

文章编号: 1007-9432(2004) 01-0019-04

## 受约束动态矩阵控制算法的仿真研究

李国勇

(太原理工大学 信息工程学院, 山西 太原 030024)

**摘 要:** 针对有约束动态矩阵控制问题, 以输出预测值与未来参考轨迹序列误差的绝对值之和作为性能指标, 对输入受限的动态矩阵控制算法进行了仿真研究。仿真实例验证了该算法有效。

**关键词:** 动态矩阵控制; 约束; 二次规划; 加权控制律

**中图分类号:** TP 18

**文献标识码:** A

在控制系统工程实施中, 需要考虑多种约束。例如: 从产品质量考虑, 其质量控制指标有一定的范围要求; 从操作的生产安全性考虑, 几乎所有操作变量都必须在一定的区域之内; 从执行机构的物理限制考虑, 调节手段不可能实现无限制的调节。当实际被控过程受约束时, 按无约束情况设计的控制器将会降低闭环系统性能, 或产生不期望的影响。研究有约束系统的预测控制正是出于实际需要的考虑, 使系统稳定性和控制性能得到保证。文献[1]采用加权多项式来考虑系统输入约束问题, 文献[2]利用二次规划对具有输入输出约束的系统进行了研究, 文献[3, 4]分别从其它方面对具有输入输出约束的系统进行了研究。本文通过把有约束动态矩阵控制的滚动优化策略转化为二次目标规划问题, 从而使在线滚动优化变的非常容易, 并可充分利用全部操作变量优化系统的动态性能, 并在目标函数中加入对控制量的约束, 压制过于剧烈的控制增量, 防止系统超出限制范围。

预测控制的优化模式具有鲜明的特点, 它离散式的有限优化目标以及滚动推进的实施过程, 使其在控制的全过程中表现为动态优化, 而在每一步的控制中表现为静态之参数优化, 即确定有限控制参数  $u(k)$ ,  $u(k+1)$ ,  $\dots$  以满足性能指标最优的问题。这种静态参数优化, 可以推广到更为一般的情况, 例如有约束、多目标、非线性指标等, 而相应的优化求解也可运用最优化技术中处理多目标的各种手段, 如目标分层法、目的规划法等。

## 1 预测模型

若被控对象在各采样时刻的单位阶跃响应系数为  $a_1, a_2, \dots, a_p$ ,  $p$  称为模型时域长度,  $a_p$  是足够接近稳态值的系数, 则根据线性系统比例和叠加性质, 若在某个  $k-i$  ( $k \geq i$ ) 时刻输入  $u(k-i)$ , 则  $\Delta u(k-i)$  对输出  $y(k)$  的贡献为

$$y(k) = \begin{cases} a_i \Delta u(k-i) & 1 \leq i < p, \\ a_p \Delta u(k-i) & i \geq p; \end{cases} \quad (1)$$

若在所有  $k-i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) 时刻同时有输入, 则根据叠加原理有

$$y(k) = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \Delta u(k-i) + a_p \Delta u(k-p). \quad (2)$$

可得  $y(k+j)$  在  $k$  时刻的  $n$  步预估 ( $n < p$ ):

$$\hat{y}(k+j) = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \Delta u(k+j-i) + a_p \Delta u(k+j-p), \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

由于只有过去的控制输入是已知的, 因此在利用动态模型作预估时有必要把过去的输入对未来的输出贡献分离出来, 上式可写为

$$\hat{y}(k+j) = \sum_{i=1}^j a_i \Delta u(k+j-i) + \sum_{i=j+1}^{p-1} a_i \Delta u(k+j-i) + a_p \Delta u(k+j-p), \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

上式右端的后二项即为过去输入对输出  $n$  步预估, 记为

$$y_0(k+j) = \sum_{i=j+1}^{p-1} a_i \Delta u(k+j-i) +$$

\* 收稿日期: 2003-04-02

基金项目: 山西省青年科技研究基金项目(20011017)

作者简介: 李国勇(1963-), 男, 山西闻喜县人, 副教授, 博士研究生, 主要从事预测控制、智能控制和控制理论与应用研究。

$$a_p \Delta u(k+j-p), \quad j=1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

将式(4)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_0(k+1) \\ y_0(k+2) \\ \vdots \\ y_0(k+n) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

为增加系统的动态稳定性和控制输入的可实现性, 以及减少计算量可将  $\Delta u$  向量减少为  $m$  维( $m < n$ ), 则式(6)变为

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_0(k+1) \\ y_0(k+2) \\ \vdots \\ y_0(k+n) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

记  $\hat{Y} = [\hat{y}(k+1), \hat{y}(k+2), \cdots, \hat{y}(k+n)]^T$ ,  
 $U = [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \cdots, \Delta u(k+m-1)]^T$ ,  
 $Y_0 = [y_0(k+1), y_0(k+2), \cdots, y_0(k+n)]^T$ ,  
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

则式(7)可写为

$$\hat{Y} = A\tilde{U} + Y_0. \tag{8}$$

$A$  矩阵为  $n \times m$  维的常数矩阵, 由于它完全由系统的阶跃响应参数所决定, 反映了对对象的动态特性, 故称之为动态矩阵.  $n, m$  分别称之为最大预测长度和控制长度.

2 最优控制律

在预测控制中, 控制律是通过某种滚动优化指标导出的

$$\min J(k) = J(k, \Delta U(k)), \tag{9}$$

即确定从  $t=kT$  时刻起  $m$  ( $m < p$ ) 个时刻的控制作用  $\Delta u(k), \Delta u(k+1), \cdots, \Delta u(k+m-1)$  使得  $J$

( $k$ ) 达到最小值的问题, 这是一个优化问题.

在实际系统中, 通常存在着各种物理约束, 假设对输入有如下约束:

$$u_{\min} \leq u(k+j) \leq u_{\max}, \tag{10}$$
$$j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

式中,  $u_{\min}, u_{\max}$  分别为控制量的上限和下限.

由  $\Delta u(k+j) = u(k+j) - u(k+j-1)$  可得如下控制量变化率的约束:

$$|\Delta u(k+j)| \leq \Delta u_{\max}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

式中:  $\Delta u_{\max}$  为控制量变化率的上限.

综上所述, 系统有约束的预测控制问题的一般性描述为

$$\begin{cases} \hat{Y} = A\tilde{U} + Y_0, \\ \min J(k) = J(k, \Delta U(k)), \\ |\Delta u(k+j)| \leq \Delta u_{\max}. \end{cases} \tag{12}$$

特别地, 有约束的预测控制系统的优化指标可用下述二次性能指标表示:

$$J = \sum_{j=1}^n [y(k+j) - w(k+j)]^2 + \sum_{j=1}^m \lambda(j) [\Delta u(k+j-1)]^2. \tag{13}$$

式中,  $m$  表示控制长度( $m < n$ ),  $\lambda(j)$  是大于零的控制加权系数,  $\lambda(j) = 0$  意味着控制增量不受限制, 目标函数中后一项的加入主要用于压制过于剧烈的控制增量, 以防止系统超出限制范围.

若令

$$W = [w(k+1), w(k+2), \cdots, w(k+n)]^T, \tag{14}$$

则式(9)可表示为

$$J = (Y - W)^T (Y - W) + \lambda \Delta U^T \Delta U. \tag{15}$$

用  $Y$  的最优预测值  $\hat{Y}$  代替  $Y$ , 即将式(8)代入式(15)中, 并令

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}} = 0,$$

得 
$$\tilde{U} = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T (W - Y_0). \tag{16}$$

式(16)与实际检测值无关, 是 DMC 算法的开环控制形式. 由于模型误差、弱非线性特性等影响, 开环控制式(16)不能紧密跟踪期望值, 若等到经过  $m$  个时刻后, 再重复式(16), 必然造成较大的偏差, 更不能抑制系统受到的扰动, 故必须采用闭环控制算式, 即仅将计算出来的  $m$  个控制增量的第一个值付诸实施, 即现时的控制增量为

$$\Delta u(k) = c^T (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T (w - y_0) = d^T (w - y_0). \tag{17}$$

式中:  $c^T = [1, 0, \cdots, 0]$ .

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T.$$

如果  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda$  都已确定,  $\mathbf{d}$  可事先离线解出, 在线计算  $\Delta u(k)$  只需完成两个矢量的点积即可。

可见, 预测控制的控制策略是在实施了  $\Delta u(k)$  之后, 采集  $k+1$  时刻的输出数据, 进行新的预测、校正、优化, 从而避免在等待  $m$  拍控制输入完毕期间, 由于干扰等影响造成失控。因此优化过程不是一次离线进行, 而是反复在线进行, 其优化目标也是随时间推移, 即在每一时刻都提出一个立足于该时刻的局部优化目标, 而不是采用不变的全局优化目标。

### 3 误差校正

由于每次实施控制只采用了第一个控制增量  $\Delta u(k)$ , 故对未来时刻的输出可用下式预测

$$\hat{\mathbf{Y}}_p = a \Delta u(k) + \mathbf{Y}_{p_0}, \quad (18)$$

式中

$\hat{\mathbf{Y}}_p = [\hat{y}(k+1), \hat{y}(k+2), \dots, \hat{y}(k+p)]^T$ , 表示在  $t=kT$  时刻预测的有  $\Delta u(k)$  作用时未来  $p$  个时刻的系统输出;

$\mathbf{Y}_{p_0} = [y_0(k+1), y_0(k+2), \dots, y_0(k+p)]^T$ , 表示在  $t=kT$  时刻预测的无  $\Delta u(k)$  作用时未来  $p$  个时刻的系统输出;

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_p]^T$$

为单位阶跃响应在各采样时刻的值。

由于对象及环境的不确定性, 在  $k$  时刻实施控制作用后, 在  $k+1$  时刻的实际输出  $y(k+1)$  与预测输出

$$\hat{y}(k+1) = y_0(k+1) + a_1 \Delta u(k)$$

未必相等, 这就需要构成预测误差

$$e(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1),$$

并用此误差加权后修正对未来其它时刻的预测, 即

$$\tilde{\mathbf{Y}}_p = \hat{\mathbf{Y}}_p + \mathbf{h}e(k+1). \quad (19)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{Y}}_p = [y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+p)]^T$$

为  $t=(k+1)T$  时刻经误差校正后所预测的  $t=(k+1)T$  时刻的系统输出;  $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_p]^T$  为误差校正矢量, 取  $h_1=1$ 。

经校正后的  $\tilde{\mathbf{Y}}_p$  作为下一时刻的预测初值, 由于在  $t=(k+1)T$  时刻的预测初值, 应预测  $t=(k+2)T, \dots, (k+p+1)T$  时刻的输出值, 故令

$$y_0(k+i) = y(k+i+1), \quad i=1, 2, \dots, p-1. \quad (20)$$

由式(19), 式(20)两式得下一时刻的预测初值为

$$\begin{cases} y_0(k+i) = \hat{y}(k+i+1) + h_{i+1}e(k+i), \\ i=1, 2, \dots, p-1; \\ y_0(k+p) = \hat{y}(k+p) + h_p e(k+i). \end{cases} \quad (21)$$

这一修正的引入, 也使系统成为一个闭环负反馈系统, 对提高系统的性能起了很大作用。

由此可见, 动态矩阵控制是由预测模型、控制器和校正器三部分组成的, 模型的功能在于预测未来的输出值, 控制器则决定了系统输出的动态特性, 而校正器则只有当预测误差存在时才起作用。当约束遭到扰动短暂破坏时, 不会象线性规划那样终止计算, 而是继续向参考轨迹逼近, 在有限域内达到设定值。

### 4 仿真结果

为了验证输入受限系统动态矩阵控制算法的有效性和实用性, 考虑如下的纯时延的二阶对象

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}(s+1)}{s^2 + 4s + 4}.$$

仿真结果如图 1, 图 2 所示。

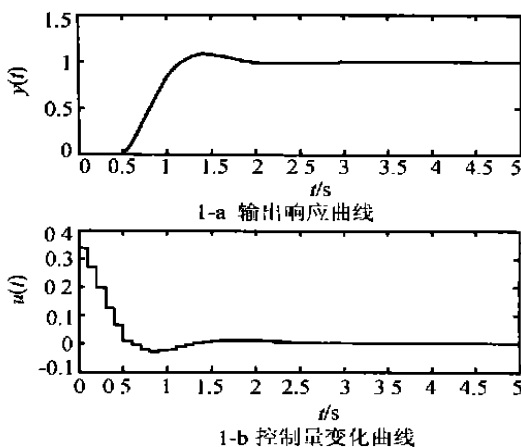


图 1 阶跃响应曲线

图 1 中各参数取值: 仿真步长为 5, 参考输入的设定值  $y_r=1$ , 预测长度  $P=6$ , 控制长度  $M=2$ , 柔化系数  $\alpha=0.95$ , 控制量的上限和下限  $u_{\min}=-0.5$ ,  $u_{\max}=60$ 。

图 2 中各参数取值: 仿真步长为 5, 参考输入的设定值  $y_r=1$ , 预测长度  $P=6$ , 控制长度  $M=2$ , 柔化系数  $\alpha=0.95$ , 控制量的上限和下限  $u_{\min}=-0.5$ ,  $u_{\max}=0.5$ 。

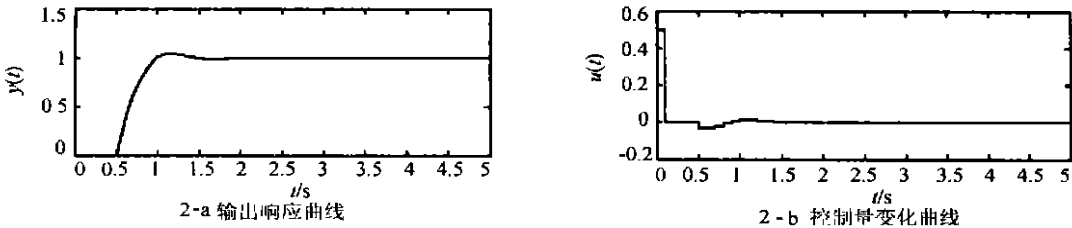


图 2 阶跃响应曲线

图 2 和图 1 相比系统的输入、输出变化比较平稳, 过渡过程没有超调。由此可见, 适当的施加约束不仅可以满足实际控制的要求, 而且可以使系统的动态性能得以改善。

参考文献:

[1] 毛志忠, 杨琳. 一种解决预测控制输入信号受约束问题的方法[J]. 控制与决策, 1997, 9(3): 230-233.  
[2] Camacho E. F. Constrained generalized predictive control[J]. IEEE Trans Automat Contr, 1993, 38(2): 327-332.  
[3] 张俊, 席裕庚. 基于几何分析的约束预测控制直接算法[J]. 控制与决策, 1997, 12(2): 184-187.  
[4] 陈增强, 袁著祉. PI 型有约束后移限位预测控制器[J]. 应用科学学报, 1998, 16(2): 229-233.

Simulation Research of Dynamic Matrix  
Control Algorithm with Constrained Input

LI Guo-yong

( College of Information Engineering of TUT, Taiyuan 030024, China)

**Abstract:** Focusing on constrained multivariable dynamic matrix control, the sum of the error absolute values between predictive outputs and reference trajectory sequences is taken as the criterion function to simulate the dynamic matrix control algorithm with constrained input. Combining the target function with constraint into control deal to surpress violent control increasement can prevent the system beyond limit. A simulation example shows the effective performance of the algorithm.

**Key words:** dynamic matrix control; constraints; quadratic program; weighted control regulation

( 编辑: 贾丽红)