Pr.1 Ukážte, že pre sféricky symetrický potenciál $V(r)$, platí

$$f(\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3\vec{r}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}V(r) = -\frac{2m}{\hbar^2\kappa}\int_0^\infty rV(r)\sin(\kappa r)dr \qquad (1)$$

kde, $\kappa = 2k\sin\frac{\theta}{2}$, uvažujeme pružný rozptyl

Pr.2 Na základe Pr.1 vypočítajte $f(\theta,\phi)$ pre

a) $V(r) = -V_0$ pre r $\leq$ a, V(r) = 0 pre r > a

Výsledok: $f(\theta,\phi) = \frac{2V_0m}{\hbar^2}\left[\frac{\sin(\kappa a)}{\kappa^3} - \frac{a\cos(\kappa a)}{\kappa^2}\right]$

b) $V(r) = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r} \equiv A\frac{e^{-\mu r}}{r}$ (Yukawov potenciál)

Výsledok: $f(\theta,\phi) = \frac{2Am}{\hbar^2}\frac{1}{\mu^2+\kappa^2}$

c) $V(r) = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$ (Coulombov potenciál)

Postup: Najprv si premyslite, prečo sa nedá použiť na výpočet vzťah(1). Potom si stačí uvedomiť, že Coulombov potenciál dostaneme ak v Yukawovom položíme $\mu \to 0$.

Pr.3 Vypočítajte $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ a σ pre rozptyl na

a)Yukawovovom potenciáli

Výsledok: $\sigma = 4\pi\left(\frac{2Am}{\hbar^2}\right)^2\frac{1}{[\mu^2+4k^2]\mu^2}$
(substitúcia pri integrovaní $sin\theta/2 = t$)

a)Coulombovom potenciáli

Výsledok: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\theta/2}$ -Rutherfordova formula (Využili sme:$E = k^2\hbar^2/(2m)$)
$\sigma = \infty$

Pr.4 Ukážte, že pre sféricky symetrické rozloženie náboja $\rho(r)$, platí

$$F(\vec{k}-\vec{k}') = \int d^3\vec{r}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}\rho(r) = \frac{4\pi}{\kappa}\int_0^\infty r\rho(r)\sin(\kappa r)dr \qquad (2)$$

a vypočítajte formfaktory pre nasledovné rozloženia náboja[1]

a) $\rho(r) = \rho_0$ pre r $\leq$ a, ρ(r) = 0 pre r > a

Výsledok: $F(\kappa) = 4\pi\rho_0\left[\frac{\sin(\kappa a)}{\kappa^3} - \frac{a\cos(\kappa a)}{\kappa^2}\right]$

b) $\rho(r) = Ae^{-\alpha r}$ $\alpha > 0$

Výsledok: $F(\kappa) = 8\pi A\frac{\alpha}{(\alpha^2+\kappa^2)^2}$

Pr.5 Nájdite súvis medzi $\frac{dF}{d\kappa^2}\Big|_{\kappa=0}$ a $< r^2 >$, pričom opäť predpokladáme sféricky symetrické rozloženie náboja

Postup: Zo vzťahu (2)
$F(\kappa^2) = \frac{4\pi}{\kappa}\int_0^\infty r\rho(r)\left(\kappa r - \frac{1}{6}(\kappa r)^3 + ...\right)dr = 4\pi\int_0^\infty r\rho(r)\left(r - \frac{1}{6}\kappa^2r^3 + ...\text{vyssie parne mocniny}\kappa\right)dr$
$\frac{dF}{d\kappa^2}\Big|_{\kappa=0} = -\frac{2}{3}\pi\int_0^\infty r\rho(r)r^3dr \equiv -\frac{1}{6}\int d^3\vec{r}r^2\rho(r) = -\frac{1}{6} < r^2 >$

[1] Platí: $\int\rho(\vec{r})d^3\vec{r} = 1$