上海交通大学试卷 <4>

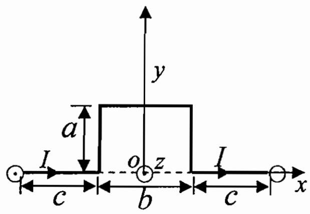
电磁场与波期终试卷(A卷)

姓名___________班级____________学号____________得分___________

一．填空题（共30分）

1. 已知$\vec{r}=\vec{a}_x(x-x')+\vec{a}_y(y-y')+\vec{a}_z(z-z')$，则$\nabla\bullet(\vec{r}r^n)=$________________。

2. 若圆球坐标系中点$p_1(R_1,\theta_1,\varphi_1)$与点$p_2(R_2,\theta_2,\varphi_2)$分别定出位置矢量$\vec{r}_1,\vec{r}_2$，则$\vec{r}_1$和$\vec{r}_2$间夹角的余弦$\cos(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=$________。



3. 自由空间中，若两根间距为$(2c+b)$的半无限长的载直流导线在近处弯折成如图所示的形状，则p点处的感应强度$\vec{B}=$________。

4. 恒定电场中填充非均匀导电媒质，则媒质中的自由体电荷密度ρ与电导率σ及介电常数ε间的关系为$\rho=$______________。

5. 自由空间中，若一电场强度复矢量$\vec{E}=\vec{a}_zE_0\,e^{-jkz}$，则$\vec{E}$______(填“是”或“不是”)电磁波的电场，因为______________。

6. 一平面电磁波由$\varepsilon_r=2.56,\mu_r=1$的理想介质入射到空气中，当入射角$\theta_i$______时，该平面波发生全透射；当入射角$\theta_i$______时，该平面波发生全反射。

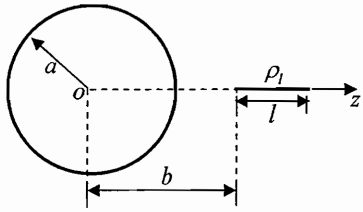
7. 一空气填充的矩形波导的尺寸为$a\times b=(23\times 10)\ \text{mm}^2$，波导中单模传输频率为$f=10.87\ \text{GHz}$的导行电磁波，若已知此导行电磁波的电场强度的最大值为$500\ \text{V/m}$，则波导内壁表面纵向的面电流密度的最大值为________。

8. 一尺寸为$a\times b=(7.112\times 3.556)\ \text{mm}^2$的矩形波导中填充相对介电常数$\varepsilon_r=4$的理想电介质，波导长为$10\ \text{cm}$，若一工作频率为$30\ \text{GHz}$的导行波在此波导中传输，则此导行波通过此段波导引起的相移为___________。

9. 一均匀直线式天线阵的阵元间距$d=\lambda/2$，若要求此天线阵的最大辐射方向在偏离天线阵轴线的$\pm 60^\circ$方向，则天线阵元间的馈电电流的相位差$\xi=$__________。

二．计算题（共70分）

1. 一半径为a的接地导体球外有一线密度为ρ_l均匀带电线，已知带电线段与导体球的近端距离球心为b，带电线长为l，且带电线处于z轴上，如图所示。①. 求出镜像电荷的电荷量；②. 导出任一点p处的电位表达式；③. 导出带电线所受的电场力。

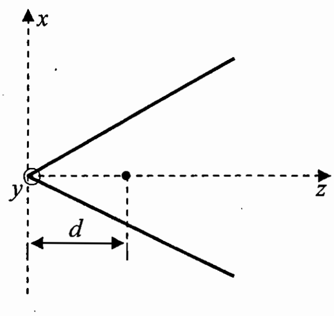


2. 自由空间中，一平面波的磁场强度瞬时矢量为

$$\bar{H}(t)=10^{-4}(\frac{3}{2}\bar{a}_x+\bar{a}_y+\bar{a}_z)\cos[\omega t+\pi(x-y-\frac{1}{2}z)]\quad \mathrm{A/m}$$

求：①. 波传播方向上的单位矢量、波长和频率；②. 电场强度瞬时矢量和复矢量；③. 瞬时电磁场能量密度和平均电磁场能量密度；④. 瞬时能流密度矢量与平均能流密度矢量。

3. 一交成60°夹角的两块半无限大接地导电平面构成的反射器内有一各向同性天线，该各向同性天线距交角顶点的距离为$d=\lambda/2$，如图所示。①. 导出此反射器天线在远区的辐射电场的表达式（取各向同性天线在远区距离该天线为R_0处辐射电场的大小为$E=E_0/R_0$）；②. 导出此反射器天线的阵因子；③. 画出yoz平面上的方向图。



34

SJ4 部分习题参考答案

李旭光
lixg@sjtu.edu.cn
电信群楼 1 号楼 328

（答案仅供参考，发现问题请告知，谢谢！）

一. 填空题

1．已知$\vec{r}=\vec{a}_x(x-x')+\vec{a}_y(y-y')+\vec{a}_z(z-z')$，则$\nabla\bullet(\vec{r}r^n)=r^n\nabla\bullet\vec{r}+\vec{r}\bullet\nabla r^n=(n+3)r^n$。

此题分析要点有三点：

1) 复合函数散度运算；

2) $\vec{r}=\vec{a}_x(x-x')+\vec{a}_y(y-y')+\vec{a}_z(z-z')$，$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$；

3) 运算对不加 ′ 运行，即对场点的运算。

计算过程：

$\nabla\bullet(\vec{r}r^n)=r^n\nabla\bullet\vec{r}+\vec{r}\bullet\nabla r^n$

$r^n\nabla\bullet\vec{r}=3r^n$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}\bullet\nabla r^n &= \vec{r}\bullet(nr^{n-1}\nabla r)\\
&= \vec{r}\bullet\left[nr^{n-1}\nabla\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right]\\
&= nr^{n-1}\vec{r}\bullet\frac{1}{2}\frac{2(x-x')\vec{a}_x+2(y-y')\vec{a}_y+2(z-z')\vec{a}_z}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\\
&= nr^{n-1}\vec{r}\bullet\frac{(x-x')\vec{a}_x+(y-y')\vec{a}_y+(z-z')\vec{a}_z}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\\
&= nr^{n-1}\left[(x-x')\vec{a}_x+(y-y')\vec{a}_y+(z-z')\vec{a}_z\right]\bullet\frac{(x-x')\vec{a}_x+(y-y')\vec{a}_y+(z-z')\vec{a}_z}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\\
&= nr^{n-1}\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\\
&= nr^{n-1}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\\
&= nr^{n-1}r\\
&= nr^n
\end{aligned}
$$

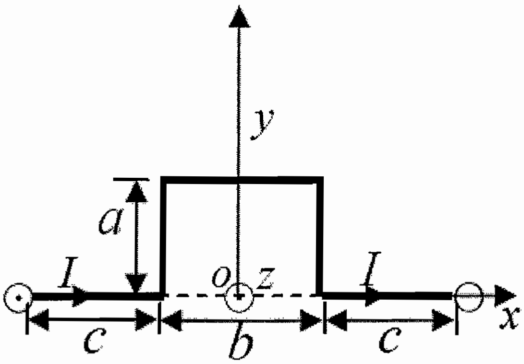
因此：

$\nabla\bullet(\vec{r}r^n)=r^n\nabla\bullet\vec{r}+\vec{r}\bullet\nabla r^n=(n+3)r^n$

2．若圆球坐标系中点$P_1(R_1,\theta_1,\varphi_1)$与点$P_2(R_2,\theta_2,\varphi_2)$分别定出位置矢量$\vec{r}_1$和$\vec{r}_2$，则$\vec{r}_1$和$\vec{r}_2$之间夹角的夹角的余弦值$\cos(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\dfrac{R_1^2+R_2^2-|\overrightarrow{r_1r_2}|^2}{2R_1R_2}$，其中：

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{r_1r_2}|^2 &= (R_1\sin\theta_1\cos\varphi_1-R_2\sin\theta_2\cos\varphi_2)^2\\
&\quad+(R_1\sin\theta_1\sin\varphi_1-R_2\sin\theta_2\sin\varphi_2)^2+(R_1\cos\varphi_1-R_2\cos\varphi_2)^2
\end{aligned}
$$

3. 自由空间中，若两根间距为$(2c+b)$的半无限长的直流导线在近处折弯成如图所示的形状，则p点的磁感应强度$\vec{B}=\vec{a}_y\dfrac{\mu_0 I}{\pi(2c+b)}-\vec{a}_z\dfrac{\mu_0 I(4a^2+b^2)}{4\pi ab\sqrt{a^2+(\frac{b}{2})^2}}$。



4. 恒定电场中填充非均匀导电媒质，则媒质中的自由体电荷密度ρ与电导率σ及介电常数ε间的关系为$\rho=\dfrac{\sigma\nabla\varepsilon-\varepsilon\nabla\sigma}{\sigma}\bullet\vec{E}$。

5. 自由空间中，若一电场强度复矢量$\vec{E}=\vec{a}_z E_0 e^{-jkz}$，则$\vec{E}$不是电磁波的电场，因为$\vec{H}=\dfrac{1}{\eta}(\vec{a}_z\times\vec{E})=0$，所以$\vec{S}_z=0$，因此不存在自由空间中的电磁波。

6. 一平面电磁波由$\varepsilon_r=2.56$，$\mu_r=1$的理想介质入射到空气中，当入射角$\theta_i=\arcsin\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}}=45°$时，发生全透射，当$\theta_i>\arcsin\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon_r}}=38.68°$时，发生全反射。

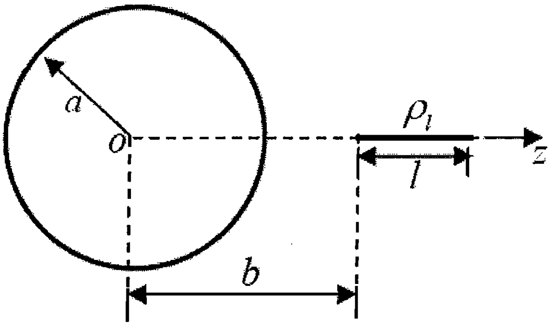
7. 空气填充的矩形波导的尺寸为$a\times b=(23\times 10)\ \mathrm{mm}^2$，传输工作频率为$f=10.87\ \mathrm{GHz}$的导行电磁波，若已知此导行波的电场强度的最大值为$500\ \mathrm{V/m}$，则波导内壁表面处传输模式的纵向面电流密度的最大值为$J_{Sz_{\max}}=1.06\ \mathrm{A/m}$。

8. 一尺寸为$a\times b=(7.112\times 3.556)\ \mathrm{mm}^2$的矩形波导中填充相对介电常数$\varepsilon_r=4$的理想介质，波导长为$10\ \mathrm{cm}$，若一工作频率为$30\ \mathrm{GHz}$的导行波在此波导中传输，则此导行波通过此段波导引起的相移是40π。$k_c=\omega_c\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}=400\pi$，$\varphi=k_c z=40\pi$。

9. 天线问题，不解答。

二. 计算题

1. 一半径为a的接地导体球外有一线密度为ρ_l均匀带电线，已知带电线段与导体球的近端距离距球心为b，带电线长为l，且带电线处于z轴上，如图所示。（1）求出镜像电荷的电荷量；（2）导出任一点p处的电位表达式；（3）导出带电线所受的电场力。



解答：

（1）

设线电荷左端对应$\xi = 0$，右端对应$\xi = l$，线上的线电荷单元为$\rho_l d\xi$，位置在距离线电荷左端为ξ处，则电荷元$\rho_l d\xi$在导体球内的镜像电荷元为：

$$dq_i = -\frac{a}{b+\xi}dq = -\frac{a}{b+\xi}\rho_l d\xi$$

故总的镜像电荷为：

$$q_i = -\int_0^l \frac{a}{b+\xi}\rho_l d\xi = -a\rho_l \ln\frac{b+l}{b}$$

（2）

因为在ξ处的线电荷元dq对应的镜像电荷元为dq_i，其位置距离球心为$d_i = a^2/(b+\xi)$处。所以dq和镜像电荷元dq_i在球坐标系中点$P(r,\theta,\varphi)$处的电位元为：

$$d\phi = \frac{\rho_l d\xi}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{a\rho_l d\xi}{4\pi\varepsilon_0 (b+\xi) r_2}$$

式中：

$$r_1^2 = r^2 + (b+\xi)^2 - 2r(b+\xi)\cos\theta$$
$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{a^2}{b+\xi}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{b+\xi}\cos\theta$$

因此电位：

$$\begin{aligned}\phi &= \int_0^l \frac{\rho_l d\xi}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \int_0^l \frac{a\rho_l d\xi}{4\pi\varepsilon_0 (b+\xi) r_2} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(b+l-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} + (l+b-r\cos\theta)}{\sqrt{(b-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} + (b-r\cos\theta)} \\ &\quad - \frac{a\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(br+lr-a^2\cos\theta)^2 + a^4\sin^2\theta} + (lr+br-a^2\cos\theta)}{\sqrt{(br-a^2\cos\theta)^2 + a^4\sin^2\theta} + (br-a^2\cos\theta)}\end{aligned}$$

（3）带电线所受的电场力求解。

因处于d_i处的dq_i对dq的作用力dF'为：

$$dF' = \frac{-\dfrac{a}{b+\xi}\rho_l d\xi(\rho_l d\xi')}{4\pi\varepsilon_0(b+\xi'-\dfrac{a^2}{b+\xi})^2}$$

因此F'为：

$$F' = \int_0^l dF' = -\frac{a\rho_l^2 d\xi}{4\pi\varepsilon_0(b+\xi)}\int_0^l \frac{d\xi'}{[(b+\xi')^2-\dfrac{a^2}{b+\xi}]^2}$$
$$= -\frac{a\rho_l^2 d\xi}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{b(b+\xi)-a^2}-\frac{1}{(l+b)(b+\xi)-a^2}\right]$$

因此总的作用力F为：

$$F = \int_0^l F'd\xi = -\frac{a^2\rho_l^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}\ln\frac{b^2+bl-a^2}{b^2-a^2}-\frac{1}{l+b}\ln\frac{(b+l)^2-a^2}{b(b+l)^2-a^2}\right)$$

2．自由空间中，一平面电磁波的磁场强度瞬时矢量为：

$$\vec{H}(t) = 10^{-4}(\tfrac{3}{2}\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z)\cos[\omega t+\pi(x-y-\tfrac{1}{2}z)]\ \mathrm{A/m}$$

求：（1）波传播方向上的单位矢量、波长和频率；（2）电场强度瞬时矢量和复矢量；（3）瞬时电磁场能量密度和平均电磁场能量密度；（4）瞬时能流密度矢量与平均能流密度矢量。

解答：

（1）

$\vec{H} = 10^{-4}(\tfrac{3}{2}\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z)e^{j\pi(x-y-\frac{1}{2}z)}$

波矢量：

$\vec{k} = -\pi(\vec{a}_x-\vec{a}_y-\tfrac{1}{2}\vec{a}_z)$

波数：

$k = \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} = \pi\sqrt{1+1+\tfrac{1}{4}} = \dfrac{3\pi}{2}$

单位矢量：

$\vec{a}_n = \dfrac{\vec{k}}{k} = -\dfrac{2}{3}\vec{a}_x+\dfrac{2}{3}\vec{a}_y+\dfrac{1}{3}\vec{a}_z$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{4}{3}\,\text{m}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}\times10^8\text{Hz}$$

（2）

自由空间中$\eta_0 = 377\ \Omega$，所以：

$$\begin{aligned}\vec{E}(t) &= -\eta_0\vec{a}_n\times\vec{H}(t) = -377(-\frac{2}{3}\vec{a}_x+\frac{2}{3}\vec{a}_y+\frac{1}{3}\vec{a}_z)\times\left[10^{-4}(\frac{3}{2}\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z)\cos[\omega t+\pi(x-y-\frac{1}{2}z)]\right]\\ &= -377\times10^{-4}(\frac{1}{3}\vec{a}_x+\frac{7}{6}\vec{a}_y-\frac{5}{3}\vec{a}_z)\cos[\omega t+\pi(x-y-\frac{1}{2}z)]\end{aligned}$$

其中：

$$\omega = 2\pi f = \frac{9}{2}\pi\times10^8 = 4.5\pi\times10^8\ \text{rad/m}$$

复矢量形式：

$$\vec{E} = 377\times10^{-4}(-\tfrac{1}{3}\vec{a}_x-\tfrac{7}{6}\vec{a}_y+\tfrac{5}{3}\vec{a}_z)e^{j\pi(x-y-\frac{1}{2}z)}$$

（3）瞬时电磁场能量

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{2}[\vec{E}\bullet\vec{D}+\vec{H}\bullet\vec{B}] = 2w_m = 2w_e\\ &= \vec{H}(t)\bullet\vec{B}(t) = \mu_0H^2(t)\\ &= 17\pi\times10^{-15}\cos^2[\omega t+\pi(x-y-\frac{1}{2}z)]\ \text{w/m}^2\end{aligned}$$

平均电磁场能量为：

$$\begin{aligned}w_{av} &= 2(w_m)_{av} = \frac{1}{2}\mu_0|\vec{H}|^2\\ &= 8.5\pi\times10^{-15}\ \text{w/m}^2\end{aligned}$$

（3）瞬时能流密度

$$\begin{aligned}\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} &= \begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ E_x & E_y & E_z\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}\\ &= 377\times10^8(-\frac{17}{6}\vec{a}_x+\frac{17}{6}\vec{a}_y+\frac{17}{12}\vec{a}_z)\cos^2[\omega t+\pi(x-y-\frac{1}{2}z)]\ \text{w/m}^2\end{aligned}$$

平均能流密度矢量为：

$$S_{av} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta}\vec{a}_n = \frac{1}{2}\eta|\vec{H}|^2\vec{a}_n \quad = 8 \times 10^{-6}(-\frac{2}{3}\vec{a}_x + \frac{2}{3}\vec{a}_y + \frac{1}{3}\vec{a}_z)$$

3．天线问题，不解答。