

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Zdeňka Lacmanová

Obrazová registrace medicínských dat

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jindřich Soukup

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2013

Chtěla bych poděkovat vedoucímu své bakalářské práce Mgr. Jindřichu Soukupovi za odborné vedení a za trpělivost a ochotu při konzultacích. Dále děkuji mé rodině za vytvoření dobrého studijního prostředí.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Obrazová registrace medicínských dat

Autor: Zdeňka Lacmanová

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jindřich Soukup, pracoviště ÚTIA AV ČR, Pod Vodárenskou věží 4, CZ-182 08, Praha 8

Abstrakt: Tato práce se zabývá registrací snímků pořízených z CT angiografie, které se liší pouze otočením a posunutím. Je zde vysvětlen pojem registrace a jsou popsány transformace mezi obrazy. K registraci jsou použity tři metody. První metoda je založená na Fourierově transformaci a nazývá se fázová korelace. Druhé dvě metody využívají naměřená data z fázové korelace a následně tato data zpracovávají s využitím metody nejmenších čtverců či singulárního rozkladu. K metodám jsou podány podrobné teoretické základy, jsou matematicky odvozeny a následně implementovány a otestovány v prostředí Matlab.

Klíčová slova: fázová korelace, Fourierova transformace, singulární rozklad, registrace obrazu

Title: Medical image registration

Author: Zdeňka Lacmanová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Mgr. Jindřich Soukup, Department UTIA , Pod Vodárenskou věží 4, CZ-182 08, Praha 8, Czech Republic (Institute of Information Theory and Automation of the ASCR)

Abstract: This thesis deals with the registration of images, which differ only in the shift and rotation, taken from CT angiography. The term of registration and transformation between the images are explained here. Three methods are used for registration. The first method is based on Fourier transform and it is called the phase correlation. The other two methods use the measured data by phase correlation and then the data is processed using the least squares method or singular value decomposition. There is given detailed theoretical foundation, the methods are mathematically derived and then implemented and tested in Matlab.

Keywords: phase correlation, Fourier transform, singular value decomposition, image registration

Obsah

1	Úvod	2
2	Počítačová tomografie	3
3	Rigidní registrace obrazu	4
3.1	Obraz	4
3.2	Registrace	4
3.2.1	Princip registrace	4
3.2.2	Rozdělení	5
3.2.3	Transformace	5
3.2.4	Interpolace	7
4	Fázová korelace	10
4.1	Matematický základ	10
4.1.1	Princip fázové korelace posunutých funkcí	12
4.2	Diskrétní formulace	13
4.3	Pseudokód registrace pomocí fázové korelace	15
4.4	Okénková funkce	15
4.5	Upravený pseudokód	17
5	Alternativní metody	18
5.1	Využití metody nejmenších čtverců	19
5.2	Využití singulárního rozkladu	20
5.2.1	Určení translace	21
5.2.2	Určení rotace	21
5.2.3	Odhalení reflexe	22
5.2.4	Pseudokód registrace s použitím singulárního rozkladu	23
6	Výsledky	24
6.1	Fázová korelace	25
6.2	Metoda s použitím nejmenších čtverců	27
6.3	Metoda s použitím singulárního rozkladu	29
7	Závěr	31
	Literatura	32
	Seznam obrázků	33

Kapitola 1

Úvod

Úkolem této práce je upravit dva medicínské snímky (konkrétně snímky z CT angiografie) tak, aby co nejlépe lícovaly. Medicínské obrazy jsou obrazy pořízené lékařskými přístroji jako je počítačová tomografie, magnetická rezonance, ultrazvuk a další. Obvykle lékař pracuje s několika snímky téhož pacienta, které mohly být pořízeny v různou dobu, různými přístroji nebo před a po zavedení kontrastní látky. V těchto případech pomůže slícování obrazů tím, že lékař zjistí více informací o pacientovi. Například změnu velikosti a tvaru nádoru, rozšíření poškození mozku při Alzheimerově chorobě, či sledování průtoku krve v cévách a na základě těchto informací může lékař plánovat třeba složité operace mozku. Tedy samotné slícování, neboli registrace, je obvykle prvním krokem k nepřebornému množství lékařských postupů a na jejích výsledcích může často záviset i život pacienta.

V této práci nelze nalézt žádné nové metody ani převratné výsledky. Její funkcí je seznámit čtenáře s již známým problémem a jeho řešením, to vše správně matematicky popsat a popsany model implementovat. Implementace následně ukáže nedostatky mezi krásnou teorií a tvrdou realitou. Toto zjištění donutí člověka nejen metodu použít, ale hlavně pochopit, díky čemuž je schopný takzvaně "vidět do problému" a provádět následné úpravy, které vedou k lepším výsledkům.

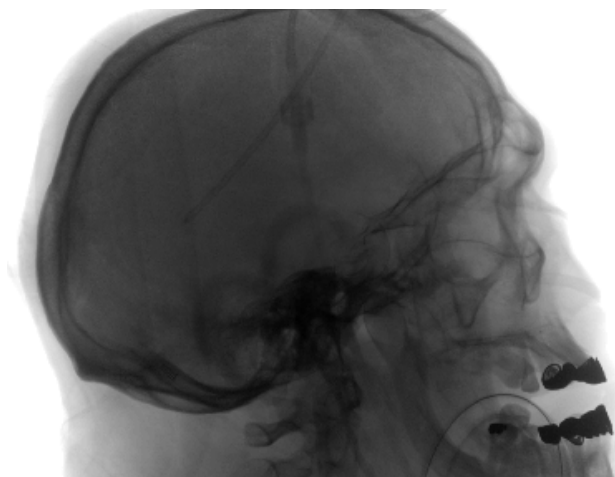
V textu se nejprve podíváme, jak vznikají a vypadají obrazy s nimiž budeme pracovat. Dále si vysvětlíme pojem registrace, uvedeme příklady transformací mezi obrazy a také metody interpolace, které musíme při některých transformacích obrazu využít. Poté se podíváme, jak pomocí metody fázové korelace zjistit posun a otočení mezi jednotlivými obrazy. Tuto metodu si pečlivě odvodíme, popíšeme její princip a modifikujeme ji tak, aby co nejlépe fungovala na našich snímcích z angiografie. Nakonec ještě vyzkoušíme dvě metody, které využívají již popsanou metodu fázové korelace k naměření určitých dat a snaží se z těchto dat určit posunutí a otočení přesněji než samotná fázová korelace. V těchto dvou metodách využijeme problém nejmenších čtverců a singulární rozklad a principy metod samozřejmě matematicky podložíme. Na závěr uvedeme výsledky některých testů a zhodnotíme účinnost metod.

Kapitola 2

Počítačová tomografie

Počítačová tomografie neboli CT (Computed Tomography) je lékařská vyšetřovací metoda, jenž pracuje na principu rentgenových paprsků. Jak již název napovídá, tomos je v českém překladu řez a graphein je psát, zobrazuje tomografie objekty pomocí řezů. Hlavními součástmi přístroje jsou Gantry, řídicí a zobrazovací počítač a stůl pro pacienta. Gantry se ještě skládá z rentgenky pevně spojené s detektory. Při vyšetření z rentgenky vychází svazek záření, který projde tělem pacienta a je zachycován detektory. V detektorech se zaznamenává množství dopadajícího záření, které je následně převedeno na elektrický signál. Tento signál se posílá k dalšímu zpracování do počítače. Počítač získaná data převádí na obraz, kde stupně šedi reprezentují stupeň absorpce rentgenového záření. Stupeň absorpce se měří pomocí Hounsfieldovy stupnice, která se pohybuje v rozsahu plus tisíc až minus tisíc Hounsfieldových jednotek. Pro zajímavost černá barva s hodnotou -1000 je stupeň absorpce pro vzduch, bílá barva s hodnotou 1000 je stupeň absorpce pro kost. Během procedury se rentgenka otočí kolem pacienta o 360°.

Další důležitou vyšetřovací metodou je CT angiografie, která nám umožňuje zobrazení cévního systému pomocí počítačové tomografie po předchozím nitrožilním podání kontrastní látky. Toto invazivní vyšetření se používá u onemocnění jako jsou například cévní malformace. Dále se používá při zjišťování zásobení nádoru krví, nebo při zjišťování rozsahu krvácení do mozku.



Obrázek 2.1: Snímek z CT angiografie

Kapitola 3

Rigidní registrace obrazu

V předchozí kapitole jsme si naznačili s jakými obrazy budeme pracovat. Nyní si zavedeme matematickou definici takového obrazu, vysvětlíme pojem registrace a následně se pustíme do popisu transformací, které můžeme mezi obrazy pozorovat.

3.1 Obraz

Definice 1. *Obraz*

Obrazem rozumíme funkci $f(x,y) : \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, kde $N, M \in \mathbb{N}$. Funkční hodnoty této funkce se nazývají intenzity.

Poznámka. Často se obraz reprezentuje obrazovou maticí A typu $M \times N$, jejíž prvky jsou nezáporná celá čísla. Pro naše účely budeme používat čtvercový obraz $f(x,y) : \{1, \dots, N\}^2 \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.2 Registrace

3.2.1 Princip registrace

Registrace je úloha nalezení transformace mezi dvěma obrazy, aby se v určitém smyslu co nejvíce podobaly. Mějme dva obrazy $I_1(x,y)$ a $I_2(x,y)$. Obraz $I_1(x,y)$ nazveme fixní a obraz $I_2(x,y)$ nazveme plovoucí. Pak úlohu registrace obrazů můžeme popsat jako proces hledání funkce $\hat{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že platí

$$\hat{T} = \arg \min_{T \in H} \mathbf{K}(I_1(x,y), \mathbf{g}(I_2(T(x,y)))),$$

kde \mathbf{K} : je kriteriální funkce, která určuje, jak jsou si obrázky v určitém smyslu podobné. H je množina funkcí $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a funkce $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ realizuje interpolační funkci. Funkci \hat{T} budeme nazývat transformační funkcí.

3.2.2 Rozdělení

V závislosti na datech

Podle toho, jaká data (obrazy) máme k dispozici, se registrace dělí na monomodální a multimodální. Monomodální registrace pracuje s daty získanými stejnou zobrazovací technikou. U multimodální registrace pracujeme s obrazy získanými z různých zobrazovacích technik. Například potřebujeme registrovat dva obrazy, z nichž jeden je pořízen z magnetické rezonance a druhý z počítačové tomografie.

Další možností jak dělit registraci v závislosti na datech, je dle vlastností registrovaných obrázků. Pokud máme obrazy bohaté na významné body (hrany, rohy, těžiště uzavřených oblastí a další), používají se metody založené právě na těchto významných bodech. Pokud máme obrazy, kde je takových významných bodů málo, uchylujeme se k registračním metodám, které pracují s obrazem jako s celkem.

Dle volby transformační funkce

Jiné dělení registrace je podle toho, jaké požadujeme vlastnosti transformační funkce \hat{T} . Pokud je transformační funkce lineární nebo afinní, mluvíme o lineární registraci. Speciálně, pokud se dva obrazy odlišují pouze pozicí v prostoru, jsme schopni převést plovoucí obraz na fixní pomocí jednoduchých operací translace a rotace. V tomto případě mluvíme o rigidní registraci.

Je-li transformační funkce nelineární, nazveme registraci elastickou.

Shrnutí

V této práci se budeme zabývat monomodální rigidní registrací. Registrovat budeme automaticky, tedy bez zásahu člověka. Často se využívá techniky, že zkušený člověk z příslušného oboru poskytne takzvané významné body v obou obrázcích a dále se použijí registrační metody na takovém vstupu založené. Na snímcích z CT angiografie, se kterými pracujeme, je ale velmi obtížné takové body najít, protože jsou prosté ostrých hran a při ručním označení významných bodů se můžeme dopustit nemalé chyby.

Protože je pacient při získávání takových snímků obvykle upevněn v určité poloze, můžeme předpokládat, že se snímky liší pouze malou rotací a posunem.

3.2.3 Transformace

Zde se zaměříme na základní afinní transformace ve dvourozměrném prostoru a to translace, rotace, zkosení a změnu měřítko.

Translace

Definice 2. *Nechť je dána orientovaná úsečka \overrightarrow{AB} a bod $X \in \mathbb{R}^2$. Translace je zobrazení, které bodu X přiřazuje bod X' tak, že $|XX'| = |AB|$ a orientovaná úsečka $\overrightarrow{XX'}$ určuje stejný směr jako orientovaná úsečka \overrightarrow{AB} .*

Jelikož translace není lineární zobrazení, nejde v \mathbb{R}^2 reprezentovat pomocí matic. Pro naši další práci ale budeme maticový zápis potřebovat a proto musíme využít homogenních souřadnic.

Definice 3. Homogenní souřadnice bodu (x_1, x_2) roviny \mathbb{R}^2 jsou uspořádaná trojice (X_1, X_2, ω) , pro kterou platí $x_1 = \frac{X_1}{\omega}$ a $x_2 = \frac{X_2}{\omega}$. Souřadnici $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nazýváme váhou bodu.

Důležité pozorování je, že bod je svými homogenními souřadnicemi určen jednoznačně. S využitím homogenních souřadnic lze translaci bodu $x = (x_1, x_2)$ o vektor $\overrightarrow{AB} = (a, b)$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, vyjádřit následovně:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rotace

Definice 4. Nechť je dán bod $X \in \mathbb{R}^2$, $S \in \mathbb{R}^2$ a orientovaný úhel $\alpha \in [0, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Rotace je zobrazení, které bodu $X \neq S$ přiřadí bod X' tak, že $|\overrightarrow{SX'}| = |\overrightarrow{SX}|$ a $|\angle XSX'| = |\alpha|$. Bod S se nazývá střed otáčení.

S použitím homogenních souřadnic vyjádříme rotaci bodu $X = (x_1, x_2)$ okolo počátku $S = (0, 0)$ o úhel α maticově:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zkosení

Definice 5. Zkosení je zobrazení, která bodu $X = (x_1, x_2)$ v rovině \mathbb{R}^2 přiřadí bod $X' = (x'_1, x'_2)$ tak, že platí $x'_1 = x_1 + ax_2$ a $x'_2 = bx_1 + x_2$, kde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty zkosení.

Maticově lze reprezentovat operaci zkosení v homogenních souřadnicích jako:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Změna měřítka

Definice 6. Změnu měřítka můžeme definovat jako zobrazení, které bodu $X = (x_1, x_2)$ v rovině \mathbb{R}^2 přiřadí bod $X' = (x'_1, x'_2)$ tak, že platí $x'_1 = ax_1$ a $x'_2 = bx_2$, kde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

Maticový zápis této operace v homogenních souřadnicích:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.4 Interpolace

Představme si, že máme nějakou transformaci a chceme zjistit, jak zrekonstruovat transformovaný obraz. Obraz si můžeme představit jako dvourozměrnou mřížku s celočíselnými souřadnicemi, která v uzlech obsahuje hodnoty intenzit (pixelů). Pokud transformujeme obraz, dostaneme obecně souřadnice reálné. V neceločíselných souřadnicích ale neznáme jednotlivé intenzity transformovaného obrazu. Pak se tedy dostáváme do problému, jak v této nově získané mřížce určit příslušné hodnoty intenzit. Řešením tohoto problému je interpolace, která určitým způsobem využije hodnoty v původním obrázku s celočíselnou mřížkou k výpočtu intenzit v transformovaném obraze.

Problém interpolace

Nechť máme uzavřený interval $[a, b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ a body x_1, \dots, x_n , $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. Nechť dále jsou dány hodnoty v jednotlivých bodech $f(x_1), \dots, f(x_n)$. Pak problém interpolace spočívá v nalezení funkce $q(x)$, $x \in [a, b]$ daného typu, že je splněno $q(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Způsoby interpolací

Pro řešení problému interpolace bylo navrženo nepřehledné množství metod. My se zaměříme jen na metody často používané při práci s obrazy. Dle článku [1] jsou nejběžnější metody interpolace metoda nejbližšího souseda, bilineární interpolace, bikubická interpolace, kvadratický spline, kubický B-spline a další. Podrobněji se podíváme na první tři vyjmenované metody. Jelikož některé z nich lze interpretovat různými způsoby, jsou níže uvedené interpolace v takových tvarech, aby co nejlépe odpovídaly našemu problému určit hodnotu intenzity uvnitř jednoho pole pixelové mřížky.

Metoda nejbližšího souseda. Nechť jsou dány čtyři body v prostoru \mathbb{R}^2 , (i, j) , $(i, j+1)$, $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ a bod $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tak, že $i \leq x \leq i+1$, $j \leq y \leq j+1$. Nechť dále $p(i, j)$, $p(i, j+1)$, $p(i+1, j)$, $p(i+1, j+1)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ jsou funkční hodnoty dané funkce p v jednotlivých bodech. Pak interpolace funkce f v bodě (x, y) metodou nejbližšího souseda je dána předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} p(i, j) & \text{pro } i - \frac{1}{2} < x \leq i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} < y \leq j + \frac{1}{2}, \\ p(i, j+1) & \text{pro } i - \frac{1}{2} < x \leq i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} < y \leq j + \frac{3}{2}, \\ p(i+1, j) & \text{pro } i + \frac{1}{2} < x \leq i + \frac{3}{2}, j - \frac{1}{2} < y \leq j + \frac{1}{2}, \\ p(i+1, j+1) & \text{pro } i + \frac{1}{2} < x \leq i + \frac{3}{2}, j + \frac{1}{2} < y \leq j + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Z předpisu je zřejmé, že nová hodnota intenzity $f(x, y)$ v transformované mřížce je určena pouhým zkopírováním nejbližší hodnoty v původní mřížce. V praxi se interpolace metodou nejbližšího souseda realizuje zaokrouhlováním souřadnic.

Bilineární interpolace. Necht' jsou dány čtyři body v prostoru \mathbb{R}^2 , (i,j) , $(i,j+1)$, $(i+1,j)$, $(i+1,j+1)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ a bod $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tak, že $i \leq x \leq i+1$, $j \leq y \leq j+1$. Necht' dále $p(i,j)$, $p(i,j+1)$, $p(i+1,j)$, $p(i+1,j+1)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ jsou funkční hodnoty dané funkce p v jednotlivých bodech. Pak výpočet hodnoty polynomu bilineární interpolace v bodě (x,y) je dán předpisem

$$f(x,y) = (y-j)[(i+1-x)p(i,j+1) + (x-i)p(i+1,j+1)] + \\ + (j+1-y)[(i+1-x)p(i,j) + (x-i)p(i+1,j)].$$

Bikubická interpolace. Necht' funkce $p(\alpha,\beta)$, $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial p}{\partial \beta}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta}$ jsou definovány ve čtyřech bodech prostoru \mathbb{R}^2 , (i,j) , $(i,j+1)$, $(i+1,j)$, $(i+1,j+1)$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$. Necht' dále máme bod $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tak, že $i \leq x \leq i+1$, $j \leq y \leq j+1$. Pak hodnotu bikubického polynomu v bodě (x,y) určíme předpisem

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 c_{k,l} (x-i)^{k-1} (y-j)^{l-1}, \text{ kde koeficienty } c_{k,l} \in \mathbb{R} \text{ získáme}$$

následujícím způsobem. Pro derivace polynomu f platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{k=2}^4 \sum_{l=1}^4 c_{k,l} (k-1) (x-i)^{k-2} (y-j)^{l-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=2}^4 c_{k,l} (l-1) (x-i)^{k-1} (y-j)^{l-2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \sum_{k=2}^4 \sum_{l=2}^4 c_{k,l} (k-1) (l-1) (x-i)^{k-2} (y-j)^{l-2}.$$

Využijeme-li toho, že pro každé $(\alpha,\beta) \in \{(i,j), (i,j+1), (i+1,j), (i+1,j+1)\}$ platí:

$$\begin{aligned} p(\alpha,\beta) &= f(\alpha,\beta), \\ \frac{\partial p}{\partial \alpha}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta), \\ \frac{\partial p}{\partial \beta}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta), \\ \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha,\beta), \end{aligned}$$

dostáváme soustavu šestnácti lineárních rovnic o šestnácti neznámých $c_{k,l}$, $k = 1 \dots, 4$, $l = 1, \dots, 4$. Tím jsou koeficienty $c_{k,l}$ jednoznačně určeny. Pokud derivace $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial p}{\partial \beta}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta}$ v bodech (i,j) , $(i,j+1)$, $(i+1,j)$, $(i+1,j+1)$ nejsou známy, lze je aproximovat například pomocí konečných diferencí.

S čím budu pracovat a proč

Metoda nejbližšího souseda je jednou z nejrychlejších a početně nejméně náročných metod. Za tyto vlastnosti však platí velmi špatnými výsledky, co se kvality interpolovaného obrazu týče.

Metoda bilineární interpolace patří stále ještě do kategorie časově méně náročných metod. Hodnotu nového pixelu počítá pomocí váženého průměru ze čtyř okolních pixelů a tím dochází k rozmazání ostrých hran.

Metoda kubické interpolace je z těchto tří nejpřesnější, dobře zachovává kvalitu obrazu. Nicméně její podstatnou nevýhodou je rychlost výpočtu.

V této práci budeme využívat interpolaci bilineární. V praxi se ukázalo, že se kvalita obrazu výrazně neliší od kvality obrazu interpolovaného pomocí jiných metod a tedy je dobrým kompromisem mezi rychlostí a kvalitou výsledného obrazu. Více o způsobech interpolace obrazu, časové náročnosti a technikách převzorkování lze nalézt [2].

Kapitola 4

Fázová korelace

Předtím, než přejdeme k vysvětlení registrace dvou obrázků pomocí fázové korelace, je potřeba znát některé pojmy a vlastnosti uvedené v následující kapitole.

4.1 Matematický základ

Definice 7. (*Prostor $L(\mathbb{R}^2)$*)

Prostor $L(\mathbb{R}^2)$ je prostor všech funkcí $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ takových, že $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy$ existuje a je konečný.

Definice 8. (*Fourierova transformace*)

Nechť $f(x,y) \in L(\mathbb{R}^2)$. Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $F(\mu, \nu) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou jako

$$F\{f(x,y)\} = F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(\mu x + \nu y)} dx dy.$$

Definice 9. (*Inverzní Fourierova transformace*)

Nechť $F(\mu, \nu) \in L(\mathbb{R}^2)$. Inverzní Fourierovou transformací funkce F rozumíme funkci $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$F^{-1}\{F(\mu, \nu)\} = f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{i(\mu x + \nu y)} d\mu d\nu.$$

Věta 1. (*Shift teorém*)

Nechť $f_1(x,y) \in L(\mathbb{R}^2)$ a $F_1(\mu, \nu)$ je Fourierova transformace funkce f . Nechť dále máme funkci $f_2(x,y) \in L(\mathbb{R}^2)$ takovou, že $f_1(x - x_0, y - y_0) = f_2(x,y)$, pro nějaké dané konstanty $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}$ a Fourierovu transformaci $F_2(\mu, \nu)$ funkce f_2 . Pak platí

$$F_2(\mu, \nu) = e^{-i(x_0\mu + y_0\nu)} F_1(\mu, \nu).$$

Důkaz.

Z Definice 8 je $F_2(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) e^{-i(\mu x + \nu y)} dx dy$.

Dosazením vztahu $f_1(x - x_0, y - y_0) = f_2(x, y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} F_2(\mu, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - x_0, y - y_0) e^{-i(\mu x + \nu y)} dx dy = \\ &= \left| \begin{array}{lll} x - x_0 = \alpha & x = \alpha + x_0 & "dx = d\alpha" \\ y - y_0 = \beta & y = \beta + y_0 & "dy = d\beta" \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\alpha, \beta) e^{-i[\mu(\alpha + x_0) + \nu(\beta + y_0)]} d\alpha d\beta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\alpha, \beta) e^{-i(\mu\alpha + \nu\beta)} e^{-i(x_0\mu + y_0\nu)} d\alpha d\beta = \\ &= e^{-i(x_0\mu + y_0\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\alpha, \beta) e^{-i(\mu\alpha + \nu\beta)} d\alpha d\beta = e^{-i(x_0\mu + y_0\nu)} F_1(\mu, \nu). \end{aligned}$$

□

Nyní zadefinujeme takzvanou Diracovu δ -funkci. Mějme však na paměti, že tato definice je neformální a slouží především k lepšímu pochopení níže popsané metody. Formálně správnou definici lze zavést pomocí teorie distribucí a je to podrobně popsáno v [3].

Definice 10. (*Diracova δ -funkce*)

Diracovou delta funkcí nazveme funkci $\delta(x, y)$, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, splňující následující dvě vlastnosti:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0) \\ +\infty & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1.$$

Díky této definici jsme schopni ukázat, že

$$F^{-1}\{e^{i(x_0\mu + y_0\nu)}\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_0\mu + y_0\nu)} e^{i\mu x} e^{i\nu y} d\mu d\nu = \frac{1}{4\pi^2} \delta(x - x_0, y - y_0).$$

Tento vztah využijeme později při popisu metody fázové korelace.

Definice 11. (*Fourierovo a amplitudové spektrum*)

Nechť $f(x, y) \in L(\mathbb{R}^2)$ a $F(\mu, \nu)$ je Fourierova transformace funkce f . Tuto transformaci nazveme Fourierovým spektrem funkce f .

Dále funkci $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ definovanou předpisem $A(\mu, \nu) = |F(\mu, \nu)|$ nazveme amplitudovým spektrem funkce f .

Definice 12. (*Cross-power spektrum*)

Nechť $f_1(x, y) \in L(\mathbb{R}^2)$, $f_2(x, y) \in L(\mathbb{R}^2)$ a $F_1(\mu, \nu)$, $F_2(\mu, \nu)$ jsou jejich Fourierova spektra. Pak funkci $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem $C(\mu, \nu) = F_1(\mu, \nu) F_2^*(\mu, \nu)$ nazveme Cross-power spektrem funkcí f_1 a f_2 .

Dále funkci $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$N(\mu, \nu) = \frac{F_1(\mu, \nu) F_2^*(\mu, \nu)}{|F_1(\mu, \nu) F_2^*(\mu, \nu)|}$$

nazveme normovaným Cross-power spektrem funkcí f_1 a f_2 .

Poznámka. Hvězdička použitá ve smyslu F^* je vyjádřením komplexního sdružení. Tedy $F^*(\mu, \nu) = \overline{F(\mu, \nu)}$ pro každé (μ, ν) .

Definice 13. (*Fázová korelace*)

Nechť $f_1(x,y) \in L(\mathbb{R}^2)$, $f_2(x,y) \in L(\mathbb{R}^2)$ a $F_1(\mu, \nu)$, $F_2(\mu, \nu)$ jsou jejich Fourierova spektra. Nechť dále $N(\mu, \nu)$ je normované Cross-power spektrum funkcí f_1 a f_2 . Pak funkce $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná jako $p(x,y) = F^{-1}\{N(\mu, \nu)\}$ je Fázová korelace funkcí f_1 a f_2 .

4.1.1 Princip fázové korelace posunutých funkcí

Předpokládejme, že máme dvě funkce v prostoru $L(\mathbb{R}^2)$ tak, že

$$f_1(x - x_0, y - y_0) = f_2(x, y).$$

Neboli funkce $f_2(x,y)$ je kopie funkce $f_1(x,y)$ posunutá o konstantu x_0 v první proměnné a o y_0 v druhé proměnné. Použitím Fourierovy transformace získáme příslušná Fourierova spektra $F_1(\mu, \nu)$ a $F_2(\mu, \nu)$. Aplikací Věty 1 víme, že mezi Fourierovými spektry platí vztah :

$$F_2(\mu, \nu) = e^{-i(x_0\mu + y_0\nu)} F_1(\mu, \nu). \quad (4.1)$$

Využitím tohoto vztahu platí, že $F_1(\mu, \nu)F_2^*(\mu, \nu) = F_1(\mu, \nu)e^{i(x_0\mu + y_0\nu)}F_1^*(\mu, \nu)$. Za předpokladu, že $F_1(\mu, \nu)$ a $F_2(\mu, \nu)$ jsou nenulové v každém bodě, vydělíme rovnici členem $|F_1(\mu, \nu)F_2^*(\mu, \nu)|$ a dostáváme

$$\frac{F_1(\mu, \nu)F_2^*(\mu, \nu)}{|F_1(\mu, \nu)F_2^*(\mu, \nu)|} = \frac{e^{i(x_0\mu + y_0\nu)}F_1(\mu, \nu)F_1^*(\mu, \nu)}{|F_1(\mu, \nu)F_2^*(\mu, \nu)|}. \quad (4.2)$$

S použitím základních vlastností komplexních čísel a vzorce (4.1) na $F_2^*(\mu, \nu)$ na pravé straně rovnice (4.2) dostáváme

$$\frac{F_1(\mu, \nu)F_2^*(\mu, \nu)}{|F_1(\mu, \nu)F_2^*(\mu, \nu)|} = e^{i(x_0\mu + y_0\nu)},$$

neboli normované Cross-power spektrum $N(\mu, \nu) = e^{i(x_0\mu + y_0\nu)}$. Pak tedy dle Definice 13 je fázová korelace

$$p(x,y) = F^{-1}\{N(\mu, \nu)\} = F^{-1}\{e^{i(x_0\mu + y_0\nu)}\} = \frac{1}{4\pi^2}\delta(x - x_0, y - y_0).$$

Jinak řečeno, fázová korelace dvou funkcí, které se liší pouze posunutím, je delta funkce posunutá do bodu (x_0, y_0) .

Přidání rotace. Pro naši práci budeme ale potřebovat fázovou korelaci nejen pro funkce posunuté, ale i otočené. Provedeme tedy jednoduchou modifikaci s použitím přechodu do polárních souřadnic.

Mějme tedy funkci $f_2(x,y)$, která je posunutou a otočenou kopií funkce $f_1(x,y)$ tj.

$$f_2(x,y) = f_1(\cos(\alpha_0)x - \sin(\alpha_0)y - x_0, \sin(\alpha_0)x + \cos(\alpha_0)y - y_0), \quad (4.3)$$

kde α_0 je úhel otočení a (x_0, y_0) vektor posunutí. Užitím Věty 1 na (4.3) dostaneme vztah mezi Fourierovými spektry

$$F_2(\mu, \nu) = e^{-i(x_0\mu + y_0\nu)} F_1(\cos(\alpha_0)\mu - \sin(\alpha_0)\nu, \sin(\alpha_0)\mu + \cos(\alpha_0)\nu). \quad (4.4)$$

Aplikací absolutní hodnoty na obě strany vzorce (4.4) dostáváme vztah mezi amplitudovými spektry

$$A_2(\mu, \nu) = A_1(\cos(\alpha_0)\mu - \sin(\alpha_0)\nu, \sin(\alpha_0)\mu + \cos(\alpha_0)\nu),$$

který nám říká, že jedno amplitudové spektrum je jen otočenou kopií druhého. Nyní přejdeme od souřadnic (μ, ν) k polárním souřadnicím (ρ, α) , čímž dostaneme

$$A_1(\rho, \alpha) = A_2(\rho, \alpha - \alpha_0).$$

Nyní už stačí jen aplikovat fázovou korelaci pro obyčejné posunutí na funkce A_1 a A_2 , získat úhel otočení α_0 a jeho pomocí funkci f_2 otočit tak, aby se už funkce f_1 a f_2 lišily pouze posunutím. Následně znovu použijeme postup pro výpočet fázové korelace pouze pro posunutí na funkce f_1 a f_2 .

Pokud tedy máme dvě funkce, které splňují výše uvedené předpoklady, tento postup nám umožní velmi elegantně určit parametry otočení a posunutí daných funkcí.

4.2 Diskrétní formulace

Abychom se od funkcí dostali blíže k rozeznávání posunu a otočení mezi dvěma obrázky, je nutné veškeré výše uvedené pojmy matematického základu formulovat v diskrétní podobě.

Definice 14. (*Diskrétní Fourierova transformace*)

Nechť $f(x, y)$ je funkce definovaná na množině $\{0, 1, \dots, N-1\}^2$, kde $N \in \mathbb{N}$. Pak funkci $F(\mu, \nu) : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, definovanou předpisem

$$F\{f(x, y)\} = F(\mu, \nu) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\mu + y\nu)},$$

nazveme diskrétní Fourierovou transformací funkce f .

Definice 15. (*Inverzní diskrétní Fourierova transformace*) Nechť $F(\mu, \nu)$ je funkce definovaná na množině $\{0, 1, \dots, N-1\}^2$, kde $N \in \mathbb{N}$. Inverzní Fourierovou transformací funkce F rozumíme funkci $f(x, y) : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$F^{-1}\{F(\mu, \nu)\} = f(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\mu, \nu) e^{\frac{2\pi i}{N}(x\mu + y\nu)}.$$

Věta 2. (*Diskrétní Shift teorém*) Nechť $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ jsou funkce na množině $\{0, 1, \dots, N-1\}^2$, kde $N \in \mathbb{N}$, a nechť $F_1(\mu, \nu)$ a $F_2(\mu, \nu)$ jsou příslušné diskrétní Fourierovy transformace. Dále budeme požadovat, aby funkce $f_1(x, y)$ byla periodická s periodou N a funkce $f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0)$ pro nějaké dané konstanty $x_0 \in \mathbb{Z}$, $y_0 \in \mathbb{Z}$. Pak platí:

$$F_2(\mu, \nu) = e^{-\frac{2\pi i}{N}(x_0\mu + y_0\nu)} F_1(\mu, \nu), \quad \text{pro } (\mu, \nu) \in \{0, 1, \dots, N-1\}^2.$$

Důkaz.

Důkaz proběhne velmi podobně jako ve Větě 1.

Z Definice 14 máme $F_2(\mu, \nu) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_2(x, y) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\mu + y\nu)}$. Dosazením vztahu

$$f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0) \text{ dostáváme } F_2(\mu, \nu) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f_1(x - x_0, y - y_0) e^{-\frac{2\pi i}{N}(x\mu + y\nu)}$$

a provedeme substituci $k = x - x_0$ a $l = y - y_0$.

$$\begin{aligned} \text{Tedy } F_2(\mu, \nu) &= \sum_{k=-x_0}^{N-1-x_0} \sum_{l=-y_0}^{N-1-y_0} f_1(k, l) e^{-\frac{2\pi i}{N}((k+x_0)\mu + (l+y_0)\nu)} = \\ &= e^{-\frac{2\pi i}{N}(x_0\mu + y_0\nu)} \sum_{k=-x_0}^{N-1-x_0} \sum_{l=-y_0}^{N-1-y_0} f_1(k, l) e^{-\frac{2\pi i}{N}(k\mu + l\nu)}. \end{aligned}$$

A dále využijeme periodicitu funkce $f_1(x, y)$ a snadno vidíme, že $\sum_{k=-x_0}^{N-1-x_0} \sum_{l=-y_0}^{N-1-y_0} f_1(k, l) e^{-\frac{2\pi i}{N}(k\mu + l\nu)} = F_1(\mu, \nu)$

a konečně tedy $F_2(\mu, \nu) = e^{-\frac{2\pi i}{N}(x_0\mu + y_0\nu)} F_1(\mu, \nu)$. □

Definice 16. (*Diracův impulz*)

Diracovým impulzem nazveme funkci $\delta(x, y)$, kde $(x, y) \in \{0, 1, \dots, N-1\}^2$, splňující $\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Definice 17. (*Diskrétní Fourierovo a amplitudové spektrum*)

Nechť $f(x, y)$ je funkce definovaná na množině $\{0, 1, \dots, N-1\}^2$ a $F(\mu, \nu)$ je diskrétní Fourierova transformace funkce f . Tuto transformaci $F(\mu, \nu)$ nazveme Fourierovým spektrem funkce f .

Dále funkci A , definovanou předpisem $A(\mu, \nu) = |F(\mu, \nu)|$, nazveme diskrétním amplitudovým spektrem funkce f .

Definice 18. (*Diskrétní Cross-power spectrum*)

Nechť $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ jsou funkce definované na množině $\{0, 1, \dots, N-1\}^2$. Nechť $F_1(\mu, \nu)$, $F_2(\mu, \nu)$ jsou jejich diskrétní Fourierova spektra. Funkci $C : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem $C(\mu, \nu) = F_1(\mu, \nu) F_2^*(\mu, \nu)$ nazveme diskrétním Cross-power spektrem funkcí f_1 a f_2 .

Dále funkci $N : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$N(\mu, \nu) = \frac{F_1(\mu, \nu) F_2^*(\mu, \nu)}{|F_1(\mu, \nu) F_2^*(\mu, \nu)|} \quad (4.5)$$

nazveme diskrétním normovaným Cross-power spektrem funkcí f_1 a f_2 .

Definice 19. (*Fázová korelace v diskrétní podobě*)

Nechť $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ jsou funkce definované na množině $\{0, 1, \dots, N-1\}^2$. Nechť $F_1(\mu, \nu)$, $F_2(\mu, \nu)$ jsou jejich diskrétní Fourierova spektra. Nechť dále $N(\mu, \nu)$ je diskrétní normované Cross-power spektrum funkcí f_1 a f_2 . Pak funkce $p : \{0, 1, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná jako $p(x, y) = F^{-1}\{N(\mu, \nu)\}$ je fázová korelace funkcí f_1 a f_2 .

Nyní už tedy víme, jak by měla tato metoda fungovat na ideálním obrázku z Definice 1. Pro lepší přehled uvedeme ještě pseudokód celé metody.

4.3 Pseudokód registrace pomocí fázové korelace

1. Na vstupu dostaneme dva obrázky. Obrázek f_1 označíme jako fixní a obrázek f_2 , který je oproti fixnímu otočený a posunutý označíme jako plovoucí. Tedy matematicky zapsáno
$$f_2(x,y) = f_1(\cos(\alpha_0)x - \sin(\alpha_0)y - x_0, \sin(\alpha_0)x + \cos(\alpha_0)y - y_0).$$
2. Vypočteme Fourierova spektra obou obrázků a užitím Shift teoremu a několika jednoduchých úprav dostaneme vztah mezi amplitudovými spektry
$$A_1(\rho, \alpha) = A_2(\rho, \alpha - \alpha_0).$$
3. Vypočteme fázovou korelaci mezi funkcemi A_1 a A_2 . Dostaneme α_0 , které udává velikost úhlu otočení obrázku f_2 oproti f_1 .
4. Otočíme obrázek f_2 kolem středu o úhel α_0 a označíme ho \tilde{f}_2 . Dále pracujeme už jen s problémem posunutí tj. $\tilde{f}_2 = f_1(x - x_0, y - y_0)$.
5. Spočítáme fázovou korelaci pro funkce f_1 a \tilde{f}_2 a dostaneme posun x_0 a y_0 .

4.4 Okénková funkce

Jelikož teorie říká, že vše dobře funguje a vychází, už zbývá udělat jen poslední krok a vyzkoušet registrační metodu na pravých snímcích z CT angiografie. Avšak po několika zkušebních pokusech zjistíme, že metoda nefunguje ani zdaleka tak dobře, jak jsme si představovali. Obvykle se stane, že algoritmus skončí s posunem i rotací na nule, tedy vlastně registruje podle okraje obrázku, protože informace uvnitř nebyly dostatečně výrazné. Taková metoda by byla pro praktické použití nepřijatelná a proto musíme udělat ještě drobnou úpravu ve stávajícím postupu.

Definice 20. (*Okénková funkce*)

Nechť $(x,y) \in \{0,1,\dots,N-1\}^2$. Funkci $o(x,y) : \{0,1,\dots,N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$o(x,y) = \frac{1}{4} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{N-1} \right) \right] \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi y}{N-1} \right) \right],$$

nazveme okénkovou funkcí.

Definice 20 ukazuje, jak vypadá okénková funkce nazývaná také Hannovo okno. My od okénkové funkce budeme požadovat, aby po vynásobení s obrázkem dala nový obrázek, který má u okrajů hodnoty pixelů zahmlené k nule, neobsahuje uměle zanesené hrany a zanechá co možná nejvíce informací obrázku původního. To vše Hannovo okno splňuje. Více o okénkových funkcích lze nalézt v [4].

Proč vlastně potřebujeme okénkovou funkci?

Metoda fázové korelace využívá Věty 2, která ale vyžaduje periodičnost zadaných funkcí. Vytvořením periodického obrázku však vzniknou umělé hrany, protože běžný obrázek má obvykle okraje různé barvy. Při počítání diskrétní Fourierovy transformace tyto uměle vytvořené hrany často způsobují zastínění hledané informace a proto je dobré se této situaci vyhnout.

Jak vypadá okénková funkce z Definice 20 aplikovaná na ukázkovém obrázku můžeme vidět na Obrázku 4.2.



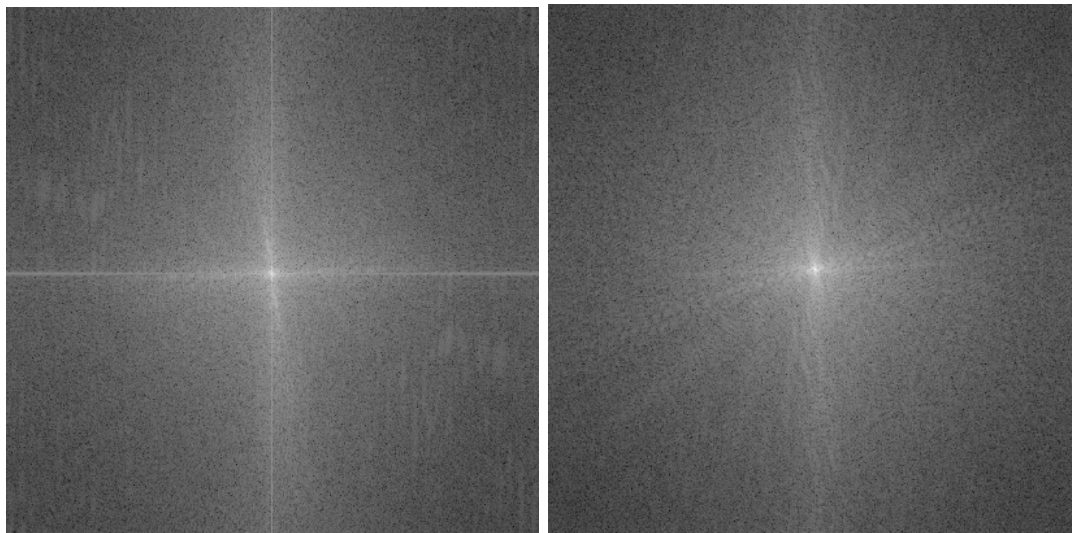
Obrázek 4.1: Ukázkový obrázek



Obrázek 4.2: Aplikace okénkové funkce

Při použití okénkové funkce však musíme počítat s tím, že se nám Fourierovo spektrum okénkové funkce promítne do spektra obrázku. Matematicky vzato obrázek f vynásobíme okénkovou funkcí o . Fourierova transformace tohoto součinu je podle konvolučního teorému konvolucí jednotlivých Fourierových spekter. Jsou-li F_1 a O Fourierova spektra k f a o , pak $F\{fm\} = F * O$. Součin obrázku a okénkové funkce způsobí sice nepatrné rozmazání výsledného spektra, ale hlavně odstraní "kříž", který jsme uměle vytvořili periodizací obrázku. Tento jev je vidět na obrázcích 4.3 a 4.4.

Výsledný obraz pro testování registrace bude vynásoben okénkovou funkcí, abychom dosáhli periodičnosti obrázku bez nežádoucích umělých hran. Po přidání této úpravy se můžeme pustit do testování.



Obrázek 4.3: Fourierovo spektrum obrázku bez okénkové funkce Obrázek 4.4: Fourierovo spektrum s použitím okénkové funkce

4.5 Upravený pseudokód

1. Na vstupu dostaneme dva obrázky I_1 a I_2 , které splňují

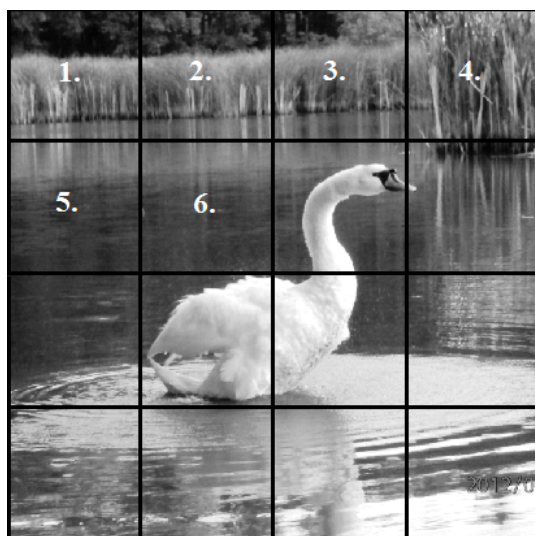
$$I_2(x,y) = I_1(\cos(\alpha_0)x - \sin(\alpha_0)y - x_0, \sin(\alpha_0)x + \cos(\alpha_0)y - y_0).$$

2. Vynásobení obou obrázků okénkovou funkcí. Tedy $f_1(x,y) = I_1(x,y)o(x,y)$ a $f_2(x,y) = I_2(x,y)o(x,y)$.
3. Vypočteme Fourierova spektra $f_1(x,y)$ a $f_2(x,y)$ a užitím Shift teorému a několika jednoduchých úprav dostaneme vztah mezi amplitudovými spektry $A_1(\rho, \alpha) = A_2(\rho, \alpha - \alpha_0)$.
4. Vypočteme fázovou korelaci mezi funkcemi A_1 a A_2 . Dostaneme α_0 , které udává velikost úhlu otočení obrázku f_2 oproti f_1 .
5. Otočíme obrázek f_2 kolem středu o úhel α_0 a označíme ho \tilde{f}_2 . Dále pracujeme už jen s problémem posunutí tj. $\tilde{f}_2 = f_1(x - x_0, y - y_0)$.
6. Spočítáme fázovou korelaci pro funkce f_1 a \tilde{f}_2 a dostaneme posun x_0 a y_0 .

Kapitola 5

Alternativní metody

Jak již víme, registrační metoda využívající fázovou korelaci je sice velmi účinná, nicméně jedna z jejích nevýhod je neschopnost počítat se subpixelovou přesností. Jak postupovat v případě, že budeme požadovat vypočtení posunu o 1.5 pixelu? Zkusme si představit, že máme dva snímky z CT angiografie. Jelikož úhel otočení by měl být malý, tak ho zanedbáme a budeme se zabývat pouze posunutím. Využijeme metodu fázové korelace pro posunutí na menších výřezech zkoumaných obrázků pro získání dvojic sobě odpovídajících bodů. Následně na takto naměřená data zkusíme aplikovat dva různé postupy, které se pokusí určit původní posunutí i otočení.



Obrázek 5.1: Rozdělení obrázku na výřezy

Získání dat Nechť máme dva obrázky, postupně bereme výřezy z prvního obrázku a pomocí fázové korelace pouze pro posunutí se je snažíme najít v obrázku druhém. Následně vezmeme souřadnice středů korespondujících výřezů v obou obrázcích a dále pracujeme jen s těmito body. Následující sekce popisuje, jak na základě těchto naměřených množin bodů odhadnout původní posunutí a otočení mezi obrázky.

5.1 Využití metody nejmenších čtverců

Na úvod si uvedeme alespoň základní definici úlohy nejmenších čtverců. Podrobnější vysvětlení této úlohy včetně důkazů tvrzení, které budeme používat, lze najít v knize [5].

Definice 21. *Problém nejmenších čtverců*

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice reálných čísel, $b \in \mathbb{R}^m$. Problémem nejmenších čtverců budeme nazývat úlohu určení $x \in \mathbb{R}^n$ tak, aby platilo $\min_{x,f} \|x\|_2$ za podmínky $f = Ax - b$.

Předpokládejme nyní, že máme fixní obraz I a obraz I' oproti němu otočený a posunutý. Nechť $[x_i, y_i, 1], i = 1, \dots, n$, jsou souřadnice pixelů v obraze I a $[x'_i, y'_i, 1], i = 1, \dots, n$, jsou body v obraze I' určené metodou fázové korelace pro posun, jak je popsáno v odstavci u obrázku 5.1. Nechť α je úhel otočení a x_0, y_0 jsou posuny ve směru jednotlivých os. Pak vztah mezi těmito body lze vyjádřit maticově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & x_0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuto rovnost můžeme jednoduše přepsat do

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Označme

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), x_0, y_0)^T$$

a $\mathbf{b} = (x'_1, y'_1, \dots, x'_n, y'_n)^T$. Rovnost lze nyní zapsat jako $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Nyní se tedy dostáváme k problému, kdy hledáme řešení \mathbf{x} pře určené úlohy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Je nutné podotknout, že rovnost je zde pouze symbolická, jelikož vektor \mathbf{b} se skládá z naměřených hodnot a je zatížen chybou. Proto dále budeme řešit úlohu $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{r}$, tedy budeme hledat co nejmenší změnu \mathbf{r} pravé strany \mathbf{b} , aby \mathbf{x} řešilo úlohu $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{r}$. Budeme tuto úlohu řešit ve smyslu nejmenších čtverců, kde je chybou zatížena pouze pravá strana rovnice. Jelikož jsme si body v obrázku I_1 vhodně zvolili, má matice A plnou sloupcovou hodnotu a úloha má jednoznačné řešení. V knize [5] je elegantně popsáno řešení této úlohy pomocí QR rozkladu matice A , které použijeme i v naší metodě.

5.2 Využití singulárního rozkladu

V této kapitole popíšeme, jak využít singulárního rozkladu k určení transformací otočení a posunutí mezi dvěma množinami bodů. Podkladem této metody je článek [6]. Nejprve si uvedeme několik pojmů, bez kterých bychom se neobešli.

Definice 22. *Unitární matice*

Nechť $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Matici U nazveme unitární, jestliže splňuje $UU^T = U^T U = I$, kde I je jednotková matice.

Jsou-li u_i sloupce unitární matice $U = [u_1, \dots, u_n]$ platí, že skalární součin $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pro $i \neq j$ a $\langle u_i, u_j \rangle = 1$ pro $i = j$. Neboli sloupce matice U jsou navzájem ortonormální. Analogicky to platí i pro řádky.

Věta 3. *Existence singulárního rozkladu*

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice s hodnotí k , pak existují unitární matice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$ tak, že platí

$$A = U \Sigma V^T, \text{ kde } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0_{k \times (n-k)} \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (n-k)} \end{pmatrix} \text{ a } \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k \end{pmatrix}$$

je diagonální matice.

Důkaz. Viz [7]



Definice 23. *Singulární rozklad*

Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Rozklad matice $A = U \Sigma V^T$ popsaný ve Větě 3 nazveme singulárním rozkladem matice A .

Poznámka. Způsob, jak explicitně vypočítat singulární rozklad lze najít v [5].

Definice 24. *Stopa matice*

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = (a_{i,j})$. Stopa matice A je součet diagonálních prvků matice

$$A, \text{ tedy } \text{stopa}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Věta 4. *Pro libovolné dvě matice A, B platí $\text{stopa}(AB) = \text{stopa}(BA)$ za podmínky, že má násobení matic smysl.*

Jelikož metoda popsaná v sekci 5.1, řešená ve smyslu nejmenších čtverců, nepočítá s důležitou rovností $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, zkusíme úlohu řešit ve smyslu nejmenších čtverců, ale nyní trochu jinak. Nechť tedy máme dvě množiny bodů $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$ a $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$, kde $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^k, \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^k, i = 1, \dots, n$. Připomeňme, že tyto množiny jsme získali postupem uvedeným na začátku kapitoly. Víme, že $\mathbf{Q} = R\mathbf{P} + t$, kde R znamená rotaci a t vektor posunutí. Rádi bychom našli rotaci a translaci, aby euklidovská norma výrazu $(R\mathbf{P} + t - \mathbf{Q})$ byla co možná nejmenší. Tudíž hledáme dvojici $(R, t) = \arg \min_{R, t} \sum_{i=1}^n \|R\mathbf{p}_i + t - \mathbf{q}_i\|^2$.

5.2.1 Určení translace

Zafixujme nyní R a hledejme optimální translaci t .

Definujme funkci $f(t) = \sum_{i=1}^n \|R\mathbf{p}_i + t - \mathbf{q}_i\|^2$. Minimum funkce f nalezneme

vyřešením rovnice $\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n 2(R\mathbf{p}_i + t - \mathbf{q}_i) = 0$.

Tedy $R(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n) + nt - (\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_n) = 0$ a následně $t = \frac{(\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_n)}{n} - \frac{R(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n)}{n}$. Označme $\bar{\mathbf{q}} = \frac{(\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_n)}{n}$ a $\bar{\mathbf{p}} = \frac{(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n)}{n}$. Vypočtenou translaci t zapíšeme ve tvaru $t = \bar{\mathbf{q}} - R\bar{\mathbf{p}}$.

5.2.2 Určení rotace

Dosadíme-li nyní spočtenou translaci do $f(t)$, dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \|R\mathbf{p}_i + \bar{\mathbf{q}} - R\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{q}_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|R(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}) - (\mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{q}})\|^2.$$

Označme $x_i = \mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}$ a $y_i = \mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{q}}$, pak hledanou rotaci najdeme jako

$$R = \arg \min_R \sum_{i=1}^n \|Rx_i - y_i\|^2. \quad (5.1)$$

Nyní zjednodušíme výraz, který se snažíme minimalizovat :

$$\begin{aligned} \|Rx_i - y_i\|^2 &= (Rx_i - y_i)^T (Rx_i - y_i) = (x_i^T R^T - y_i^T)(Rx_i - y_i) = \\ &= x_i^T R^T Rx_i - x_i^T R^T y_i - y_i^T Rx_i + y_i^T y_i = x_i^T x_i - 2y_i^T Rx_i + y_i^T y_i. \end{aligned}$$

Dosadíme zpět do 5.1 :

$$\begin{aligned} R &= \arg \min_R \sum_{i=1}^n (x_i^T x_i - 2y_i^T Rx_i + y_i^T y_i) = \\ &= \arg \min_R \left[\sum_{i=1}^n (x_i^T x_i) - 2 \sum_{i=1}^n (y_i^T Rx_i) + \sum_{i=1}^n (y_i^T y_i) \right] = \\ &= -2 \arg \min_R \sum_{i=1}^n (y_i^T Rx_i) = \arg \max_R \sum_{i=1}^n (y_i^T Rx_i). \end{aligned}$$

Dále využijeme Definici 24 a Větu 4 a dostaneme

$$\sum_{i=1}^n (y_i^T Rx_i) = \text{stopa}(Y^T RX) = \text{stopa}(RXY^T). \quad (5.2)$$

Uvědomme si, že Y^T je matice $n \times k$, R je matice $k \times k$ a X je matice $k \times n$ a jejich součin je čtvercová matice $n \times n$. Jsme tedy oprávněni stopu použít.

Označme $S = XY^T$ a získejme singulární rozklad $S = U\Sigma V^T$, který dosadíme do 5.2. Máme tedy :

$$\text{stopa}(RXY^T) = \text{stopa}(RS) = \text{stopa}(RU\Sigma V^T) = \text{stopa}(\Sigma V^T RU).$$

Označme $M = V^T RU$. Matice V^T , R i U jsou unitární matice, jejich součin je taktéž unitární matice a sloupce matice M tedy tvoří ortonormální vektory a můžeme tedy odhadnout že $|m_{i,j}| \leq 1$. Dostáváme

$$\begin{aligned} \text{stopa}(\Sigma M) &= \text{stopa} \left(\begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{k,1} & \cdots & m_{k,k} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^k \sigma_i m_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \sigma_i. \end{aligned}$$

Neboli $\text{stopa}(\Sigma M)$ je maximální právě tehdy, když M je jednotková matice. Jakmile ale $I = M = V^T RU$, pak $R = VU^T$ a takto dostaneme kýženou rotaci R .

5.2.3 Odhalení reflexe

Matice R získaná tímto postupem však může mimo předpokládanou rotaci obsahovat i reflexi. To je ale v našem případě nežádoucí a je potřeba najít řešení, které reflexi neobsahuje. K zjištění, zda matice R obsahuje reflexi, stačí spočítat determinant matice R . Pokud $\det(R) = -1$, pak R obsahuje reflexi. Pokud $\det(R) = 1$, pak R reflexi neobsahuje.

Jestliže je $\det(R) = -1$, pak to znamená, že maxima výrazu $\text{stopa}(\Sigma M)$ nelze dosáhnout pouze pomocí rotace a musíme hledat jinou nejlepší možnou variantu. Jelikož $\text{stopa}(\Sigma M) = \sum_{i=1}^k \sigma_i$ vidíme, že maxima bude dosaženo pro $m_{i,i} = 1, i = 1, \dots, k$. Tuto možnost však musíme vyloučit, protože výsledná matice R pak obsahuje reflexi. Další možnost je $m_{i,i} = 1, i = 1, \dots, k-1$ a $m_{k,k} = -1$. Protože platí, že $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$, je tato možnost zjevně druhou nejlepší. Matici R spočítáme vzorcem

$$R = V \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} U^T$$

5.2.4 Pseudokód registrace s použitím singulárního rozkladu

1. Máme dvě množiny bodů P a Q a hledáme

$$(R, t) = \arg \min_{R, t} \sum_{i=1}^n \|R\mathbf{p}_i + t - \mathbf{q}_i\|^2.$$

2. Spočítáme $\bar{\mathbf{q}} = \frac{(\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_n)}{n}$ a $\bar{\mathbf{p}} = \frac{(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_n)}{n}$.
3. Spočítáme $\mathbf{x}_i = \mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}$ a $\mathbf{y}_i = \mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{q}}$. Tyto vektory uložíme do sloupců matic $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ a $Y = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$.
4. Spočítáme matici $S = XY^T$ a určíme singulární rozklad $S = U\Sigma V^T$.
5. Získáme rotaci $R = VU^T$.
6. Pokud je $\det(R) < 0$, tak přepočítám R :

$$R = V \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} U^T.$$

7. Získáme translaci $t = \bar{\mathbf{q}} - R\bar{\mathbf{p}}$.

Kapitola 6

Výsledky

Než přistoupíme k vyhodnocení výsledků, musíme zmínit několik důležitých skutečností, které tyto výsledky ovlivňují. Veškeré testy proběhly na počítači HP Pavilion dv7 Notebook, Intel(R) Core(TM)i7, CPU 2.2GHz. Metody byly implementovány v prostředí Matlab, který k počítání Fourierovy transformace využívá algoritmus zvaný Fast Fourier transform. Všechna testovací data jsou vytvořena uměle, abychom mohli simulovat veškerá posunutí a otočení. Tedy musíme počítat s tím, že jsme si data předem poškodili, například interpolací při získávání otočeného obrazu, nebo jim naopak zlepšili podmínky simulací celého posunu, který ale v reálné situaci pravděpodobně nikdy nedostaneme.

Výroba testovacích dat

Abychom mohli registrační metodu řádně otestovat, potřebujeme testovací data. K dispozici máme 131 dvojic snímků (bez kontrastní látky a s kontrastní látkou) z CT angiografie o velikosti 1141×861 pixelů a rozsahu intenzit od 0 do 65536. Dále je dobré zmínit, že u snímků můžeme předpokládat velmi malé rozdíly otočení i posunu, a proto budeme testovat úhel otočení v rozmezí -10° do $+10^\circ$ a posunutí od -30 pixelů do $+30$ pixelů. Testovací obrázky f_1 a f_2 budou mít velikost 701×701 pixelů a vytvoříme je následovně:

1. Dostaneme dvojici obrazů I_1 (bez kontrastu) a I_2 (s kontrastem), které se neliší posunem ani otočením.
2. Najdeme středy obou obrázků S_{I_1} a S_{I_2} .
3. I_2 otočíme o zadaný úhel α_0 kolem středu S_{I_2} .
4. Střed obrazu I_1 posuneme o x_0 ve směru osy x a o y_0 ve směru osy y . Tím získáme nový střed S'_{I_1} .
5. f_1 získáme vyříznutím čtverce z I_1 o hraně 701 pixelů se středem v S'_{I_1} .
6. f_2 získáme vyříznutím čtverce z I_2 o hraně 701 pixelů se středem v S_{I_2} .

Setkáme se zde se dvěma druhy testů. První bude testování metod pouze na jednodruhovém obrázku, pak v postupu vytváření testovacích dat zvolíme $I_1 = I_2$. Druhý bude testování metod pro registraci obrázku s kontrastem a obrázku bez kontrastu, pak se ve výrobě testovacích dat nic nemění.

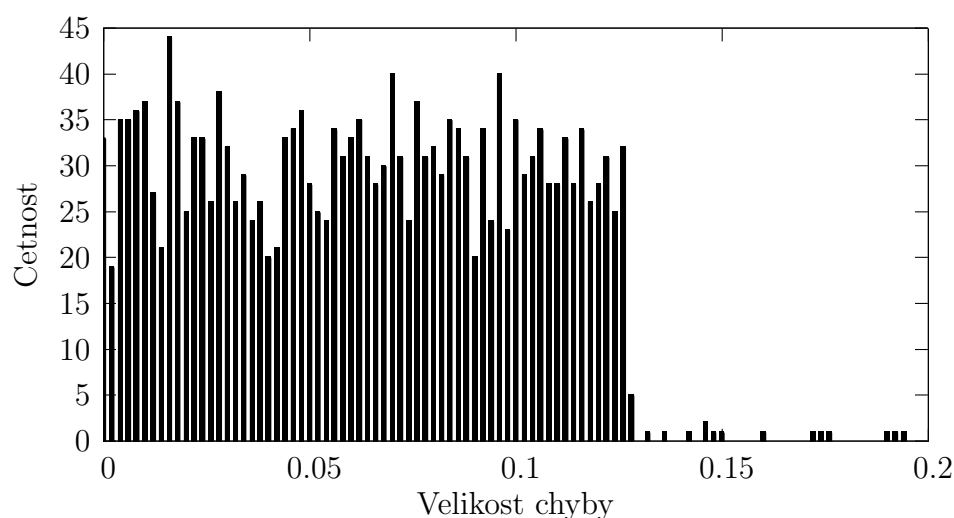
6.1 Fázová korelace

Pro každý obrázek vygenerujeme náhodně patnáct trojic čísel $[\alpha_0, p_x, p_y]$, kde α_0 je úhel otočení, p_x je posun ve směru osy x a p_y je posun ve směru osy y. Jak již dříve bylo řečeno, jsou úhly otočení v rozmezí od -10° do $+10^\circ$ a posunutí od -30 pixelů do $+30$ pixelů. Protože pracujeme s diskretním obrázkem, a tedy používáme diskretní verzi metody fázové korelace, musíme počítat s tím, že vypočítaný posun bude vždy celé číslo. Úhel vypočtený v kroku 4 v upraveném pseudokódu musí být ještě přepočítán na stupně vzorcem $\frac{\alpha_0 \cdot 360^\circ}{N}$, kde N je velikost obrázku. Ještě poznamenáme, že vyrobené testovací obrázky jsme překryli okénkovou funkcí z Definice 20.

Fázová korelace pro obrázky bez kontrastní látky

Registrace jednodruhových obrázků metodou fázové korelace se zdá být velmi účinná. Metoda určila s přehledem všechny předepsané posuny bezchybně. Registrace pro jednu dvojici obrázků velikosti 701×701 pixelů trval v průměru 25 sekund. Metoda pracovala správně i při poškození obrázku interpolací při simulaci rotace. Rozložení chyby vypočteného úhlu lze vyčíst z Obrázku 6.1. Chyba se soustřeďuje kolem nuly a není větší než 0.2° .

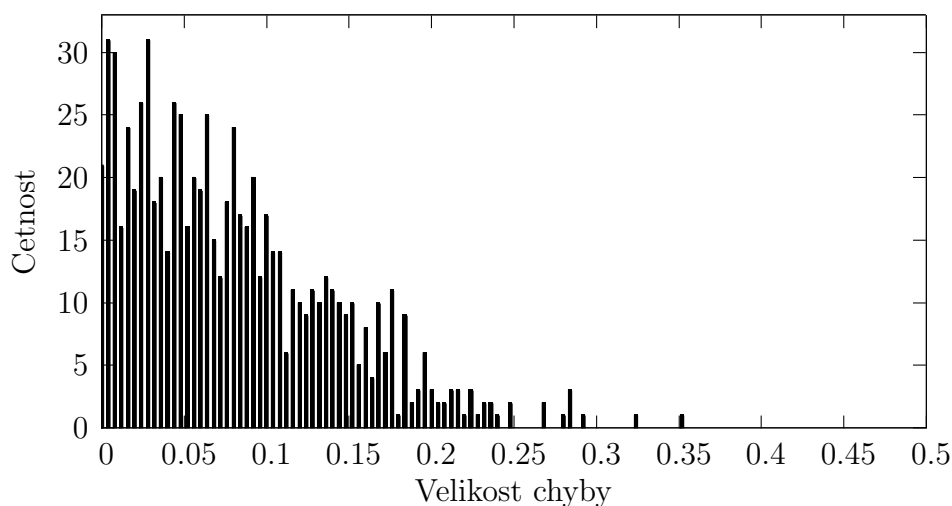
Obrázek 6.1: Histogram chyb vypočteného úhlu



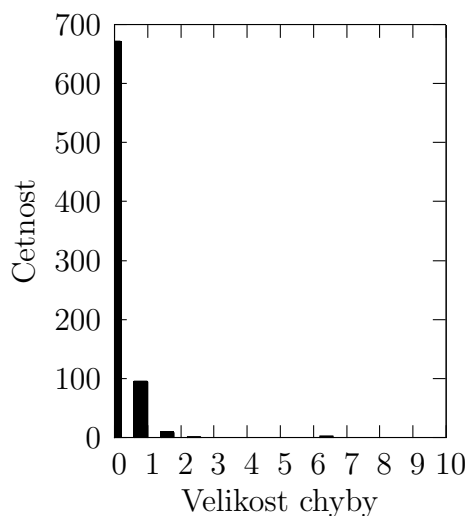
Fázová korelace pro obrázky s kontrastní látkou

Nyní byla otestována metoda fázové korelace k registraci jednoho snímku bez kontrastní látky s druhým snímkem s kontrastní látkou, abychom se blíže dostali k problému, který je v lékařství potřebný řešit. K testování máme k dispozici pouze 51 dvojic obrázků, které jsme vybrali z původních 131 dvojic. Pacient se během vyšetření zřejmě nepatrně pohnul, nebo zakašlal a mnoho dvojic obrázků tedy nebylo registrovaných. Zjistili jsme pomocí fázové korelace, které dvojice registrované už jsou a které ne. Pak jsme tuto skutečnost ještě ručně ověřili. Nicméně na výsledcích už je tato změna v podobě přítomné kontrastní látky znát a metoda je citlivější na poškození interpolací (lze ověřit třeba změnou okénkové funkce). Maximální chyba vypočteného úhlu je 2.8° a posunu je 10 pixelů. I přes tyto hodnoty je ale stále rozložení chyby vypočítaného posunu a otočení velmi dobré, jak můžeme vidět na následujících grafech.

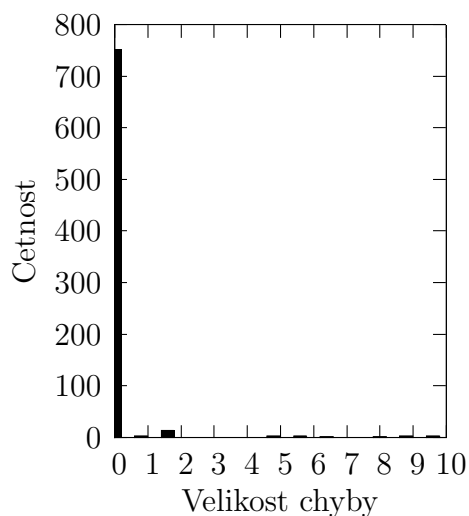
Histogram chyb vypočteného uhlu



Chyba posunu ve smeru osy x



Chyba posunu ve smeru osy y



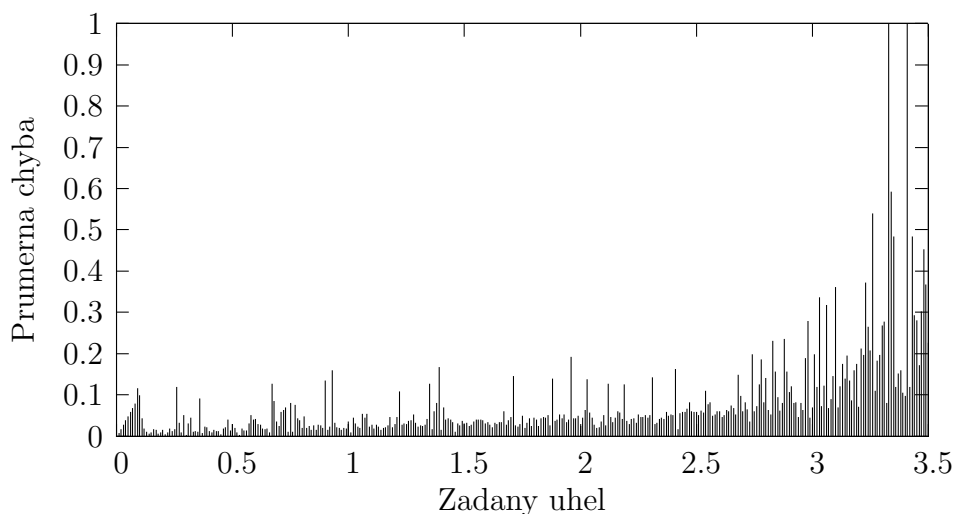
6.2 Metoda s použitím nejmenších čtverců

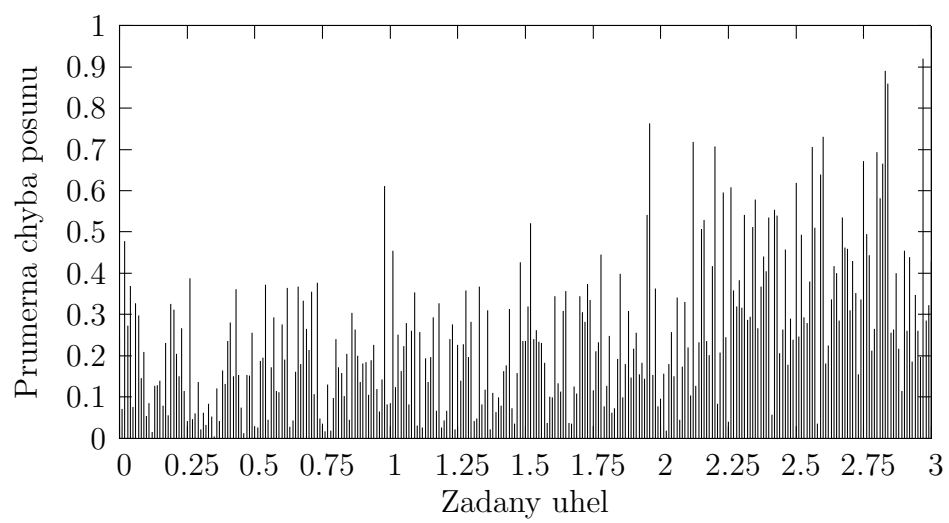
Cílem této metody mělo být přesnější určení otočení a posunu, než to určila fázová korelace. Zajímá nás to hlavně pro malé úhly, protože pro větší, jak jsme se už přesvědčili, to není pro fázovou korelaci problém. Důležité je, že jsme zde použili jinou okénkovou funkci a logaritmickou úpravu. Pro malé výřezy se Hannovo okno neosvědčilo a tak jsme experimentálně našli okno zvané Gaussovo a obrázek jsme navíc zlogaritmovali. Pro úplnost je Gaussovo okno definované jako:

$$gauss(x,y) = e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{5(2x-N)}{2N} \right)^2 + \left(\frac{5(2y-N)}{2N} \right)^2 \right]}.$$

Pro otestování této metody jsme vybrali pět obrázků z důvodu velké časové náročnosti testování. Testovali jsme obrázky postupně od nulového úhlu s krokem 0.01° až po úhel 4° . Pro každý úhel jsme pro tuto pětici obrázků vždy vygenerovali náhodný posun. Registrace dvou obrázků tímto způsobem zabrala v průměru 0.83 sekundy. Metoda však nezahrnovala podmínku $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ a pochopitelně vycházely úhly zjištěné z kosinu jinak, než ze sinu. I přes tento problém byly hodnoty pro tyto malé úhly získané ze sinu velmi dobré. Na Obrázku 6.2 vidíme velikost průměrné chyby pro každý úhel. Na Obrázku 6.3 pak vidíme, jak se pohybovala průměrná chyba vypočteného posunu.

Obrázek 6.2: Graf závislosti chyby úhlu na velikosti úhlu

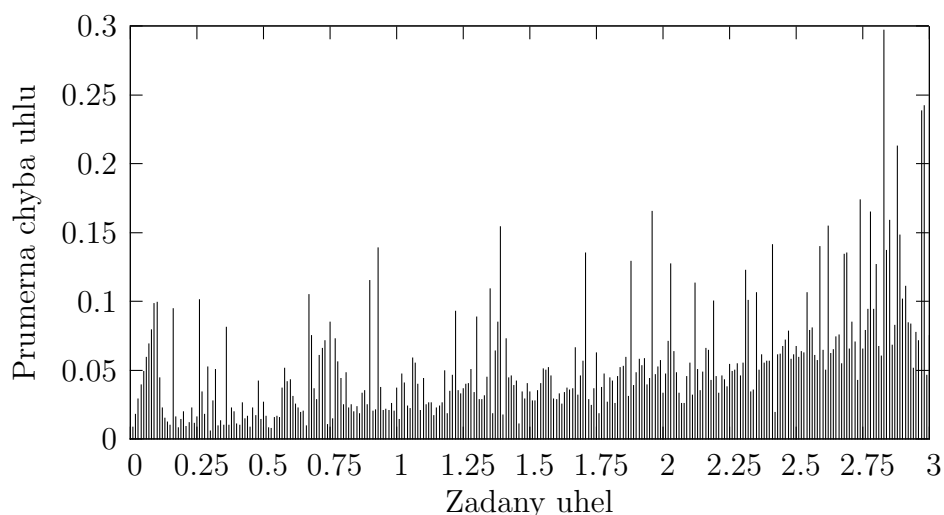




Obrázek 6.3: Graf závislosti chyby posunu na velikosti úhlu

6.3 Metoda s použitím singulárního rozkladu

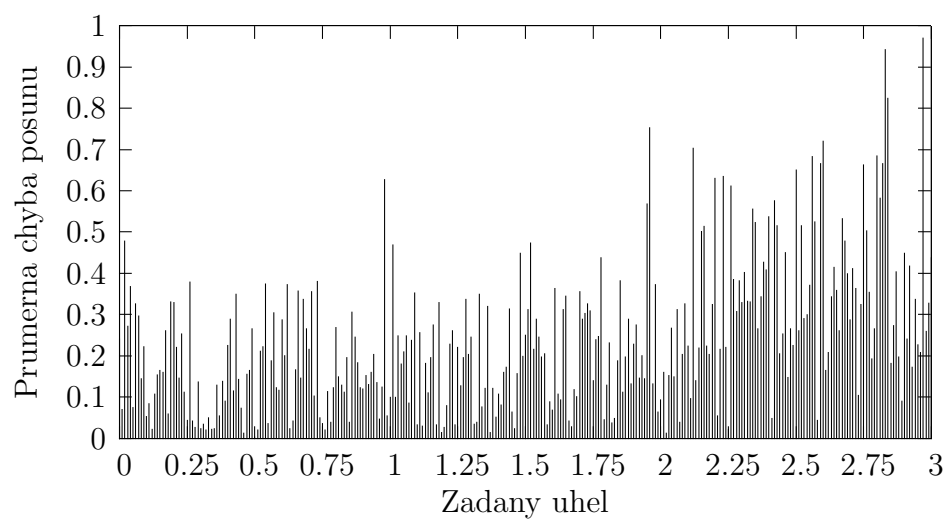
Zde, stejně jako v předchozí sekci, je cílem metody přesnější určení otočení a posunu, než určila fázová korelace. Znovu použijeme úpravu obrázků pomocí zlogaritmování a aplikace Gaussova okna. Metodu jsme testovali stejným způsobem jako v předchozí metodě s použitím nejmenších čtverců. Výpočet pro jednu dvojici obrázků trvá přibližně 0.85 sekundy. Výsledky jsou sice velmi podobné jako v předchozí metodě, nicméně výhodou oproti metodě využívající nejmenší čtverce je stabilita a použití ve více rozměrech. Pokud bychom se podívali na chybu vypočteného úhlu pro větší úhel než je znázorněn na obrázcích, bude tato metoda rozhodně přesnější než metoda využívající nejmenší čtverce. Rozložení chyby pro vypočtený úhel lze vidět na Obrázku 6.4 a pro posun na Obrázku 6.5.



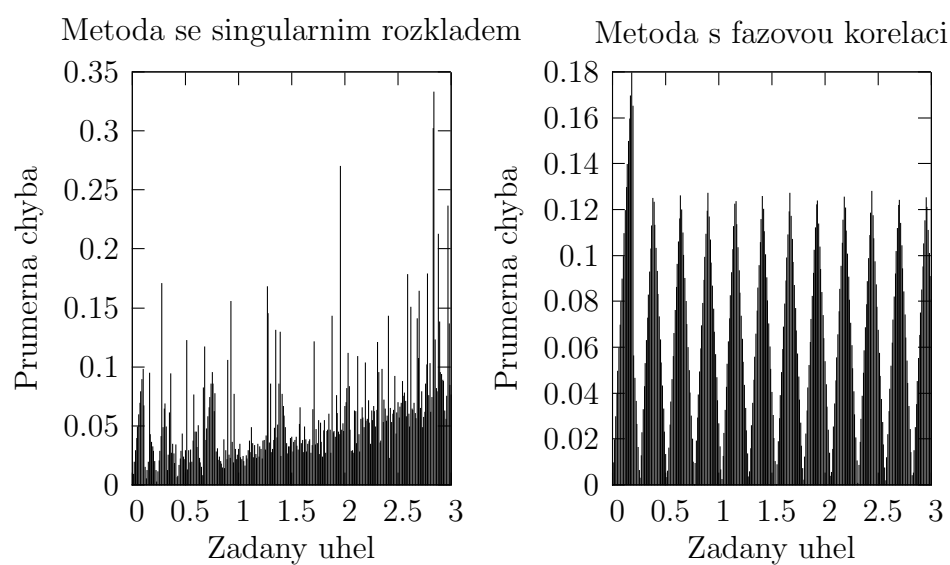
Obrázek 6.4: Závislost průměrné chyby úhlu na velikosti zadaného úhlu

Porovnání s fázovou korelací

Nyní už jen zbývá ukázat porovnání metody fázové korelace s metodou využívající singulárního rozkladu pro jednodruhové obrázky. Jelikož metoda fázové korelace určila všechny posuny s nulovou chybou, tak v tomto směru nemáme co porovnávat. Z Obrázku 6.6 je krásně vidět, že metoda fázové korelace nezachytí úhel menší než 0.18° a pak chyba vypadá až periodicky, což je dáno diskretizací úhlu. Metoda se singulárním rozkladem zachytí úhel už nad 0.1° a až na občasné vyšší výkyvy, způsobené špatným určením bodů pomocí fázové korelace na malých výřezech, si metoda drží celkem nízkou průměrnou chybu úhlu. Pokud budeme potřebovat stabilní průběh chyby bez výkyvů, budeme muset zvolit metodu fázové korelace. Pro úhel menší než 0.2° by bylo lepší zvolit metodu využívající singulárního rozkladu, jelikož výpočet bude přesnější pro posunutí i pro otočení. Jak už bylo zmíněno, na výpočet jedné registrace si u metody se singulárním rozkladem počkáme asi 0.85 sekundy a u fázové korelace průměrně 25 sekund.



Obrázek 6.5: Závislost průměrné chyby posunu na velikosti zadaného úhlu



Obrázek 6.6: Porovnání metod

Kapitola 7

Závěr

Cílem práce bylo registrovat snímky z CT angiografie. Použili jsme metodu založenou na Fourierově transformaci zvanou fázová korelace, dále jsme použili dvě alternativní metody pro registraci obrázků, které se liší jen v malém úhlu. Alternativní metody pracovaly s množinami bodů získanými pomocí fázové korelace a snažily se co nejpřesněji odhadnout opravdový posun a otočení mezi obrázky. Všechny metody byly matematicky odvozeny a byly modifikovány tak, aby co nejlépe fungovaly na daných snímcích z angiografie. Všechny metody byly implementovány a otestovány v prostředí Matlab a některé kódy a výsledky lze nalézt v příloženém CD.

Výsledky ukázaly, jak je metoda fázové korelace účinná. Nicméně je citlivá na vstupní data, což jsme si ověřili při hledání ideální okénkové funkce. Kdybychom použili jinou okénkovou funkci, než je uvedena v práci, dočkali bychom se větších nebo i menších nepřesností v určeném posunu a otočení.

U ostatních dvou metod jsme očekávali přesnější výpočet pro posun o necelý pixel a pro malou rotaci, což se nám do jisté míry podařilo a pro obrázky s velkým rozlišením už by mělo smysl výsledky těchto metod i použít. Jelikož výpočetní náročnost je velmi malá, mohla by být především metoda využívající singulárního rozkladu použita buď pro zpřesnění registrace provedené jiným, méně přesným nástrojem, nebo bychom ji mohli použít k odhadu počátečního bodu v nějaké optimalizační metodě pro registraci.

Literatura

- [1] Barbara Zitova and Jan Flusser. Image registration methods: a survey. *Image and vision computing*, 21(11):977–1000, 2003.
- [2] Philippe Thévenaz, Thierry Blu, and Michael Unser. Image interpolation and resampling, 2000.
- [3] Tomáš Jeřábek. Zobecněné funkce a distribuce. 2006.
- [4] Fredric J Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 66(1):51–83, 1978.
- [5] Erik Jurjen Duintjer Tebbens and Univerzita Karlova. *Analýza metod pro maticové výpočty: základní metody*. Matfyzpress, 2012.
- [6] Olga Sorkine. Least-squares rigid motion using svd. *Technical notes*, 120:3, 2009.
- [7] Eva Vodrážková. *Singulární rozklad matice a jeho použití [online]*. 2012 [cit. 2014-05-13].
- [8] Hana Druckmüllerová. *Registrace obrazu pomocí fázové korelace*. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2013.
- [9] Daniel I Barnea and Harvey F Silverman. A class of algorithms for fast digital image registration. *Computers, IEEE Transactions on*, 100(2):179–186, 1972.
- [10] B Srinivasa Reddy and Biswanath N Chatterji. An fft-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration. *IEEE transactions on image processing*, 5(8):1266–1271, 1996.
- [11] Joanna Schmit and Katherine Creath. Window function influence on phase error in phase-shifting algorithms. *Applied optics*, 35(28):5642–5649, 1996.
- [12] Paul J Besl and Neil D McKay. Method for registration of 3-d shapes. In *Robotics-DL tentative*, pages 586–606. International Society for Optics and Photonics, 1992.
- [13] JB Maintz and Max A Viergever. A survey of medical image registration. *Medical image analysis*, 2(1):1–36, 1998.
- [14] Pavel Karas. Studium metod registrace obrazu, 2009.
- [15] Lisa Gottesfeld Brown. A survey of image registration techniques. *ACM computing surveys (CSUR)*, 24(4):325–376, 1992.

Seznam obrázků

2.1	Snímek z CT angiografie	3
4.1	Ukázkový obrázek	16
4.2	Aplikace okénkové funkce	16
4.3	Fourierovo spektrum obrázku bez okénkové funkce	17
4.4	Fourierovo spektrum s použitím okénkové funkce	17
5.1	Rozdělení obrázku na výřezy	18
6.1	Histogram chyb vypočteného úhlu	25
6.2	Graf závislosti chyby úhlu na velikosti úhlu	27
6.3	Graf závislosti chyby posunu na velikosti úhlu	28
6.4	Závislost průměrné chyby úhlu na velikosti zadaného úhlu	29
6.5	Závislost průměrné chyby posunu na velikosti zadaného úhlu . . .	30
6.6	Porovnání metod	30