是 2s 时，f=1/2=0.5Hz, δ=(1-A(2πf))×100％=(1-A(2×π×0.5))×100％=46.3%

被测参数的周期是 5s 时，f=1/5=0.2Hz, δ=(1-A(2πf))×100％=(1-A(2×π×0.2))×100％=15.3%

3-30 已知某测试系统传递函数 $H(s)=\dfrac{1}{1+0.5s}$，当输入信号分别为 $x_1=\sin\pi t$，$x_2=\sin 4\pi t$ 时，试分别求系统稳态输出，并比较它们幅值变化和相位变化。

解：由题知，一阶装置的时间常数 τ=0.5，当输入信号 x(t)为正弦信号 $x_1(t)=\sin\pi t$ 时，信号的角频率 $\omega_1=\pi$，幅值 $A_1=1$，初相位 $\varphi_1=0$；则

$$A(\omega_1)=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega_1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(0.5\cdot\pi)^2}}=0.537$$

$$\varphi(\omega_1)=-\arctan(\tau\omega_1)=-\arctan(0.5\cdot\pi)=-57.52^{o}$$

其输出信号的幅值为： $A(\omega_1)*A_1=0.537*1=0.537$

相位为：$\varphi_2-\varphi_1=\varphi(\omega_1)\rightarrow\varphi_2=\varphi(\omega_1)+\varphi_1=-57.52^{o}$；其输出信号为：$y_1(t)=0.537\sin(\pi t-57.52^{o})$

当输入信号为 $x_2(t)=\sin 4\pi t$ 时，其角频率 $\omega_2=4\pi$，幅值 $A_2=1$，初相位 $\varphi_1=0$；则

$$A(\omega_2)=\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega_2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(0.5\cdot 4\pi)^2}}=0.1572$$

$$\varphi(\omega_2)=-\arctan(\tau\omega_2)=-\arctan(0.5\cdot 4\cdot\pi)=-80.96^{o}$$

其输出信号的幅值为：$A(\omega_2)*A_2=0.1572*1=0.1572$

相位为：$\varphi_2-\varphi_1=\varphi(\omega_1)\rightarrow\varphi_2=\varphi(\omega_1)+\varphi_1=-80.96^{o}$

其输出信号为：$y_2(t)=0.1572\sin(4\pi t-80.96^{o})$

可以看出，对于信号 $x_1=\sin\pi t$，其幅值由 1 变为 0.537,相位由 0 º 变为-57.52º；对于信号 $x_2=\sin 4\pi t$，其幅值由 1 变为 0.1572,相位由 0 º 变为-80.96º；信号 $x_2=\sin 4\pi t$ 的幅值和相位变化大于信号 $x_1=\sin\pi t$ 的幅值和相位的变化。

3-31 对一个二阶系统输入单位阶跃信号后，测得响应中产生的第一个过冲量 M 的数值为 1.5，同时测得其周期为 6.28s。设已知装置的静态增益为 3，试求该装置的传递函数和装置在无阻尼固有频率处的频率响应。

答： 由于静态增益为 3，则 $M_{\max}=M/3=1.5/3=0.5$

$$\xi=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{\ln M_{\max}}\right)^2+1}}=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{\ln 0.5}\right)^2+1}}=0.2155$$

则

从而，
$$\omega_n=\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{2\pi/T_d}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{2\pi/6.28}{\sqrt{1-0.2155^2}}=1.02$$

于是，
$$H(s)=\frac{1.02^2}{s^2+2\times0.215\times1.02s+1.02^2}$$

当 $\omega=\omega_n$ 时，
$$A(\omega_n)=\frac{1}{\sqrt{[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2]^2+4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{4\xi^2}}=\frac{1}{2\xi}=\frac{1}{2\times0.2155}=2.32$$

$$\varphi(\omega_n)=-\arctan\frac{2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2}=-\arctan\frac{2\xi}{1-1}=-\frac{\pi}{2}$$

3-32 一种力传感器可作为二阶系统处理。已知传感器的固有频率为 800 Hz，阻尼比为 0.14，问使用该传感器作频率为 500Hz 和 1000Hz 正弦变化的外力测试时，其振幅和相位角各为多少？

答: f=500Hz 时，

$$A(f)=A(500)=\frac{1}{\sqrt{[1-\left(\frac{f}{f_n}\right)^2]^2+(2\xi\left(\frac{f}{f_n}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{[1-\left(\frac{500}{800}\right)^2]^2+(2\xi)^2\left(\frac{500}{800}\right)^2}}=1.5625$$

$$\varphi(f)=\varphi(500)=-\arctan\frac{2\xi\left(\frac{f}{f_n}\right)}{1-\left(\frac{f}{f_n}\right)^2}=-\arctan\frac{2\xi\left(\frac{500}{800}\right)}{1-\left(\frac{500}{800}\right)^2}=\text{-}16.023^{\mathrm{o}}$$

f=1000Hz 时，

$$A(f)=A(1000)=\frac{1}{\sqrt{[1-\left(\frac{f}{f_n}\right)^2]^2+(2\xi\left(\frac{f}{f_n}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{[1-\left(\frac{1000}{800}\right)^2]^2+(2\xi)^2\left(\frac{1000}{800}\right)^2}}=1.4599$$

$$\varphi(f)=\varphi(1000)=-\arctan\frac{2\xi\left(\frac{f}{f_n}\right)}{1-\left(\frac{f}{f_n}\right)^2}=-\arctan\frac{2\xi\left(\frac{1000}{800}\right)}{1-\left(\frac{1000}{800}\right)^2}=31.8908$$

第五章部分题目答案

5-21　已知直流电桥 $R_1=9725\Omega$，$R_2=8820\Omega$，$R_3=8550\Omega$，$R_4=9875\Omega$，若激励电压 U_i=24V，试求输出电压 U_o，若 R_4 可调，试求电桥平衡时的 R_4 值。

答：
$$U_{\mathrm{o}}=\frac{R_1R_3-R_2R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}U_{\mathrm{i}}=-0.2774$$ (V)

R_4=R1*R3/R2=9427.3Ω。

5-22 选用电阻值 R=100Ω，灵敏度 S=2.5 的电阻应变片与阻值 R=100Ω 的固定电阻组成电桥，供桥电压为 10V，当应变片应变为 1000$\mu\varepsilon$ 时，若要使输出电压大于 10mV，则可采用何种接桥方式？计算输出电压值(设输出阻抗为无穷大)，并画出接线图。

解：$dR/R = \Delta R/R = S\ \varepsilon = 2.5\times1000\times10^{-6} = 2.5\times10^{-3}$

而，$U_o = K\dfrac{\Delta R}{R_0}U_i = K\times2.5\times10^{-3}\times U_i = K\times2.5\times10^{-3}\times10 = K\times25(mV)$，要使 U_o 大于 10mV，则要求 K>0.4。当为半桥单臂时，K=1/4=0.25；当为半桥双臂时，K=1/2=0.5；当为全桥时，K=1。因此应采用半桥双臂或全桥的接桥方式。

半桥双臂接法时，$U_o = K\dfrac{\Delta R}{R_0}U_i = K\times2.5\times10^{-3}\times U_i = 0.5\times2.5\times10^{-3}\times10 = 12.5(mV)$

全桥法时，$U_o = K\dfrac{\Delta R}{R_0}U_i = K\times2.5\times10^{-3}\times U_i = 1\times2.5\times10^{-3}\times10 = 25(mV)$

图略。

5-23 以阻值100Ω，灵敏度 S=2 的电阻应变片与阻值100Ω 的固定电阻组成电桥，供桥电压为 4V，并假定负载电阻无穷大，当应变片上的应变分别为 1$\mu\varepsilon$ 和 1000$\mu\varepsilon$ 时，半桥单臂、半桥双臂及全桥的输出电压，并比较三种情况下的灵敏度。

解：1）应变为 1με 时，$dR/R = \Delta R/R = S\ \varepsilon = 2\times1\times10^{-6} = 2\times10^{-6}$

半桥单臂时，输出电压：$U_o \approx \dfrac{\Delta R_1}{4R_0}U_i = 2\times10^{-6}\times\dfrac{U_i}{4} = 2\times10^{-6}\times\dfrac{4}{4} = 0.002(mV)$

半桥双臂时，输出电压：$U_o = \dfrac{\Delta R}{2R_0}U = 2\times10^{-6}\times\dfrac{U_i}{2} = 2\times10^{-6}\times\dfrac{4}{2} = 0.004(mV)$

全桥时，输出电压：$U_o = \dfrac{\Delta R}{R_0}U_i = 2\times10^{-6}\times U_i = 2\times10^{-6}\times4 = 0.008(mV)$

2）应变为 1000με 时，$dR/R = \Delta R/R = S\ \varepsilon = 2\times1000\times10^{-6} = 2\times10^{-3}$

半桥单臂时，输出电压：$U_o \approx \dfrac{\Delta R_1}{4R_0}U_i = 2\times10^{-3}\times\dfrac{U_i}{4} = 2\times10^{-3}\times\dfrac{4}{4} = 2(mV)$

半桥双臂时，输出电压：$U_o = \dfrac{\Delta R}{2R_0}U = 2\times10^{-3}\times\dfrac{U_i}{2} = 2\times10^{-3}\times\dfrac{4}{2} = 4(mV)$

全桥时，输出电压：$U_o = \dfrac{\Delta R}{R_0}U_i = 2\times10^{-3}\times U_i = 2\times10^{-3}\times4 = 8(mV)$

半桥单臂、半桥双臂和全桥时，电桥的灵敏度分别为 Ui/4,Ui/2 和 Ui，仅与输入电压有关。

5-24　设一滤波器的传递函数 H(s)= $\frac{1}{0.0036s+1}$，(1)试求上、下截止频率；(2)画出其幅频特性示意图。

解：滤波器传递函数符合低通滤波器的传递函数形式，因此，该滤波器为一低通滤波器。其中，$\tau=$0.0036。其下截止频率 f_{c1}=0Hz，上截止频率为：

$$f_{c2}=\frac{1}{2\pi\tau}=\frac{1}{2\pi g0.0036}=44.2097$$ Hz。

图略。

5-25 如图 5.38 所示的周期性方波信号，让它通过一理想带通滤波器，该滤波器的增益为 0dB，带宽 B=30Hz，中心频率 f_0＝20Hz，试求滤波器输出波形的幅频谱及均值 μ_x。

解: $20\lg\frac{A_x}{A_0}=0\text{dB}$，则 $A_x=A_0$，即滤波器的增益为 1。

方波的周期为：$T/2=1/24$，所以 $T=1/12$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=24\pi$

周期性方波信号的三角函数展开为：$y(t)=\frac{4A}{\pi}(\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t+\cdots)$

带宽 B=30Hz，中心频率 f_0＝20Hz，则 $f_0=\frac{f_{c1}+f_{c2}}{2}=20$，$B=f_{c2}-f_{c1}=30$

解上述两式，则 fc2=35Hz，fc1=5Hz。而 ω_0 对于的频率为 $f=\frac{1}{T}=12$ Hz，3 ω_0 对于的频率为：$f=36$ Hz。因此，滤波器仅能使得 y(t)的基波输出，而高于基波的谐波被全部衰减掉。故滤波器的输出为：

$$y(t)=\frac{4A}{\pi}\sin 24\pi t$$

因此，输出波形的均值即为 0。

第六章部分题目答案

6-16 已知某信号的自相关函数 $R_x(0)=500\cos\pi\tau$。试求：

(1) 该信号的均值 μ_x；

(2) 均方值 ψ_x^2；

(3) 自功率谱 $S_x(f)$。

解：(1) 自相关函数满足 $R_x(\tau)=\frac{x_0^2}{2}\cos\omega\tau$ 的形式，同时根据周期信号的自相关函数也是

周期函数，则原信号（函数）为 $x(t)=X_0\sin(\omega t+\varphi)$ 的形式，因此信号的均值为 0。

(2) 当 τ＝0 时，自相关函数即为均方值，即

$$R_x(0)=\mu_x^2+\sigma_x^2=\psi_x^2=500\cos(\omega\cdot 0)=500$$

(3) 自功率谱 $S_x(jf)$ 即为自相关函数的频谱，而自相互函数为余弦函数，由

$$F[\cos 2\pi f t]=\frac{1}{2}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$$

则 $R_x(\tau)=\dfrac{x_0^2}{2}\cos\pi\tau$ 的频率 f=1/2，故

$$S_x(jf)=F[500\cos\omega\tau]=\frac{500}{2}[\delta(f+\frac{1}{2})+\delta(f-\frac{1}{2})]=250\delta(f+\frac{1}{2})+250\delta(f-\frac{1}{2})$$

6-17 求自相关函数 $R_x(\tau)=\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}\cos 2\pi f_0\tau(\alpha>0)$ 的自谱密度函数，并画出它们的图形。

解： 在时延域，自相关函数 $R_x(\tau)$ 为 $x_1(\tau)=e^{-2\alpha\tau}(\alpha>0)$ 和 $x_2(\tau)=\cos 2\pi f_0\tau$ 两信号的乘积，因此，自相关函数的自谱密度函数为该两信号的卷积。

由表 2-4 可知：$x_1(\tau)$ 的频谱为：

$$x_1(\tau)=e^{-2\alpha\tau}(\alpha>0)=e^{-2\alpha\tau}\cdot u(t)(\alpha>0)\Rightarrow X_1(jf)=\frac{1}{2\alpha+j2\pi f}$$

$x_2(\tau)$ 的频谱为：

$$x_2(\tau)=\cos 2\pi f_0\tau\Rightarrow X_2(jf)=\frac{1}{2}[\delta(f+f_0)+(f-f_0)]$$

所以，$R_x(\tau)$ 的自谱密度函数为：

$$R_x(\tau)=e^{-2\alpha\tau}\cos 2\pi f_0\tau(\alpha>0)\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}S_x(jf)&=X_1(jf)*X_2(jf)=\frac{1}{2\alpha+j2\pi f}*\frac{1}{2}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\alpha+j2\pi(f+f_0)}+\frac{1}{2\alpha+j2\pi(f-f_0)}\right]\\&=\frac{\alpha-j\pi(f+f_0)}{4\alpha^2+4\pi^2(f+f_0)^2}+\frac{\alpha-j\pi(f-f_0)}{4\alpha^2+4\pi^2(f-f_0)^2}\end{aligned}$$

$X_1(jf)$、$X_2(jf)$ 及 $S_x(jf)$ 的图形如下：