UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES POLIGONAIS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

AMÉRICO CAMPOS FILHO

2014

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

Uma flexão é chamada composta quando atuam simultaneamente em uma seção um momento fletor e uma força normal (de tração ou compressão). Uma flexão é dita oblíqua sempre que a direção da linha neutra não pode ser determinada a priori.

A Fig. 1.1 mostra seções de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua. Em (a), o plano de ação do momento fletor corta a seção transversal segundo uma reta que não coincide com o seu plano de simetria. A flexão também é oblíqua, caso (b), quando a seção não tem um eixo de simetria.

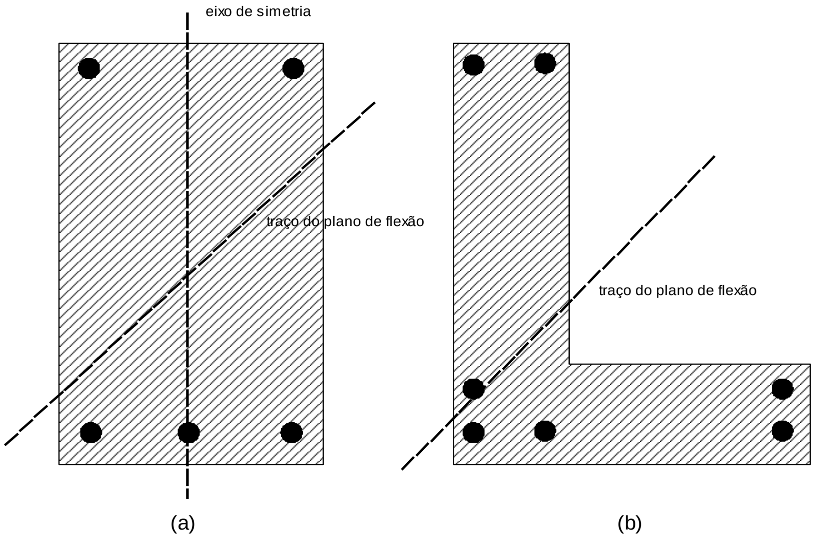


Figura 1.1 - Situações de flexão composta oblíqua

Nas estruturas de concreto armado, a flexão composta oblíqua aparece frequentemente no cálculo de pilares. Este cálculo apresenta uma série de dificuldades, pois a direção da linha neutra não é perpendicular ao plano de solicitação. Assim, além da profundidade da linha neutra, tem-se outra incógnita que é a sua direção.

Na prática, o dimensionamento é feito por via indireta, através de diagramas de interação, por tentativas ou por processos aproximados.

Visando automatizar o cálculo nestas situações, apresenta-se, neste trabalho, um processo geral para o dimensionamento e a verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta. Este processo é baseado no trabalho de Dumont e Musso Jr. (1987), que foi desenvolvido a partir das idéias de Werner (1974).

2 - FORMULAÇÃO BÁSICA

2.1 - As características geométricas da seção transversal

A seção de concreto é definida através de uma poligonal fechada, cujos vértices são dados em função de um sistema global de coordenadas X,Y e numerados no sentido anti-horário. Caso existam aberturas no interior da seção, os seus vértices serão numerados no sentido horário (Fig. 2.1). As barras de armadura são definidas como pontos no interior da seção de concreto, atribuindo-se a cada uma das quais uma percentagem da área total de armadura As.

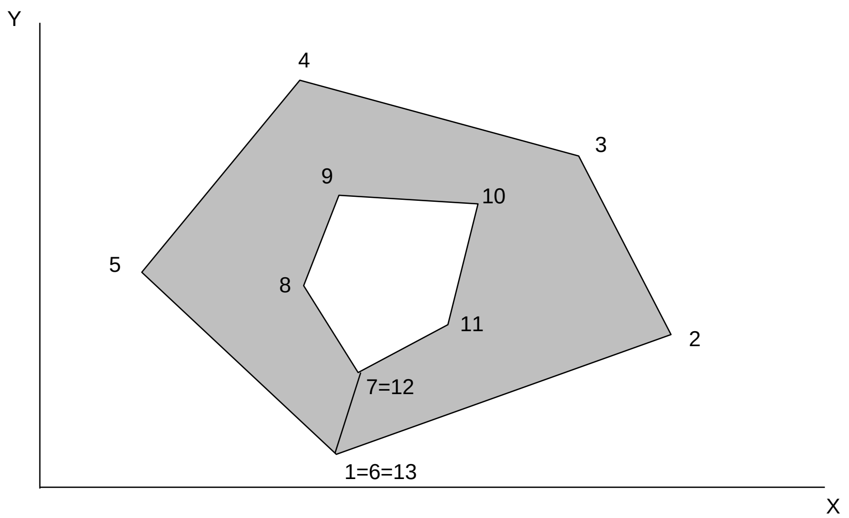


Figura 2.1 - Definição da seção de concreto

Por conveniência, os esforços atuantes na seção de concreto armado são definidos a partir de um sistema baricêntrico de coordenadas x,y, dito local. Por esta razão, torna-se necessária uma translação das coordenadas da seção, referidas ao sistema global X,Y, para o sistema local x,y. Além disto, na estimativa dos valores iniciais para o dimensionamento, são empregadas as propriedades geométricas da seção de concreto.

Para isto, usando o processo de integração apresentado em anexo, calculam-se, inicialmente, as propriedades geométricas da seção em relação ao sistema global de coordenadas X,Y através das expressões:

- área da seção:

$$A = \int_A dA = \sum_{i=1}^{n} G_{00} \tag{2.1}$$

- momento estático em relação ao eixo X:

$$S_X = \int_A Y dA = \sum_{i=1}^{n} G_{01} \tag{2.2}$$

- momento estático em relação ao eixo Y:

$$S_Y = \int_A X dA = \sum_{i=1}^{n} G_{10} \tag{2.3}$$

- momento de inércia em relação ao eixo X:

$$J_X = \int_A Y^2 dA = \sum_{i=1}^{n} G_{02} \tag{2.4}$$

- momento de inércia em relação ao eixo Y:

$$J_Y = \int_A X^2 dA = \sum_{i=1}^{n} G_{20} \tag{2.5}$$

- produto de inércia em relação aos eixos X e Y:

$$J_{XY} = \int_A XY dA = \sum_{i=1}^{n} G_{11} \tag{2.6}$$

onde n é o número de segmentos da poligonal fechada que descreve a seção e G_{jk} são polinômios de integração definidos em anexo.

As coordenadas X_G,Y_G do centroide da seção de concreto, referidas ao sistema global X,Y, são dadas por

$$\begin{aligned} X_G &= S_Y / A \\ Y_G &= S_X / A \end{aligned} \tag{2.7}$$

A translação das coordenadas do sistema global para o local é, então, feita através das relações

$$x = X - X_G$$
$$y = Y - Y_G \quad (2.8)$$

As propriedades geométricas da seção de concreto, em relação ao sistema local de coordenadas x,y, são determinadas por:

- momento de inércia em relação ao eixo x:

$$Jx = JX - A.Y_G^2 \quad (2.9)$$

- momento de inércia em relação ao eixo y:

$$Jy = JY - A.X_G^2 \quad (2.10)$$

- produto de inércia em relação aos eixos x e y:

$$Jxy = JXY - A.X_G.Y_G \quad (2.11)$$

2.2 - Esforços atuantes de cálculo

Os esforços de cálculo atuantes na seção de concreto armado são os momentos fletores MAxd e MAyd e o esforço normal NAd, estabelecidos segundo o sistema de coordenadas local x,y. O esforço normal será positivo quando for de tração e os momentos fletores serão positivos quando tiverem o mesmo sentido dos eixos x,y (Fig. 2.2).

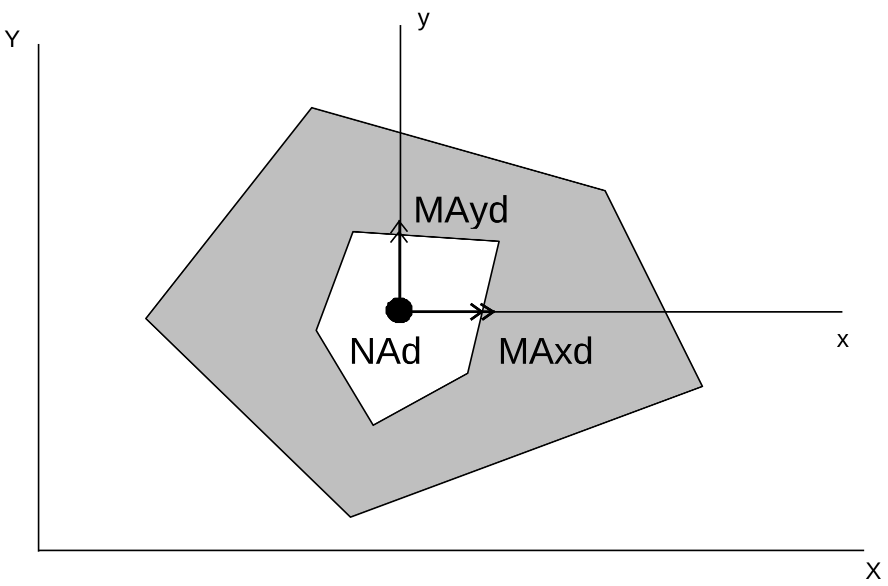


Figura 2.2 - Esforços atuantes de cálculo

2.3 - Esforços resistentes de cálculo

2.3.1 - Deformação da seção no estado limite último

Os esforços resistentes de cálculo (últimos) MRxd, MRyd e NRd seguem a mesma convenção de sinais adotadas para os esforços atuantes. Definidas a geometria da seção de concreto armado (coordenadas dos vértices da poligonal fechada, coordenadas das barras e suas percentagens em relação à área total de armadura) e as resistências características do aço e do concreto (f_{yk} e f_{ck}) podem-se determinar os esforços resistentes da seção para um dado estado limite último de deformação da seção.

Um estado de deformação da seção fica caracterizado pela inclinação α da linha neutra em relação ao eixo x e pelas deformações das fibras extremas superior e inferior da seção (ε_S e ε_I).

A inclinação α da linha neutra é definida como o ângulo de giro necessário para que o eixo dos x fique paralelo à linha neutra e o semi-eixo positivo dos y aponte no sentido da fibra mais comprimida da seção. Fica, assim, estabelecido um terceiro sistema de coordenadas ξ,η, com origem no centro de gravidade da seção de concreto (Fig. 2.3).

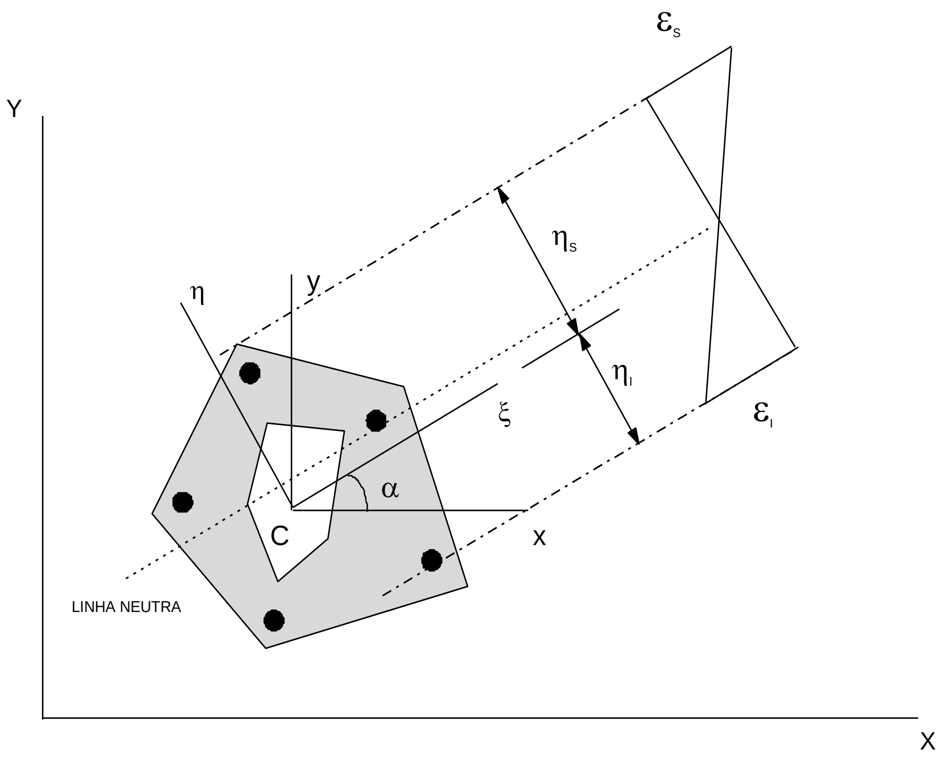
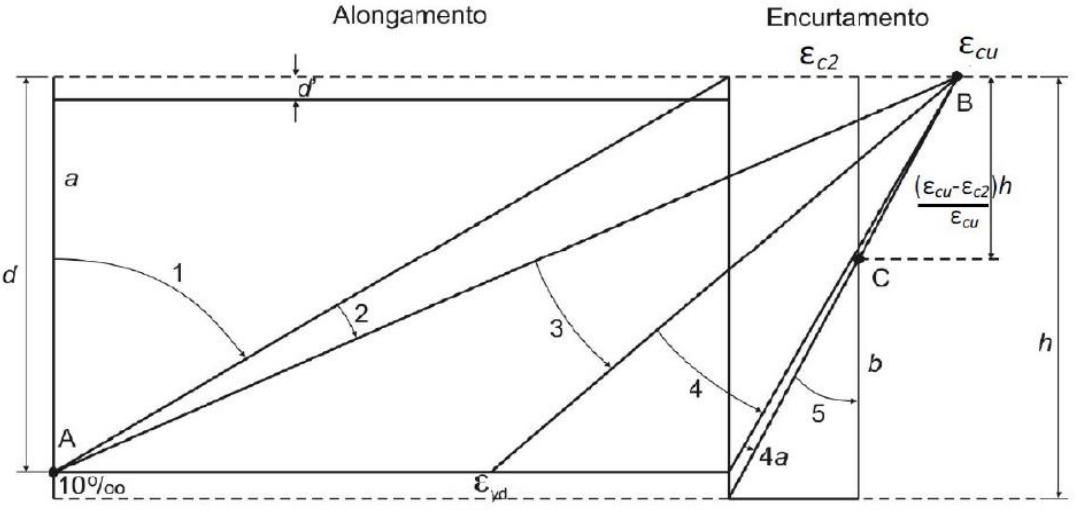


Figura 2.3 - Sistema de coordenadas ξ,η



* deformação plástica excessiva:

reta a: tração uniforme

domínio 1: tração não uniforme, sem compressão

domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ($\varepsilon_c<\varepsilon_{cu}$ e com o máximo alongamento permitido)

* ruptura:

domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ($\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$)

domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ($\varepsilon_s<\varepsilon_{yd}$)

domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas

domínio 5: compressão não uniforme, sem tração

reta b: compressão uniforme

Figura 2.4 - Domínios de deformação no estado limite último segundo a NBR-6118

A norma brasileira para o "Projeto de nestruturas de concreto", NBR6118:2014, estabelece as seguintes hipóteses sobre as deformações de uma seção de concreto armado no estado limite último:

- as seções transversais permanecem planas;
- para o encurtamento de ruptura do concreto, nas seções não inteiramente comprimidas, considera-se o valor convencional de ε_{cu} (domínios 3 e 4a da Fig. 2.4); nas seções inteiramente comprimidas (domínio 5 da Fig. 2.4), admite-se que o encurtamento da borda mais comprimida, na ocasião da ruptura, varie de ε_{cu} a ε_{c2}, mantendo-se

inalterada e igual a ε_{c2} a deformação a $[(\varepsilon_{cu}-\varepsilon_{c2})/\varepsilon_{cu}]$ h da altura total da seção, a partir da borda mais comprimida;

- os valores a serem adotados para os parâmetros ε_{c2} (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) e ε_{cu} (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) são definidos como:

  - para concretos de classes até C50:

$$\varepsilon_{c2} = 2{,}0\ ‰$$

$$\varepsilon_{cu} = 3{,}5\ ‰$$

  - para concretos de classes de C50 até C90:

$$\varepsilon_{c2} = 2{,}0\ ‰ + 0{,}085\ ‰ .(f_{ck} - 50)^{0{,}53};$$

$$\varepsilon_{cu} = 2{,}6\ ‰ + 35\ ‰\ [(90 - f_{ck})/100]^4$$

- o alongamento máximo permitido ao longo da armadura de tração é de 10**‰** (domínios 1 e 2 da Fig. 2.4), a fim de definir a deformação plástica excessiva.

Estas hipóteses introduzem uma relação de dependência entre ε_S e ε_I, e o estado de deformações da seção fica determinado a partir de apenas duas variáveis independentes. As duas variáveis, que serão utilizadas para definir este estado de deformação, são a inclinação e a profundidade da linha neutra (Fig. 2.5). A profundidade da linha neutra é determinada, conforme a NBR-6118, por uma coordenada representada pela letra *x* e medida paralelamente ao eixo η. A coordenada *x* tem origem na fibra de maior encurtamento da seção (ou menor alongamento) e tem o sentido contrário ao de η. A Tab. 2.1 apresenta as expressões para ε_S e ε_I em função de *x*

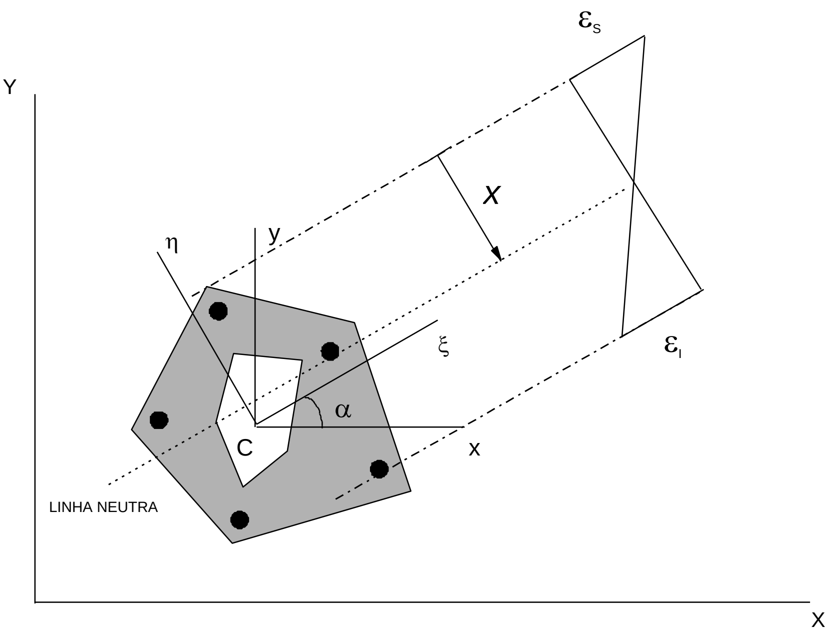


Figura 2.5 - Profundidade da linha neutra - coordenada *x*

Tabela 2.1 - Relação entre os valores da profundidade da linha neutra *x* e as deformações ε_S e ε_I

DOMÍNIOS	X	ε_S	ε_I
1 e 2	$-\infty < x \le \dfrac{\varepsilon_{cu}}{10‰ + \varepsilon_{cu}} d$	$-10‰ \dfrac{x}{d-x}$	$10‰$
3 e 4	$\dfrac{\varepsilon_{cu}}{10‰ + \varepsilon_{cu}} d \le x \le d$	$-\varepsilon_{cu}$	$\varepsilon_{cu} \dfrac{d-x}{x}$
4a	$d \le x \le h$	$-\varepsilon_{cu}$	0
5	$h \le x < +\infty$	$-\varepsilon_{c2} \dfrac{x}{x - \left(\dfrac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}\right) h}$	$-\varepsilon_{c2} \dfrac{x-h}{x - \left(\dfrac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}\right) h}$

Conhecidos os valores de *x* e α, a deformação $\varepsilon(\xi,\eta)$ de um ponto da seção é obtida por

$$\varepsilon(\xi, \eta) = b\eta + c \tag{2.12}$$

onde

$$b = \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_I}{\eta_S - \eta_I} \qquad c = \varepsilon_S - b.\,\eta_S \tag{2.13}$$

sendo b a curvatura da seção e c o valor da deformação na fibra correspondente ao centro de gravidade da seção de concreto. η_S e η_I são as ordenadas dos pontos extremos superior e inferior da seção. Os pontos extremos, no caso da zona tracionada, correspondem a barras de armadura.

2.3.2 - Diagrama tensão-deformação para o concreto

A NBR6118:2014 diz que no estado limite último a distribuição das tensões do concreto na seção se faz de acordo com o diagrama parábola-retângulo da Fig. 2.6. A resistência à tração do concreto é desprezada. Na região comprimida, supõe-se que o diagrama tensão-deformação seja composto de uma parábola do segundo grau que passa pela origem e tem vértice no ponto de abscissa ε_{c2} e ordenada 0,85 f_{cd} e por uma reta tangente à parábola e paralela ao eixo das abscissas (Fig. 2.6).

A resistência de cálculo do concreto à compressão, fcd, é determinada por

$$fcd = \frac{fck}{\gamma_c} \tag{2.14}$$

onde f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão e γ_c é o coeficiente de minoração da resistência do concreto, tomado, em geral, com o valor de 1,4.

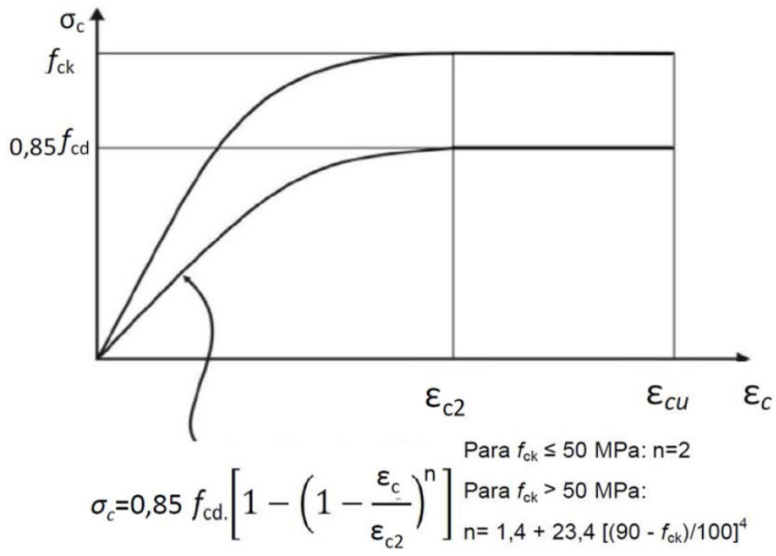


Figura 2.6 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

Para facilitar o procedimento de determinação dos esforços resistentes, o trecho parabólico do diagrama da Figura 2.6, pode ser aproximado por uma parábola do segundo grau da forma

$$\sigma_c(\varepsilon) = \sigma_{cd}\,(a_2\varepsilon^2 + a_1\varepsilon) \tag{2.15}$$

sendo

$$\sigma_{cd} = 0{,}85\, fcd \tag{2.16}$$

Os valores de a_2 e a_1 estão apresentados na Tabela 2.2 para diferentes classes de concreto.

Tabela 2.2 – Valores de a_2 e a_1

f_{ck}	a_2	a_1
$\leq$ 50 MPa	250000	1000
60 MPa	120101	720,64
70 MPa	81458	620,29
80 MPa	69363	581,26
90 MPa	64545	561,34

Assim, as tensões no concreto são dadas por

$$\begin{aligned} &\sigma_c(\varepsilon) = 0 \; para \;\; \varepsilon \geq 0 \\ &\sigma_c(\varepsilon) = \sigma_{cd}(a_2\varepsilon^2 + a_1\varepsilon) \; para \;\; 0 \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_{c2} \\ &\sigma_c(\varepsilon) = -\sigma_{cd} \; para \; -\varepsilon_{c2} \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_{cu} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Substituindo a relação (2.12) nas expressões (2.15), resulta

$$
\begin{aligned}
&\sigma_c(\xi,\eta) = 0 \; para \, \varepsilon \geq 0 \\
&\sigma_c(\xi,\eta) = \sigma_{cd}(D_0 + D_1.\eta + D_2.\eta^2) \; para \; 0 \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_{c2} \\
&\sigma_c(\xi,\eta) = -\sigma_{cd} \; para \; -\varepsilon_{c2} \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_{cu}
\end{aligned}
\qquad (2.18)
$$

onde

$$
\begin{aligned}
D_0 &= a_1 c + a_2 c^2 \\
D_1 &= a_1 b + 2 a_2 bc \\
D_2 &= a_2 b^2
\end{aligned}
\qquad (2.19)
$$

2.3.3 - Diagrama tensão-deformação para o aço

A resistência de cálculo do aço, f_{yd}, é dada por

$$fyd = \frac{fyk}{\gamma s} \qquad (2.20)$$

onde f_{yk} é a resistência característica do aço e γs é o coeficiente de minoração da resistência do aço.

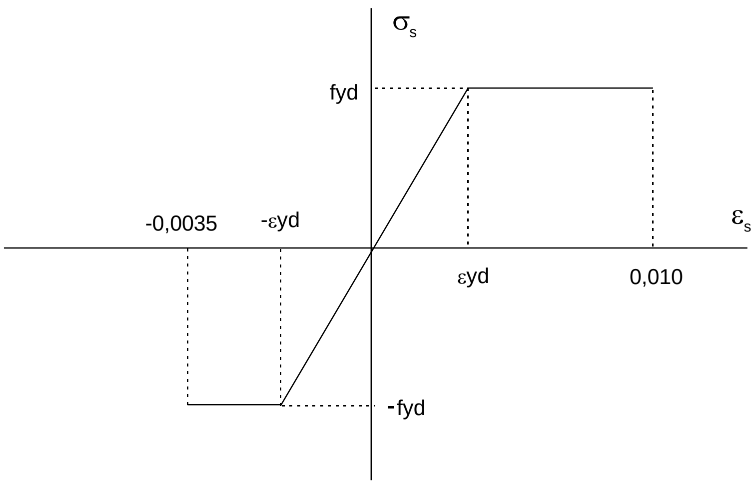


Figura 2.7 - Diagrama tensão-deformação do aço

O módulo de deformação longitudinal do aço, E_s, é igual a 210000 MPa. O diagrama tensão-deformação do aço da classe A (Fig. 2.7) é dado por

$$
\begin{aligned}
&\sigma s(\varepsilon) = -fyd \quad para \quad -0{,}0035 \leq \varepsilon \leq -\varepsilon yd \\
&\sigma s(\varepsilon) = Es\,\varepsilon \quad para \quad -\varepsilon yd \leq \varepsilon \leq \varepsilon yd \\
&\sigma s(\varepsilon) = fyd \quad para \quad \varepsilon yd \leq \varepsilon \leq 0{,}010
\end{aligned}
\qquad (2.21)
$$

onde ε_{yd} é a deformação específica de escoamento de cálculo do aço, dada por

$$\varepsilon yd = \frac{fyd}{Es} \tag{2.22}$$

2.3.4 - Obtenção dos esforços resistentes de cálculo

Os esforços resistentes de cálculo MRxd, MRyd e NRd são obtidos por integração das tensões sobre a seção para uma dada condição de deformação (x, α) e área de armadura (As). A determinação dos esforços é feita inicialmente para o sistema de eixos ξ,η e, após, para o sistema x,y através das expressões

$$\begin{aligned} MR_{xd} &= MR_{\xi}.\cos\alpha - MR_{\eta}.\operatorname{sen}\alpha \\ MR_{yd} &= MR_{\xi}.\operatorname{sen}\alpha + MR_{\eta}.\cos\alpha \end{aligned} \tag{2.23}$$

Naturalmente, o esforço normal resistente é o mesmo para qualquer um dos sistemas de coordenadas. Utilizando o sistema ξ,η, os esforços resistentes são obtidos por

$$\begin{aligned} MR_{\xi} &= \int_{Ac} \sigma c(\varepsilon).\eta\, dA + \sum_{j=1}^{m} \rho j.As.\sigma s(\varepsilon j).\eta j \\ MR_{\eta} &= -\int_{Ac} \sigma c(\varepsilon).\xi\, dA - \sum_{j=1}^{m} \rho j.As.\sigma s(\varepsilon j).\xi j \\ NR &= \int_{Ac} \sigma c(\varepsilon)\, dA + \sum_{j=1}^{m} \rho j.As.\sigma s(\varepsilon j) \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde ρj é a percentagem da armadura total As, correspondente à j-ésima barra, m é o número total de barras e Ac é a área de concreto comprimida.

A parcela dos esforços resistentes correspondentes ao concreto é integrada separadamente para a região I (área de concreto Ac_1 submetida a tensões variando parabolicamente) e para a região II (área de concreto Ac_2 submetida a tensões uniformes), conforme a Fig. 2.8.

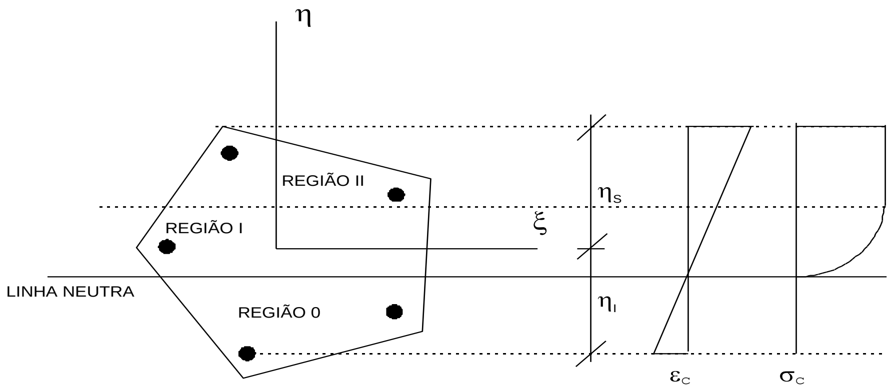


Figura 2.8 - Regiões para integração no concreto

Substituindo nas integrais correspondentes ao concreto das expressões (2.24), as tensões dadas pelas equações (2.18), obtêm-se os esforços resistentes correspondentes à região I:

$$
\begin{aligned}
MR_{\xi 1} &= \sigma_{cd} \int_{Ac1} (D_0.\eta + D_1.\eta^2 + D_2.\eta^3)\, dA \\
MR_{\eta 1} &= -\sigma_{cd} \int_{Ac1} (D_0.\xi + D_1.\xi.\eta + D_2.\xi.\eta^2)\, dA \\
NR_1 &= \sigma_{cd} \int_{Ac1} (D_0 + D_1.\eta + D_2.\eta^2)\, dA
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

e à região II:

$$
\begin{aligned}
MR_{\xi 2} &= -\sigma_{cd} \int_{Ac2} \eta\, dA \\
MR_{\eta 2} &= \sigma_{cd} \int_{Ac2} \xi\, dA \\
NR_2 &= -\sigma_{cd} \int_{Ac2} dA
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Integrando as expressões (2.25) e (2.26), conforme apresentado no anexo, obtêm-se as expressões para os esforços resistentes na região I:

$$
\begin{aligned}
MR_{\xi 1} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{01}+D_1.G_{02}+D_2.G_{03}) \\
MR_{\eta 1} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{10}+D_1.G_{11}+D_2.G_{12}) \\
NR_1 &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{00}+D_1.G_{01}+D_2.G_{02})
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

e na região II:

$$
\begin{aligned}
MR_{\xi 2} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{01} \\
MR_{\eta 2} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{10} \\
NR_2 &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{00}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

onde n1 e n2 são os números de segmentos de reta, que compõem a poligonal fechada que descreve a seção, encontrados, respectivamente, nas regiões I e II.

2.3.5 - Coordenadas das extremidades dos segmentos definidos pelas regiões 0, I e II

As coordenadas dos vértices da seção, dadas segundo o sistema local x,y são transformadas para o sistema de coordenadas ξ,η através das relações

$$\xi = x.\cos\alpha + y.\text{sen}\,\alpha$$
$$\eta = -x.\text{sen}\,\alpha + y.\cos\alpha \tag{2.29}$$

Um segmento da poligonal fechada, que define a seção, pode se situar inteiramente dentro de uma das regiões 0, I ou II ou atravessar mais de uma delas. Neste último caso, torna-se preciso subdividir o segmento para efetuar as integrações necessárias. Isto pode ser feito automaticamente através do procedimento descrito a seguir.

Para um determinado segmento da poligonal, calculam-se os valores das deformações εi e $\varepsilon i+1$ em seus vértices, de coordenadas ($\xi i,\eta i$) e ($\xi i+1,\eta i+1$), respectivamente, através da expressão (2.12).

Se dois vértices apresentam a mesma deformação e, portanto, a mesma ordenada η ($\Delta\eta=0$), não há contribuição deste segmento no cálculo dos esforços resistentes, já que neste caso todos polinômios de integração serão identicamente nulos. Por esta razão, é dispensável a integração dos segmentos de fechamento entre as regiões 0 e I e entre as regiões I e II, uma vez que estes segmentos, pela própria formulação, apresentam ordenadas iguais.

Se dois vértices apresentam deformações diferentes, ou seja, ordenadas distintas ($\Delta\eta\neq0$), pode haver ou não transição entre as regiões.

Calculam-se, então, as ordenadas correspondentes às transições entre as regiões 0 e I e entre as regiões I e II pelas expressões

$$\eta_{01} = -\frac{c}{b}$$
$$\eta_{12} = \frac{-\varepsilon_{c2} - c}{b} \tag{2.30}$$

Caso $\eta 01$ e/ou $\eta 12$ estiverem entre ηi e $\eta i+1$ ocorrem as transições correspondentes. Nesta situação, calculam-se as abscissas $\xi 01$ e/ou $\xi 12$ pelas relações

$$\xi_{01} = \xi_i + (\eta_{01} - \eta_i)\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\eta_{i+1} - \eta_i}$$
$$\xi_{12} = \xi_i + (\eta_{12} - \eta_i)\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} \tag{2.31}$$

As coordenadas das extremidades dos segmentos são definidas pelas coordenadas dos vértices i e i+1 da poligonal da seção e pelas coordenadas dos pontos de transição entre as regiões 0 e I e/ou as regiões I e II.

Não havendo transição, o segmento da poligonal está inteiramente contido em uma das regiões e as coordenadas para integração são as coordenadas dos vértices i e i+1.

3 - DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO DE UMA SEÇÃO

3.1 - Conceitos fundamentais

O dimensionamento de uma dada seção de concreto armado (geometria e distribuição relativa de armadura conhecidas) consiste em estabelecer a área de armadura que corresponda a uma situação de equivalência entre os esforços atuantes e os esforços resistentes. Por outro lado, a verificação de uma seção de concreto armado busca determinar um fator de proporcionalidade λ entre os esforços atuantes e os esforços resistentes para uma dada área de armadura.

Tanto o dimensionamento, como a verificação, serão realizados para o estado limite último da seção, conforme as prescrições da NBR6118:2014, apresentadas no capítulo 2.

O processo de dimensionamento e verificação envolve a resolução de um sistema de três equações não-lineares com três incógnitas, da seguinte forma geral

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde f, g, h são funções das variáveis x, y, z.

Este sistema de equações deve ser resolvido por um processo iterativo, através de um dos métodos de resolução de sistemas de equações não-lineares existentes. Neste trabalho, o procedimento utilizado é o do método de Newton-Raphson, conforme apresentado por Dumont e Musso Jr. (1987).

3.2 - O método de Newton-Raphson para a resolução de sistemas de equações não-lineares

O método de Newton-Raphson pode ser empregado para resolver uma equação não-linear do tipo

$$f(x) = 0 \tag{3.2}$$

onde f é uma função qualquer. Encontrar a solução desta equação não-linear significa determinar o valor de x que satisfaça a condição expressa pela Eq.(3.2).

Sabe-se que uma função de uma variável pode ser calculada por uma série de Taylor da forma

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x) \tag{3.3}$$

Truncando-se esta série a partir do terceiro termo, pode-se escrever que o valor de f(x) é dado aproximadamente por

$$f(x) \cong f(x_0) + (x - x_0)\; f'(x_0) \tag{3.4}$$

Pela Eq.(3.2), pode-se escrever, então, que

$$f(x_0) + (x - x_0)\; f'(x_0) \cong 0 \tag{3.5}$$

ou, rearranjando os termos

$$x \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 \tag{3.6}$$

onde x_1 é uma primeira aproximação do valor de x. Pode-se determinar valores para x, na precisão desejada, reutilizando-se a Eq.(3.6), tantas vezes quantas forem necessárias

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &\vdots \\ x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

O valor de x_i estará suficientemente próximo da solução procurada, quando

$$x_i \cong x_{i-1} \qquad ou \qquad f(x_i) \cong 0 \tag{3.8}$$

O método de Newton-Raphson pode ser também aplicado para encontrar a solução de um sistema de duas equações não-lineares

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

As fórmulas de Taylor, para estas funções de duas variáveis, podem ser escritas como

$$\begin{cases} f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + R_{f2}(x,y) \\ g(x,y) = g(a,b) + g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b) + R_{g2}(x,y) \end{cases} \tag{3.10}$$

onde

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \ , \ g_x = \frac{\partial g}{\partial x} \ , \ g_y = \frac{\partial g}{\partial y} \tag{3.11}$$

Pode-se escrever que

$$\begin{cases} f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ g(x,y) \cong g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases} \tag{3.12}$$

Da Eq.(3.9) vem que

$$\begin{cases} f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \cong 0 \\ g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \cong 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

ou

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \cong -f(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) \cong -g(x_0,y_0) \end{cases} \tag{3.14}$$

Na forma matricial, a Eq.(3.14) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ -g \end{Bmatrix} \tag{3.15}$$

onde

$$\Delta x = x - x_0 \qquad e \qquad \Delta y = y - y_0 \tag{3.16}$$

A convergência é obtida para Δx, Δy suficientemente pequenos ou

$$f(x_i, y_i) \cong 0 \qquad e \qquad g(x_i, y_i) \cong 0 \tag{3.17}$$

Para a solução de um sistema de três equações não-lineares com três incógnitas da forma

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

que é a situação que aparece nos problemas de dimensionamento e de verificação, abordados neste trabalho, também pode-se recorrer ao método de Newton-Raphson. Assim, de forma análoga às situações anteriores, a solução do problema não-linear é alcançada pela solução de uma série de sistemas de equações lineares do tipo

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f \\ -g \\ -h \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

ou, abreviadamente,

$$\left[K(\{u\}_i)\right]\ \{\Delta u\}_i = \{\Delta p\}_i \tag{3.20}$$

No problema de dimensionamento, o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} f(x,\alpha,A_s) = MR_{xd}(x,\alpha,A_s) - MA_{xd} = 0 \\ g(x,\alpha,A_s) = MR_{yd}(x,\alpha,A_s) - MA_{yd} = 0 \\ h(x,\alpha,A_s) = NR_d(x,\alpha,A_s) - NA_d = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

onde MAxd, MAyd, NAd são os esforços atuantes de cálculo na seção; MRxd, MRyd, NRd são os esforços resistentes de cálculo da seção, determinados em função dos três parâmetros *x*, α, As (profundidade da linha neutra, inclinação da linha neutra, área total da armadura, respectivamente), conforme foi mostrado no capítulo 2.

A matriz $[K(\{u\}_i)]$ é composta pelas derivadas parciais dos esforços resistentes em relação aos parâmetros *x*, α, As, já que os esforços atuantes são constantes. Assim, o sistema de três equações lineares a ser resolvido em cada iteração é

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial MR_{xd}}{\partial x} & \dfrac{\partial MR_{xd}}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial MR_{xd}}{\partial A_s} \\ \dfrac{\partial MR_{yd}}{\partial x} & \dfrac{\partial MR_{yd}}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial MR_{yd}}{\partial A_s} \\ \dfrac{\partial NR_d}{\partial x} & \dfrac{\partial NR_d}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial NR_d}{\partial A_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta A_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - MR_{xd} \\ MA_{yd} - MR_{yd} \\ NA_d - NR_d \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

Já na verificação, a armadura total As é conhecida e o sistema de equações a ser resolvido é do tipo

$$\begin{cases} f(x,\alpha,\lambda) = \lambda.\, MR_{xd}(x,\alpha) - MA_{xd} = 0 \\ g(x,\alpha,\lambda) = \lambda.\, MR_{yd}(x,\alpha) - MA_{yd} = 0 \\ h(x,\alpha,\lambda) = \lambda.\, NR_d(x,\alpha) - NA_d = 0 \end{cases} \tag{3.23}$$

onde MAxd, MAyd, NAd são os esforços atuantes de cálculo na seção; MRxd, MRyd, NRd são os esforços resistentes de cálculo da seção, determinados em função dos dois parâmetros x, α (profundidade e inclinação da linha neutra); λ é o fator de proporcionalidade entre os esforços atuantes e resistentes. O sistema de equações lineares, que deve ser resolvido em cada iteração, passa a ser

$$\begin{bmatrix} \lambda \dfrac{\partial MR_{xd}}{\partial x} & \lambda \dfrac{\partial MR_{xd}}{\partial \alpha} & MR_{xd} \\ \lambda \dfrac{\partial MR_{yd}}{\partial x} & \lambda \dfrac{\partial MR_{yd}}{\partial \alpha} & MR_{yd} \\ \lambda \dfrac{\partial NR_d}{\partial x} & \lambda \dfrac{\partial NR_d}{\partial \alpha} & NR_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - \lambda.\, MR_{xd} \\ MA_{yd} - \lambda.\, MR_{yd} \\ NA_d - \lambda.\, NR_d \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

onde

$$\lambda = \frac{MA_{xd}}{MR_{xd}} = \frac{MA_{yd}}{MR_{yd}} = \frac{NA_d}{NR_d} \tag{3.25}$$

3.3 - Algoritmo para o dimensionamento de uma seção

Para o dimensionamento de uma seção de concreto armado, deve-se definir:

- a geometria da seção (coordenadas dos vértices da poligonal fechada; coordenadas das barras e suas respectivas percentagens em relação à área total);
- as propriedades do concreto e do aço;
- os esforços atuantes.

Conhecidos estes valores, o procedimento para o dimensionamento da seção tem os seguintes passos

(a) arbitram-se valores para x, α e As;

(b) determinam-se MRxd, MRyd e NRd e a matriz de derivadas parciais [K];

(c) calcula-se o vetor de desequilíbrio

$$\{\Delta p\}_i = \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - MR_{xd} \\ MA_{yd} - MR_{yd} \\ NA_d - NR_d \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

(d) verifica-se a convergência por

$$\left[\frac{\Delta M_x{}^2 + \Delta M_y{}^2 + \Delta N^2}{MA_{xd}{}^2 + MA_{yd}{}^2 + NA_d{}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq tolerância \tag{3.27}$$

(e) caso a condição acima seja satisfeita, vai-se para o item (i), senão segue-se para (f);

(f) resolve-se o sistema de equações lineares

$$\{\Delta u\}_i = [K]^{-1} \{\Delta p\}_i \tag{3.28}$$

(g) determinam-se x, α e As

$$\{u\}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ A_s \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ A_s \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta A_s \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

(h) retorna-se ao item (b);

(i) final do dimensionamento: valores de x, α e As conhecidos.

O método de Newton-Raphson tem, em geral, uma convergência muito rápida. Entretanto, dependendo dos valores iniciais arbitrados, o processo pode divergir. Por isso, é importante ter-se no programa computacional um controle, que reinicie o processo, com novos valores arbitrados, no caso de haver divergência.

3.4 - Algoritmo para a verificação de uma seção

Na verificação de uma seção de concreto armado, os valores conhecidos inicialmente são:

- a geometria da seção (coordenadas dos vértices da poligonal fechada; coordenadas das barras e suas respectivas percentagens em relação à área total);
- as propriedades do concreto e do aço;
- a área total de armadura;
- os esforços atuantes.

O objetivo da verificação é determinar o fator de proporcionalidade λ entre os esforços atuantes e resistentes.

A partir dos dados do problema, o procedimento para a verificação da seção tem as seguintes etapas

(a) arbitram-se valores para x, α e λ;

(b) determinam-se MRxd, MRyd e NRd e a matriz de derivadas parciais [K];

(c) calcula-se o vetor de desequilíbrio

$$\{\Delta p\}_i = \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - \lambda . MR_{xd} \\ MA_{yd} - \lambda . MR_{yd} \\ NA_d - \lambda . NR_d \end{Bmatrix} \qquad (3.30)$$

(d) verifica-se a convergência por

$$\left[\frac{\Delta M_x{}^2 + \Delta M_y{}^2 + \Delta N^2}{MA_{xd}{}^2 + MA_{yd}{}^2 + NA_d{}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq toler\hat{a}ncia \qquad (3.31)$$

(e) caso a condição acima seja satisfeita, vai-se para o item (i), senão segue-se para (f);

(f) resolve-se o sistema de equações lineares

$$\{\Delta u\}_i = [K]^{-1} \{\Delta p\}_i \qquad (3.32)$$

(g) determinam-se x, α e λ

$$\{u\}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ \lambda \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ \lambda \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} \qquad (3.33)$$

(h) Retorna-se ao item (b);

(i) Final da verificação: valores de x, α e λ conhecidos.

Encontrar um valor de λ superior a 1, indica que a seção não tem a segurança exigida pela norma.

4 - CÁLCULO DAS MATRIZES DE DERIVADAS PARCIAIS

4.1 - Generalidades

Conforme foi apresentado no capítulo anterior, o procedimento de dimensionamento ou de verificação de uma seção de concreto armado a solicitações normais, utilizando o método de Newton-Raphson, envolve o cálculo de uma matriz de derivadas parciais dos esforços resistentes. Neste capítulo, mostra-se o cálculo destas derivadas parciais dos esforços resistentes em relação a x, α, As (profundidade e inclinação da linha neutra e área total da armadura).

4.2 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à profundidade da linha neutra x

No capítulo 2, já havia sido visto que

$$\begin{aligned} MR_{xd} &= MR_{\xi}.\cos\alpha - MR_{\eta}.\mathrm{sen}\,\alpha \\ MR_{yd} &= MR_{\xi}.\mathrm{sen}\,\alpha + MR_{\eta}.\cos\alpha \end{aligned} \tag{4.1}$$

Derivando-se estas expressões, em relação à profundidade da linha neutra x, vem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial MR_{xd}}{\partial x} &= \frac{\partial MR_{\xi}}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial MR_{\eta}}{\partial x}\mathrm{sen}\,\alpha \\ \frac{\partial MR_{yd}}{\partial x} &= \frac{\partial MR_{\xi}}{\partial x}\mathrm{sen}\,\alpha + \frac{\partial MR_{\eta}}{\partial x}\cos\alpha \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como os esforços resistentes $MR\xi$, $MR\eta$ e NR são funções de b e c (curvatura e deformação no centróide da seção), pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\partial MR_\xi}{\partial x} &= \frac{\partial MR_\xi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial MR_\xi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} \\
\frac{\partial MR_\eta}{\partial x} &= \frac{\partial MR_\eta}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial MR_\eta}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} \\
\frac{\partial NR}{\partial x} &= \frac{\partial NR}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial NR}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Mas b e c, por sua vez, são funções das deformações extremas da seção ε_S e ε_I, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_I}\frac{\partial \varepsilon_I}{\partial x} \\
\frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial c}{\partial \varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial \varepsilon_I}\frac{\partial \varepsilon_I}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

No capítulo 2, tinha-se, ainda, que

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_I}{\eta_S - \eta_I} \\
c &= \varepsilon_S - b.\,\eta_S
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e, portanto, suas derivadas em relação a ε_S e ε_I são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial \varepsilon_S} &= \frac{1}{\eta_S - \eta_I} \quad ; \quad \frac{\partial b}{\partial \varepsilon_I} = -\frac{1}{\eta_S - \eta_I} \\
\frac{\partial c}{\partial \varepsilon_S} &= 1 - \frac{\eta_S}{\eta_S - \eta_I} \quad ; \quad \frac{\partial c}{\partial \varepsilon_I} = \frac{\eta_S}{\eta_S - \eta_I}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

As derivadas de ε_S e ε_I em relação a *x* são dadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Derivadas de ε_S e ε_I em relação a *x*

DOMÍNIO	ε_S	ε_I	$\partial\varepsilon_S/\partial x$	$\partial\varepsilon_I/\partial x$
1 e 2	$-10‰\dfrac{x}{d-x}$	$10‰$	$-10‰\dfrac{d}{(d-x)^2}$	0
3, 4 e 4a	$-\varepsilon_{cu}$	$\varepsilon_{cu}\dfrac{d-x}{x}$	0	$-\varepsilon_{cu}\dfrac{d}{x^2}$
5	$-\varepsilon_{c2}\dfrac{x}{x-\left(\dfrac{\varepsilon_{cu}-\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}\right)h}$	$-\varepsilon_{c2}\dfrac{x-h}{x-\left(\dfrac{\varepsilon_{cu}-\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}\right)h}$	$\varepsilon_{c2}\dfrac{\left(\dfrac{\varepsilon_{cu}-\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}\right)h}{\left[x-\left(\dfrac{\varepsilon_{cu}-\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}\right)h\right]^2}$	$-\varepsilon_{c2}\dfrac{\left(\dfrac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}\right)h}{\left[x-\left(\dfrac{\varepsilon_{cu}-\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}\right)h\right]^2}$

Com isto têm-se as expressões das derivadas ∂b/∂*x* e ∂c/∂*x* definidas

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{1}{\eta_S - \eta_I}\left(\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_I}{\partial x}\right) = \lambda_1 \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} - \eta_S \frac{\partial \varepsilon_S / \partial x - \partial \varepsilon_I / \partial x}{\eta_S - \eta_I} = \lambda_2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

As derivadas dos esforços resistentes, em relação a b e c, que aparecem nas Eqs.(4.3), são calculadas separadamente para as regiões I e II de concreto e para a armadura. Conforme as Eqs.(2.29) e (2.30), a contribuição do concreto para os esforços resistentes é dada na região I por

$$\begin{aligned} MR_{\xi 1} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{01} + D_1.G_{02} + D_2.G_{03}) \\ MR_{\eta 1} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{10} + D_1.G_{11} + D_2.G_{12}) \\ NR_1 &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{00} + D_1.G_{01} + D_2.G_{02}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

e na região II por

$$\begin{aligned} MR_{\xi 2} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{01} \\ MR_{\eta 2} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{10} \\ NR_2 &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{00} \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde n1 e n2 são os números de segmentos de reta, que compõem a poligonal fechada que descreve a seção, encontrados, respectivamente, nas regiões I e II.

Derivando-se as Eqs.(4.8) e (4.9) em relação a b e c obtêm-se

na região I:

$$\begin{aligned} \frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial b} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial b} G_{01} + \frac{\partial D_1}{\partial b} G_{02} + \frac{\partial D_2}{\partial b} G_{03} \right) \\ \frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial b} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial b} G_{10} + \frac{\partial D_1}{\partial b} G_{11} + \frac{\partial D_2}{\partial b} G_{12} \right) \\ \frac{\partial NR_1}{\partial b} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial b} G_{00} + \frac{\partial D_1}{\partial b} G_{01} + \frac{\partial D_2}{\partial b} G_{02} \right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

e

$$\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial c} = \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial c} G_{01} + \frac{\partial D_1}{\partial c} G_{02} + \frac{\partial D_2}{\partial c} G_{03} \right)$$
$$\frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial c} = -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial c} G_{10} + \frac{\partial D_1}{\partial c} G_{11} + \frac{\partial D_2}{\partial c} G_{12} \right) \tag{4.11}$$
$$\frac{\partial NR_1}{\partial c} = \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial c} G_{00} + \frac{\partial D_1}{\partial c} G_{01} + \frac{\partial D_2}{\partial c} G_{02} \right)$$

na região II:

$$\frac{\partial MR_{\xi 2}}{\partial b} = \frac{\partial MR_{\eta 2}}{\partial b} = \frac{\partial NR_2}{\partial b} = 0$$
$$\frac{\partial MR_{\xi 2}}{\partial c} = \frac{\partial MR_{\eta 2}}{\partial c} = \frac{\partial NR_2}{\partial c} = 0 \tag{4.12}$$

Segundo as Eqs.(2.19), tem-se que

$$D_0 = a_1 c + a_2 c^2$$
$$D_1 = a_1 b + 2 a_2 bc \tag{4.13}$$
$$D_2 = a_2 b^2$$

Derivando-se as Eqs.(4.13) em relação a b e c, obtêm-se

$$\frac{\partial D_0}{\partial b} = \frac{\partial D_2}{\partial c} = 0$$
$$\frac{\partial D_1}{\partial b} = \frac{\partial D_0}{\partial c} = a_1 + 2 a_2 c = \kappa_1 \tag{4.14}$$
$$\frac{\partial D_2}{\partial b} = \frac{\partial D_1}{\partial c} = 2 a_2 b = \kappa_2$$

Desta forma, as Eqs.(4.10) e (4.11) podem ser escritas como

$$\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial b} = \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\kappa_1 G_{01} + \kappa_2 G_{03} \right)$$
$$\frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial b} = -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\kappa_1 G_{11} + \kappa_2 G_{12} \right) \tag{4.15}$$
$$\frac{\partial NR_1}{\partial b} = \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\kappa_1 G_{01} + \kappa_2 G_{02} \right)$$

e

$$\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial c} = \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\kappa_1 G_{01} + \kappa_2 G_{02} \right)$$
$$\frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial c} = -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\kappa_1 G_{10} + \kappa_2 G_{11} \right) \tag{4.16}$$
$$\frac{\partial NR_1}{\partial c} = \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\kappa_1 G_{00} + \kappa_2 G_{01} \right)$$

Substituindo as Eqs.(4.7), (4.15) e (4.16) nas Eqs.(4.3) vêm

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial x} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\Psi_0 G_{01} + \Psi_1 G_{02} + \Psi_2 G_{03} \right) \\
\frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial x} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\Psi_0 G_{10} + \Psi_1 G_{11} + \Psi_2 G_{12} \right) \\
\frac{\partial NR_1}{\partial x} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\Psi_0 G_{00} + \Psi_1 G_{01} + \Psi_2 G_{02} \right)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &= \lambda_2 . \kappa_1 \\
\Psi_1 &= \lambda_1 . \kappa_1 + \lambda_2 . \kappa_2 \\
\Psi_2 &= \lambda_1 . \kappa_2
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

A contribuição da armadura para os esforços resistentes, conforme as Eqs.(2.26), é dada por

$$
\begin{aligned}
MR_{\xi} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) . \eta_j \\
MR_{\eta} &= -\sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) . \xi_j \\
NR &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

onde m é o número de barras de armadura da seção.

Derivando as Eqs.(4.19) em relação a b e c, obtêm-se

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial MR_{\xi}}{\partial b} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial b} . \eta_j \\
\frac{\partial MR_{\eta}}{\partial b} &= -\sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial b} . \xi_j \\
\frac{\partial NR}{\partial b} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial b}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial MR_{\xi}}{\partial c} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial c} . \eta_j \\
\frac{\partial MR_{\eta}}{\partial c} &= -\sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial c} . \xi_j \\
\frac{\partial NR}{\partial c} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial c}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

As derivadas da tensão nas barras de armadura em relação a b e c podem ser calculadas pelas expressões

$$\frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial b} = \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial \varepsilon_j}\,\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial b} = E_T(\varepsilon_j).\,\eta_j$$
$$\frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial c} = \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial \varepsilon_j}\,\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial c} = E_T(\varepsilon_j) \tag{4.22}$$

onde $E_T(\varepsilon_j)$ é o módulo de elasticidade longitudinal tangente do aço, correspondente à deformação ε_j.

Conforme o diagrama tensão-deformação para o aço, apresentado no capítulo 2, o módulo de elasticidade longitudinal tangente pode ser calculado pelas seguintes expressões:

$$E_T(\varepsilon) = \begin{cases} E_s & para \quad |\varepsilon| < \varepsilon_{yd} \\ 0 & para \quad |\varepsilon| \geq \varepsilon_{yd} \end{cases} \tag{4.23}$$

As parcelas correspondentes à armadura das derivadas dos esforços resistentes, em relação à profundidade da linha neutra *x*, são, então, dadas por

$$\frac{\partial MR_\xi}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} \rho_j.\,A_s.\,E_T(\varepsilon_j).\,\eta_j.(\lambda_1.\,\eta_j + \lambda_2)$$
$$\frac{\partial MR_\eta}{\partial x} = -\sum_{j=1}^{m} \rho_j.\,A_s.\,E_T(\varepsilon_j).\,\xi_j.(\lambda_1.\,\eta_j + \lambda_2) \tag{4.24}$$
$$\frac{\partial NR}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} \rho_j.\,A_s.\,E_T(\varepsilon_j).(\lambda_1.\,\eta_j + \lambda_2)$$

Finalmente, as derivadas dos esforços resistentes em relação à profundidade da linha neutra *x* são obtidas somando-se as parcelas apresentadas nas Eqs.(4.17) e (4.25) e fazendo-se a rotação para os eixos x, y usando as Eqs.(4.2).

4.3 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à inclinação da linha neutra α

Derivando-se as Eqs.(4.1), em relação à inclinação da linha neutra α, obtêm-se diretamente

$$\frac{\partial MR_{xd}}{\partial \alpha} = -MR_\xi.\mathrm{sen}\,\alpha - MR_\eta.\cos\alpha = -MR_{yd}$$
$$\frac{\partial MR_{yd}}{\partial \alpha} = MR_\xi.\cos\alpha - MR_\eta.\mathrm{sen}\,\alpha = MR_{xd} \tag{4.25}$$
$$\frac{\partial NR_d}{\partial \alpha} = 0$$

4.4 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à área total de armadura As

As derivadas dos esforços resistentes em relação à área total de armadura As são obtidas a partir das parcelas de esforços resistentes devidas à armadura. As parcelas referentes ao concreto não contribuem para estas derivadas uma vez que são independentes de As.

Assim, as parcelas dos esforços resistentes devidas à armadura são expressas por

$$\begin{aligned} MR_{xd} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) . y_j \\ MR_{yd} &= -\sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) . x_j \\ NR_d &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Derivando-se estas expressões em relação à As, obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial MR_{xd}}{\partial A_s} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . \sigma(\varepsilon_j) . y_j \\ \frac{\partial MR_{yd}}{\partial A_s} &= -\sum_{j=1}^{m} \rho_j . \sigma(\varepsilon_j) . x_j \\ \frac{\partial NR_d}{\partial A_s} &= \sum_{j=1}^{m} \rho_j . \sigma(\varepsilon_j) \end{aligned} \tag{4.27}$$

5 - EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA

Neste capítulo, apresentam-se exemplos de utilização do programa para o dimensionamento e a verificação de seções de concreto armado submetidas a solicitações normais.

5.1 - Exemplo de dimensionamento de uma seção

No primeiro exemplo, é feito o dimensionamento da seção vazada, apresentada na Fig.5.1. A seção está submetida a uma solicitação de flexo-compressão oblíqua.

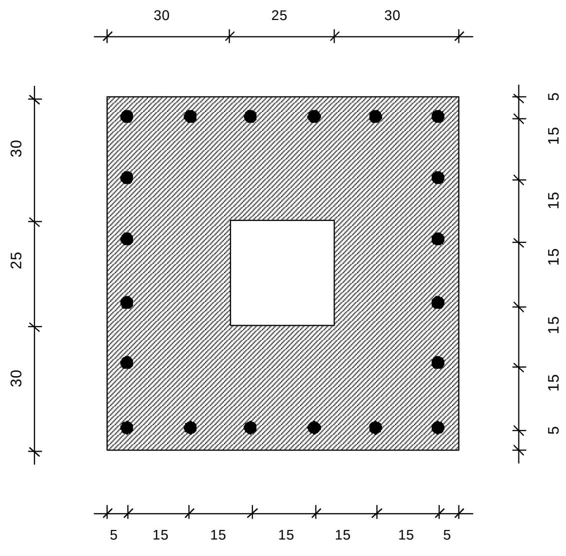


Figura 5.1 - Seção de concreto armado a ser dimensionada

O arquivo de entrada de dados utilizado é o seguinte

```
·········1                    valor indicando problema de dimensionamento
·······1.4······1.15          valores de γc e γs
········11                    número de vértices da poligonal fechada
·········0·········0          uma linha para cada vértice
········85·········0          da poligonal fechada com suas coordenadas
········85········85
·········0········85
·········0·········0
········30········30
········30········55
········55········55
········55········30
········30········30
·········0·········0
·········1                    número de tipos de concreto
·········2········11          fck e no. de vértices do 1o. tipo de concreto
········20·····21000          número de barras e Es
·········5·········5········50······0.05                    uma linha para
········20·········5········50······0.05                    cada barra de
········35·········5········50······0.05                    armadura, com:
········50·········5········50······0.05                    - coordenada xj
········65·········5········50······0.05                    - coordenada yj
········80·········5········50······0.05                    - fyk
·········5········20········50······0.05                    - ρj
·········5········35········50······0.05
·········5········50········50······0.05
·········5········65········50······0.05
·········5········80········50······0.05
········80········20········50······0.05
········80········35········50······0.05
········80········50········50······0.05
········80········65········50······0.05
········80········80········50······0.05
········20········80········50······0.05
········35········80········50······0.05
········50········80········50······0.05
········65········80········50······0.05
····-.2E+3····-.5E+5·····.5E+5            Nad, Maxd, MAyd
```

As unidades dos dados fornecidos devem ser coerentes. No exemplo. foram usados kN como unidade de força e cm como unidade de comprimento. Os valores, em cada linha, são posicionados de dez em dez posições. Cada símbolo "·" indica um espaço em branco. O texto em itálico, colocado ao final de cada linha, é apenas comentário e não deve aparecer no arquivo de entrada de dados.

Ao rodar o programa, aparecerá, na tela do computador, a saída de resultados da forma seguinte

```
********************************************************************************
********************************************************************************
**                                                                            **
**     DIMENSIONAMENTO DE SECAO DE CONCRETO ARMADO A SOLICITACOES NORMAIS     **
**                                                                            **
********************************************************************************
**                                                                            **
**                                          MX          MY          N         **
**    ESFORCOS ATUANTES DE CALCULO:     -.5000E+05   .5000E+05  -.2000E+03   **
**    ESFORCOS RESISTENTES DE CALCULO:  -.5000E+05   .5000E+05  -.2000E+03   **
**                                                                            **
********************************************************************************
**                                                                            **
**            AREA TOTAL DE ARMADURA:                       .3729E+02         **
**            DEFORMACAO NA FIBRA SUPERIOR DA SECAO:      -.3500E-02         **
**            DEFORMACAO NA FIBRA INFERIOR DA SECAO:       .7946E-02         **
**            INCLINACAO DA LINHA NEUTRA:                 -.4500E+02         **
**                                                                            **
********************************************************************************
********************************************************************************
```

5.2 - Exemplo de verificação de uma seção

O segundo exemplo corresponde à verificação da seção apresentada na Fig.5.2. A seção está submetida a uma solicitação de flexão simples normal.

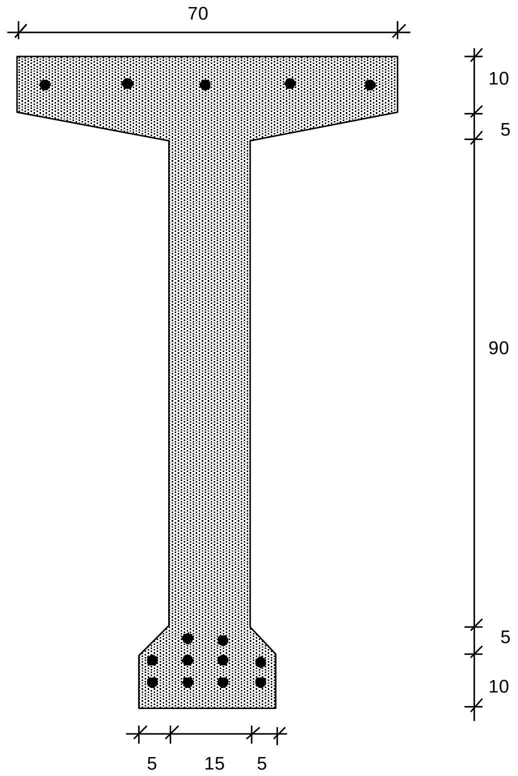


Figura 5.2 - Seção de concreto armado a ser verificada

O arquivo de entrada de dados utilizado é o seguinte

```
·········2                    valor indicando problema de verificação
·······1.4······1.15          valores de γc e γs
········13                    número de vértices da poligonal fechada
······22.5·········0          uma linha para cada vértice
······47.5·········0          da poligonal fechada com suas coordenadas
······47.5········10
······42.5········15
······42.5········95
········70·······110
········70·······120
·········0·······120
·········0·······110
······27.5········95
······27.5········15
······22.5········10
······22.5·········0
·········1                    número de tipos de concreto
·········2········13          fck e no. de vértices do 1o. tipo de concreto
········15·····21000········30            número de barras, Es e As
······27.5·········5········50··0.066667                  uma linha para
······32.5·········5········50··0.066667                  cada barra de
······37.5·········5········50··0.066667                  armadura, com:
······42.5·········5········50··0.066667                  - coordenada xj
······27.5·········8········50··0.066667                  - coordenada yj
······32.5·········8········50··0.066667                  - fyk
······37.5·········8········50··0.066667                  - ρj
······42.5·········8········50··0.066667
······32.5········11········50··0.066667
······37.5········11········50··0.066667
·········5·······115········50··0.066667
········20·······115········50··0.066667
········35·······115········50··0.066667
········50·······115········50··0.066667
········65·······115········50··0.066667
·········0·····-1.E5·········0            Nad, Maxd, MAyd
```

Da mesma forma, que no dimensionamento, as unidades dos dados fornecidos devem ser coerentes entre si. Aqui também, foram usados kN como unidade de força e cm como unidade de comprimento. Os valores, em cada linha, são posicionados de dez em dez posições. Cada símbolo "·" representa um espaço em branco. O texto em itálico, colocado ao final de cada linha, é apenas comentário e não deve aparecer no arquivo de entrada de dados.

A saída do programa terá a forma seguinte

```
*******************************************************************************
*******************************************************************************
**                                                                           **
**      VERIFICACAO DE SECAO DE CONCRETO ARMADO A SOLICITACOES NORMAIS       **
**                                                                           **
*******************************************************************************
**                                                                           **
**                                           MX          MY          N       **
**    ESFORCOS ATUANTES DE CALCULO:     -.1000E+06   .0000E+00   .0000E+00   **
**    ESFORCOS RESISTENTES DE CALCULO:  -.9346E+05   .6762E-12   .5458E-05   **
**                                                                           **
*******************************************************************************
**                                                                           **
**          RESERVA:                                   .9346E+00             **
**          DEFORMACAO NA FIBRA SUPERIOR DA SECAO:    -.1445E-02             **
**          DEFORMACAO NA FIBRA INFERIOR DA SECAO:     .1000E-01             **
**          INCLINACAO DA LINHA NEUTRA:                .1184E-13             **
**                                                                           **
*******************************************************************************
*******************************************************************************
```

A “reserva” indica que os esforços atuantes devem ser multiplicados por 0,9346 para que a seção tenha a margem de segurança exigida pela norma. Portanto, no exemplo, a seção está um pouco aquém da segurança requerida pela norma.

ANEXO A- INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE UM DOMÍNIO PLANO ARBITRÁRIO ATRAVÉS DE INTEGRAIS DE CONTORNO

O procedimento apresentado, neste trabalho, para o dimensionamento e a verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta envolve a cálculo de uma série de integrais de superfície. Estas integrações são efetuadas transformando-se as integrais de superfície sobre um domínio plano A em integrais de linha ao longo de um contorno C (Fig. A.1). Isto é feito pela aplicação do teorema de Green no plano, conforme sugerido por Werner (1974) e apresentado por Dumont e Musso Jr. (1987)

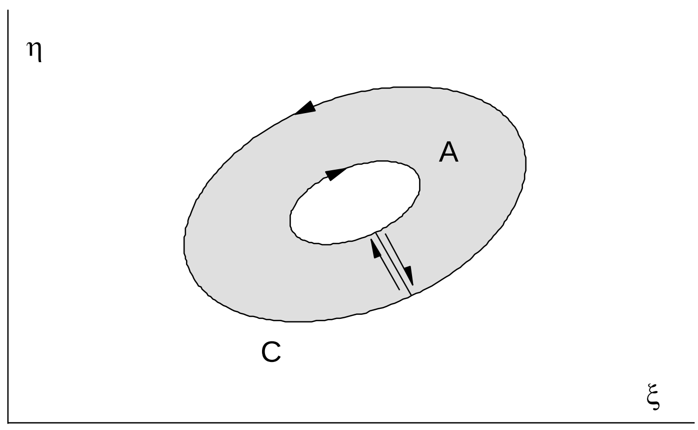


Figura A.1 - Domínio plano A com contorno C

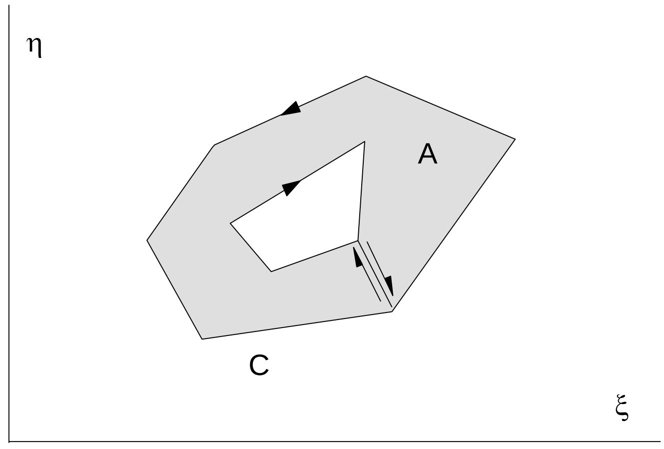


Figura A.2 - Domínio plano A com contorno poligonal

Deste modo, a integral de superfície de um termo genérico de um polinômio, referido a um sistema de coordenadas ξ, η, é transformada em uma integral de contorno por

$$\int_A \xi^k \eta^m \, dA = \oint_C \frac{\xi^{k+1}\eta^m}{k+1} \, d\eta \tag{A.1}$$

Se o domínio plano A é limitado por uma poligonal fechada (Fig. A.2), a integral da expressão (A.1) pode ser substituída por um somatório. Assim,

$$\int_A \xi^k \eta^m \, dA = \sum_{i=1}^{n} G_{km} \tag{A.2}$$

com

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \xi^{k+1}\eta^m \, d\eta \tag{A.3}$$

sendo n o número de segmentos da poligonal e η_i e η_{i+1} as ordenadas do seu i-ésimo segmento.

As coordenadas ξ e η podem ser definidas por

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_i + w \\ \xi &= \xi_i + \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} w \end{aligned} \tag{A.4}$$

onde w varia de 0 a Δη, conforme a Fig. A.3.

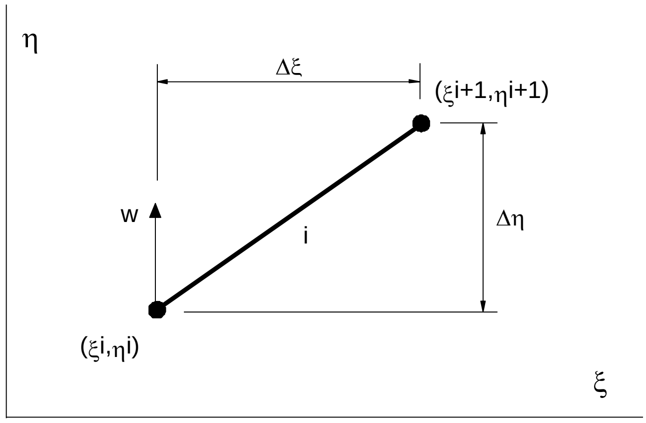


Figura A.3 - Definição da variável w

Substituindo as expressões (A.4) em (A.3), resulta

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_0^{\Delta\eta} \left[\xi_i + \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} w \right]^{k+1} \left[\eta_i + w \right]^m dw \tag{A.5}$$

sendo

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \xi_{i+1} - \xi_i \\ \Delta\eta &= \eta_{i+1} - \eta_i \end{aligned} \tag{A.6}$$

Com a expressão (A.5), pode-se obter os polinômios

$$G_{00} = \left(\xi_i + \frac{\Delta\xi}{2} \right) \Delta\eta \tag{A.7}$$

$$G_{01} = \left[\xi_i \left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left(\frac{\eta_i}{2} + \frac{\Delta\eta}{3} \right) \right] \Delta\eta \tag{A.8}$$

$$G_{02} = \left\{ \xi_i \left[\eta_i \left(\Delta\eta + \eta_i \right) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right] + \Delta\xi \left[\eta_i \left(\frac{\eta_i}{2} + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{4} \right] \right\} \Delta\eta \tag{A.9}$$

$$G_{03} = \left\{ \xi_i \left[\eta_i \left(\Delta\eta^2 + \eta_i \left(\frac{3\Delta\eta}{2} + \eta_i \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{4} \right] + \Delta\xi \left[\eta_i \left(\frac{3\Delta\eta^2}{4} + \eta_i \left(\Delta\eta + \frac{\eta_i}{2} \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{5} \right] \right\} \Delta\eta \tag{A.10}$$

$$G_{10} = \left[\xi i \left(\xi i + \Delta\xi \right) + \frac{\Delta\xi^2}{3} \right] \frac{\Delta\eta}{2} \tag{A.11}$$

$$G_{11} = \left\{ \xi_i \left[\xi_i \left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left(\eta_i + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) \right] + \Delta\xi^2 \left[\frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{4} \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \qquad \text{(A.12)}$$

$$G_{12} = \left\{ \xi_i \left[\xi_i \left(\eta_i \left(\eta_i + \Delta\eta \right) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right) + \Delta\xi \left(\eta_i \left(\eta_i + \frac{4\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{2} \right) \right] + \Delta\xi^2 \left[\eta_i \left(\frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{5} \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \qquad \text{(A.13)}$$

$$G_{20} = \left\{ \frac{\Delta\xi^3}{4} + \xi_i \left[\Delta\xi^2 + \xi_i \left(\frac{3\Delta\xi}{2} + \xi_i \right) \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{3} \qquad \text{(A.14)}$$

Os polinômios dados pelas Eqs.(A.7) até (A.14) são os empregados no desenvolvimento deste trabalho.

ANEXO B - LISTAGEM DO PROGRAMA EM FORTRAN PARA O DIMENSIONAMENTO E A VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS A SOLICITAÇÕES NORMAIS

Apresenta-se, a seguir, a listagem do programa, apresentado neste trabalho, para o dimensionamento e a verificação de seções de concreto armado submetidas a solicitações normais.

```
      PROGRAM VERDIM
      COMMON E,FYD,FCD,NP,XP,YP,XG,YG,LX,LY,AREA,JOX,JOY,JOXY,
     * NA,MAX,MAY,NB,XB,YB,PERC,NRC,IL(5),GS,GC,AS
     * ,EPSC2,EPSCU,A1,A2,CONST
      REAL*8 EPSC2(5),EPSCU(5),A1(5),A2(5),CONST,FCK
      REAL*8 NN,Y,X,X2,X3,X4,XY,X2Y,DDX
      REAL*8 E,FYD(100),FCD(5),XP(100),YP(100),XG,YG,AREA,XB(100),
     * YB(100),PERC(100)
      REAL*8 JOX,JOY,JOXY,LX,LY,NA,MAX,MAY
      REAL*8 JX,JY,JXY,AS,DX,DY,GC,GS,SOX,SOY,SX,SY,XMAX,XMIN,YMAX,YMIN
      CHARACTER ARQ*12
      INTEGER OP
   10 WRITE(*,11)
   11 FORMAT(////,'>>>>>> QUAL O NOME DO ARQUIVO DE DADOS ?')
      READ(*,'(A12)',ERR=10) ARQ
      IF(ARQ.EQ.' ') STOP
      IR=1
      IW=0
      OPEN(UNIT=1,FILE=ARQ,STATUS='OLD',FORM='FORMATTED',
     *ACCESS='SEQUENTIAL')
      READ(IR,21) OP
      READ(IR,20) GC,GS
      READ(IR,21) NP
      DO 30 J1=1,NP
         READ(IR,20) XP(J1),YP(J1)
   30 CONTINUE
      READ(IR,21) NRC
      DO 40 J1=1,NRC
```

```
      READ(IR,24) FCD(J1),IL(J1)
      FCD(J1)=FCD(J1)/GC
40 CONTINUE
   READ(IR,22) NB,E,AS
   DO 50 J1=1,NB
      READ(IR,23) XB(J1),YB(J1),FYD(J1),PERC(J1)
      FYD(J1)=FYD(J1)/GS
50 CONTINUE
   READ(IR,20) NA,MAX,MAY
   CONST=210000.D0/E
   DO 55 J1=1,NRC
       FCK = FCD(J1)*GC*CONST
       IF(FCK.LE.50) THEN
           EPSC2(J1)=0.002D0
           EPSCU(J1)=0.0035D0
           A1(J1)=1000.D0
           A2(J1)=250000.D0
       ELSE
           EPSC2(J1)=0.002D0+0.000085d0*(FCK-50.D0)**0.53
           EPSCU(J1)=0.0026D0+0.035D0*((90-FCK)/100)**4
           NN=1.4D0+23.4D0*((90-FCK)/100)**4
           DDX=EPSC2(J1)/1000.D0
           X=0.D0
           X2=0.D0
           X3=0.D0
           X4=0.D0
           XY=0.D0
           X2Y=0.D0
           DO 51 J2=1,1000
               Y=1.D0-(1.D0-X/EPSC2(J1))**NN
               X2=X2+X*X
               X3=X3+X*X*X
               X4=X4+X*X*X*X
               XY=XY+X*Y
               X2Y=X2Y+X*X*Y
               X=X+DDX
51         CONTINUE
           A1(J1)=(X2Y-X4*XY/X3)/(X3-X2*X4/X3)
           A2(J1)=-(X2Y-X3*A1(J1))/X4
       END IF
55 CONTINUE
   XMAX=-1.E11
   YMAX=-1.E11
   XMIN=1E11
   YMIN=1E11
   DO 60 J1=1,NP
      IF(XP(J1).GT.XMAX) XMAX=XP(J1)
      IF(XP(J1).LT.XMIN) XMIN=XP(J1)
      IF(YP(J1).GT.YMAX) YMAX=YP(J1)
      IF(YP(J1).LT.YMIN) YMIN=YP(J1)
60 CONTINUE
   LX=XMAX-XMIN
   LY=YMAX-YMIN
   NP1=NP-1
   AREA=0
   SX=0
   SY=0
   JX=0
   JY=0
   JXY=0
   DO 70 J1=1,NP1
```

```
         DX=XP(J1+1)-XP(J1)
         DY=YP(J1+1)-YP(J1)
         AREA=AREA+(XP(J1)+DX/2.)*DY
         SX=SX+(XP(J1)*(YP(J1)+DY/2.)+DX*(YP(J1)/2.+DY/3.))*DY
         SY=SY+(XP(J1)*(XP(J1)+DX)+DX*DX/3.)*DY/2.
         JX=JX+(XP(J1)*(YP(J1)*(DY+YP(J1))+DY*DY/3.)+DX*(YP(J1)*
     .    (YP(J1)/2.+DY/1.5)+DY*DY/4.))*DY
         JY=JY+(DX**3/4.+XP(J1)*(DX*DX+XP(J1)*(1.5*DX+XP(J1))))*DY/3.
         JXY=JXY+(XP(J1)*(XP(J1)*(YP(J1)+DY/2.)+DX*(YP(J1)+DY/1.5))+
     .    DX*DX*(YP(J1)/3.+DY/4.))*DY/2.
   70 CONTINUE
      XG=SY/AREA
      YG=SX/AREA
      SOX=SX-YG*AREA
      SOY=SY-XG*AREA
      JOX=JX-AREA*YG*YG
      JOY=JY-AREA*XG*XG
      JOXY=JXY-XG*YG*AREA
      DO 80 J1=1,NP
         XP(J1)=XP(J1)-XG
         YP(J1)=YP(J1)-YG
   80 CONTINUE
      DO 90 J1=1,NB
         XB(J1)=XB(J1)-XG
         YB(J1)=YB(J1)-YG
   90 CONTINUE
      CALL AJUSTL(OP)
      CLOSE(1)
      GO TO 10
   20 FORMAT(8F10.0)
   21 FORMAT(8I10)
   22 FORMAT(I10,7F10.0)
   23 FORMAT(4F10.0)
   24 FORMAT(F10.0,9I10)
      END

      SUBROUTINE AJUSTL(OP)
      INTEGER OP
      REAL*8 NR,MRX,MRY,LAM,LAMMIN,NRMIN,MRXMIN,MRYMIN
      REAL*8 R(3,2),RT(3,3),DP(3)
      COMMON E,FYD,FCD,NP,XP,YP,XG,YG,LX,LY,AREA,JOX,JOY,JOXY,
     *   NA,MAX,MAY,NB,XB,YB,PERC,NRC,IL(5),GS,GC,AS
     *   ,EPSC2,EPSCU,A1,A2
      REAL*8 EPSC2(5),EPSCU(5),A1(5),A2(5),CONST
      REAL*8 E,FYD(100),FCD(5),XP(100),YP(100),XG,YG,AREA,XB(100),
     *   YB(100),PERC(100)
      REAL*8 JOX,JOY,JOXY,LX,LY,NA,MAX,MAY
      REAL*8 ALFA0,ALPH,ALPG,AS1,AS2,AS3,AS,B,BAS,C,CA,CA0,CAR,X,
     *   EPSI,EPSS,FS,GC,GS,PJX,PJY,SA,SA0,SS,TOL,TOLE,PI,PI2,GRAUS
      DATA PI,PI2,GRAUS/3.1415926535897932385,1.5707963267948966192,
     *   57.29577951308232/
      TOLMIN=1.D0
      K=0
      IW=0
      TOLE=1.D-8
      BAS=MAX*MAX+MAY*MAY+NA*NA
      LAM=1.D0
      ALFA0=0
      IF(JOX.EQ.JOY.AND.ABS(JOXY).GT.1E-5) THEN
         ALFA0=PI2
      ELSE
```

```
         IF(JOX.NE.JOY) ALFA0=ATAN(-2*JOXY/(JOX-JOY))/2.
      ENDIF
      CA0=COS(ALFA0)
      SA0=SIN(ALFA0)
      CA0=CA0*CA0
      SA0=SA0*SA0
      SS=JOXY*SIN(2*ALFA0)
      PJX=JOX*CA0+JOY*SA0-SS
      PJY=JOY*CA0+JOX*SA0+SS
      ALPH=0
      IF(MAX.EQ.0) THEN
         ALPH=-DSIGN(PI2,MAY)
      ELSE
         ALPH=ATAN(MAY*PJX/(MAX*PJY))
         IF(MAX.GT.0) ALPH=ALPH+PI
      ENDIF
      ALFA0=ALPH+ALFA0
      UU=0.5D0
300   UU=(PI+UU)**5
      UU=UU-INT(UU)
      K0=0
      X=(LX+LY)*UU
      IF(OP.EQ.1) THEN
         AS1=ABS(MAX)/(0.4*LY*FYD(1))
         AS2=ABS(MAY)/(0.4*LX*FYD(1))
         IF(NA.GT.0) THEN
            AS3=NA/FYD(1)
         ELSE
            AS3=DMAX1(0D0,(NA-FCD(1)*AREA)/FYD(1))
         ENDIF
         AS=AS1+AS2+AS3
      ENDIF
      ALPH=ALFA0
890   CALL ESFOR(E,FYD,FCD,NP,XP,YP,NB,XB,YB,PERC,X,ALPH,AS,B,C,
     *EPSS,EPSI,NR,MRX,MRY,R,NRC,IL,EPSC2,EPSCU,A1,A2)
      DP(1)=MAX-LAM*MRX
      DP(2)=MAY-LAM*MRY
      DP(3)=NA-LAM*NR
      TOL=SQRT((DP(1)**2+DP(2)**2+DP(3)**2)/BAS)
      IF(TOL.LE.TOLE) GO TO 900
      K=K+1
      K0=K0+1
      IF(K0.LE.50) GO TO 301
      IF(TOL.LT.TOLMIN) THEN
        TOLMIN=TOL
        MRXMIN=MRX
        MRYMIN=MRY
        NRMIN=NR
        ASMIN=AS
        EPSSMIN=EPSS
        EPSIMIN=EPSI
        ALPHMIN=ALPH
        LAMMIN=LAM
      END IF
      GO TO 300
301   CA=COS(ALPH)
      SA=SIN(ALPH)
      RT(1,1)=LAM*(R(1,1)*CA-R(2,1)*SA)
      RT(1,2)=LAM*(-MRY)
      RT(2,1)=LAM*(R(1,1)*SA+R(2,1)*CA)
      RT(2,2)=LAM*MRX
```

```
      RT(3,1)=LAM*R(3,1)
      RT(3,2)=0
      IF(OP.EQ.2) THEN
         RT(1,3)=MRX
         RT(2,3)=MRY
         RT(3,3)=NR
      ELSE
         RT(1,3)=R(1,2)*CA-R(2,2)*SA
         RT(2,3)=R(1,2)*SA+R(2,2)*CA
         RT(3,3)=R(3,2)
      ENDIF
      CALL PIVO(RT,DP,IVER)
      IF(IVER.EQ.1) GO TO 300
      X=X+DP(1)
      IF(OP.EQ.2) THEN
         LAM=LAM+DP(3)
      ELSE
         AS1=AS+DP(3)
               AS=AS1
      ENDIF
      ALPH=ALPH+DP(2)
      IF(ABS(ALPH).GT.2*PI) ALPH=SIGN(MOD(ALPH,2*PI),ALPH)
      IF(K.LT.10000) GO TO 890
      WRITE(*,*) ">>>> NAO CONVERGIU",TOLMIN
      MRX=MRXMIN
      MRY=MRYMIN
      NR=NRMIN
      AS=ASMIN
      EPSS=EPSSMIN
      EPSI=EPSIMIN
      ALPH=ALPHMIN
      LAM=LAMMIN
  900 WRITE(IW,500)
      WRITE(IW,500)
      WRITE(IW,501)
      IF(OP.EQ.2) THEN
         WRITE(IW,503)
      ELSE
         WRITE(IW,502)
      ENDIF
      WRITE(IW,501)
      WRITE(IW,500)
      WRITE(IW,501)
      WRITE(IW,504)
      WRITE(IW,505) MAX,MAY,NA
      WRITE(IW,506) MRX,MRY,NR
      WRITE(IW,501)
      WRITE(IW,500)
      WRITE(IW,501)
      IF(OP.EQ.2) THEN
         FS=1./LAM
         WRITE(IW,511) FS
      ELSE
         WRITE(IW,507) AS
      ENDIF
      WRITE(IW,508) EPSS
      WRITE(IW,509) EPSI
      IF(ABS(ALPH).GT.2*PI) ALPH=SIGN(MOD(ALPH,2*PI),ALPH)
      ALPG=GRAUS*ALPH
      WRITE(IW,510) ALPG
      WRITE(IW,501)
```

```
      WRITE(IW,500)
      WRITE(IW,500)
      WRITE(*,512)
      READ(*,513) CAR
      RETURN
  500 FORMAT(1X,78('*'))
  501 FORMAT(1X,'**',74X,'**')
  502 FORMAT(1X,'**      DIMENSIONAMENTO DE SECAO DE CONCRETO ARMADO A SO
     *LICITACOES NORMAIS   **')
  503 FORMAT(1X,'**       VERIFICACAO DE SECAO DE CONCRETO ARMADO A SOLIC
     *ITACOES NORMAIS      **')
  504 FORMAT(1X,'**                                        MX
     *  MY           N       **')
  505 FORMAT(1X,'**    ESFORCOS ATUANTES DE CALCULO:    ',3E12.4,'   **')
  506 FORMAT(1X,'**    ESFORCOS RESISTENTES DE CALCULO:',3E12.4,'   **')
  507 FORMAT(1X,'**',12X,'AREA TOTAL DE ARMADURA:               ',
     *E15.4,9X,'**')
  508 FORMAT(1X,'**',12X,'DEFORMACAO NA FIBRA SUPERIOR DA SECAO:',
     *E15.4,9X,'**')
  509 FORMAT(1X,'**',12X,'DEFORMACAO NA FIBRA INFERIOR DA SECAO:',
     *E15.4,9X,'**')
  510 FORMAT(1X,'**',12X,'INCLINACAO DA LINHA NEUTRA:           ',
     *E15.4,9X,'**')
  511 FORMAT(1X,'**',12X'RESERVA:                             ',
     *E15.4,9X,'**')
  512 FORMAT(/,25X,' TECLE <ENTER> PARA CONTINUAR',/)
  513 FORMAT(A1)
      END

      SUBROUTINE PIVO(A,B,IVER)
      REAL*8 A(3,3),B(3)
      INTEGER II(18),IVER
      REAL*8 AUX1,AUX2,DUM1,DUM2,DUM3,DUM4,DUM5
      DATA II/1,2,3,1,3,2,2,1,3,2,3,1,3,1,2,3,2,1/
      IVER=0
      DO 10 J1=1,6
         JJ=3*J1
         I=II(JJ-2)
         J=II(JJ-1)
         K=II(JJ)
         IF(A(I,I).EQ.0) GO TO 10
         AUX1=A(J,I)/A(I,I)
         AUX2=A(K,I)/A(I,I)
         DUM1=A(K,K)-A(I,K)*AUX2
         DUM2=A(K,J)-A(I,J)*AUX2
         DUM3=B(K)-B(I)*AUX2
         AUX2=A(J,J)-A(I,J)*AUX1
         IF(AUX2.EQ.0) GO TO 10
         DUM4=(B(J)-B(I)*AUX1)/AUX2
         DUM5=(A(J,K)-A(I,K)*AUX1)/AUX2
         AUX1=DUM1-DUM2*DUM5
         IF(AUX1.EQ.0) GO TO 10
         B(K)=(DUM3-DUM2*DUM4)/AUX1
         B(J)=DUM4-DUM5*B(3)
         B(I)=(B(I)-B(J)*A(I,J)-B(K)*A(I,K))/A(I,I)
         GO TO 20
   10 CONTINUE
      IVER=1
   20 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE ESFOR(E,FYD,FC,NP,XP,YP,NB,XB,YB,PERC,X,ALFA,AS,B,C,
     *EPSS,EPSI,NRZ,MRX,MRY,R,NRC,IL,EPSC2,EPSCU,A1,A2)
      REAL*8 NRZTI,NRZT,MRKS,MRET,NRZ,MRX,MRY,KS1I,KS2I,KS1II,KS2II
      REAL*8 XP(*),YP(*),XB(*),YB(*),PERC(*),KSP(100),ETP(100),
     *     KSB(100),ETB(100),R(3,2),FYD(*),FC(*),EPSP(100)
      REAL*8 EPSC2(*),EPSCU(*),A1(*),A2(*)
      REAL*8 X,DD,ALFA,AS,B,BLX,C,CA,CLX,DUM1,DUM2,E,EPS0,EPSB,EPS1,
     *EPSI,EPSS,ET,ET01,ET12,ET1I,ET1II,ET2I,ET2II,FCD,SA,SIG,TETIA,
     *TETIC,TETSA,TETSC,TKSIA,TKSIC,TKSSA,TKSSC
      INTEGER IL(*)
      CA=COS(ALFA)
      SA=SIN(ALFA)
      TETSC=0
      TETIC=0
      DO 10 J1=1,NP
         KSP(J1)=XP(J1)*CA+YP(J1)*SA
         ETP(J1)=-XP(J1)*SA+YP(J1)*CA
         IF(ETP(J1).GT.TETSC) THEN
            TETSC=ETP(J1)
            TKSSC=KSP(J1)
         ENDIF
         IF(ETP(J1).LT.TETIC) THEN
            TETIC=ETP(J1)
            TKSIC=KSP(J1)
         ENDIF
   10 CONTINUE
      TETSA=0
      TETIA=0
      DO 20 J1=1,NB
         KSB(J1)=XB(J1)*CA+YB(J1)*SA
         ETB(J1)=-XB(J1)*SA+YB(J1)*CA
         IF(ETB(J1).GT.TETSA) THEN
            TETSA=ETB(J1)
            TKSSA=KSB(J1)
         ENDIF
         IF(ETB(J1).LT.TETIA) THEN
            TETIA=ETB(J1)
            TKSIA=KSB(J1)
         ENDIF
   20 CONTINUE
      H=TETSC-TETIC
      DD=TETSC-TETIA
      X23=EPSCU(1)/(0.01D0+EPSCU(1))*DD
      IF(X.LT.X23) THEN
         B=-0.01D0/(DD-X)
         C=B*(X-TETSC)
         BLX=-0.01D0/(DD-X)**2
         CLX=(DD-TETSC)*BLX
         EPSI=0.01D0
         EPSS=-0.01D0*X/(DD-X)
      ELSE
         IF(X.LT.H) THEN
            B=-EPSCU(1)/X
            C=-EPSCU(1)-B*TETSC
            BLX=EPSCU(1)/X**2
            CLX=-TETSC*BLX
            EPSS=-EPSCU(1)
            EPSI=DMAX1(EPSCU(1)*(DD-X)/X,0.D0)
         ELSE
            IF(X.GT.1.D150) THEN
               B=0
```

```
            C=-EPSC2(1)
            BLX=1.D-100
            CLX=1.D-100
            EPSS=-EPSC2(1)
            EPSI=-EPSC2(1)
            GO TO 29
         END IF
         B=-EPSC2(1)/(X-(EPSCU(1)-EPSC2(1))/EPSCU(1)*H)
         C=B*(X-TETSC)
         BLX=EPSC2(1)/(X-(EPSCU(1)-EPSC2(1))/EPSCU(1)*H)**2
         CLX=(TETSC-(EPSCU(1)-EPSC2(1))/EPSCU(1)*H)*BLX
         EPSS=-EPSC2(J1)*X/(X-(EPSCU(1)-EPSC2(1))/EPSCU(1)*H)
         EPSI=-EPSC2(J1)*(X-H)/(X-(EPSCU(1)-EPSC2(1))/EPSCU(1)*H)
      END IF
   END IF
29 CONTINUE
   DO 30 J1=1,NP
      EPSP(J1)=B*ETP(J1)+C
30 CONTINUE
   NRZT=0
   MRKS=0
   MRET=0
   DO 50 J1=1,3
      DO 50 J2=1,2
         R(J1,J2)=0
50 CONTINUE
   DO 60 J1=1,NB
      EPSB=B*ETB(J1)+C
      CALL ACO(E,EPSB,FYD(J1),SIG,ET)
      DUM1=PERC(J1)*AS*ET*(BLX*ETB(J1)+CLX)
      DUM2=PERC(J1)*SIG
      NRZTI=AS*DUM2
      NRZT=NRZT+NRZTI
      MRKS=MRKS+NRZTI*ETB(J1)
      MRET=MRET-NRZTI*KSB(J1)
      R(1,1)=R(1,1)+DUM1*ETB(J1)
      R(1,2)=R(1,2)+DUM2*ETB(J1)
      R(2,1)=R(2,1)-DUM1*KSB(J1)
      R(2,2)=R(2,2)-DUM2*KSB(J1)
      R(3,1)=R(3,1)+DUM1
      R(3,2)=R(3,2)+DUM2
60 CONTINUE
   IF(ABS(EPSS-EPSI).LE.1E-10) THEN
      IF(EPSS.GE.0) GO TO 100
      DO 70 J1=1,NRC
         FCD=FC(J1)
         IF(J1.EQ.1) THEN
            NP1=1
         ELSE
            NP1=IL(J1-1)
         ENDIF
         NP2=IL(J1)-1
         CALL CENTRA(NP1,NP2,FCD,B,C,EPSS,KSP,ETP,NRZT,MRKS,MRET,
  *         BLX,CLX,R,EPSC2(J1),A1(J1),A2(J1))
70    CONTINUE
   ELSE
      IF(EPSS.GE.0.AND.EPSI.GE.0) GO TO 100
      ET01=-C/B
      DO 80 J1=1,NRC
         ET12=(-EPSC2(J1)-C)/B
         FCD=FC(J1)
```

```
         IF(J1.EQ.1) THEN
            NP1=1
         ELSE
            NP1=IL(J1-1)
         ENDIF
         NP2=IL(J1)-1
         DO 80 J2=NP1,NP2
            EPS0=EPSP(J2)
            EPS1=EPSP(J2+1)
            IF(EPS0.EQ.EPS1) GO TO 80
            IF(EPS0.GE.0.AND.EPS1.GE.0) GO TO 80
            CALL DIFER(J2,ET01,ET12,KSP,ETP,EPS0,EPS1,KS1I,ET1I,KS2I,
     *         ET2I,KS1II,ET1II,KS2II,ET2II,EPSC2(J1))
            CALL REGI(FCD,B,C,KS1I,ET1I,KS2I,ET2I,NRZT,MRKS,MRET,
     *         BLX,CLX,R,A1(J1),A2(J1))
            CALL REGII(FCD,KS1II,ET1II,KS2II,ET2II,NRZT,MRKS,MRET)
  80     CONTINUE
      ENDIF
 100  NRZ=NRZT
      MRX=MRKS*CA-MRET*SA
      MRY=MRKS*SA+MRET*CA
      RETURN
      END


      SUBROUTINE ACO(E,EPSB,FYD,SIG,ET)
      REAL*8 EPSB,FYD
      REAL*8 A,B,C,DUM1,E,EPS1,EPS2,ET,SIG
      EPS2=FYD/E
      IF(ABS(EPSB).LE.EPS2) THEN
         SIG=E*EPSB
         ET=E
      ELSE
         SIG=SIGN(FYD,EPSB)
         ET=0
      ENDIF
      RETURN
      END


      SUBROUTINE DIFER(I,ET01,ET12,KSP,ETP,EPS0,EPS1,KS1I,ET1I,KS2I,
     *   ET2I,KS1II,ET1II,KS2II,ET2II,EPSC2)
      INTEGER T01,T12
      REAL*8 ETP(*),KSP(*),KS1I,KS2I,KS1II,KS2II,KS01,KS12
      REAL*8 DET,DET01,DET12,DKSDET,DUM1,DUM2,EPS0,EPS1,ET01,ET12,ET1I,
     * ET1II,ET2I,ET2II,EPSC2
      T01=0
      T12=0
      KS1I=0
      ET1I=0
      KS2I=0
      ET2I=0
      KS1II=0
      ET1II=0
      KS2II=0
      ET2II=0
      I2=I+1
      DET=ETP(I2)-ETP(I)
      DKSDET=(KSP(I2)-KSP(I))/DET
      DUM1=ET01-ETP(I)
      DUM2=ET12-ETP(I)
```

```
      KS01=KSP(I)+DUM1*DKSDET
      KS12=KSP(I)+DUM2*DKSDET
      DET01=DUM1/DET
      DET12=DUM2/DET
      IF(DET01.GT.0.AND.DET01.LT.1) T01=1
      IF(DET12.GT.0.AND.DET12.LT.1) T12=1
      IF(EPS0.LT.EPS1) THEN
         T01=-T01
         T12=-T12
      ENDIF
      IF(T01.EQ.0.AND.T12.EQ.0) THEN
         IF(EPS0.LT.0) THEN
            IF(EPS0.GT.-EPSC2) THEN
               KS1I=KSP(I)
               ET1I=ETP(I)
               KS2I=KSP(I2)
               ET2I=ETP(I2)
            ELSE
               KS1II=KSP(I)
               ET1II=ETP(I)
               KS2II=KSP(I2)
               ET2II=ETP(I2)
            ENDIF
         ENDIF
      ELSE
         IF(T01.EQ.1) THEN
            KS1I=KS01
            ET1I=ET01
            IF(T12.EQ.1) THEN
               KS2I=KS12
               ET2I=ET12
               KS1II=KS12
               ET1II=ET12
               KS2II=KSP(I2)
               ET2II=ETP(I2)
            ELSE
               KS2I=KSP(I2)
               ET2I=ETP(I2)
            ENDIF
         ELSE
            IF(T01.EQ.-1) THEN
               KS2I=KS01
               ET2I=ET01
               IF(T12.EQ.-1) THEN
                  KS1I=KS12
                  ET1I=ET12
                  KS2II=KS12
                  ET2II=ET12
                  KS1II=KSP(I)
                  ET1II=ETP(I)
               ELSE
                  KS1I=KSP(I)
                  ET1I=ETP(I)
               ENDIF
            ELSE
               IF(T12.EQ.1) THEN
                  KS1I=KSP(I)
                  ET1I=ETP(I)
                  KS2I=KS12
                  ET2I=ET12
                  KS1II=KS12
```

```
            ET1II=ET12
            KS2II=KSP(I2)
            ET2II=ETP(I2)
         ELSE
            KS1I=KS12
            ET1I=ET12
            KS2I=KSP(I2)
            ET2I=ETP(I2)
            KS1II=KSP(I)
            ET1II=ETP(I)
            KS2II=KS12
            ET2II=ET12
         ENDIF
      ENDIF
   ENDIF
ENDIF
RETURN
END


SUBROUTINE CENTRA(NP1,NP2,FCD,B,C,EPSS,KSP,ETP,NRZT,MRKS,MRET,
*   BLX,CLX,R,EPSC2,A1,A2)
REAL*8 A1,A2
REAL*8 KSP(*),ETP(*),R(3,2),NRZT,MRKS,MRET
REAL*8 B,BLX,C,CLX,EPSS,FCD,EPSC2
IF(EPSS.GE.0) RETURN
IF(EPSS.LT.-EPSC2) GO TO 20
DO 10 J1=NP1,NP2
   J2=J1+1
   CALL REGI(FCD,B,C,KSP(J1),ETP(J1),KSP(J2),ETP(J2),NRZT,MRKS,
*      MRET,BLX,CLX,R,A1,A2)
10 CONTINUE
RETURN
20 DO 30 J1=NP1,NP2
   J2=J1+1
   CALL REGII(FCD,KSP(J1),ETP(J1),KSP(J2),ETP(J2),NRZT,MRKS,MRET)
30 CONTINUE
RETURN
END


SUBROUTINE REGI(FCD,B,C,KS1,ET1,KS2,ET2,NRZT,MRKS,MRET,BLX,CLX,R
*,A1,A2)
REAL*8 A1,A2
REAL*8 R(3,2),KS1,KS2,NRZT,MRKS,MRET
REAL*8 B,BLX,BLE,BR,C,CLX,CLE,D0,D1,D2,DET,DET1,DET2,DET3,DKS,
* DKS2,E0,E1,E2,ET1,ET2,FCD,G00,G01,G02,G03,G10,G11,G12
IF(KS1.EQ.0.AND.ET1.EQ.0.AND.KS2.EQ.0.AND.ET2.EQ.0) RETURN
BLE=2.D0*A2*B
CLE=2.D0*A2*C+A1
D0=C*A1+A2*C*C
D1=B*CLE
D2=A2*B*B
E0=CLE*CLX
E1=BLE*CLX+CLE*BLX
E2=BLE*BLX
BR=.85*FCD
DKS=KS2-KS1
DET=ET2-ET1
DET1=DET/2.
DET2=DET*DET
```

```
      DET3=DET2*DET
      DKS2=DKS*DKS
      G00=(KS1+DKS/2.)*DET
      G01=(KS1*(ET1+DET1)+DKS*(ET1/2.+DET/3.))*DET
      G02=(KS1*(ET1*(DET+ET1)+DET2/3.)+DKS*(ET1*(ET1/2+DET/1.5)+
     *   DET2/4.))*DET
      G03=(KS1*(ET1*(DET2+ET1*(1.5*DET+ET1))+DET3/4.)+DKS*(ET1*
     *   (0.75*DET2+ET1*(DET+ET1/2.))+DET3/5.))*DET
      G10=(KS1*(KS1+DKS)+DKS2/3)*DET1
      G11=(KS1*(KS1*(ET1+DET1)+DKS*(ET1+DET/1.5))+DKS2*(ET1/3.+DET/4.))*
     *   DET1
      G12=(KS1*(KS1*(ET1*(ET1+DET)+DET2/3.)+DKS*(ET1*(ET1+DET/0.75)+
     *   DET2/2.))+DKS2*(ET1*(ET1/3.+DET1)+DET2/5.))*DET1
      NRZT=NRZT+BR*(D0*G00+D1*G01+D2*G02)
      MRKS=MRKS+BR*(D0*G01+D1*G02+D2*G03)
      MRET=MRET-BR*(D0*G10+D1*G11+D2*G12)
      R(1,1)=R(1,1)+BR*(E0*G01+E1*G02+E2*G03)
      R(2,1)=R(2,1)-BR*(E0*G10+E1*G11+E2*G12)
      R(3,1)=R(3,1)+BR*(E0*G00+E1*G01+E2*G02)
      RETURN
      END


      SUBROUTINE REGII(FCD,KS1,ET1,KS2,ET2,NRZT,MRKS,MRET)
      REAL*8 KS1,KS2,NRZT,MRKS,MRET
      REAL*8 DET,DKS,ET1,ET2,FC,FCD,G00,G01,G10
      IF(KS1.EQ.0.AND.ET1.EQ.0.AND.KS2.EQ.0.AND.ET2.EQ.0) RETURN
      DKS=KS2-KS1
      DET=ET2-ET1
      G00=(KS1+DKS/2.)*DET
      G01=(KS1*(ET1+DET/2.)+DKS*(ET1/2.+DET/3.))*DET
      G10=(KS1*(KS1+DKS)+DKS*DKS/3.)*DET/2.
      FC=0.85*FCD
      NRZT=NRZT-FC*G00
      MRKS=MRKS-FC*G01
      MRET=MRET+FC*G10
      RETURN
      END
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto: NBR6118. Rio de Janeiro, 2014.
- DUMONT, N.A. & MUSSO JR., F. Dimensionamento e verificão de seções de concreto armado e protendido e verificações da estabilidade de vigas-colunas no estado limite último com o uso de microcomputadores. Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ, 1987.
- SANTOS, L.M. Cálculo de concreto armado segundo a NB1/78 e o CEB. São Paulo, LMS, 1981.
- WERNER, H. Schiefe Biegung polygonal umrandeter Stahl-beton-Qwerschnitte. Beton-und Stahlbetonbau, Berlin. v. 69, n. 4, p. 92-97, Apr. 1974.