电磁场与波

5.5元

上海交通大学试卷 <1>

电磁场与波期终试卷(A卷)

姓名__________班级__________学号__________得分__________

一. 填空问答题（每小题5分，共30分）

1. 已知 $\vec{A}=x^2y^2\vec{a}_x+z^2\sin y\vec{a}_y+xe^y\vec{a}_z$，求 $\nabla\times\vec{A}=$____________________。

2. 已知 $\vec{A}=A_r\vec{a}_r+A_\varphi\vec{a}_\varphi$，$A_r, A_\varphi$ 分别为常数，$\vec{a}_r, \vec{a}_\varphi$ 为圆柱坐标系的单位矢量，则 $\vec{A}$ 为______（填"是"或"不是"）常矢量。

3. 一平面波的电场为 $\vec{E}=2e^{-j(kx-\frac{\pi}{3})}\vec{a}_z+3e^{-j(kx+\frac{\pi}{3})}\vec{a}_y$，该平面波的传播方向为__________________；极化方式为________________________。

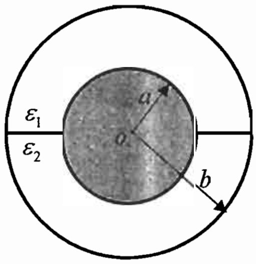
4. 真空中，已知一电磁波的电场强度为 $\vec{E}=\vec{a}_xE_0\cos(\omega t-\beta y)+\vec{a}_zE_0\sin(\omega t-\beta y)$，则此电磁波的磁场强度的瞬时表达式为______________________________。

5. 磁通连续性原理的方程是___________________________（微分形式），其物理意义是____。

6. 矩形波导中 TE_{10} 的面电流分布的特点是______________________________。

二. 计算题（第3题10分，其余3题各20分，共70分）

1. 一同轴线内导体的半径为 a，外导体的半径为 b。内外导体间填充电导率分别为 ε_1 和 ε_2 的两种不同的理想电介质，如图所示。设同轴线内外导体间施加电压为 U_0，且已知其外导体接地。求：① 同轴线中内外导体间各介质中的 $\vec{E}$ 和 $\vec{D}$；② 各介质中的束缚体电荷密度和面电荷密度的表达式。



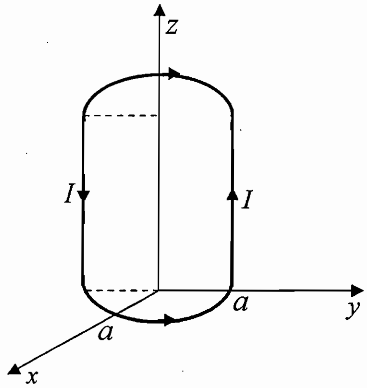
3. 自由空间中，一正弦电磁波的磁场强度的复矢量为

$$\vec{H}=(-\mathrm{\vec{a}}_x+\mathrm{\vec{a}}_y+j\sqrt{2}\,\mathrm{\vec{a}}_z)\mathrm{e}^{-j2\pi(x+y)}\qquad \text{A/m}$$

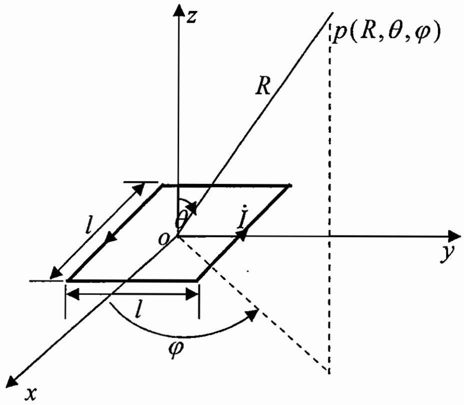
① 求该电磁波的波长；② 求电磁波传播方向上的单位矢量；③ 导出磁场强度的瞬时矢量 $\vec{H}(t)$ 和电场强度的瞬时矢量 $\vec{E}(t)$ 的表达式；④ 求出此平面波的瞬时坡印亭

矢量$\vec{S}(t)$和平均能流密度矢量$\vec{S}_{av}$；⑤ 求其平均电磁场能量密度w_{av}。

3. 真空中，两半径均为a的半圆环与两条相互平行的长为$2a$的直导线构成如图所示的载流回路，回路中载直流I。求坐标原点O处的磁感应强度$\vec{B}$。



4. 如题图所示，一载均匀电流$I = I_0 e^{j0^\circ}$的正方形导电环处于xoy平面，环心处于坐标原点，各边长为$l << \lambda$。① 详细导出该正方形电流环在远区场点$p(R,\theta,\varphi)$处的矢量磁位及电磁场分量的表达式；② 写出该正方形电流环在远区的平均功率密度的表达式；③ 导出其辐射电阻的表达式。



②

SJ1 部分习题参考答案

李旭光
lixg@sjtu.edu.cn
电信群楼 1 号楼 328
（答案仅供参考，发现问题请告知，谢谢！）

一. 填空题

1．已知$A = x^2y^2\vec{a}_x + z^2\sin y\vec{a}_y + xe^y\vec{a}_z$，则$\nabla\times\vec{A} = (xe^y - 2z\sin y)\vec{a}_x - e^y\vec{a}_y - 2x^2y\vec{a}_z$。

2．已知$\vec{A} = A_r\vec{a}_r + A_\varphi\vec{a}_\varphi$，$\vec{a}_r$, $\vec{a}_\varphi$为圆柱坐标系的单位矢量，则$\vec{A}$不是常矢量。

3．一平面波的电场为$\vec{E} = 2e^{-j(kx-\frac{\pi}{3})}\vec{a}_z + 3e^{-j(kx+\frac{\pi}{3})}\vec{a}_y$，该平面波的传播方向为$+\vec{a}_x$，极化方式为左旋椭圆极化。

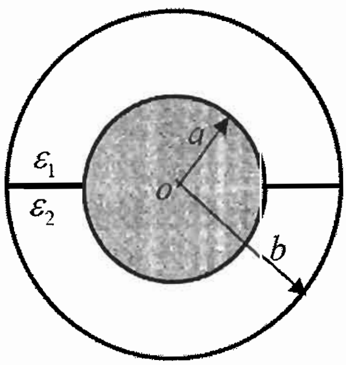
4． 真空中，已知一电磁波的电场强度为$\vec{E} = \vec{a}_xE_0\cos(\omega t - \beta y) + \vec{a}_zE_0\sin(\omega t - \beta y)$，则此电磁波的磁场强度的瞬时值表达式为$-\vec{a}_z\frac{E_0}{\eta_0}\cos(\omega t - \beta y) + \vec{a}_x\frac{E_0}{\eta_0}\sin(\omega t - \beta y)$。

5．磁通连续的原理微分方程是$\nabla\bullet\vec{B} = 0$，其物理意义是：穿过任一闭曲面的磁通量恒为 0，磁场是无散场。

6．矩形波导中TE_{10}模的特点是波导上下宽壁内表面上的面电流由两个分量组成，总的电流是这两部分电流的叠加，而上下宽壁内表面上的电流大小相等，方向相同。

二. 计算题

1．一同轴线内导体半径为a，外导体的半径为b。内外导体间填充介电常数分别为ε_1和ε_2的两种不同理想介质，如图所示。设同轴线内外导体间施加电压为U_0，且已知其外导体接地。求（1）同轴线内外导体间介质中的$\vec{E}$和$\vec{D}$；（2）各介质中的束缚体电荷密度和面电和密度的表达式；（3）各导体表面上的自由电荷密度的表达式。



解答：

（1）

因两球壳间的电场强度的方向为径向，故介质 1 和介质 2 的分界面上电场强度与界面平行。由边界条件可知：$E_{1r}=E_{2r}$。

于是，在两球壳间作一半径为$r(a<r<b)$的高斯面，由高斯定理得：

$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=2\pi r^2(D_{1r}+D_{2r})=Q$$

又由于$D_{1r}=\varepsilon_1 E_{1r}$，$D_{2r}=\varepsilon_2 E_{2r}$，$E_{1r}=E_{2r}=E_r$，可得两球壳间电场强度和电位的表达式分别为：

$$\vec{E}=\vec{a}_r E_r=\vec{a}_r\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}$$

$$V=\int_r^b dr=\frac{Q(b-r)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)br}$$

因为内外球壳之间电位为U_0，因此电荷：

$$U_0=\frac{Q(b-a)}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)ab}$$

所以：

$$Q=\frac{2\pi U_0 ab(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{b-a}$$

以下分析均中Q均按上式。

（2）

因球壳间两区域的极化强度$\vec{P}_1$，$\vec{P}_2$分别为：

$$\vec{P}_k=(\varepsilon_k-\varepsilon_0)\vec{E}_k=\vec{a}_r\frac{(\varepsilon_k-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\ \ (k=1,2)$$

故球壳间两区域中的束缚体电荷密度ρ_{P1}，ρ_{P2}均为 0，即：

$$\rho_{Pk}=-\nabla\bullet\vec{P}_k=-\frac{(\varepsilon_k-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\cdot\frac{1}{r^2})=0\ \ (k=1,2)$$

因球壳间两区域的介质内表面上束缚面电流密度分别为：

$$\rho_{PSk}^{(i)}=-\vec{a}_r\bullet\vec{P}_k=-\frac{(\varepsilon_k-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}\ \ (k=1,2)$$

因球壳间两区域的介质外表面上束缚面电流密度分别为：

$$\rho_{PSk}^{(o)}=\vec{a}_r\bullet\vec{P}_k=-\frac{(\varepsilon_k-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)b^2}\ \ (k=1,2)$$

在两种介质的分界面上，其束缚面电荷密度为：

$$\rho_{PS} = \vec{a}_\varphi \bullet (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = 0$$

（3）

内导体表面上的自由电荷密度分别为：

$$\rho_{Sk}^{(i)} = \varepsilon_k \vec{a}_r \bullet \vec{E}|_{r=a} = \frac{\varepsilon_k Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)a^2} \quad (k = 1,2)$$

外导体内表面上的自由电荷密度分别为：

$$\rho_{Sk}^{(i)} = -\varepsilon_k \vec{a}_r \bullet \vec{E}|_{r=b} = \frac{\varepsilon_k Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)b^2} \quad (k = 1,2)$$

2．自由空间中，一正弦电磁波的磁场强度复矢量为：

$$\vec{H} = (-\vec{a}_x + \vec{a}_y + j\sqrt{2}\vec{a}_z)e^{-j2\pi(x+y)} \ \text{A/m}$$

（1） 求该电磁波的波长；

（2） 求电磁波传播方向上的单位矢量；

（3） 导出电磁波电场和磁场的瞬时矢量表达式$\vec{H}(t)$和$\vec{E}(t)$；

（4） 求出此平面波的瞬时坡印亭矢量$\vec{S}(t)$和平均能流密度矢量$\vec{S}_{av}$；

（5） 求出平均电磁场能量密度w_{av}。

解答：

（1）

因为$\vec{k} \bullet \vec{r} = 2\pi(x+y)$，$\vec{k} = 2\pi(\vec{a}_x + \vec{a}_y)$，

且$k = |\vec{k}| = 2\sqrt{2}\pi$

所以$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m

（2）

传播方向单位矢量$\vec{a}_n = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{a}_x + \vec{y})$

$v_p = c = 3 \times 10^8$ m/s

$f = \dfrac{c}{\lambda} = 3\sqrt{2} \times 10^8$ Hz

$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi c}{\lambda} = 6\sqrt{2} \times 10^8$ rad/s

$\eta_0 = 120\pi = 377\ \Omega$

（3）

磁场强度瞬时矢量表达式为：

$$\vec{H}(t)=\mathrm{Re}\left[\vec{H}e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[(-\vec{a}_x+\vec{a}_y+j\sqrt{2}\vec{a}_z)e^{-j2\pi(x+y)}e^{j\omega t}\right]$$
$$=(-\vec{a}_x+\vec{a}_y+j\sqrt{2}\vec{a}_z)\cos[6\sqrt{2}\pi\times10^8t-2\pi(x+y)]\ \ \mathrm{A/m}$$

电场强度复矢量为：

$$E=\eta_0\vec{H}\times\vec{a}_n=60\pi\sqrt{2}[j\sqrt{2}(\vec{a}_y-\vec{a}_x)-2\vec{a}_z]e^{-j2\pi(x+y)}$$

电场强度瞬时矢量表达式为：

$$\vec{E}(t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}e^{j\omega t}\right]=60\pi\sqrt{2}\mathrm{Re}\left[[j\sqrt{2}(\vec{a}_y-\vec{a}_x)-2\vec{a}_z]e^{-j2\pi(x+y)}e^{j\omega t}\right]$$
$$=60\pi\sqrt{2}[j\sqrt{2}(\vec{a}_y-\vec{a}_x)-2\vec{a}_z]\cos[6\sqrt{2}\pi\times10^8t-2\pi(x+y)]\ \ \mathrm{V/m}$$

（4）

平面波的瞬时复坡印亭矢量$\vec{S}(t)$为：

$$\vec{S}(t)=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*=120\pi\sqrt{2}(\vec{a}_x+\vec{a}_y)$$

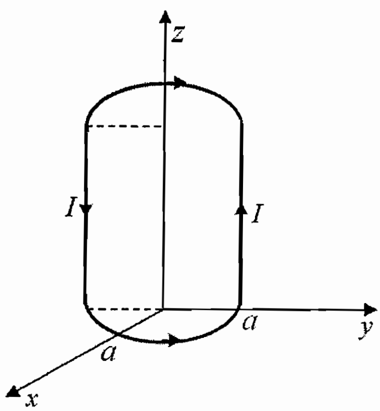
平均能流密度矢量$\vec{S}_{av}$为：

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*=120\pi\sqrt{2}(\vec{a}_x+\vec{a}_y)$$

（5）

$$w_{av}=(w_e)_{av}+(w_m)_{av}=\frac{1}{4}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{4}\mu_0H^2=\frac{1}{2}\mu_0H^2=8\pi\times10^{-7}\ \ \mathrm{J/m^3}$$

3．真空中，两半径为a的半圆环与两条互相平行的长为$2a$的直导线构成如图所示载流回路，回路中载直流电流I_0，求坐标原点O处的磁通量密度$\vec{B}$。



解答：

取电流元$Id\vec{l}$，它在O点产生的磁通量密度为：

$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{a}_r}{r^2}$（$r$为电流元到$O$点的距离）。

先计算下半圆环，由于$d\vec{l}=ad\varphi\vec{a}_\varphi$与$\vec{a}_r$垂直，所以：

$$\vec{B}_1=\vec{a}_z\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{u_0}{4\pi}\frac{I_0ad\varphi}{a^2}=\frac{\mu_0I_0}{4a}$$

再计算右平行直导线部分：

$$\begin{aligned}\vec{B}_2&=\int_0^{2a}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0dz\vec{a}_z\times\vec{a}_r}{r^2}=\vec{a}_x\int_0^{2a}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0dz}{a^2+z^2}\sin\theta\\&=\vec{a}_x\int_0^{2a}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0dz}{a^2+z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\\&=\vec{a}_x\int_0^{2a}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{aI_0dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\vec{a}_x\frac{\mu_0I_0}{4\pi}\int_0^{2a}\frac{adz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\vec{a}_x\frac{\mu_0I_0}{4\pi}\left.\frac{z}{a\sqrt{a^2+z^2}}\right|_0^{2a}\\&=\vec{a}_x\frac{\mu_0I_0}{4\pi}\frac{2a}{a\sqrt{a^2+4a^2}}\\&=\vec{a}_x\frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{\mu_0I_0}{4\pi a}\\&=\vec{a}_x\frac{\sqrt{5}\mu_0I_0}{10\pi a}\end{aligned}$$

再计算左平行直导线部分，按相同办法计算得：

$$\begin{aligned}\vec{B}_3&=\int_0^{2a}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{-I_0dz\vec{a}_z\times\vec{a}_r}{r^2}\\&=\vec{a}_x\frac{\sqrt{5}\mu_0I_0}{10\pi a}\end{aligned}$$

最后计算上半圆环部分：

$$\vec{B}_4=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{u_0}{4\pi}\frac{I_0ad\varphi\vec{a}_\varphi\times\vec{r}}{r^3}$$

其中：

$\vec{r}=-2aa_z+\varphi\vec{a}_\varphi-a\vec{a}_r$

磁通量密度$\vec{B}_4$在$\vec{a}_\varphi \times \vec{r}$方向上大小为：

$$dB_4 = -\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\frac{r \cdot \sin\frac{\pi}{2} d\varphi}{r^3} = -\frac{\mu_0 I_0 d\varphi}{20\pi a^2}$$

$\vec{B}_4$在z向微分单元分量为：

$$dB_{4z} = dB_4 \cdot \sin\arctan\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5} dB_4$$

$\vec{B}_4$在z向分量为：

$$B_{4z} = \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\frac{\sqrt{5} d\varphi}{25a^2} = -\frac{\sqrt{5}\mu_0 I_0}{100a}$$

$\vec{B}_4$在r方向微分单元为：

$$dB_{4r} = dB_4 \cdot \cos\arctan\frac{1}{2}$$

$\vec{B}_4$在x向微分单元为：

$$dB_{4x} = dB_{4r} \cdot \sin(\varphi - 90^\circ) = -dB_{4r} \cdot \cos\varphi = -\frac{2\sqrt{5}}{5} dB_4$$

$\vec{B}_4$在x向分量为：

$$B_{4x} = \frac{\mu_0 I_0 a}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{\cos\varphi d\varphi}{5a^2} = -\frac{\sqrt{5}\mu_0 I_0}{25\pi a}$$

所以O点总磁通密度为：

$$\vec{B}_4 = \vec{a}_x\left(\frac{4\sqrt{5}\mu_0 I_0}{25\pi a}\right) + \vec{a}_z\left(\frac{\mu_0 I_0}{4a} - \frac{\sqrt{5}\mu_0 I_0}{100a}\right)$$

另外一种办法求解上半圆环在O点产生的磁通密度：

$$\begin{aligned}\vec{B}_4 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\frac{u_0 I_0 a d\varphi \vec{a}_\varphi}{4\pi} \frac{\times(-2aa_z + \varphi\vec{a}_\varphi - a\vec{a}_r)}{r^3} \\ &= \frac{\sqrt{5}\mu_0 I_0}{100\pi a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2d\varphi\vec{a}_r - d\varphi\vec{a}_z\end{aligned}$$

$\vec{B}_4$在z向分量为：

$$B_{4z} = -\vec{a}_z \frac{\sqrt{5}\mu_0 I_0}{100a}$$

再将$\vec{a}_r$分解为$\vec{a}_x$和$\vec{a}_y$分量，根据对称性，$\vec{a}_y$方向结果为零，则仅计算$\vec{a}_x$方向分量即可：

$$\begin{aligned} B_{4x} &= \frac{\sqrt{5}\mu_0 I_0}{100\pi a} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\cos\varphi d\varphi \vec{a}_x \\ &= -\vec{a}_x \frac{\sqrt{5}\mu_0 I_0}{25\pi a} \end{aligned}$$

所以O点总磁通密度为：

$$\vec{B}_4 = \vec{a}_x \left(\frac{4\sqrt{5}\mu_0 I_0}{25\pi a} \right) + \vec{a}_z \left(\frac{\mu_0 I_0}{4a} - \frac{\sqrt{5}\mu_0 I_0}{100a} \right)$$

4. 天线问题，不解答，具体求解可见周希朗老师的《电磁场理论与微波技术基础解题指导》一书 P146 页例 6.16。