

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

***DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO
DE SEÇÕES POLIGONAIS
DE CONCRETO ARMADO
SUBMETIDAS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA***

AMÉRICO CAMPOS FILHO

2000



SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
2 - FORMULAÇÃO BÁSICA	3
2.1 - As características geométricas da seção transversal	3
2.2 - Esforços atuantes	5
2.3 - Esforços resistentes de cálculo	6
2.3.1 - Deformação da seção no estado limite último	6
2.3.2 - Diagrama tensão-deformação para o concreto	9
2.3.3 - Diagramas tensão-deformação para o aço	10
2.3.4 - Obtenção dos esforços resistentes de cálculo	12
2.3.5 - Coordenadas das extremidades dos segmentos definidos pelas regiões 0, I e II	14
3 - DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO DE UMA SEÇÃO	16
3.1 - Conceitos fundamentais	16
3.2 - O método de Newton-Raphson para a resolução de sistemas de equações não-lineares	17
3.3 - Algoritmo para o dimensionamento de uma seção	20
3.4 - Algoritmo para a verificação de uma seção	21
4 - CÁLCULO DAS MATRIZES DE DERIVADAS PARCIAIS	23
4.1 - Generalidades	23
4.2 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à profundidade da linha neutra x	23
4.3 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à inclinação da linha neutra α	29
4.4 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à área total de armadura A_s	29
5 - EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA	30
5.1 - Exemplo de dimensionamento de uma seção	30
5.2 - Exemplo de verificação de uma seção	32
ANEXO A - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE UM DOMÍNIO PLANO ARBITRÁRIO ATRAVÉS DE INTEGRAIS DE CONTORNO	35
ANEXO B - LISTAGEM DO PROGRAMA EM FORTRAN PARA O DIMENSIONAMENTO E A VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS A SOLICITAÇÕES NORMAIS	39
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	50

1 - INTRODUÇÃO

Uma flexão é chamada composta quando atuam simultaneamente em uma seção um momento fletor e uma força normal (de tração ou compressão). Uma flexão é dita oblíqua sempre que a direção da linha neutra não pode ser determinada a priori. ✓

A Fig. 1.1 mostra seções de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua. Em (a), o plano de ação do momento fletor corta a seção transversal segundo uma reta que não coincide com o seu plano de simetria. A flexão também é oblíqua, caso (b), quando a seção não tem um eixo de simetria.

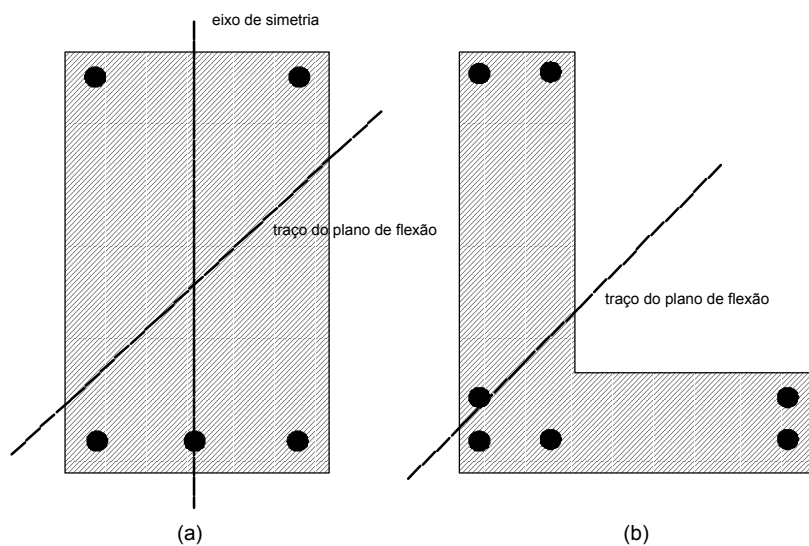


Figura 1.1 - Situações de flexão composta oblíqua

Nas estruturas de concreto armado, a flexão composta oblíqua aparece freqüentemente no cálculo de pilares. Este cálculo apresenta uma série de dificuldades, pois a direção da linha neutra não é perpendicular ao plano de solicitação. Assim, além da profundidade da linha neutra, tem-se outra incógnita que é a sua direção. ✓

Na prática, o dimensionamento é feito por via indireta, através de diagramas de interação, por tentativas ou por processos aproximados. ✓

Visando automatizar o cálculo nestas situações, apresenta-se, neste trabalho, um processo geral para o dimensionamento e a verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta. Este processo é baseado no trabalho de Dumont e Musso Jr. (1987), que foi desenvolvido a partir das idéias de Werner (1974). ✓

2 - FORMULAÇÃO BÁSICA

2.1 - As características geométricas da seção transversal

A seção de concreto é definida através de uma poligonal fechada, cujos vértices são dados em função de um sistema global de coordenadas X,Y e numerados no sentido anti-horário. Caso existam aberturas no interior da seção, os seus vértices serão numerados no sentido horário (Fig. 2.1). As barras de armadura são definidas como pontos no interior da seção de concreto, atribuindo-se a cada uma das quais uma percentagem da área total de armadura A_s . ✓

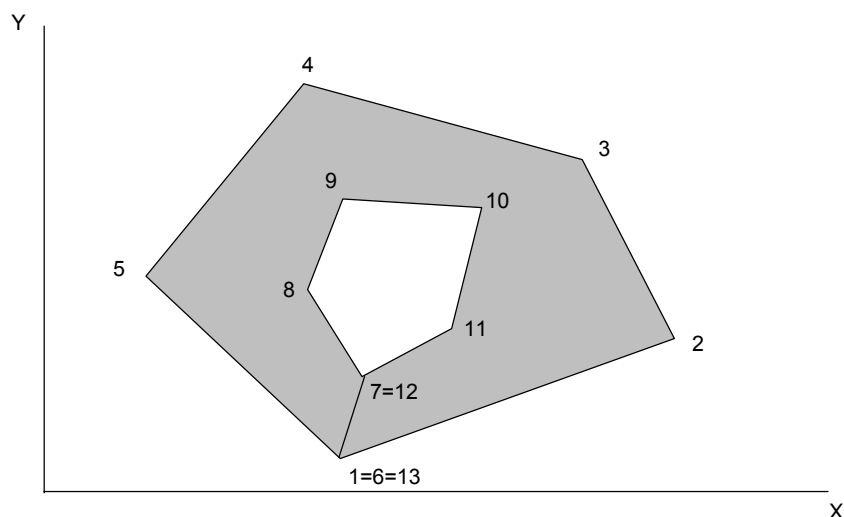


Figura 2.1 - Definição da seção de concreto

Por conveniência, os esforços atuantes na seção de concreto armado são definidos a partir de um sistema baricêntrico de coordenadas x,y , dito local. Por esta razão, torna-se necessária uma translação das coordenadas da seção, referidas ao sistema global X,Y , para o sistema local x,y . Além disto, na estimativa dos valores iniciais para o dimensionamento, são empregadas as propriedades geométricas da seção homogênea de concreto. ✓

Para isto, usando o processo de integração apresentado em anexo, calculam-se, inicialmente, as propriedades geométricas da seção em relação ao sistema global de coordenadas X,Y através das expressões:

- área da seção:

$$A = \int_A dA = \sum_{i=1}^n G_{00} \quad (2.1) \quad \checkmark$$

- momento estático em relação ao eixo X:

$$S_X = \int_A Y dA = \sum_{i=1}^n G_{01} \quad (2.2) \quad \checkmark$$

- momento estático em relação ao eixo Y:

$$S_Y = \int_A X dA = \sum_{i=1}^n G_{10} \quad (2.3) \quad \checkmark$$

- momento de inércia em relação ao eixo X:

$$J_X = \int_A Y^2 dA = \sum_{i=1}^n G_{02} \quad (2.4) \quad \checkmark$$

- momento de inércia em relação ao eixo Y:

$$J_Y = \int_A X^2 dA = \sum_{i=1}^n G_{20} \quad (2.5) \quad \checkmark$$

- produto de inércia em relação aos eixos X e Y:

$$J_{XY} = \int_A XY dA = \sum_{i=1}^n G_{11} \quad (2.6) \quad \checkmark$$

onde n é o número de segmentos da poligonal fechada que descreve a seção e G_{jk} são polinômios de integração definidos em anexo. ✓

As coordenadas X_G, Y_G do centro de gravidade da seção homogênea de concreto, referidas ao sistema global X,Y , são dadas por

$$\begin{aligned} X_G &= S_Y / A \\ Y_G &= S_X / A \end{aligned} \quad (2.7) \quad \checkmark$$

A translação das coordenadas do sistema global para o local é, então, feita através das relações

$$\begin{aligned}x &= X - X_G \\y &= Y - Y_G\end{aligned}\quad (2.8) \checkmark$$

As propriedades geométricas da seção homogênea de concreto, em relação ao sistema local de coordenadas x,y, são determinadas por: \checkmark

- momento de inércia em relação ao eixo x:

$$J_x = JX - A.Y_G^2 \quad (2.9) \checkmark$$

- momento de inércia em relação ao eixo y:

$$J_y = JY - A.X_G^2 \quad (2.10) \checkmark$$

- produto de inércia em relação aos eixos x e y:

$$J_{xy} = JXY - A.X_G.Y_G \quad (2.11) \checkmark$$

2.2 - Esforços atuantes de cálculo

Os esforços de cálculo atuantes na seção de concreto armado são os momentos fletores M_{Axd} e M_{Ayd} e o esforço normal N_{Ad} , estabelecidos segundo o sistema de coordenadas local x,y. O esforço normal será positivo quando for de tração e os momentos fletores serão positivos quando tiverem o mesmo sentido dos eixos x,y (Fig. 2.2).

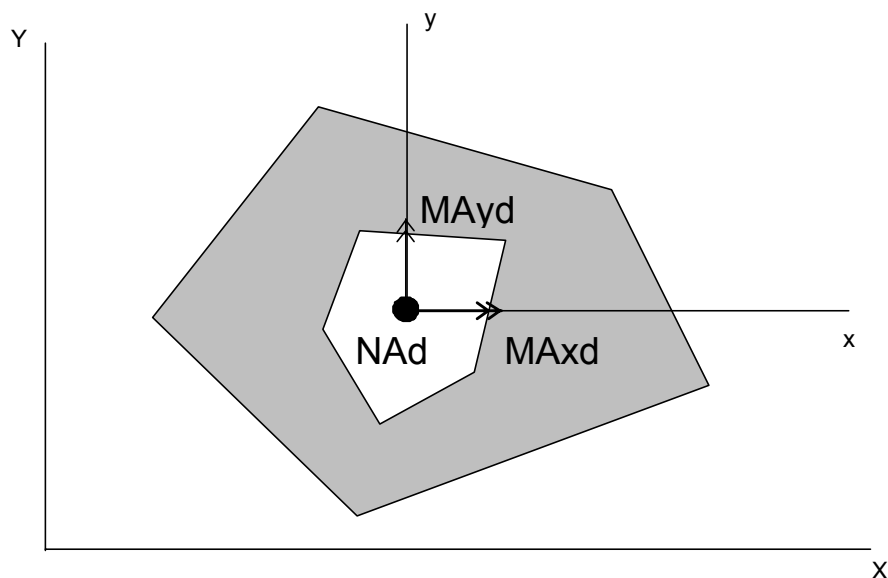


Figura 2.2 - Esforços atuantes de cálculo

2.3 - Esforços resistentes de cálculo

2.3.1 - Deformação da seção no estado limite último

Os esforços resistentes de cálculo (últimos) MR_{xd} , MR_{yd} e NR_d seguem a mesma convenção de sinais adotadas para os esforços atuantes. Definidas a geometria da seção de concreto armado (coordenadas dos vértices da poligonal fechada, coordenadas das barras e suas percentagens em relação à área total de armadura) e as resistências características do aço e do concreto (f_{yk} e f_{ck}) podem-se determinar os esforços resistentes da seção para um dado estado limite último de deformação da seção. ✓

Um estado de deformação da seção fica caracterizado pela inclinação α da linha neutra em relação ao eixo x e pelas deformações das fibras extremas superior e inferior da seção (ϵ_s e ϵ_l).

A inclinação α da linha neutra é definida como o ângulo de giro necessário para que o eixo dos x fique paralelo à linha neutra e o semi-eixo positivo dos y aponte no sentido da fibra mais comprimida da seção. Fica, assim, estabelecido um terceiro sistema de coordenadas ξ, η , com origem no centro de gravidade da seção homogênea de concreto (Fig. 2.3). ✓

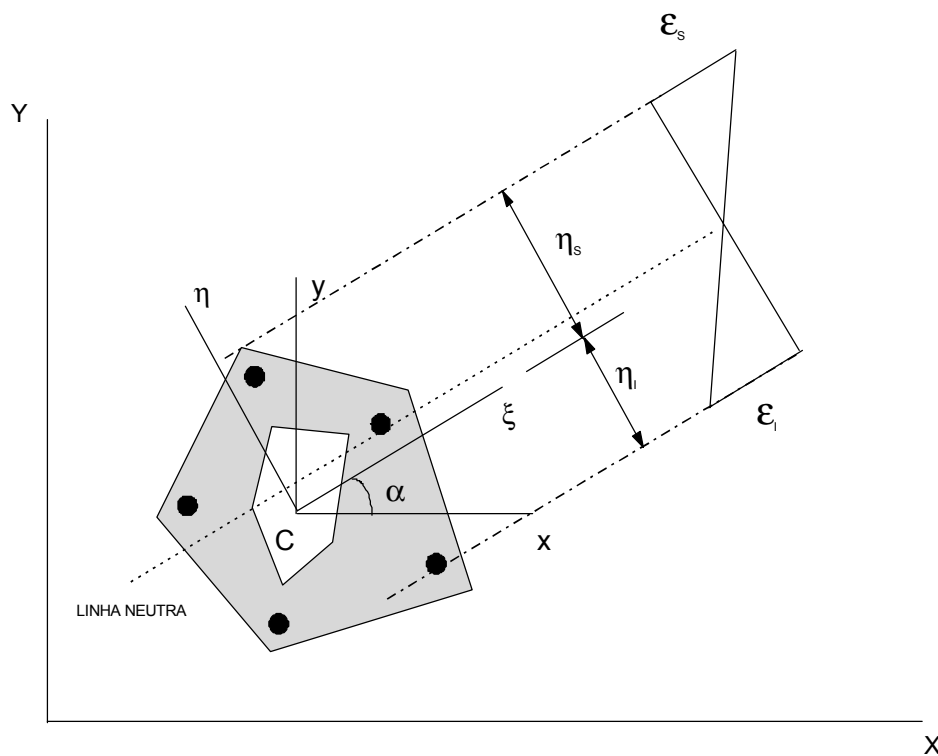


Figura 2.3 - Sistema de coordenadas ξ, η ✓

A norma brasileira para o "Projeto e execução de obras de concreto armado", NBR-6118 (1982), estabelece as seguintes hipóteses sobre as deformações de uma seção de concreto armado no estado limite último:

- as seções transversais permanecem planas; ✓
- para o encurtamento de ruptura do concreto, nas seções não inteiramente comprimidas, considera-se o valor convencional de 3,5‰ (domínios 3 e 4a da Fig. 2.4); nas seções inteiramente comprimidas (domínio 5 da Fig. 2.4), admite-se que o encurtamento da borda mais comprimida, na ocasião da ruptura, varie de 3,5‰ a 2‰, mantendo-se inalterada e igual a 2‰ a deformação a 3/7 da altura total da seção, a partir da borda mais comprimida; ✓
- o alongamento máximo permitido ao longo da armadura de tração é de 10‰ (domínios 1 e 2 da Fig. 2.4), a fim de definir a deformação plástica excessiva. ✓

Estas hipóteses introduzem uma relação de dependência entre ϵ_s e ϵ_l , e o estado de deformações da seção fica determinado a partir de apenas duas variáveis independentes. As duas variáveis, que serão utilizadas para definir este estado de deformação, são a inclinação e a profundidade da linha neutra (Fig. 2.5). A profundidade da linha neutra é determinada, conforme a NBR-6118, por uma coordenada representada pela letra x e medida paralelamente ao eixo η . A coordenada x tem origem na fibra de maior encurtamento da seção (ou menor alongamento) e tem o sentido contrário ao de η . A Tab. 2.1 apresenta as expressões para ϵ_s e ϵ_l em função de x

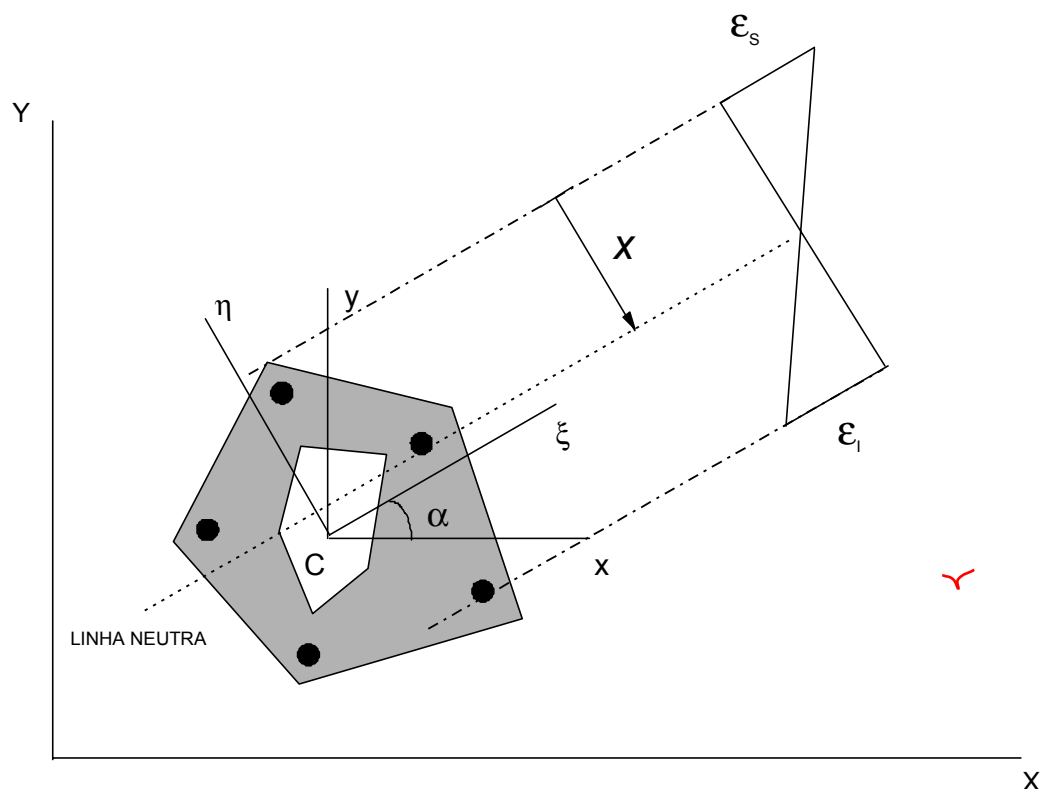


Figura 2.5 - Profundidade da linha neutra - coordenada x

Tabela 2.1 - Relação entre os valores da profundidade da linha neutra x e as deformações ϵ_s e ϵ_l

DOMÍNIOS	x	$\epsilon_s (\text{‰})$	$\epsilon_l (\text{‰})$
1 e 2	$-\infty < x \leq 0,259 d$	$-10 x / (d-x)$	10
3 e 4	$0,259 d \leq x \leq d$	-3,5	$3,5 (d-x) / x$
4a	$d \leq x \leq h$	-3,5	0
5	$h \leq x < +\infty$	$-2 x / (x-3/7h)$	$-2 (x-h) / (x-3/7h)$

Conhecidos os valores de x e α , a deformação $\epsilon(\xi, \eta)$ de um ponto da seção é obtida por

$$\epsilon(\xi, \eta) = b\eta + c \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} b &= \frac{\epsilon_s - \epsilon_l}{\eta_s - \eta_l} \\ c &= \epsilon_s - b \cdot \eta_s \end{aligned} \quad (2.13)$$

sendo b a curvatura da seção e c o valor da deformação na fibra correspondente ao centro de gravidade da seção homogênea de concreto. η_s e η_l são as ordenadas dos pontos extremos superior e inferior da seção. Os pontos extremos, no caso da zona tracionada, correspondem a barras de armadura.

2.3.2 - Diagrama tensão-deformação para o concreto

A NBR-6118 (1982) diz que no estado limite último a distribuição das tensões do concreto na seção se faz de acordo com o diagrama parábola-retângulo da Fig. 2.6. A resistência à tração do concreto é desprezada. Na região comprimida, supõe-se que o diagrama tensão-deformação seja composto de uma parábola do segundo grau que passa pela origem e tem vértice no ponto de abscissa 2‰ e ordenada $0,85 f_{cd}$ e $3,5\text{‰}$ tangente à parábola e paralela ao eixo das abscissas (Fig. 2.6).

A resistência de cálculo do concreto à compressão, f_{cd} , é determinada por

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.14)$$

onde f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão e γ_c é o coeficiente de minoração da resistência do concreto, tomado, em geral, com o valor de 1,4.

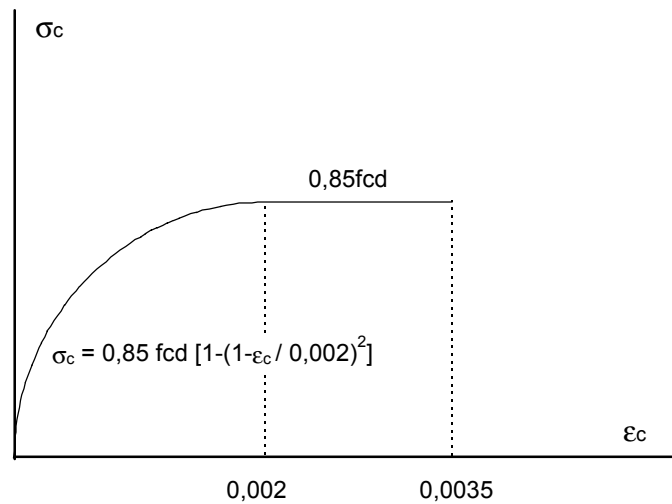


Figura 2.6 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

Assim, as tensões no concreto são dadas por

$$\begin{aligned}\sigma_c(\varepsilon) &= 0 \quad \text{para } \varepsilon \geq 0 \\ \sigma_c(\varepsilon) &= \sigma_{cd}(250000\varepsilon^2 + 1000\varepsilon) \quad \text{para } -0,002 \leq \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_c(\varepsilon) &= -\sigma_{cd} \quad \text{para } -0,0035 \leq \varepsilon \leq -0,002\end{aligned} \quad (2.15) \quad \checkmark$$

sendo

$$\sigma_{cd} = 0,85f_{cd} \quad (2.16)$$

Substituindo a relação (2.12) nas expressões (2.15), resulta

$$\begin{aligned}\sigma_c(\xi, \eta) &= 0 \quad \text{para } \varepsilon \geq 0 \\ \sigma_c(\xi, \eta) &= \sigma_{cd}(D_0 + D_1 \cdot \eta + D_2 \cdot \eta^2) \quad \text{para } -0,002 \leq \varepsilon \leq 0 \\ \sigma_c(\xi, \eta) &= -\sigma_{cd} \quad \text{para } -0,0035 \leq \varepsilon \leq -0,002\end{aligned} \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned}D_0 &= 1000c + 250000c^2 \\ D_1 &= 1000b + 500000bc \\ D_2 &= 250000b^2\end{aligned} \quad (2.18) \quad \checkmark$$

2.3.3 - Diagramas tensão-deformação para o aço

Tanto para os aços da classe A, como para os aços da classe B, empregam-se os diagramas tensão-deformação de cálculo propostos pela NBR-6118 (1982). \checkmark

A resistência de cálculo do aço, f_{yd} , é dada por

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (2.19)$$

onde f_{yk} é a resistência característica do aço e γ_s é o coeficiente de minoração da resistência do aço. ✓

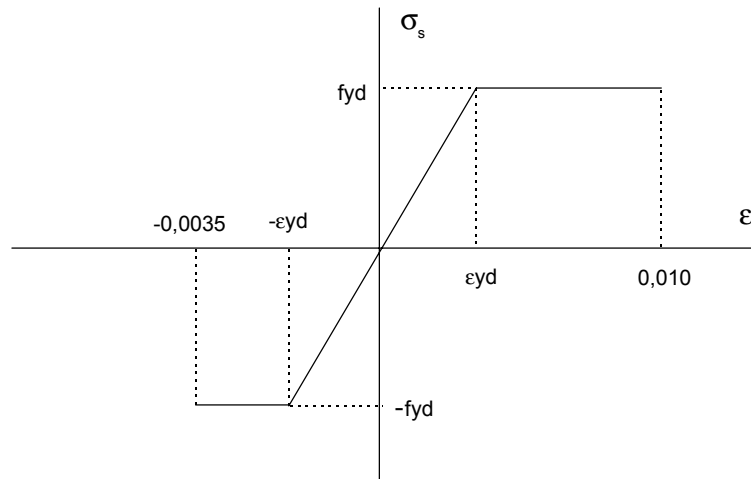


Figura 2.7 - Diagrama tensão-deformação do aço classe A ✓

O módulo de deformação longitudinal do aço, E_s , é igual a 210000 MPa. O diagrama tensão-deformação do aço da classe A (Fig. 2.7) é dado por

$$\begin{aligned} \sigma_s(\varepsilon) &= -f_{yd} \quad \text{para} \quad -0,0035 \leq \varepsilon \leq -\varepsilon_{yd} \\ \sigma_s(\varepsilon) &= E_s \varepsilon \quad \text{para} \quad -\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ \sigma_s(\varepsilon) &= f_{yd} \quad \text{para} \quad \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq 0,010 \end{aligned} \quad (2.20) \quad \checkmark$$

onde ε_{yd} é a deformação específica de escoamento de cálculo do aço, dada por

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (2.21)$$

O diagrama tensão-deformação do aço da classe B (Fig. 2.8) é dado por

$$\begin{aligned} \sigma_s(\varepsilon) &= E_s \varepsilon \quad \text{para} \quad |\varepsilon| \leq -\varepsilon_1 \\ \sigma_s(\varepsilon) &= \text{senal}(\varepsilon) \left[\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \right] \quad \text{para} \quad \varepsilon_1 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} \\ \sigma_s(\varepsilon) &= \text{senal}(\varepsilon) f_{yd} \quad \text{para} \quad \varepsilon_{yd} \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_u \end{aligned} \quad (2.22) \quad \checkmark$$

onde

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= 0,7 \frac{f_{yd}}{E_s} \\ \epsilon_{yd} &= 0,002 + \frac{f_{yd}}{E_s} \\ \epsilon_u &= \begin{cases} 0,010 & \text{na tração} \\ -0,0035 & \text{na compressão} \end{cases}\end{aligned}\quad (2.23)$$

e

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{45 f_{yd}^2} \\ B &= \frac{1}{E_s} - \frac{14}{450 f_{yd}} \\ C &= \frac{49}{4500} - |\epsilon|\end{aligned}\quad (2.24)$$

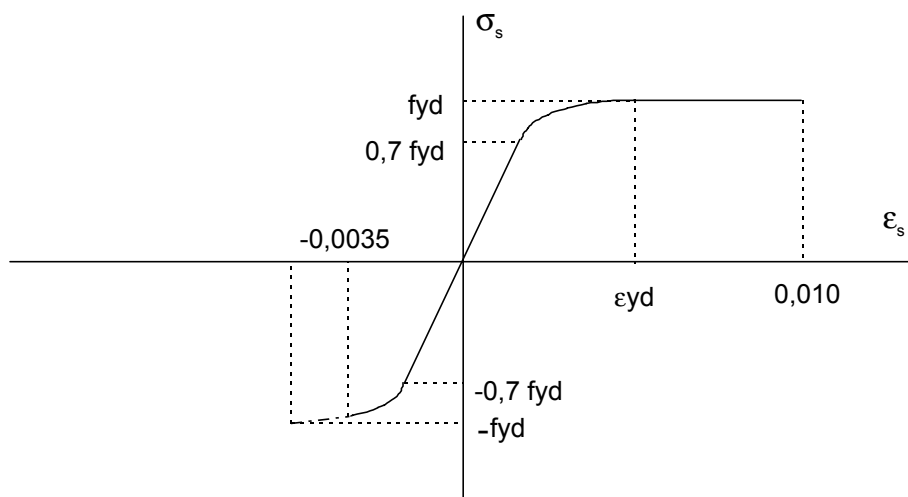


Figura 2.8 - Diagrama tensão-deformação do aço classe B

2.3.4 - Obtenção dos esforços resistentes de cálculo

Os esforços resistentes de cálculo M_{Rxd} , M_{Ryd} e N_{Rd} são obtidos por integração das tensões sobre a seção para uma dada condição de deformação (x , α) e área de armadura (A_s). A determinação dos esforços é feita inicialmente para o sistema de eixos ξ, η e, após, para o sistema x, y através das expressões

$$\begin{aligned}M_{Rxd} &= M_{R\xi} \cos \alpha - M_{R\eta} \sin \alpha \\ M_{Ryd} &= M_{R\xi} \sin \alpha + M_{R\eta} \cos \alpha\end{aligned}\quad (2.25)$$

Naturalmente, o esforço normal resistente é o mesmo para qualquer um dos sistemas de coordenadas. Utilizando o sistema ξ, η , os esforços resistentes são obtidos por

$$\begin{aligned}
MR_{\xi} &= \int_{Ac} \sigma_c(\varepsilon) \cdot \eta \, dA + \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_j) \cdot \eta_j \\
MR_{\eta} &= - \int_{Ac} \sigma_c(\varepsilon) \cdot \xi \, dA - \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_j) \cdot \xi_j \\
NR &= \int_{Ac} \sigma_c(\varepsilon) \, dA + \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_j)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde ρ_j é a percentagem da armadura total A_s , correspondente à j -ésima barra, m é o número total de barras e A_c é a área de concreto comprimida. ✓

A parcela dos esforços resistentes correspondentes ao concreto é integrada separadamente para a região I (área de concreto A_{c1} submetida a tensões variando parabolicamente) e para a região II (área de concreto A_{c2} submetida a tensões uniformes), conforme a Fig. 2.9.

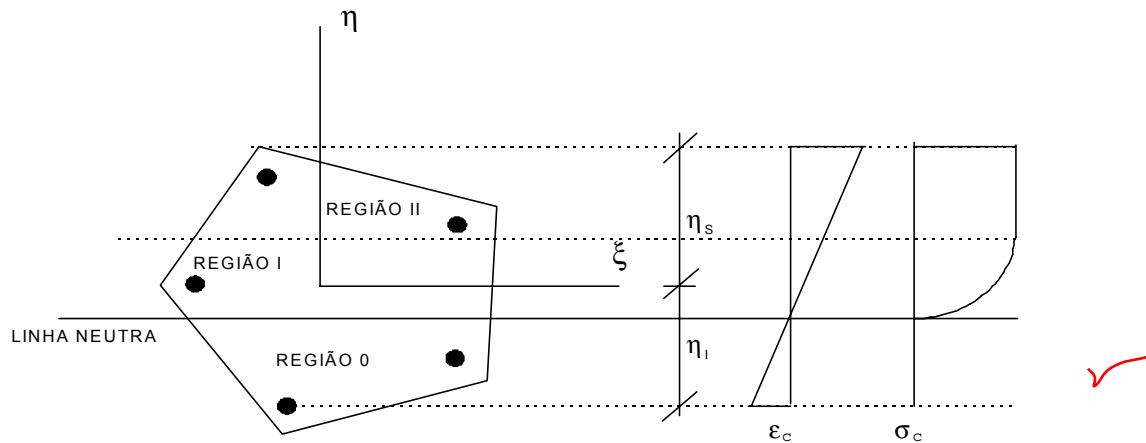


Figura 2.9 - Regiões para integração no concreto

Substituindo nas integrais correspondentes ao concreto das expressões (2.26), as tensões dadas pelas equações (2.17), obtêm-se os esforços resistentes correspondentes à região I:

$$\begin{aligned}
MR_{\xi 1} &= \sigma_{cd} \int_{Ac1} (D_0 \cdot \eta + D_1 \cdot \eta^2 + D_2 \cdot \eta^3) \, dA \\
MR_{\eta 1} &= - \sigma_{cd} \int_{Ac1} (D_0 \cdot \xi + D_1 \cdot \xi \cdot \eta + D_2 \cdot \xi \cdot \eta^2) \, dA \\
NR_1 &= \sigma_{cd} \int_{Ac1} (D_0 + D_1 \cdot \eta + D_2 \cdot \eta^2) \, dA
\end{aligned} \tag{2.27}$$

e à região II:

$$\begin{aligned} MR_{\xi 2} &= -\sigma_{cd} \int_{Ac2} \eta dA \\ MR_{\eta 2} &= \sigma_{cd} \int_{Ac2} \xi dA \\ NR_2 &= -\sigma_{cd} \int_{Ac2} dA \end{aligned} \quad (2.28) \quad \checkmark$$

Integrando as expressões (2.27) e (2.28), conforme apresentado no anexo, obtêm-se as expressões para os esforços resistentes na região I:

$$\begin{aligned} MR_{\xi 1} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{01} + D_1.G_{02} + D_2.G_{03}) \\ MR_{\eta 1} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{10} + D_1.G_{11} + D_2.G_{12}) \\ NR_1 &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{00} + D_1.G_{01} + D_2.G_{02}) \end{aligned} \quad (2.29) \quad \checkmark$$

e na região II:

$$\begin{aligned} MR_{\xi 2} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{01} \\ MR_{\eta 2} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{10} \\ NR_2 &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{00} \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde n1 e n2 são os números de segmentos de reta, que compõem a poligonal fechada que descreve a seção, encontrados, respectivamente, nas regiões I e II. \checkmark

2.3.5 - Coordenadas das extremidades dos segmentos definidos pelas regiões 0, I e II

As coordenadas dos vértices da seção, dadas segundo o sistema local x,y são transformadas para o sistema de coordenadas ξ, η através das relações

$$\begin{aligned} \xi &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\ \eta &= -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.31) \quad \checkmark$$

Um segmento da poligonal fechada, que define a seção, pode se situar inteiramente dentro de uma das regiões 0, I ou II ou atravessar mais de uma delas. Neste último caso, torna-se preciso subdividir o segmento para efetuar as integrações necessárias. Isto pode ser feito automaticamente através do procedimento descrito a seguir. \checkmark

Para um determinado segmento da poligonal, calculam-se os valores das deformações ϵ_i e ϵ_{i+1} em seus vértices, de coordenadas (ξ_i, η_i) e (ξ_{i+1}, η_{i+1}) , respectivamente, através da expressão (2.12). \checkmark

Se dois vértices apresentam a mesma deformação e , portanto, a mesma ordenada η ($\Delta\eta=0$), não há contribuição deste segmento no cálculo dos esforços resistentes, já que neste caso todos polinômios de integração serão identicamente nulos. Por esta razão, é dispensável a integração dos segmentos de fechamento entre as regiões 0 e I e entre as regiões I e II, uma vez que estes segmentos, pela própria formulação, apresentam ordenadas iguais. ✓

Se dois vértices apresentam deformações diferentes, ou seja, ordenadas distintas ($\Delta\eta\neq 0$), pode haver ou não transição entre as regiões. ✓

Calculam-se, então, as ordenadas correspondentes às transições entre as regiões 0 e I e entre as regiões I e II pelas expressões ✓

$$\begin{aligned}\eta_{01} &= -\frac{c}{b} \\ \eta_{12} &= \frac{-0,002 - c}{b}\end{aligned}\quad (2.32)$$

Caso η_{01} e/ou η_{12} estiverem entre η_i e η_{i+1} ocorrem as transições correspondentes. Nesta situação, calculam-se as abscissas ξ_{01} e/ou ξ_{12} pelas relações

$$\begin{aligned}\xi_{01} &= \xi_i + (\eta_{01} - \eta_i) \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} \\ \xi_{12} &= \xi_i + (\eta_{12} - \eta_i) \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\eta_{i+1} - \eta_i}\end{aligned}\quad (2.33) \quad \checkmark$$

As coordenadas das extremidades dos segmentos são definidas pelas coordenadas dos vértices i e $i+1$ da poligonal da seção e pelas coordenadas dos pontos de transição entre as regiões 0 e I e/ou as regiões I e II. ✓

Não havendo transição, o segmento da poligonal está inteiramente contido em uma das regiões e as coordenadas para integração são as coordenadas dos vértices i e $i+1$. ✓

3 - DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO DE UMA SEÇÃO

3.1 - Conceitos fundamentais

O dimensionamento de uma dada seção de concreto armado (geometria e distribuição relativa de armadura conhecidas) consiste em estabelecer a área de armadura que corresponda a uma situação de equivalência entre os esforços atuantes e os esforços resistentes. Por outro lado, a verificação de uma seção de concreto armado busca determinar um fator de proporcionalidade λ entre os esforços atuantes e os esforços resistentes para uma dada área de armadura. ✓

Tanto o dimensionamento, como a verificação, serão realizados para o estado limite último da seção, conforme as prescrições da NBR-6118 (1982), apresentadas no capítulo 2. ✓

O processo de dimensionamento e verificação envolve a resolução de um sistema de três equações não-lineares com três incógnitas, da seguinte forma geral

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (3.1) \quad \checkmark$$

onde f , g , h são funções das variáveis x , y , z .

Este sistema de equações deve ser resolvido por um processo iterativo, através de um dos métodos de resolução de sistemas de equações não-lineares existentes. Neste trabalho, o procedimento utilizado é o do método de Newton-Raphson, conforme apresentado por Dumont e Musso Jr. (1987). ✓

3.2 - O método de Newton-Raphson para a resolução de sistemas de equações não-lineares

O método de Newton-Raphson pode ser empregado para resolver uma equação não-linear do tipo

$$f(x) = 0 \quad (3.2)$$

onde f é uma função qualquer. Encontrar a solução desta equação não-linear significa determinar o valor de x que satisfaça a condição expressa pela Eq.(3.2).

Sabe-se que uma função de uma variável pode ser calculada por uma série de Taylor da forma

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n(x) \quad (3.3)$$

Truncando-se esta série a partir do terceiro termo, pode-se escrever que o valor de $f(x)$ é dado aproximadamente por

$$f(x) \cong f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) \quad (3.4)$$

Pela Eq.(3.2), pode-se escrever, então, que

$$f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) \cong 0 \quad (3.5)$$

ou, rearranjando os termos

$$x \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 \quad (3.6)$$

onde x_1 é uma primeira aproximação do valor de x . Pode-se determinar valores para x , na precisão desejada, reutilizando-se a Eq.(3.6), tantas vezes quantas forem necessárias

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &\vdots \\ x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

O valor de x_i estará suficientemente próximo da solução procurada, quando

$$x_i \cong x_{i-1} \quad \text{ou} \quad f(x_i) \cong 0 \quad (3.8) \checkmark$$

O método de Newton-Raphson pode ser também aplicado para encontrar a solução de um sistema de duas equações não-lineares

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad (3.9) \checkmark$$

As fórmulas de Taylor, para estas funções de duas variáveis, podem ser escritas como

$$\begin{cases} f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + R_{f2}(x, y) \\ g(x, y) = g(a, b) + g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) + R_{g2}(x, y) \end{cases} \quad (3.10)$$

onde

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad g_x = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y} \quad (3.11)$$

Pode-se escrever que

$$\begin{cases} f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ g(x, y) \cong g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases} \quad (3.12)$$

Da Eq.(3.9) vem que

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \cong 0 \\ g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \cong 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

ou

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \cong -f(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \cong -g(x_0, y_0) \end{cases} \quad (3.14)$$

Na forma matricial, a Eq.(3.14) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ -g \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde

$$\Delta x = x - x_0 \quad e \quad \Delta y = y - y_0 \quad (3.16)$$

A convergência é obtida para Δx , Δy suficientemente pequenos ou

$$f(x_i, y_i) \cong 0 \quad e \quad g(x_i, y_i) \cong 0 \quad (3.17)$$

Para a solução de um sistema de três equações não-lineares com três incógnitas da forma

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (3.18) \quad \checkmark$$

que é a situação que aparece nos problemas de dimensionamento e de verificação, abordados neste trabalho, também pode-se recorrer ao método de Newton-Raphson. Assim, de forma análoga às situações anteriores, a solução do problema não-linear é alcançada pela solução de uma série de sistemas de equações lineares do tipo

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ -g \\ -h \end{bmatrix} \quad (3.19) \quad \checkmark$$

ou, abreviadamente,

$$[K(\{u\}_i)] \{\Delta u\}_i = \{\Delta p\}_i \quad (3.20)$$

No problema de dimensionamento, o sistema de equações a resolver é

$$\begin{cases} f(x, \alpha, A_s) = MR_{xd}(x, \alpha, A_s) - MA_{xd} = 0 \\ g(x, \alpha, A_s) = MR_{yd}(x, \alpha, A_s) - MA_{yd} = 0 \\ h(x, \alpha, A_s) = NR_d(x, \alpha, A_s) - NA_d = 0 \end{cases} \quad (3.21) \quad \checkmark$$

onde MA_{xd}, MA_{yd}, NA_d são os esforços atuantes de cálculo na seção; MR_{xd}, MR_{yd}, NR_d são os esforços resistentes de cálculo da seção, determinados em função dos três parâmetros x , α , A_s (profundidade da linha neutra, inclinação da linha neutra, área total da armadura, respectivamente), conforme foi mostrado no capítulo 2. ✓

A matriz $[K(\{u\}_i)]$ é composta pelas derivadas parciais dos esforços resistentes em relação aos parâmetros x , α , A_s , já que os esforços atuantes são constantes. Assim, o sistema de três equações lineares a ser resolvido em cada iteração é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial MR_{xd}}{\partial x} & \frac{\partial MR_{xd}}{\partial \alpha} & \frac{\partial MR_{xd}}{\partial A_s} \\ \frac{\partial MR_{yd}}{\partial x} & \frac{\partial MR_{yd}}{\partial \alpha} & \frac{\partial MR_{yd}}{\partial A_s} \\ \frac{\partial NR_d}{\partial x} & \frac{\partial NR_d}{\partial \alpha} & \frac{\partial NR_d}{\partial A_s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta A_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - MR_{xd} \\ MA_{yd} - MR_{yd} \\ NA_d - NR_d \end{Bmatrix} \quad (3.22) \quad \checkmark$$

Já na verificação, a armadura total A_s é conhecida e o sistema de equações a ser resolvido é do tipo

$$\begin{cases} f(x, \alpha, \lambda) = \lambda \cdot MR_{xd}(x, \alpha) - MA_{xd} = 0 \\ g(x, \alpha, \lambda) = \lambda \cdot MR_{yd}(x, \alpha) - MA_{yd} = 0 \\ h(x, \alpha, \lambda) = \lambda \cdot NR_d(x, \alpha) - NA_d = 0 \end{cases} \quad (3.23) \quad \checkmark$$

onde MA_{xd}, MA_{yd}, NA_d são os esforços atuantes de cálculo na seção; MR_{xd}, MR_{yd}, NR_d são os esforços resistentes de cálculo da seção, determinados em função dos dois parâmetros x , α (profundidade e inclinação da linha neutra); λ é o fator de proporcionalidade entre os esforços atuantes e resistentes. O sistema de equações lineares, que deve ser resolvido em cada iteração, passa a ser

$$\begin{bmatrix} \lambda \frac{\partial MR_{xd}}{\partial x} & \lambda \frac{\partial MR_{xd}}{\partial \alpha} & MR_{xd} \\ \lambda \frac{\partial MR_{yd}}{\partial x} & \lambda \frac{\partial MR_{yd}}{\partial \alpha} & MR_{yd} \\ \lambda \frac{\partial NR_d}{\partial x} & \lambda \frac{\partial NR_d}{\partial \alpha} & NR_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - \lambda \cdot MR_{xd} \\ MA_{yd} - \lambda \cdot MR_{yd} \\ NA_d - \lambda \cdot NR_d \end{Bmatrix} \quad (3.24) \quad \checkmark$$

onde

$$\lambda = \frac{MA_{xd}}{MR_{xd}} = \frac{MA_{yd}}{MR_{yd}} = \frac{NA_d}{NR_d} \quad (3.25)$$

3.3 - Algoritmo para o dimensionamento de uma seção

Para o dimensionamento de uma seção de concreto armado, deve-se definir:

- a geometria da seção (coordenadas dos vértices da poligonal fechada; coordenadas das barras e suas respectivas percentagens em relação à área total); ✓
- as propriedades do concreto e do aço; ✓
- os esforços atuantes. ✓

Conhecidos estes valores, o procedimento para o dimensionamento da seção tem os seguintes passos

(a) arbitram-se valores para x , α e A_s ;

(b) determinam-se MR_{xd} , MR_{yd} e NR_d e a matriz de derivadas parciais $[K]$;

(c) calcula-se o vetor de desequilíbrio

$$\{\Delta p\}_i = \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - MR_{xd} \\ MA_{yd} - MR_{yd} \\ NA_d - NR_d \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

(d) verifica-se a convergência por

$$\left[\frac{\Delta M_x^2 + \Delta M_y^2 + \Delta N^2}{MA_{xd}^2 + MA_{yd}^2 + NA_d^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \text{tolerância} \quad (3.27) \quad \checkmark$$

(e) caso a condição acima seja satisfeita, vai-se para o item (i), senão segue-se para (f); ✓

(f) resolve-se o sistema de equações lineares

$$\{\Delta u\}_i = [K]^{-1} \{\Delta p\}_i \quad (3.28)$$

(g) determinam-se x , α e A_s

$$\{u\}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ A_s \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ A_s \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta A_s \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

(h) retorna-se ao item (b);

(i) final do dimensionamento: valores de x , α e A_s conhecidos. ✓

O método de Newton-Raphson tem, em geral, uma convergência muito rápida. Entretanto, dependendo dos valores iniciais arbitrados, o processo pode divergir. Por isso, é importante ter-se no programa computacional um controle, que reinicie o processo, com novos valores arbitrados, no caso de haver divergência. ✓

3.4 - Algoritmo para a verificação de uma seção

Na verificação de uma seção de concreto armado, os valores conhecidos inicialmente são:

- a geometria da seção (coordenadas dos vértices da poligonal fechada; coordenadas das barras e suas respectivas percentagens em relação à área total);
- as propriedades do concreto e do aço;
- a área total de armadura;
- os esforços atuantes.

O objetivo da verificação é determinar o fator de proporcionalidade λ entre os esforços atuantes e resistentes.

A partir dos dados do problema, o procedimento para a verificação da seção tem as seguintes etapas

(a) arbitram-se valores para x , α e λ ; ✓

(b) determinam-se MR_{xd} , MR_{yd} e NR_d e a matriz de derivadas parciais $[K]$; ✓

(c) calcula-se o vetor de desequilíbrio ✓

$$\{\Delta p\}_i = \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_{xd} - \lambda \cdot MR_{xd} \\ MA_{yd} - \lambda \cdot MR_{yd} \\ NA_d - \lambda \cdot NR_d \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

(d) verifica-se a convergência por

$$\left[\frac{\Delta M_x^2 + \Delta M_y^2 + \Delta N^2}{MA_{xd}^2 + MA_{yd}^2 + NA_d^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \text{tolerância} \quad (3.31) \quad \checkmark$$

(e) caso a condição acima seja satisfeita, vai-se para o item (i), senão segue-se para (f);

(f) resolve-se o sistema de equações lineares

$$\{\Delta u\}_i = [K]^{-1} \{\Delta p\}_i \quad (3.32) \quad \checkmark$$

(g) determinam-se x , α e λ

$$\{u\}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ \lambda \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ \alpha \\ \lambda \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \alpha \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} \quad (3.33) \quad \checkmark$$

(h) Retorna-se ao item (b);

(i) Final da verificação: valores de x , α e λ conhecidos.

Encontrar um valor de λ superior a 1, indica que a seção não tem a segurança exigida pela norma.



4 - CÁLCULO DAS MATRIZES DE DERIVADAS PARCIAIS

4.1 - Generalidades

Conforme foi apresentado no capítulo anterior, o procedimento de dimensionamento ou de verificação de uma seção de concreto armado a solicitações normais, utilizando o método de Newton-Raphson, envolve o cálculo de uma matriz de derivadas parciais dos esforços resistentes. Neste capítulo, mostra-se o cálculo destas derivadas parciais dos esforços resistentes em relação a x , α , A_s (profundidade e inclinação da linha neutra e área total da armadura).

4.2 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à profundidade da linha neutra x

No capítulo 2, já havia sido visto que

$$\begin{aligned}MR_{xd} &= MR_{\xi} \cos \alpha - MR_{\eta} \sin \alpha \\MR_{yd} &= MR_{\xi} \sin \alpha + MR_{\eta} \cos \alpha\end{aligned}\tag{4.1}$$

Derivando-se estas expressões, em relação à profundidade da linha neutra x , vem que

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_{xd}}{\partial x} &= \frac{\partial MR_{\xi}}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial MR_{\eta}}{\partial x} \sin \alpha \\ \frac{\partial MR_{yd}}{\partial x} &= \frac{\partial MR_{\xi}}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial MR_{\eta}}{\partial x} \cos \alpha\end{aligned}\tag{4.2}$$

Como os esforços resistentes MR_ξ , MR_η e NR são funções de b e c (curvatura e deformação no centróide da seção), pode-se escrever

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_\xi}{\partial x} &= \frac{\partial MR_\xi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial MR_\xi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial MR_\eta}{\partial x} &= \frac{\partial MR_\eta}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial MR_\eta}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial NR}{\partial x} &= \frac{\partial NR}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial NR}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x}\end{aligned}\quad (4.3) \quad \checkmark$$

Mas b e c , por sua vez, são funções das deformações extremas da seção ϵ_s e ϵ_l , então

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{\partial b}{\partial \epsilon_s} \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \epsilon_l} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial c}{\partial \epsilon_s} \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial \epsilon_l} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial x}\end{aligned}\quad (4.4) \quad \checkmark$$

No capítulo 2, tinha-se, ainda, que

$$\begin{aligned}b &= \frac{\epsilon_s - \epsilon_l}{\eta_s - \eta_l} \\ c &= \epsilon_s - b \cdot \eta_s\end{aligned}\quad (4.5)$$

e, portanto, suas derivadas em relação a ϵ_s e ϵ_l são

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial \epsilon_s} &= \frac{1}{\eta_s - \eta_l} \quad ; \quad \frac{\partial b}{\partial \epsilon_l} = -\frac{1}{\eta_s - \eta_l} \\ \frac{\partial c}{\partial \epsilon_s} &= 1 - \frac{\eta_s}{\eta_s - \eta_l} \quad ; \quad \frac{\partial c}{\partial \epsilon_l} = \frac{\eta_s}{\eta_s - \eta_l}\end{aligned}\quad (4.6) \quad \checkmark$$

As derivadas de ϵ_s e ϵ_l em relação a x são dadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Derivadas de ϵ_s e ϵ_l em relação a x

DOMÍNIO	ϵ_s (‰)	ϵ_l (‰)	$\partial \epsilon_s / \partial x$ (‰)	$\partial \epsilon_l / \partial x$ (‰)
1 e 2	$-10 x / (d-x)$	10	$-10 d / (d-x)^2$	0
3, 4 e 4a	-3,5	$3,5 (d-x) / x$	0	$-3,5 d / x^2$
5	$-2 x / (x-3/7h)$	$-2 (x-h) / (x-3/7h)$	$6/7 h / (x-3/7h)^2$	$8/7 h / (x-3/7h)^2$

Com isto têm-se as expressões das derivadas $\partial b/\partial x$ e $\partial c/\partial x$ definidas

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{1}{\eta_s - \eta_l} \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial x} \right) = \lambda_1 \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} - \eta_s \frac{\partial \varepsilon_s / \partial x - \partial \varepsilon_l / \partial x}{\eta_s - \eta_l} = \lambda_2\end{aligned}\quad (4.7)$$

As derivadas dos esforços resistentes, em relação a b e c, que aparecem nas Eqs.(4.3), são calculadas separadamente para as regiões I e II de concreto e para a armadura. Conforme as Eqs.(2.29) e (2.30), a contribuição do concreto para os esforços resistentes é dada na região I por

$$\begin{aligned}MR_{\xi 1} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{01} + D_1.G_{02} + D_2.G_{03}) \\ MR_{\eta 1} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{10} + D_1.G_{11} + D_2.G_{12}) \\ NR_1 &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (D_0.G_{00} + D_1.G_{01} + D_2.G_{02})\end{aligned}\quad (4.8)$$

e na região II por

$$\begin{aligned}MR_{\xi 2} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{01} \\ MR_{\eta 2} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{10} \\ NR_2 &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n2} G_{00}\end{aligned}\quad (4.9)$$

onde n1 e n2 são os números de segmentos de reta, que compõem a poligonal fechada que descreve a seção, encontrados, respectivamente, nas regiões I e II.

Derivando-se as Eqs.(4.8) e (4.9) em relação a b e c obtêm-se

na região I:

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial b} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial b} G_{01} + \frac{\partial D_1}{\partial b} G_{02} + \frac{\partial D_2}{\partial b} G_{03} \right) \\ \frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial b} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial b} G_{10} + \frac{\partial D_1}{\partial b} G_{11} + \frac{\partial D_2}{\partial b} G_{12} \right) \\ \frac{\partial NR_1}{\partial b} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial b} G_{00} + \frac{\partial D_1}{\partial b} G_{01} + \frac{\partial D_2}{\partial b} G_{02} \right)\end{aligned}\quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial c} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial c} G_{01} + \frac{\partial D_1}{\partial c} G_{02} + \frac{\partial D_2}{\partial c} G_{03} \right) \\
\frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial c} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial c} G_{10} + \frac{\partial D_1}{\partial c} G_{11} + \frac{\partial D_2}{\partial c} G_{12} \right) \\
\frac{\partial NR_1}{\partial c} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} \left(\frac{\partial D_0}{\partial c} G_{00} + \frac{\partial D_1}{\partial c} G_{01} + \frac{\partial D_2}{\partial c} G_{02} \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

na região II:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial MR_{\xi 2}}{\partial b} &= \frac{\partial MR_{\eta 2}}{\partial b} = \frac{\partial NR_2}{\partial b} = 0 \\
\frac{\partial MR_{\xi 2}}{\partial c} &= \frac{\partial MR_{\eta 2}}{\partial c} = \frac{\partial NR_2}{\partial c} = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Segundo as Eqs.(2.18), tem-se que

$$\begin{aligned}
D_0 &= 1000c + 250000c^2 \\
D_1 &= 1000b + 500000bc \\
D_2 &= 250000b^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Derivando-se as Eqs.(4.13) em relação a b e c, obtêm-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D_0}{\partial b} &= \frac{\partial D_2}{\partial c} = 0 \\
\frac{\partial D_1}{\partial b} &= \frac{\partial D_0}{\partial c} = 1000 + 500000c = \kappa_1 \\
\frac{\partial D_2}{\partial b} &= \frac{\partial D_1}{\partial c} = 500000b = \kappa_2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Desta forma, as Eqs.(4.10) e (4.11) podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial b} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\kappa_1 G_{01} + \kappa_2 G_{03}) \\
\frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial b} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\kappa_1 G_{11} + \kappa_2 G_{12}) \\
\frac{\partial NR_1}{\partial b} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\kappa_1 G_{01} + \kappa_2 G_{02})
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial c} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\kappa_1 G_{01} + \kappa_2 G_{02}) \\
\frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial c} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\kappa_1 G_{10} + \kappa_2 G_{11}) \\
\frac{\partial NR_1}{\partial c} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\kappa_1 G_{00} + \kappa_2 G_{01})
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Substituindo as Eqs.(4.7), (4.15) e (4.16) nas Eqs.(4.3) vêm

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_{\xi 1}}{\partial x} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\Psi_0 G_{01} + \Psi_1 G_{02} + \Psi_2 G_{03}) \\ \frac{\partial MR_{\eta 1}}{\partial x} &= -\sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\Psi_0 G_{10} + \Psi_1 G_{11} + \Psi_2 G_{12}) \\ \frac{\partial NR_1}{\partial x} &= \sigma_{cd} \sum_{i=1}^{n1} (\Psi_0 G_{00} + \Psi_1 G_{01} + \Psi_2 G_{02})\end{aligned}\quad (4.17)$$

onde

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \lambda_{2.} \kappa_1 \\ \Psi_1 &= \lambda_{1.} \kappa_1 + \lambda_{2.} \kappa_2 \\ \Psi_2 &= \lambda_{1.} \kappa_2\end{aligned}\quad (4.18)$$

A contribuição da armadura para os esforços resistentes, conforme as Eqs.(2.26), é dada por

$$\begin{aligned}MR_{\xi} &= \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) . \eta_j \\ MR_{\eta} &= - \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) . \xi_j \\ NR &= \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j)\end{aligned}\quad (4.19)$$

onde m é o número de barras de armadura da seção.

Derivando as Eqs.(4.19) em relação a b e c, obtêm-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_{\xi}}{\partial b} &= \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial b} . \eta_j \\ \frac{\partial MR_{\eta}}{\partial b} &= - \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial b} . \xi_j \\ \frac{\partial NR}{\partial b} &= \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial b}\end{aligned}\quad (4.20)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_{\xi}}{\partial c} &= \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial c} . \eta_j \\ \frac{\partial MR_{\eta}}{\partial c} &= - \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial c} . \xi_j \\ \frac{\partial NR}{\partial c} &= \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \frac{\partial \sigma(\varepsilon_j)}{\partial c}\end{aligned}\quad (4.21)$$

As derivadas da tensão nas barras de armadura em relação a b e c podem ser calculadas pelas expressões

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma(\epsilon_j)}{\partial b} &= \frac{\partial \sigma(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_j} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial b} = E_T(\epsilon_j) \cdot \eta_j \\ \frac{\partial \sigma(\epsilon_j)}{\partial c} &= \frac{\partial \sigma(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_j} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial c} = E_T(\epsilon_j)\end{aligned}\quad (4.22)$$

onde $E_T(\epsilon_j)$ é o módulo de elasticidade longitudinal tangente do aço, correspondente à deformação ϵ_j .

Conforme os diagramas tensão-deformação para o aço, apresentados no capítulo 2, o módulo de elasticidade longitudinal tangente pode ser calculado pelas seguintes expressões:

- para os aços da classe A:

$$E_T(\epsilon) = \begin{cases} E_s & \text{para } |\epsilon| < \epsilon_{yd} \\ 0 & \text{para } |\epsilon| \geq \epsilon_{yd} \end{cases} \quad (4.23)$$

- para os aços da classe B:

$$E_T(\epsilon) = \begin{cases} E_s & \text{para } |\epsilon| < \epsilon_1 \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}} & \text{para } \epsilon_1 < |\epsilon| < \epsilon_{yd} \\ 0 & \text{para } |\epsilon| \geq \epsilon_{yd} \end{cases} \quad (4.24)$$


As parcelas correspondentes à armadura das derivadas dos esforços resistentes, em relação à profundidade da linha neutra x , são, então, dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_\xi}{\partial x} &= \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot E_T(\epsilon_j) \cdot \eta_j \cdot (\lambda_1 \cdot \eta_j + \lambda_2) \\ \frac{\partial MR_\eta}{\partial x} &= - \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot E_T(\epsilon_j) \cdot \xi_j \cdot (\lambda_1 \cdot \eta_j + \lambda_2) \\ \frac{\partial NR}{\partial x} &= \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot E_T(\epsilon_j) \cdot (\lambda_1 \cdot \eta_j + \lambda_2)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Finalmente, as derivadas dos esforços resistentes em relação à profundidade da linha neutra x são obtidas somando-se as parcelas apresentadas nas Eqs.(4.17) e (4.25) e fazendo-se a rotação para os eixos x , y usando as Eqs.(4.2).

4.3 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à inclinação da linha neutra α


Derivando-se as Eqs.(4.1), em relação à inclinação da linha neutra α , obtêm-se diretamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_{xd}}{\partial \alpha} &= -MR_{\xi}.\sin \alpha - MR_{\eta}.\cos \alpha = -MR_{yd} \\ \frac{\partial MR_{yd}}{\partial \alpha} &= MR_{\xi}.\cos \alpha - MR_{\eta}.\sin \alpha = MR_{xd} \\ \frac{\partial NR_d}{\partial \alpha} &= 0\end{aligned}\tag{4.26}$$



4.4 - Derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à área total de armadura A_s

As derivadas dos esforços resistentes em relação à área total de armadura A_s são obtidas a partir das parcelas de esforços resistentes devidas à armadura. As parcelas referentes ao concreto não contribuem para estas derivadas uma vez que são independentes de A_s .

Assim, as parcelas dos esforços resistentes devidas à armadura são expressas por

$$\begin{aligned}MR_{xd} &= \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) . y_j \\ MR_{yd} &= -\sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j) . x_j \\ NR_d &= \sum_{j=1}^m \rho_j . A_s . \sigma(\varepsilon_j)\end{aligned}\tag{4.27}$$


Derivando-se estas expressões em relação à A_s , obtêm-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial MR_{xd}}{\partial A_s} &= \sum_{j=1}^m \rho_j . \sigma(\varepsilon_j) . y_j \\ \frac{\partial MR_{yd}}{\partial A_s} &= -\sum_{j=1}^m \rho_j . \sigma(\varepsilon_j) . x_j \\ \frac{\partial NR_d}{\partial A_s} &= \sum_{j=1}^m \rho_j . \sigma(\varepsilon_j)\end{aligned}\tag{4.28}$$


5 - EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA



Neste capítulo, apresentam-se exemplos de utilização do programa para o dimensionamento e a verificação de seções de concreto armado submetidas a solicitações normais.

5.1 - Exemplo de dimensionamento de uma seção

No primeiro exemplo, é feito o dimensionamento da seção vazada, apresentada na Fig.5.1. A seção está submetida a uma solicitação de flexo-compressão oblíqua.

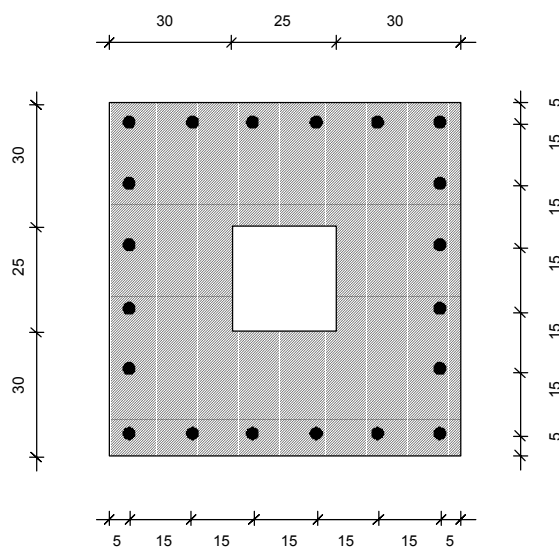


Figura 5.1 - Seção de concreto armado a ser dimensionada

O arquivo de entrada de dados utilizado é o seguinte

```

.....1          valor indicando problema de dimensionamento
.....1.4.....1.15      valores de  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ 
.....11          número de vértices da poligonal fechada
.....0.....0          uma linha para cada vértice
.....85.....0          da poligonal fechada com suas coordenadas
.....85.....85
.....0.....85
.....0.....0
.....30.....30
.....30.....55
.....55.....55
.....55.....30
.....30.....30
.....0.....0
.....1          número de tipos de concreto
.....2.....11          fck e no. de vértices do 1o. tipo de concreto
.....20.....21000      número de barras e Es
.....5.....5.....50.....0.05.....A          uma linha para
.....20.....5.....50.....0.05.....A          cada barra de
.....35.....5.....50.....0.05.....A          armadura, com:
.....50.....5.....50.....0.05.....A          - coordenada xj
.....65.....5.....50.....0.05.....A          - coordenada yj
.....80.....5.....50.....0.05.....A          - fyk
.....5.....20.....50.....0.05.....A          -  $\rho_j$ 
.....5.....35.....50.....0.05.....A          - classe do aço
.....5.....50.....50.....0.05.....A
.....5.....65.....50.....0.05.....A
.....5.....80.....50.....0.05.....A
.....80.....20.....50.....0.05.....A
.....80.....35.....50.....0.05.....A
.....80.....50.....50.....0.05.....A
.....80.....65.....50.....0.05.....A
.....80.....80.....50.....0.05.....A
.....20.....80.....50.....0.05.....A
.....35.....80.....50.....0.05.....A
.....50.....80.....50.....0.05.....A
.....65.....80.....50.....0.05.....A
.....- .2E+3.....- .5E+5......5E+5          Nad, Maxd, MAyd

```

As unidades dos dados fornecidos devem ser coerentes. No exemplo. foram usados kN como unidade de força e cm como unidade de comprimento. Os valores, em cada linha, são posicionados de dez em dez posições. Cada símbolo “.” indica um espaço em branco. O texto em itálico, colocado ao final de cada linha, é apenas comentário e não deve aparecer no arquivo de entrada de dados.



Ao rodar o programa, aparecerá, na tela do computador, a saída de resultados da forma seguinte

```

*****
**
**      DIMENSIONAMENTO DE SECAO DE CONCRETO ARMADO A SOLICITACOES NORMAIS      **
**
*****
**
**                                     MX          MY          N          **
**  ESFORCOS ATUANTES DE CALCULO:    -.5000E+05    .5000E+05    -.2000E+03    **
**  ESFORCOS RESISTENTES DE CALCULO:  -.5000E+05    .5000E+05    -.2000E+03    **
**
*****
**
**      AREA TOTAL DE ARMADURA:                                .3729E+02      **
**      DEFORMACAO NA FIBRA SUPERIOR DA SECAO:                -.3500E-02      **
**      DEFORMACAO NA FIBRA INFERIOR DA SECAO:                .7946E-02      **
**      INCLINACAO DA LINHA NEUTRA:                            -.4500E+02      **
**
*****
*****

```

5.2 - Exemplo de verificação de uma seção

O segundo exemplo corresponde à verificação da seção apresentada na Fig.5.2. A seção está submetida a uma solicitação de flexão simples normal.

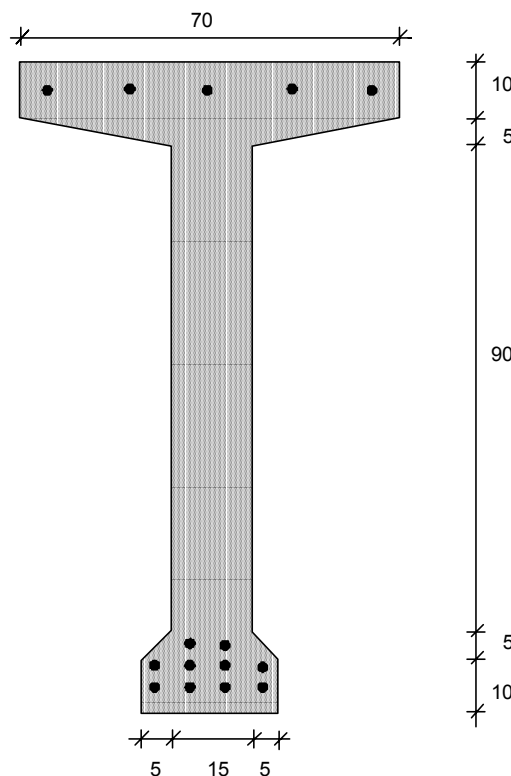


Figura 5.2 - Seção de concreto armado a ser verificada

O arquivo de entrada de dados utilizado é o seguinte

```

.....2          valor indicando problema de verificação
.....1.4.....1.15      valores de  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ 
.....13          número de vértices da poligonal fechada
.....22.5.....0      uma linha para cada vértice
.....47.5.....0      da poligonal fechada com suas coordenadas
.....47.5.....10
.....42.5.....15
.....42.5.....95
.....70.....110
.....70.....120
.....0.....120
.....0.....110
.....27.5.....95
.....27.5.....15
.....22.5.....10
.....22.5.....0
.....1          número de tipos de concreto
.....2.....13      fck e no. de vértices do 1o. tipo de concreto
.....15.....21000.....30      número de barras, Es e As
.....27.5.....5.....50..0.066667.....A      uma linha para
.....32.5.....5.....50..0.066667.....A      cada barra de
.....37.5.....5.....50..0.066667.....A      armadura, com:
.....42.5.....5.....50..0.066667.....A      - coordenada xj
.....27.5.....8.....50..0.066667.....A      - coordenada yj
.....32.5.....8.....50..0.066667.....A      - fyk
.....37.5.....8.....50..0.066667.....A      -  $\rho_j$ 
.....42.5.....8.....50..0.066667.....A      - classe do aço
.....32.5.....11.....50..0.066667.....A
.....37.5.....11.....50..0.066667.....A
.....5.....115.....50..0.066667.....A
.....20.....115.....50..0.066667.....A
.....35.....115.....50..0.066667.....A
.....50.....115.....50..0.066667.....A
.....65.....115.....50..0.066667.....A
.....0.....-1.E5.....0      Nad, Maxd, MAyd

```

Da mesma forma, que no dimensionamento, as unidades dos dados fornecidos devem ser coerentes entre si. Aqui também, foram usados kN como unidade de força e cm como unidade de comprimento. Os valores, em cada linha, são posicionados de dez em dez posições. Cada símbolo “.” representa um espaço em branco. O texto em itálico, colocado ao final de cada linha, é apenas comentário e não deve aparecer no arquivo de entrada de dados.

✓

A saída do programa terá a forma seguinte

```
*****
*****
**
**      VERIFICACAO DE SECAO DE CONCRETO ARMADO A SOLICITACOES NORMAIS      **
**
*****
**
**              MX              MY              N              **
**  ESFORCOS ATUANTES DE CALCULO:  -.1000E+06   .0000E+00   .0000E+00   **
**  ESFORCOS RESISTENTES DE CALCULO: -.9346E+05   .6762E-12   .5458E-05   **
**
*****
**
**      RESERVA:                      .9346E+00                      **
**      DEFORMACAO NA FIBRA SUPERIOR DA SECAO:  -.1445E-02          **
**      DEFORMACAO NA FIBRA INFERIOR DA SECAO:   .1000E-01          **
**      INCLINACAO DA LINHA NEUTRA:              .1184E-13          **
**
*****
*****
```

A “reserva” indica que os esforços atuantes devem ser multiplicados por 0,9346 para que a seção tenha a margem de segurança exigida pela norma. Portanto, no exemplo, a seção está um pouco aquém da segurança requerida pela norma.



ANEXO A- INTEGRAÇÃO NUMÉRICA SOBRE UM DOMÍNIO PLANO ARBITRÁRIO ATRAVÉS DE INTEGRAIS DE CONTORNO

O procedimento apresentado, neste trabalho, para o dimensionamento e a verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta envolve a cálculo de uma série de integrais de superfície. Estas integrações são efetuadas transformando-se as integrais de superfície sobre um domínio plano A em integrais de linha ao longo de um contorno C (Fig. A.1). Isto é feito pela aplicação do teorema de Green no plano, conforme sugerido por Werner (1974) e apresentado por Dumont e Musso Jr. (1987)

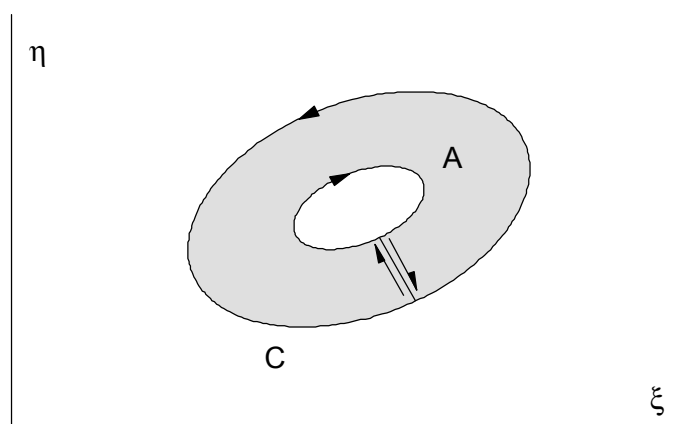


Figura A.1 - Domínio plano A com contorno C

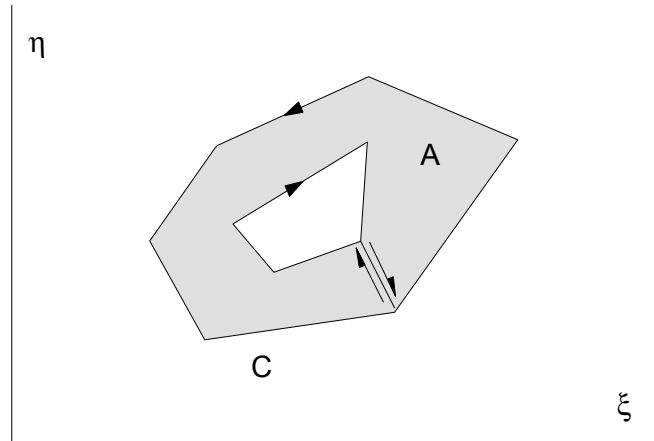


Figura A.2 - Domínio plano A com contorno poligonal

Deste modo, a integral de superfície de um termo genérico de um polinômio, referido a um sistema de coordenadas ξ, η , é transformada em uma integral de contorno por

$$\int_A \xi^k \eta^m dA = \oint_C \frac{\xi^{k+1} \eta^m}{k+1} d\eta \quad (\text{A.1})$$

Se o domínio plano A é limitado por uma poligonal fechada (Fig. A.2), a integral da expressão (A.1) pode ser substituída por um somatório. Assim,

$$\int_A \xi^k \eta^m dA = \sum_{i=1}^n G_{km} \quad (\text{A.2})$$

com

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \xi^{k+1} \eta^m d\eta \quad (\text{A.3})$$

sendo n o número de segmentos da poligonal e η_i e η_{i+1} as ordenadas do seu i-ésimo segmento.

As coordenadas ξ e η podem ser definidas por

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_i + w \\ \xi &= \xi_i + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} w \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde w varia de 0 a $\Delta \eta$, conforme a Fig. A.3.

✓

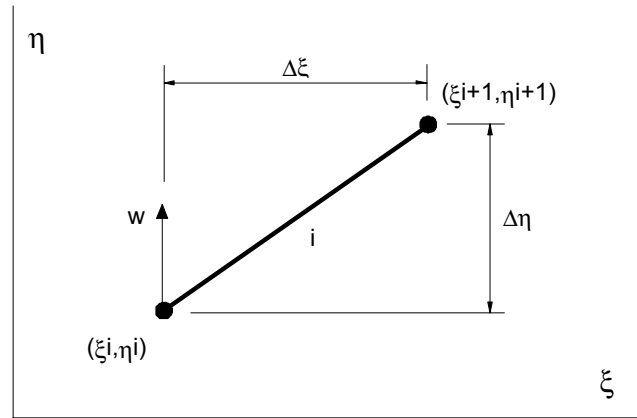


Figura A.3 - Definição da variável w

Substituindo as expressões (A.4) em (A.3), resulta

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_0^{\Delta\eta} \left[\xi_i + \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} w \right]^{k+1} [\eta_i + w]^m dw \quad (\text{A.5})$$

sendo

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \xi_{i+1} - \xi_i \\ \Delta\eta &= \eta_{i+1} - \eta_i \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Com a expressão (A.5), pode-se obter os polinômios

$$G_{00} = \left(\xi_i + \frac{\Delta\xi}{2} \right) \Delta\eta \quad (\text{A.7})$$

$$G_{01} = \left[\xi_i \left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left(\frac{\eta_i}{2} + \frac{\Delta\eta}{3} \right) \right] \Delta\eta \quad (\text{A.8})$$

$$G_{02} = \left\{ \xi_i \left[\eta_i (\Delta\eta + \eta_i) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right] + \Delta\xi \left[\eta_i \left(\frac{\eta_i}{2} + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{4} \right] \right\} \Delta\eta \quad (\text{A.9})$$

$$G_{03} = \left\{ \xi_i \left[\eta_i \left(\Delta\eta^2 + \eta_i \left(\frac{3\Delta\eta}{2} + \eta_i \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{4} \right] + \Delta\xi \left[\eta_i \left(\frac{3\Delta\eta^2}{4} + \eta_i \left(\Delta\eta + \frac{\eta_i}{2} \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{5} \right] \right\} \Delta\eta \quad (\text{A.10})$$

$$G_{10} = \left[\xi_i (\xi_i + \Delta\xi) + \frac{\Delta\xi^2}{3} \right] \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{A.11})$$

✓

$$G_{11} = \left\{ \xi_i \left[\xi_i \left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left(\eta_i + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) \right] + \Delta\xi^2 \left[\frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{4} \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$G_{12} = \left\{ \xi_i \left[\xi_i \left(\eta_i (\eta_i + \Delta\eta) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right) + \Delta\xi \left(\eta_i \left(\eta_i + \frac{4\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{2} \right) \right] + \Delta\xi^2 \left[\eta_i \left(\frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{5} \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{A.13})$$

$$G_{20} = \left\{ \frac{\Delta\xi^3}{4} + \xi_i \left[\Delta\xi^2 + \xi_i \left(\frac{3\Delta\xi}{2} + \xi_i \right) \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{3} \quad (\text{A.14})$$

Os polinômios dados pelas Eqs.(A.7) até (A.14) são os empregados no desenvolvimento deste trabalho.



ANEXO B - LISTAGEM DO PROGRAMA EM FORTRAN PARA O DIMENSIONAMENTO E A VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS A SOLICITAÇÕES NORMAIS

Apresenta-se, a seguir, a listagem do programa, apresentado neste trabalho, para o dimensionamento e a verificação de seções de concreto armado submetidas a solicitações normais.

```
PROGRAM VERDIM
COMMON TA, E, FYD, FCD, NP, XP, YP, XG, YG, LX, LY, AREA, JOX, JOY, JOXY,
* NA, MAX, MAY, NB, XB, YB, PERC, NRC, IL(5), GS, GC, AS
REAL*8 E, FYD(100), FCD(5), XP(100), YP(100), XG, YG, AREA, XB(100),
* YB(100), PERC(100)
REAL*8 JOX, JOY, JOXY, LX, LY, NA, MAX, MAY
CHARACTER TA*1(100), ARQ*12
REAL*8 JX, JY, JXY, AS, DX, DY, GC, GS, SOX, SOY, SX, SY, XMAX, XMIN, YMAX, YMIN
INTEGER OP
10 WRITE(*,11)
11 FORMAT(////, '>>>>> QUAL O NOME DO ARQUIVO DE DADOS ?')
READ(*, '(A12)', ERR=10) ARQ
IF(ARQ.EQ.' ') STOP
IR=1
IW=0
OPEN(UNIT=1, FILE=ARQ, STATUS='OLD', FORM='FORMATTED',
*ACCESS='SEQUENTIAL')
READ(IR,21) OP
READ(IR,20) GC, GS
READ(IR,21) NP
DO 30 J1=1, NP
    READ(IR,20) XP(J1), YP(J1)
30 CONTINUE
READ(IR,21) NRC
DO 40 J1=1, NRC
    READ(IR,24) FCD(J1), IL(J1)
    FCD(J1)=FCD(J1)/GC
40 CONTINUE
```

```

      READ (IR, 22) NB, E, AS
      DO 50 J1=1, NB
        READ (IR, 23) XB (J1), YB (J1), FYD (J1), PERC (J1), TA (J1)
        FYD (J1) = FYD (J1) / GS
50    CONTINUE
      READ (IR, 20) NA, MAX, MAY
      XMAX = -1.E11
      YMAX = -1.E11
      XMIN = 1E11
      YMIN = 1E11
      DO 60 J1=1, NP
        IF (XP (J1) .GT. XMAX) XMAX = XP (J1)
        IF (XP (J1) .LT. XMIN) XMIN = XP (J1)
        IF (YP (J1) .GT. YMAX) YMAX = YP (J1)
        IF (YP (J1) .LT. YMIN) YMIN = YP (J1)
60    CONTINUE
      LX = XMAX - XMIN
      LY = YMAX - YMIN
      NP1 = NP - 1
      AREA = 0
      SX = 0
      SY = 0
      JX = 0
      JY = 0
      JXY = 0
      DO 70 J1=1, NP1
        DX = XP (J1+1) - XP (J1)
        DY = YP (J1+1) - YP (J1)
        AREA = AREA + (- (DY/2. + YP (J1)) * DX)
        SX = SX + (- (DY*DY/3. + YP (J1) * (DY + YP (J1))) * DX/2.)
        SY = SY + (DX*DX/3. + XP (J1) * (DX + XP (J1))) * DY/2.
        JX = JX + (- (DY**3/4. + YP (J1) * (DY*DY + YP (J1) * (1.5*DY + YP (J1)
*          ))) * DX/3.)
        JY = JY + (DX**3/4. + XP (J1) * (DX*DX + XP (J1) * (1.5*DX + XP (J1)
*          )) * DY/3.
        JXY = JXY + (- (XP (J1) * (DY*DY/3. + YP (J1) * (DY + YP (J1))) + DX * (DY
*          *DY/4. + YP (J1) * (2.*DY/3. + YP (J1)/2.))) * DX/2.)
70    CONTINUE
      XG = SY / AREA
      YG = SX / AREA
      SOX = SX - YG * AREA
      SOY = SY - XG * AREA
      JOX = JX - AREA * YG * YG
      JOY = JY - AREA * XG * XG
      JOXY = JXY - XG * YG * AREA
      DO 80 J1=1, NP
        XP (J1) = XP (J1) - XG
        YP (J1) = YP (J1) - YG
80    CONTINUE
      DO 90 J1=1, NB
        XB (J1) = XB (J1) - XG
        YB (J1) = YB (J1) - YG
90    CONTINUE
      CALL AJUSTL (OP)
      CLOSE (1)
      GO TO 10
20    FORMAT (8F10.0)
21    FORMAT (8I10)
22    FORMAT (I10, 7F10.0)
23    FORMAT (4F10.0, 9X, A1)
24    FORMAT (F10.0, 9I10)
      END

      SUBROUTINE AJUSTL (OP)

```

```

INTEGER OP
REAL*8 NR,MRX,MRY,LAM
REAL*8 R(3,2),RT(3,3),DP(3)
COMMON TA,E,FYD,FCD,NP,XP,YP,XG,YG,LX,LY,AREA,JOX,JOY,JOXY,
*   NA,MAX,MAY,NB,XB,YB,PERC,NRC,IL(5),GS,GC,AS
REAL*8 E,FYD(100),FCD(5),XP(100),YP(100),XG,YG,AREA,XB(100),
*   YB(100),PERC(100)
CHARACTER*1 TA(100)
REAL*8 JOX,JOY,JOXY,LX,LY,NA,MAX,MAY
REAL*8 ALFA0,ALPH,ALPG,AS1,AS2,AS3,AS,B,BAS,C,CA,CA0,CAR,X,
*   EPSI,EPSS,FS,GC,GS,PJX,PJY,SA,SA0,SS,TOL,TOLE,PI,PI2,GRAUS
DATA PI,PI2,GRAUS/3.1415926535897932385,1.5707963267948966192,
*   57.29577951308232/
K=0
IW=0
TOLE=1.D-8
BAS=MAX*MAX+MAY*MAY+NA*NA
LAM=1.D0
ALFA0=0
IF (JOX.EQ.JOY.AND.ABS (JOXY) .GT.1E-5) THEN
    ALFA0=PI2
ELSE
    IF (JOX.NE.JOY) ALFA0=ATAN (-2*JOXY/(JOX-JOY))/2.
ENDIF
CA0=COS (ALFA0)
SA0=SIN (ALFA0)
CA0=CA0*CA0
SA0=SA0*SA0
SS=JOXY*SIN (2*ALFA0)
PJX=JOX*CA0+JOY*SA0-SS
PJY=JOY*CA0+JOX*SA0+SS
ALPH=0
IF (MAX.EQ.0) THEN
    ALPH=-DSIGN (PI2,MAY)
ELSE
    ALPH=ATAN (MAY*PJX/(MAX*PJY))
    IF (MAX.GT.0) ALPH=ALPH+PI
ENDIF
ALFA0=ALPH+ALFA0
UU=0.5D0
300 UU=(PI+UU)**5
UU=UU-INT(UU)
K0=0
X=(LX+LY)*UU
IF (OP.EQ.1) THEN
    AS1=ABS (MAX)/(0.4*LY*FYD(1))
    AS2=ABS (MAY)/(0.4*LX*FYD(1))
    IF (NA.GT.0) THEN
        AS3=NA/FYD(1)
    ELSE
        AS3=DMAX1 (0D0,(NA-FCD(1)*AREA)/FYD(1))
    ENDIF
    AS=AS1+AS2+AS3
ENDIF
ALPH=ALFA0
890 CALL ESFOR (TA,E,FYD,FCD,NP,XP,YP,NB,XB,YB,PERC,X,ALPH,AS,B,C,
*EPSS,EPSI,NR,MRX,MRY,R,NRC,IL)
DP(1)=MAX-LAM*MRX
DP(2)=MAY-LAM*MRY
DP(3)=NA-LAM*NR
TOL=SQRT ((DP(1)**2+DP(2)**2+DP(3)**2)/BAS)
IF (TOL.LE.TOLE) GO TO 900
K=K+1
K0=K0+1
IF (K0.GT.50) GO TO 300

```

```

CA=COS (ALPH)
SA=SIN (ALPH)
RT (1,1)=LAM* (R (1,1)*CA-R (2,1)*SA)
RT (1,2)=LAM* (-MRY)
RT (2,1)=LAM* (R (1,1)*SA+R (2,1)*CA)
RT (2,2)=LAM*MRX
RT (3,1)=LAM*R (3,1)
RT (3,2)=0
IF (OP.EQ.2) THEN
    RT (1,3)=MRX
    RT (2,3)=MRY
    RT (3,3)=NR
ELSE
    RT (1,3)=R (1,2)*CA-R (2,2)*SA
    RT (2,3)=R (1,2)*SA+R (2,2)*CA
    RT (3,3)=R (3,2)
ENDIF
CALL PIVO (RT,DP,IVER)
IF (IVER.EQ.1) GO TO 300
X=X+DP (1)
IF (OP.EQ.2) THEN
    LAM=LAM+DP (3)
ELSE
    AS1=AS+DP (3)
    IF (AS1.LT.0.01) THEN
        AS=AS/2.
    ELSE
        IF (AS1.GT.2*AS) THEN
            AS=2*AS
        ELSE
            AS=AS1
        ENDIF
    ENDIF
ENDIF
ENDIF
ALPH=ALPH+DP (2)
IF (ABS (ALPH).GT.2*PI) ALPH=SIGN (MOD (ALPH,2*PI),ALPH)
IF (K.LT.1000) GO TO 890
WRITE (*,*) ">>> NAO CONVERGIU"
900 WRITE (IW,500)
WRITE (IW,500)
WRITE (IW,501)
IF (OP.EQ.2) THEN
    WRITE (IW,503)
ELSE
    WRITE (IW,502)
ENDIF
WRITE (IW,501)
WRITE (IW,500)
WRITE (IW,501)
WRITE (IW,504)
WRITE (IW,505) MAX,MAY,NA
WRITE (IW,506) MRX,MRY,NR
WRITE (IW,501)
WRITE (IW,500)
WRITE (IW,501)
IF (OP.EQ.2) THEN
    FS=1./LAM
    WRITE (IW,511) FS
ELSE
    WRITE (IW,507) AS
ENDIF
WRITE (IW,508) EPSS
WRITE (IW,509) EPSI
IF (ABS (ALPH).GT.2*PI) ALPH=SIGN (MOD (ALPH,2*PI),ALPH)
ALPG=GRAUS*ALPH

```

```

WRITE(IW,510) ALPG
WRITE(IW,501)
WRITE(IW,500)
WRITE(IW,500)
WRITE(*,512)
READ(*,513) CAR
RETURN
500 FORMAT(1X,79(' '))
501 FORMAT(1X,'**',75X,'**')
502 FORMAT(1X,'**      DIMENSIONAMENTO DE SECAO DE CONCRETO ARMADO A SO
*LICITACOES NORMAIS      **')
503 FORMAT(1X,'**      VERIFICACAO DE SECAO DE CONCRETO ARMADO A SOLIC
*ITACOES NORMAIS      **')
504 FORMAT(1X,'**                                     MX
*  MY                      N      **')
505 FORMAT(1X,'**      ESFORCOS ATUANTES DE CALCULO:      ',3E12.4,'      **')
506 FORMAT(1X,'**      ESFORCOS RESISTENTES DE CALCULO:',3E12.4,'      **')
507 FORMAT(1X,'**',12X,'AREA TOTAL DE ARMADURA:      ',
*E15.4,10X,'**')
508 FORMAT(1X,'**',12X,'DEFORMACAO NA FIBRA SUPERIOR DA SECAO:',
*E15.4,10X,'**')
509 FORMAT(1X,'**',12X,'DEFORMACAO NA FIBRA INFERIOR DA SECAO:',
*E15.4,10X,'**')
510 FORMAT(1X,'**',12X,'INCLINACAO DA LINHA NEUTRA:      ',
*E15.4,10X,'**')
511 FORMAT(1X,'**',12X,'RESERVA:      ',
*E15.4,10X,'**')
512 FORMAT(/,25X,' TECLE <ENTER> PARA CONTINUAR',/)
513 FORMAT(A1)
END

```

```

SUBROUTINE PIVO(A,B,IVER)
REAL*8 A(3,3),B(3)
INTEGER II(18),IVER
REAL*8 AUX1,AUX2,DUM1,DUM2,DUM3,DUM4,DUM5
DATA II/1,2,3,1,3,2,2,1,3,2,3,1,3,1,2,3,2,1/
IVER=0
DO 10 J1=1,6
  JJ=3*J1
  I=II(JJ-2)
  J=II(JJ-1)
  K=II(JJ)
  IF(A(I,I).EQ.0) GO TO 10
  AUX1=A(J,I)/A(I,I)
  AUX2=A(K,I)/A(I,I)
  DUM1=A(K,K)-A(I,K)*AUX2
  DUM2=A(K,J)-A(I,J)*AUX2
  DUM3=B(K)-B(I)*AUX2
  AUX2=A(J,J)-A(I,J)*AUX1
  IF(AUX2.EQ.0) GO TO 10
  DUM4=(B(J)-B(I)*AUX1)/AUX2
  DUM5=(A(J,K)-A(I,K)*AUX1)/AUX2
  AUX1=DUM1-DUM2*DUM5
  IF(AUX1.EQ.0) GO TO 10
  B(K)=(DUM3-DUM2*DUM4)/AUX1
  B(J)=DUM4-DUM5*B(3)
  B(I)=(B(I)-B(J)*A(I,J)-B(K)*A(I,K))/A(I,I)
  GO TO 20
10 CONTINUE
IVER=1
20 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ESFOR(TA,E,FYD,FC,NP,XP,YP,NB,XB,YB,PERC,X,ALFA,AS,B,C,
*EPSS,EPSI,NRZ,MRX,MRY,R,NRC,IL)
REAL*8 NRZTI,NRZT,MRKS,MRET,NRZ,MRX,MRY,KS1I,KS2I,KS1II,KS2II
REAL*8 XP(*),YP(*),XB(*),YB(*),PERC(*),KSP(100),ETP(100),
* KSB(100),ETB(100),R(3,2),FYD(*),FC(*),EPSP(100)
CHARACTER*1 TA(*)
REAL*8 X,DD,ALFA,AS,B,BLX,C,CA,CLX,DUM1,DUM2,E,EPS0,EPSB,EPS1,
*EPSI,EPSS,ET,ET01,ET12,ET1I,ET1II,ET2I,ET2II,FCD,SA,SIG,TETIA,
*TETIC,TETSA,TETSC,TKSIA,TKSIC,TKSSA,TKSSC
INTEGER IL(*)
CA=COS(ALFA)
SA=SIN(ALFA)
TETSC=0
TETIC=0
DO 10 J1=1,NP
    KSP(J1)=XP(J1)*CA+YP(J1)*SA
    ETP(J1)=-XP(J1)*SA+YP(J1)*CA
    IF(ETP(J1).GT.TETSC) THEN
        TETSC=ETP(J1)
        TKSSC=KSP(J1)
    ENDIF
    IF(ETP(J1).LT.TETIC) THEN
        TETIC=ETP(J1)
        TKSIC=KSP(J1)
    ENDIF
10 CONTINUE
TETSA=0
TETIA=0
DO 20 J1=1,NB
    KSB(J1)=XB(J1)*CA+YB(J1)*SA
    ETB(J1)=-XB(J1)*SA+YB(J1)*CA
    IF(ETB(J1).GT.TETSA) THEN
        TETSA=ETB(J1)
        TKSSA=KSB(J1)
    ENDIF
    IF(ETB(J1).LT.TETIA) THEN
        TETIA=ETB(J1)
        TKSIA=KSB(J1)
    ENDIF
20 CONTINUE
H=TETSC-TETIC
DD=TETSC-TETIA
X23=0.259*DD
IF(X.LT.X23) THEN
    B=-0.01D0/(DD-X)
    C=B*(X-TETSC)
    BLX=-0.01D0/(DD-X)**2
    CLX=(DD-TETSC)*BLX
    EPSI=0.01D0
    EPSS=-0.01D0*X/(DD-X)
ELSE
    IF(X.LT.H) THEN
        B=-0.0035D0/X
        C=-0.0035D0-B*TETSC
        BLX=0.0035D0/X**2
        CLX=-TETSC*BLX
        EPSS=-0.0035D0
        EPSI=DMAX1(0.0035D0*(DD-X)/X,0)
    ELSE
        IF(X.GT.1.D150) THEN
            B=0
            C=-0.02
            BLX=1.D-100
            CLX=1.D-100
            EPSS=-.02

```

```

        EPSI=-.02
        GO TO 29
    END IF
    B=-0.002D0/(X-3D0/7D0*H)
    C=B*(X-TETSC)
    BLX=0.002D0/(X-3D0/7D0*H)**2
    CLX=(TETSC-3D0/7D0*H)*BLX
    EPSS=-.002D0*X/(X-3D0/7D0*H)
    EPSI=-.002D0*(X-H)/(X-3D0/7D0*H)
END IF
END IF
29 CONTINUE
DO 30 J1=1,NP
    EPSP(J1)=B*ETP(J1)+C
30 CONTINUE
NRZT=0
MRKS=0
MRET=0
DO 50 J1=1,3
    DO 50 J2=1,2
        R(J1,J2)=0
50 CONTINUE
DO 60 J1=1,NB
    EPSB=B*ETB(J1)+C
    CALL ACO(TA(J1),E,EPSB,FYD(J1),SIG,ET)
    DUM1=PERC(J1)*AS*ET*(BLX*ETB(J1)+CLX)
    DUM2=PERC(J1)*SIG
    NRZTI=AS*DUM2
    NRZT=NRZT+NRZTI
    MRKS=MRKS+NRZTI*ETB(J1)
    MRET=MRET-NRZTI*KSB(J1)
    R(1,1)=R(1,1)+DUM1*ETB(J1)
    R(1,2)=R(1,2)+DUM2*ETB(J1)
    R(2,1)=R(2,1)-DUM1*KSB(J1)
    R(2,2)=R(2,2)-DUM2*KSB(J1)
    R(3,1)=R(3,1)+DUM1
    R(3,2)=R(3,2)+DUM2
60 CONTINUE
IF (ABS(EPSS-EPSI).LE.1E-10) THEN
    IF (EPSS.GE.0) GO TO 100
    DO 70 J1=1,NRC
        FCD=FC(J1)
        IF (J1.EQ.1) THEN
            NP1=1
        ELSE
            NP1=IL(J1-1)
        ENDIF
        NP2=IL(J1)-1
        CALL CENTRA(NP1,NP2,FCD,B,C,EPSS,KSP,ETP,NRZT,MRKS,MRET,
*          BLX,CLX,R)
70 CONTINUE
    ELSE
        IF (EPSS.GE.0.AND.EPSI.GE.0) GO TO 100
        ET01=-C/B
        ET12=(-0.002-C)/B
        DO 80 J1=1,NRC
            FCD=FC(J1)
            IF (J1.EQ.1) THEN
                NP1=1
            ELSE
                NP1=IL(J1-1)
            ENDIF
            NP2=IL(J1)-1
            DO 80 J2=NP1,NP2
                EPS0=EPSP(J2)

```



```

KS2I=0
ET2I=0
KS1II=0
ET1II=0
KS2II=0
ET2II=0
I2=I+1
DET=ETP(I2)-ETP(I)
DKSDET=(KSP(I2)-KSP(I))/DET
DUM1=ET01-ETP(I)
DUM2=ET12-ETP(I)
KS01=KSP(I)+DUM1*DKSDET
KS12=KSP(I)+DUM2*DKSDET
DET01=DUM1/DET
DET12=DUM2/DET
IF (DET01.GT.0.AND.DET01.LT.1) T01=1
IF (DET12.GT.0.AND.DET12.LT.1) T12=1
IF (EPS0.LT.EPS1) THEN
    T01=-T01
    T12=-T12
ENDIF
IF (T01.EQ.0.AND.T12.EQ.0) THEN
    IF (EPS0.LT.0) THEN
        IF (EPS0.GT.-0.002) THEN
            KS1I=KSP(I)
            ET1I=ETP(I)
            KS2I=KSP(I2)
            ET2I=ETP(I2)
        ELSE
            KS1II=KSP(I)
            ET1II=ETP(I)
            KS2II=KSP(I2)
            ET2II=ETP(I2)
        ENDIF
    ENDIF
ELSE
    IF (T01.EQ.1) THEN
        KS1I=KS01
        ET1I=ET01
        IF (T12.EQ.1) THEN
            KS2I=KS12
            ET2I=ET12
            KS1II=KS12
            ET1II=ET12
            KS2II=KSP(I2)
            ET2II=ETP(I2)
        ELSE
            KS2I=KSP(I2)
            ET2I=ETP(I2)
        ENDIF
    ELSE
        IF (T01.EQ.-1) THEN
            KS2I=KS01
            ET2I=ET01
            IF (T12.EQ.-1) THEN
                KS1I=KS12
                ET1I=ET12
                KS2II=KS12
                ET2II=ET12
                KS1II=KSP(I)
                ET1II=ETP(I)
            ELSE
                KS1I=KSP(I)
                ET1I=ETP(I)
            ENDIF
        ENDIF
    ENDIF

```

```

ELSE
  IF (T12.EQ.1) THEN
    KS1I=KSP(I)
    ET1I=ETP(I)
    KS2I=KS12
    ET2I=ET12
    KS1II=KS12
    ET1II=ET12
    KS2II=KSP(I2)
    ET2II=ETP(I2)
  ELSE
    KS1I=KS12
    ET1I=ET12
    KS2I=KSP(I2)
    ET2I=ETP(I2)
    KS1II=KSP(I)
    ET1II=ETP(I)
    KS2II=KS12
    ET2II=ET12
  ENDIF
ENDIF
ENDIF
RETURN
END

SUBROUTINE CENTRA(NP1,NP2,FCD,B,C,EPSS,KSP,ETP,NRZT,MRKS,MRET,
*   BLX,CLX,R)
REAL*8 KSP(*),ETP(*),R(3,2),NRZT,MRKS,MRET
REAL*8 B,BLX,C,CLX,EPSS,FCD
IF(EPSS.GE.0) RETURN
IF(EPSS.LT.-0.002) GO TO 20
DO 10 J1=NP1,NP2
  J2=J1+1
  CALL REGI(FCD,B,C,KSP(J1),ETP(J1),KSP(J2),ETP(J2),NRZT,MRKS,
*   MRET,BLX,CLX,R)
10 CONTINUE
RETURN
20 DO 30 J1=NP1,NP2
  J2=J1+1
  CALL REGII(FCD,KSP(J1),ETP(J1),KSP(J2),ETP(J2),NRZT,MRKS,MRET)
30 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE REGI(FCD,B,C,KS1,ET1,KS2,ET2,NRZT,MRKS,MRET,BLX,CLX,R)
REAL*8 R(3,2),KS1,KS2,NRZT,MRKS,MRET
REAL*8 B,BLX,BLE,BR,C,CLX,CLE,D0,D1,D2,DET,DET1,DET2,DET3,DKS,
* DKS2,E0,E1,E2,ET1,ET2,FCD,G00,G01,G02,G03,G10,G11,G12
IF(KS1.EQ.0.AND.ET1.EQ.0.AND.KS2.EQ.0.AND.ET2.EQ.0) RETURN
BLE=5.D5*B
CLE=5.D5*C+1.D3
D0=C*1.D3*(1+250*C)
D1=B*CLE
D2=250*1.D3*B*B
E0=CLE*CLX
E1=BLE*CLX+CLE*BLX
E2=BLE*BLX
BR=.85*FCD
DKS=KS2-KS1
DET=ET2-ET1
DET1=DET/2.

```

```

DET2=DET*DET
DET3=DET2*DET
DKS2=DKS*DKS
G00=(KS1+DKS/2.)*DET
G01=(KS1*(ET1+DET1)+DKS*(ET1/2+DET/3))*DET
G02=(KS1*(ET1*(DET+ET1)+DET2/3)+DKS*(ET1*(ET1/2+DET/1.5)+
*   DET2/4))*DET
G03=(KS1*(ET1*(DET2+ET1*(1.5*DET+ET1))+DET3/4)+DKS*(ET1*
*   (0.75*DET2+ET1*(DET+ET1/2))+DET3/5))*DET
G10=(KS1*(KS1+DKS)+DKS2/3)*DET1
G11=(KS1*(KS1*(ET1+DET1)+DKS*(ET1+DET/1.5))+DKS2*(ET1/3+DET/4))*
*   DET1
G12=(KS1*(KS1*(ET1*(ET1+DET)+DET2/3)+DKS*(ET1*(ET1+DET/0.75)+
*   DET2/2))+DKS2*(ET1*(ET1/3+DET1)+DET2/5))*DET1
NRZT=NRZT+BR*(D0*G00+D1*G01+D2*G02)
MRKS=MRKS+BR*(D0*G01+D1*G02+D2*G03)
MRET=MRET-BR*(D0*G10+D1*G11+D2*G12)
R(1,1)=R(1,1)+BR*(E0*G01+E1*G02+E2*G03)
R(2,1)=R(2,1)-BR*(E0*G10+E1*G11+E2*G12)
R(3,1)=R(3,1)+BR*(E0*G00+E1*G01+E2*G02)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE REGII (FCD, KS1, ET1, KS2, ET2, NRZT, MRKS, MRET)
REAL*8  KS1, KS2, NRZT, MRKS, MRET
REAL*8  DET, DKS, ET1, ET2, FC, FCD, G00, G01, G10
IF (KS1.EQ.0.AND.ET1.EQ.0.AND.KS2.EQ.0.AND.ET2.EQ.0) RETURN
DKS=KS2-KS1
DET=ET2-ET1
G00=(KS1+DKS/2)*DET
G01=(KS1*(ET1+DET/2)+DKS*(ET1/2+DET/3))*DET
G10=(KS1*(KS1+DKS)+DKS*DKS/3)*DET/2
FC=0.85*FCD
NRZT=NRZT-FC*G00
MRKS=MRKS-FC*G01
MRET=MRET+FC*G10
RETURN
END

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de obras de concreto armado: NBR6118. Rio de Janeiro, 1980.
- DUMONT, N.A. & MUSSO JR., F. Dimensionamento e verificação de seções de concreto armado e protendido e verificações da estabilidade de vigas-colunas no estado limite último com o uso de microcomputadores. Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ, 1987.
- SANTOS, L.M. Cálculo de concreto armado segundo a NB1/78 e o CEB. São Paulo, LMS, 1981.
- WERNER, H. Schiefe Biegung polygonal umrandeter Stahl-beton-Qwerschnitte. Beton-und Stahlbetonbau, Berlin. v. 69, n. 4, p. 92-97, Apr. 1974.

✓

OK!