上海交通大学试卷 ＜3＞

电磁场与波期终试卷(A卷)

姓名__________班级__________学号__________得分__________

一．填空题（每小题3分，共30分）

1．已知一静止电荷q位于圆柱坐标系中的点$p_0(r,\varphi,z)=p_0\left(a,\frac{\pi}{3},-a\right)$处，则此点电荷在直角坐标系中的点$p_1(x,y,z)=p_1(a,a,a)$处产生的电场强度$\vec{E}$的$y$向分量$E_y=$__________；电场强度$\vec{E}$在圆球坐标系中的$\theta$向分量$E_\theta=$__________。

2. 矢量场的唯一性定理为____。

3. 真空中，已知一电磁波的电场强度为$\vec{E}=\vec{a}_z E_0\cos(\omega t-\beta x)+\vec{a}_y E_0\sin(\omega t-\beta x)$，则此电磁波的磁场强度的瞬时表达式为______________________________。

4. 时变场中，有机玻璃和水的交界面处的边界条件为______________________________。

5．在一无限大的理想接地导电平面（xoy平面）上方（媒质为空气）距离为z处有一正电荷q，并位于均匀电场$E_0\vec{a}_z$中。当$z=$__________时，电荷受力为零。

6．真空中，载直流为I的两根半无限长直导线（垂直于xoy平面）和一半径为a的有缺口圆环形导线（处于xoy平面内）构成回路。设缺口的张角为2α，则环心p点的磁感应强度$\vec{B}=$______________________________。（注：电流方向及坐标自取，并画出坐标系）

7．一均匀平面波从空气垂直入射到理想导体表面（$z=0$）上，已知其反射波的电场强度为$\dot{\vec{E}}_r=E_0\left(-\vec{a}_x+j2\vec{a}_y\right)e^{j\beta z}$，则其入射波为__________极化波；理想导体表面（$z=0$）上的面电流密度$\dot{\vec{J}}_S=$______________________________。

8． 一尺寸为$a\times b$的矩形波导工作于TE_{10}波，当工作频率$f=9.25$ GHz时，波导波长$\lambda_g=4.95$ cm；当$f'=9.8$ GHz时，其波导波长$\lambda_g'=$__________。

9．尺寸为$a\times b$的空气矩形波导（其轴线沿z向）中TE_{10}波的平均功率密度的表达式$\dot{\vec{S}}_{av}=$__________________；功率容量的表达式$P_{br}=$____________________。

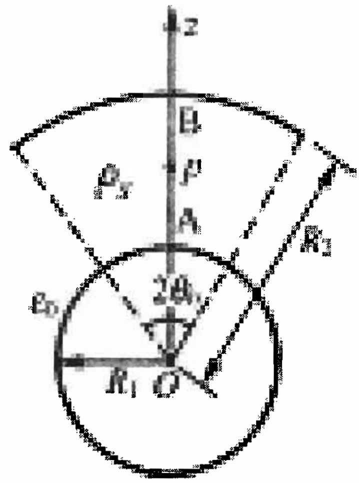
10．三个沿 x 轴排列，间距为 $\lambda/2$ 的半波对称振子（轴线沿 y 轴）用于自由空间中远区辐射电磁波，各电流元激励电流的相位相同，振幅比为 1 ： 2 ： 1 ，则该天线阵的归一化方向图函数 $|F(\theta,\varphi)|=$ ________________________________。

二．问答（含推导、证明）题（每小题各 5 分，共 2 0 分）

1．试从麦克斯韦方程出发，详细导出适用于简单媒质的复坡印亭定理。

三．计算题（前 1 题 20 分，后 2 题各 15 分，共 5 0 分）

1．在一半径为 R_1 的接地导体球外有一球心相同、半径为 R_2 的部分导体球壳，此球壳对球心的张角为 $2\theta_0$，如图所示。部分球壳上均匀分布面电荷，面电荷密度为 ρ_S。① 导出接地导体球与部分球壳间 z 轴上任一点 $p(R,\theta,\varphi)=p(R,0^\circ,0^\circ)$ 处的电位表达式；② 求出接地导体球上 A 点的面电荷密度 ρ_{SA} 的表达式；③ 以此问题的求解思路为基础，若适当改变题给条件，你认为此题还有哪些问题可求？（限其中一个问题）



2．一工作频率为 100 MHz 的垂直极化波以 60° 的入射角从淡水 $(\varepsilon_r=80,\sigma\approx 0)$ 中入射到淡水和空气的平面交界面（$z=0$）上，① 试详细推导并求出淡水和空气交界面处的反射系数；② 导出空气中电场强度的复数表达式；③ 写出空气中复坡印亭矢量的表达式；④ 由③的结果可得到哪些结论和波（场）的特点（说明其原因）？

3. 一空气填充的矩形波导的尺寸为 $a\times b=(23\times 10)\ \mathrm{mm}^2$，波导中传输工作频率为 $f=10.87\ \mathrm{GHz}$ 的导行电磁波，若已知此导行波的电场强度的最大值为 $500\ \mathrm{V/m}$，求：

22

①. 波导中传输模式的波导波长、相速以及波阻抗；②. 波导内壁表面处传输模式的纵向面电流密度的最大值。

SJ3 部分习题参考答案

李旭光
lixg@sjtu.edu.cn
电信群楼 1 号楼 328
（答案仅供参考，发现问题请告知，谢谢！）

一. 填空题

1．已知一静止电荷q位于圆柱坐标系的点$P_0(r,\varphi,z)=P_0(a,\frac{\pi}{3},-a)$处，则此点电荷在直角坐标系中的点$P_1(x,y,z)=P_1(a,a,a)$处产生的电场强度$\vec{E}$的$y$向分量$E_y=\frac{q(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}{4\pi\varepsilon_0(6-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}a^2}$。电场强度$\vec{E}$在圆球坐标系中的$\theta$分量$E_\theta=\cos\theta\cos\varphi E_x+\cos\theta\sin\varphi E_y-\sin\theta E_z$计算，其中$\theta=\frac{\pi}{12},\varphi=\frac{\pi}{2}$。

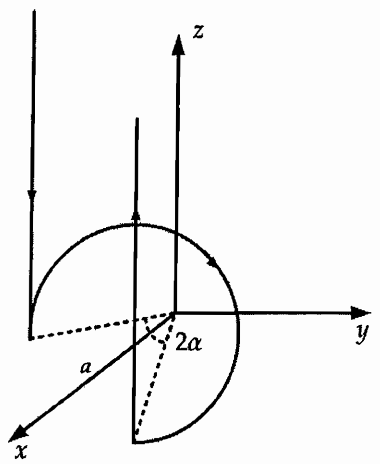
2．矢量场的唯一性定理为一个矢量场被其散度、旋度和区域边界上的边界条件唯一确定。

3．真空中，已知一电磁波的电场强度为$\vec{E}=\vec{a}_zE_0\cos(\omega t-\beta x)+\vec{a}_yE_0\sin(\omega t-\beta x)$，则此电磁波的磁场强度的瞬时表达式为$-\vec{a}_y\frac{E_0}{\eta_0}\cos(\omega t-\beta x)+\vec{a}_z\frac{E_0}{\eta_0}\sin(\omega t-\beta x)$。

4．时变场中，有机玻璃和水的交界面处的边界条件为$\vec{a}_n\bullet(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\sigma$，$\vec{a}_n\bullet(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$，$\vec{a}_n\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$，$\vec{a}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}_S$。

5．在一无限大的理想接地导电平面（xOy平面）上方（媒质为空气）距离z处有一正电荷q，并位于均匀电场$\vec{a}_zE_0$中，当$z=\sqrt{\frac{q}{16\pi\varepsilon_0E_0}}$时，电荷受力为 0。

6．真空中，载直流为I的两根半无限长直导线（垂直于xOy平面）和一半径为a的有缺口圆环形导线（位于xOy平面内）构成回路，设缺口的张角为2α，则环心P点的磁感应强度。



$$\vec{B}=\vec{a}_x\frac{\mu_0 I\sin\alpha}{2\pi a}-\vec{a}_z\frac{\mu_0 I(\pi-\alpha)}{2\pi a}$$

7．一均匀平面波从空气垂直入射到理想导体表面（$z=0$）上，已知其反射波的电场强度为 $\vec{E}_r=E_0(-\vec{a}_x+j2\vec{a}_y)e^{j\beta z}$，则其反射波为右旋椭圆极化波，理想导体表面（$z=0$）上的电流密度 $\vec{J}_S=\frac{2}{377}(\vec{a}_x-2\vec{a}_y)$。

8．一尺寸为 $a\times b$ 的矩形波导工作于 TE_{10} 波，当工作频率 $f=9.25\text{GHz}$ 时，波导波长 $\lambda_g=4.95\text{ cm}$, 当 $f_c'=98.8\text{ GHz}$ 时，其波导波长 $\lambda_g'=4.36\text{ cm}$。

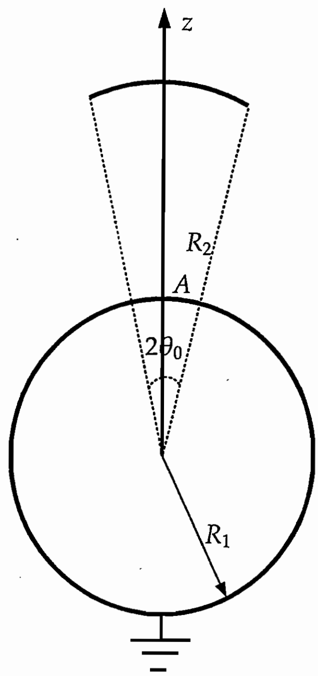
9．尺寸为 $a\times b$ 的空气矩形波导（其轴向沿z向）中 TE_{10} 波的平均功率密度的表达式 $\vec{S}_{av}=\vec{a}_z\frac{abE_{10}^2}{4Z_{TE_{10}}}$，功率容量的表达式 $P_{br}=\frac{abE_{br}^2}{4\eta}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$。

10．天线问题，不解答。

二．问答

试从麦克斯韦方程出发，详细导出适用于简单媒质的复坡印廷定理。(推导见教材)。

三．计算题



1．在一半径为R_1的接地导体球外有一球心相同，半径为R_2的部分导体球壳，此球壳对球心的张角为$2\theta_0$，如上图所示。部分球壳上均匀分布面电荷，面电荷面密度为ρ_s。（1）导出接地导体球与部分球壳间z轴上任一点$P(r,\theta,\varphi) = P(r,0°,0°)$处的电位表达式；（2）求出接地导体球上$A$点电荷面密度$\rho_{sA}$的表达式；（3）从此问题的解体思路为基础，若适当改变给定条件，你认为此题还有那些问题可求。

解答：

（1）

取面积微元dS，电荷微元为$\rho_s dS$。

$r = R_2,\ 0 \le \varphi \le \theta_0,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

$\rho_s dS = \rho_s R_2^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$

对应镜像电荷为：

$-\dfrac{\rho_s dS R_1}{R_2}$

其位置距球心O距离为：

$d_i = \dfrac{R_1^2}{R_2}$

所以P点电位由$\rho_s dS$与$-\dfrac{\rho_s dS R_1}{R_2}$共同决定。

$$d\phi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\rho_s dS}{r_1} - \frac{\rho_s dS R_1}{r_2 R_2}\right)$$

$$= \frac{\rho_s dS}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2R_2 r\cos\varphi}} - \frac{R_1}{R_2\sqrt{r^2 + \dfrac{R_1^4}{R_2^2} - 2\dfrac{rR_1^2}{R_2}\cos\varphi}}\right)$$

因此：

$$\phi_P = \int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} \frac{\rho_s R_2^2 \sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2R_2 r\cos\varphi}} - \frac{R_1}{R_2\sqrt{r^2 + \dfrac{R_1^4}{R_2^2} - 2\dfrac{rR_1^2}{R_2}\cos\varphi}}\right)d\varphi d\theta$$

分别对φ和θ积分可以得到：

$$\phi_P = \int_0^{\theta_0} \frac{\rho_s R_2^2 \sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2R_2 r\cos\varphi}} - \frac{R_1}{R_2\sqrt{r^2 + \dfrac{R_1^4}{R_2^2} - 2\dfrac{rR_1^2}{R_2}\cos\varphi}}\right)d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

对φ的积分采用换元法：

$$\phi_P=\int_1^{\cos\theta_0}\frac{\rho_s R_2^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_1}{R_2\sqrt{r^2+\frac{R_1^4}{R_2^2}-2\frac{rR_1^2}{R_2}\cos\varphi}}-\frac{1}{\sqrt{R_2^2+r^2-2R_2r\cos\varphi}}\right)d\cos\varphi\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$\phi_P=\frac{\rho_s R_2^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R_2^2+r^2-2R_2r\cos\theta_0)^{\frac{1}{2}}}{2rR_2}-\frac{\rho_s R_2^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(R_2-r)}{2rR_2}$$

$$-\frac{\rho_s R_2^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(r^2+\frac{R_1^4}{R_2^2}-2\frac{rR_1^2}{R_2}\cos\theta_0\right)^{\frac{1}{2}}}{2rR_1}+\frac{\rho_s R_2^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(r-\frac{R_1^2}{R_2}\right)}{2rR_1}$$

化简合并得：

$$\phi_P=\frac{\rho_s R_2(R_2^2+r^2-2R_2r\cos\theta_0)^{\frac{1}{2}}}{8\pi\varepsilon_0 r}-\frac{\rho_s R_2(R_2-r)}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

$$-\frac{\rho_s R_2^2\left(r^2+\frac{R_1^4}{R_2^2}-2\frac{rR_1^2}{R_2}\cos\theta_0\right)^{\frac{1}{2}}}{8\pi\varepsilon_0 rR_1}+\frac{\rho_s R_2^2\left(r-\frac{R_1^2}{R_2}\right)}{8\pi\varepsilon_0 rR_1}$$

（2）

A点电荷面密度ρ_{SA}：

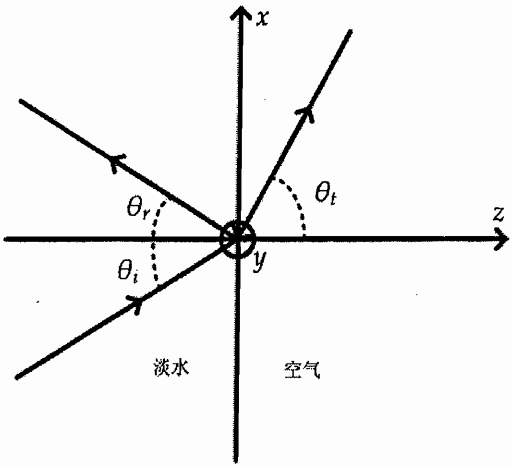
$\rho_{SA}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\phi_P}{\partial n}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\phi_P}{\partial r}$，求解之后代入$r=R_1$。

具体求导过程请自己完成，复合函数求导，项数比较多，但并不复杂。

（3）

可以求球壳间的电位分布，改变条件，圆球不接地而赋予一定电荷量，还可求电位、电场和面电荷密度。

2．一工作频率为100MHz的垂直极化波以60°的入射角从淡水（$\varepsilon_r=80,\sigma\approx0$）中入射到淡水和空气的平面交界面（$z=0$）上（1）试详细推导并求出淡水和空气交界面处的反射系数；（2）导出空气中电场强度的复数表达式；（3）写出空气中复坡印亭矢量的表达式；（4）由（3）的结果可得到哪些结论和波（场）的特点（说明其原因）？



解答：

（1）

垂直极化（从淡水入射到淡水和空气的平面交界面）。

取$\vec{E}_i$沿$\vec{a}_y$方向，则：

$$\vec{E}_i = \vec{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1 \vec{a}_{ni} \bullet \vec{r}} = \vec{a}_y E_{i0} e^{-j\vec{\beta}_{ni} \bullet \vec{r}}$$

对反射波有：

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= \vec{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1 \vec{a}_{nr} \bullet \vec{r}} \\ &= \vec{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1 (x \sin\theta_r - z\cos\theta_r)}\end{aligned}$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_{r0}}{\eta_1}(\vec{a}_x \sin\theta_r + \vec{a}_z \cos\theta_r) e^{-j\beta_1 (x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

对透射波有：

$$\vec{E}_t = \vec{a}_y E_{t0} e^{-j\vec{\beta}_{2t} \bullet \vec{r}} = \vec{a}_y E_{t0} e^{-j\beta_2 (x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{\eta_2}(-\vec{a}_x \cos\theta_t + \vec{a}_z \sin\theta_t) e^{-j\beta_2 (x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

媒质交界面处$(z=0)$处电场强度和磁场强度满足边界条件：

$$\begin{cases} (E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = E_{ty}|_{z=0} \\ (H_{ix} + H_{rx})|_{z=0} = H_{ty}|_{z=0} \end{cases}$$

根据上述边界条件可得：

$$\begin{cases} E_{i0} e^{j\beta_1 x \sin\theta_i} + E_{r0} e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t} = E_{t0} e^{-j\beta_2 x \sin\theta_t} \\ \dfrac{1}{\eta_1}(-E_{i0}\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i} + E_{r0}\cos\theta_r e^{-j\beta_1 x \sin\theta_r}) = -\dfrac{E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t} \end{cases}$$

因为：

$$\begin{cases}\beta_1 x\sin\theta_i = \beta_1 x\sin\theta_r = \beta_2 x\sin\theta_t \\ \beta_{ix} = \beta_{rx} = \beta_{tx}\end{cases}$$

所以有：

$$\begin{cases}E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ \dfrac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0})\cos\theta_i = \dfrac{1}{\eta_2}E_{t0}\cos\theta_t\end{cases}$$

因此，反射系数为：

$$\Gamma_\perp = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t}$$

$$= \frac{\cos\theta_i - \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\cos\theta_t}{\cos\theta_i + \dfrac{\eta_1}{\eta_2}\cos\theta_t} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}\cos\theta_t}{\cos\theta_i + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}\cos\theta_t}$$

$$\eta_1 = 42.15\ \Omega,\quad \eta_2 = 377\ \Omega$$

临界角：

$$\theta_c = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} = \arcsin\sqrt{\frac{1}{80}} = 6.42^\circ$$

题中：

$\theta_i = 60^\circ > \theta_C$

将产生全反射。

由斯耐尔定理得：

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}\sin\theta_I = \sqrt{80}\sin 60^\circ = 7.746 > 1$$

此时$\cos\theta_t$变为虚数，即$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = -j\sqrt{\sin^2\theta_t - 1} = -j7.6812$

代入反射系数表达式可得：

$\Gamma_\perp = e^{j109.58^\circ}$

（2）

空气中电场强度即透射波得电场分量为：

$\vec{E}_y = \vec{a}_y E_{t0} e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$

$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2.094\ \text{rad/m}$

$\sin\theta_t = 7.746,\ \cos\theta_t = -j7.6812$

$\therefore \vec{E} = \vec{a}_y E_{t0} e^{-j2.094(7.746x - jz7.6812)}$

（3）

同理，可得空气中磁场分量：

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{E_{t0}}{\eta_2}(-\vec{a}_x\cos\theta_t + \vec{a}_z\sin\theta_t)e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \\ &= \frac{E_{t0}}{377}(\vec{a}_x j7.6812 + \vec{a}_z 7.746)e^{-j2.094(7.746x - jz7.6812)}\end{aligned}$$

所以复坡印亭矢量得表达式为：

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}*) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a}_y E_{t0} e^{-j2.094(7.746x - jz7.6812)} \times \left[\frac{E_{t0}}{377}(\vec{a}_x j7.6812 + \vec{a}_z 7.746)e^{-j2.094(7.746x - jz7.6812)}\right]\end{aligned}$$

需要继续简化。

（4）

分析说明见教材 P178 页“全反射和全透射”。

3. 一空气填充的矩形波导的尺寸为$a\times b = (23\times 10)\ \text{mm}^2$，传输工作频率为$f = 10.87\ \text{GHz}$的导行电磁波，若已知此导行波的电场强度的最大值为500 V/m，求：（1）波导中传输模式的波导波长、相速以及波阻抗；（2）波导内壁表面处传输模式的纵向面电流密度的最大值。

解答：

（1）

$\lambda_0 = \dfrac{c}{f_0} = \dfrac{3\times 10^8}{10.87\times 10^9} = 2.76\ \text{cm}$

TE_{10}模的截止波长：

$\lambda_c = 2a = 4.6\ \text{cm}$

根据传输条件判断，波导中仅能传输TE_{10}模。

波导波长：

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2}} = 3.45\ \text{cm}$$

波导相速：

$v_p = \lambda_g f = 3.75 \times 10^8$ m/s

波导波阻抗：

$$Z_{TE} = \eta \frac{\lambda_g}{\lambda_0} = 471.25\ \Omega$$

（2）

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}$$

$$\frac{Z_{TE}}{\eta} = \frac{v_p}{c} = 1.25$$

因为$E_{\max} = 500$ V/m，所以有：

$$H_{x_{\max}} = -\frac{E_y}{Z_{TE_{10}}} = 1.06 \text{ A/m}$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_{TE_{10}}} = 0$$

表面电流纵向分量为：

$$J_{Sz}|_{x=0,x=a} = \pm H_y = 0$$

$$J_{Sz} = \pm H_{x_{\max}} = \pm \frac{E_y}{Z_{TE_{10}}} = \pm 1.06 \text{ A/m}$$

其最大值为：

$$J_{Sz_{\max}} = 1.06 \text{ A/m}$$