

## PEC00144 - Métodos Experimentais em Engenharia Civil

### Trabalho 3

Eduardo Pagnussat Titello

Dezembro de 2020

---

Este trabalho tem por objetivo: avaliar através de simulações de Monte Carlo a propagação de erro no modelo empregado no trabalho anterior, adotando variáveis Gaussianas.

```
# Importando e configurando módulos
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
%config InlineBackend.figure_format = 'svg' # Muda backend do jupyter
↳ para SVG ;)
import jupyter2latex as j2l # Uma maneira que encontrei para tabelas
↳ ficarem ok (github.com/dutitello/Jupyter2Latex)
from numpy import pi
import scipy.stats as st
```

## 1 Recapitulação do problema adotado

O problema adotado consiste na avaliação das duas primeiras frequências naturais de vibração de um poste em concreto armado, considerando seu comportamento como elástico linear. O poste tem comprimento efetivo  $L = 12m$ , seção constante de diâmetro externo  $d_e = 50cm$  e espessura  $e = 6cm$ .

O modelo reduzido empregado para avaliação do problema consiste em um cilindro de alumínio de diâmetro  $d_e = 6mm$ , massa linear  $\rho = 2700kg/m^3$  e módulo de elasticidade  $E = 70GPa$ . Adotando como escala de comprimento 1 : 25 (modelo reduzido tem comprimento  $L = 48cm$ ) e através das propriedades do perfil empregado, os três fatores de escala impostos são:

- Comprimento -  $L = 1 : 25$

- Massa linear -  $\mu_L = 1 : 2716$
- Rígidez à flexão -  $EI = 1 : 1.285 \times 10^7$

Através da análise dimensional realizada anteriormente, o fator de escala de frequências obtido foi  $1 : 0.110$  ou  $\lambda_f = 9.085$ .

As frequências naturais de vibração do modelo são dadas por 1:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_n}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu_L}} \quad (1)$$

onde, para as duas primeiras frequências naturais,  $\alpha_1 = 1.88$  e  $\alpha_2 = 4.69$ , respectivamente. A área da seção transversal circular  $A$  e seu momento de inércia  $I$  são dados por:

$$A = \frac{\pi d_e^2}{4} \quad (2)$$

$$I = \frac{\pi d_e^4}{64} \quad (3)$$

## 2 Propriedades estatísticas do modelo reduzido

Desprezando possíveis erros de matemáticos de modelagem, conforme 1, 2 e 3, os parâmetros que podem introduzir erros no modelo reduzido são  $E$ ,  $d_e$ ,  $\rho$  e  $L$ . Dado o grande controle tecnológico existente hoje nas indústrias, para as propriedades  $E$ ,  $d_e$  e  $\rho$  são adotados coeficientes de variação de 5%, enquanto, para  $L$ , visto que os perfis devem ser cortados pelo usuário final, é fixado um desvio padrão de  $5mm$ . Assim, as variáveis aleatórias e suas propriedades são:

Var. aleatória	Símbolo	Média ( $\mu$ )	Coef. de Variação (CV)	Desvio Padrão ( $\sigma$ )
Módulo de elasticidade	$E$	70 GPa	5%	3.5 GPa
Diâmetro externo	$d_e$	6 mm	5%	0.3 mm
Massa específica	$\rho$	2700 kg/m <sup>3</sup>	5%	135 kg/m <sup>3</sup>
Comprimento	$L$	48 cm	-	0.5 cm

Com isso as distribuições podem ser construídas no SciPy.

```

# Módulo de elasticidade em N/m2
mu_E = 70E9
std_E = 0.05*mu_E
rv_E = st.norm(mu_E, std_E)

# Diâmetro do perfil em m
mu_de = 6/1000
std_de = 0.05*mu_de
rv_de = st.norm(mu_de, std_de)

# Massa específica em kg/m3
mu_rho = 2700
std_rho = 0.05*mu_rho
rv_rho = st.norm(mu_rho, std_rho)

# Comprimento em m
mu_L = 48/100
std_L = 0.5/100
rv_L = st.norm(mu_L, std_L)

```

### 3 Função para avaliação do modelo

Para aplicação do método de simulação por Monte Carlo a equação 1 é introduzida em uma função dependente apenas das variáveis aleatórias de entrada consideradas:

```

def frequencias(E, de, rho, L):
    A = 1/4*pi*de**2
    I = 1/64*pi*de**4
    muL = A*rho

    # Frequências naturais do modelo
    fns = 1/(2*pi) * 1/L**2 * (E*I/muL)**0.5
    fn1_m = 1.88**2 * fns
    fn2_m = 4.69**2 * fns

    # Frequências naturais da estrutura
    fn1_e = fn1_m * 1.100726e-01
    fn2_e = fn2_m * 1.100726e-01

    return fn1_m, fn2_m, fn1_e, fn2_e

```

Aplicando sobre a função os valores médios devem ser obtidas as frequências observadas no trabalho anterior:

- Para o modelo reduzido: 18.647 Hz e 116.049 Hz
- Para a estrutura real: 2.053 Hz e 12.774 Hz

```
freqs = frequencias(mu_E, mu_de, mu_rho, mu_L)
print(freqs)
```

```
(18.647119431070642, 116.04909000616033, 2.0525369182884665, 12.
↪ 773825064612083)
```

Ok, a função retorna os valores esperados.

## 4 Avaliação da propagação de erro

Para avaliação da propagação de erro, dado o baixo custo computacional do problema, são realizadas  $5 \times 10^6$  simulações e os resultados são avaliados cumulativamente, de forma a observar a convergência do processo.

```
# Controles
N = int(5E6) # Total de simulações
minp = 10 # Mínimo de pontos para calcular média e desvio padrão
np.random.seed(666)

# Construção de DataFrame para armazenar os dados
dados = pd.DataFrame()

# Geração de dados aleatórios
dados['E'] = rv_E.rvs(N)
dados['de'] = rv_de.rvs(N)
dados['rho'] = rv_rho.rvs(N)
dados['L'] = rv_L.rvs(N)

# Cálculo das frequências naturais
dados['fn1_m'], dados['fn2_m'], dados['fn1_e'], dados['fn2_e'] = ↵
↪ frequencias(dados['E'].values, dados['de'].values, dados['rho'].
↪ values, dados['L'].values)
```

Uma descrição geral dos dados é apresentada nas Tabelas 2 e 3, onde as médias e o desvios padrões dos parâmetros de entrada convergem para os valores fornecidos, enquanto as médias das frequências naturais apresentam pequenas diferenças em relação aos valores já conhecidos.

```
pd.set_option('display.float_format', lambda x: f'{x:.3E}')

desc_geral = dados.describe().loc[['mean', 'std', 'min', 'max']]
j2l.df2table(desc_geral[['E', 'de', 'rho', 'L']], 'Descrição geral dos ↵
↪ dados de entrada', 'tab:descE')
j2l.df2table(desc_geral[['fn1_m', 'fn2_m', 'fn1_e', 'fn2_e']], ↵
↪ 'Descrição geral das frequências naturais', 'tab:descf')
```

Tabela 2: Descrição geral dos dados de entrada

	E	de	rho	L
mean	7.000E+10	6.000E-03	2.700E+03	4.800E-01
std	3.500E+09	2.999E-04	1.350E+02	4.999E-03
min	5.228E+10	4.568E-03	1.985E+03	4.558E-01
max	8.725E+10	7.508E-03	3.394E+03	5.057E-01

Tabela 3: Descrição geral das frequências naturais

	fn1_m	fn2_m	fn1_e	fn2_e
mean	1.867E+01	1.162E+02	2.055E+00	1.279E+01
std	1.209E+00	7.524E+00	1.331E-01	8.282E-01
min	1.306E+01	8.127E+01	1.437E+00	8.946E+00
max	2.573E+01	1.601E+02	2.832E+00	1.763E+01

Nos resultados pode ainda ser observada a linearidade da transformação de escala do modelo, onde:

$$\mu_{f,Est.Real} = \mu_{f,Mod.Red.} \times 1/\lambda_f \quad (4)$$

$$\sigma_{f,Est.Real} = \sigma_{f,Mod.Red.} \times 1/\lambda_f \quad (5)$$

Dessa forma, as análises a seguir são realizadas apenas em relação ao modelo reduzido, objeto principal do estudo.

Através da análise estatística cumulativa dos resultados obtidos pelo método de Monte Carlo a convergência do processo com o aumento do número de simulações pode ser determinada:

```
roll = dados[['fn1_m', 'fn2_m']].rolling(N, min_periods=minp)
stds = roll.std()
means = roll.mean()
```

```
figMeans = plt.figure(1, figsize=(10,6))

pl = plt.subplot(2,2,1)
means['fn1_m'].plot()
plt.title('Primeira frequência')
plt.ylabel('$\mu_{f1}$')
plt.xscale('log')
plt.xlim(minp,N)
```

```

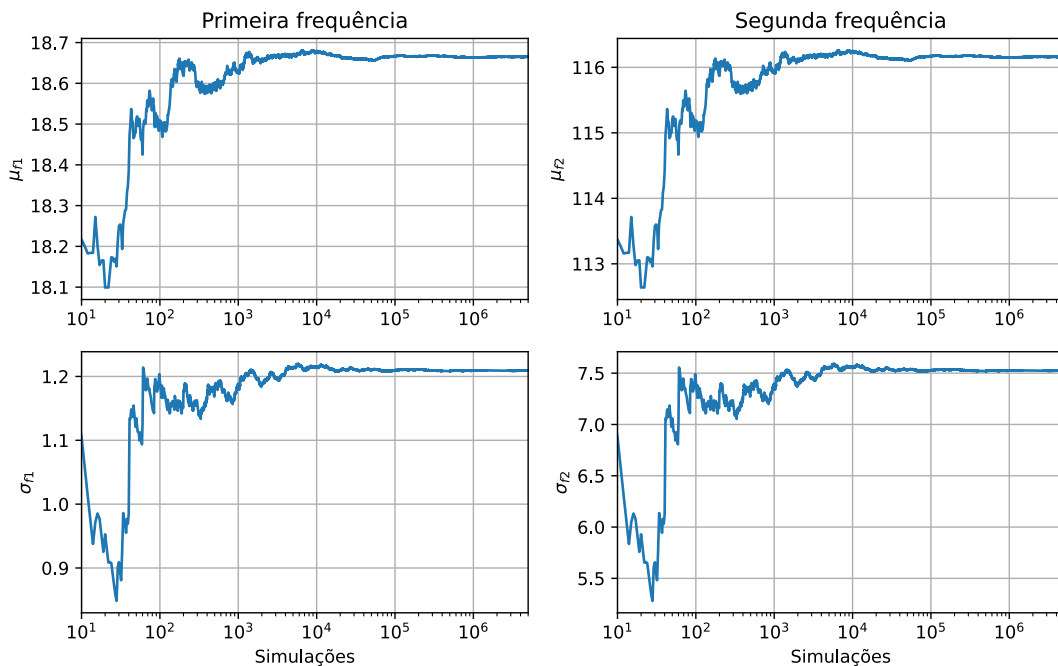
plt.grid(True)

pl = plt.subplot(2,2,2)
means['fn2_m'].plot()
plt.title('Segunda frequência')
plt.ylabel('$\mu_{f2}$')
plt.xscale('log')
plt.xlim(minp,N)
plt.grid(True)

pl = plt.subplot(2,2,3)
stds['fn1_m'].plot()
plt.xlabel('Simulações')
plt.ylabel('$\sigma_{f1}$')
plt.xscale('log')
plt.xlim(minp,N)
plt.grid(True)

pl = plt.subplot(2,2,4)
stds['fn2_m'].plot()
plt.xlabel('Simulações')
plt.ylabel('$\sigma_{f2}$')
plt.xscale('log')
plt.xlim(minp,N)
plt.grid(True)

```



Conforme a figura, as médias e desvios padrões das frequências de vibração do modelo reduzido estabilizam com cerca de  $2 \times 10^5$  simulações, sendo esse valor obser-

vado para diferentes sementes geradoras de números aleatórios. Dada a convergência do processo os valores apresentados anteriormente, na descrição dos resultados, são adotados, dessa forma:

```
mean_f1 = desc_geral.loc['mean']['fn1_m']
mean_f2 = desc_geral.loc['mean']['fn2_m']
std_f1 = desc_geral.loc['std']['fn1_m']
std_f2 = desc_geral.loc['std']['fn2_m']

print('''Considerando as incertezas existentes:
- A primeira frequência de vibração do modelo reduzido é {f1:.2f} Hz
↳ com um desvio padrão de {f1s:.2f} Hz
- A segunda frequência de vibração do modelo reduzido é {f2:.2f} Hz
↳ com um desvio padrão de {f2s:.2f} Hz
'''.format(f1=mean_f1, f2=mean_f2, f1s=std_f1, f2s=std_f2))
```

Considerando as incertezas existentes:

- A primeira frequência de vibração do modelo reduzido é 18.67 Hz com  
↳ um desvio padrão de 1.21 Hz
- A segunda frequência de vibração do modelo reduzido é 116.16 Hz com  
↳ um desvio padrão de 7.52 Hz

Como a média e o desvio padrão dos resultados são conhecidos os histogramas dos resultados podem ser comparados às distribuições normais formadas por tais parâmetros, avaliando diferentes números de simulações:

```
rv_f1 = st.norm(mean_f1, std_f1)
rv_f2 = st.norm(mean_f2, std_f2)

k = 4
x1 = np.linspace(mean_f1 - k*std_f1, mean_f1 + k*std_f1, 500)
x2 = np.linspace(mean_f2 - k*std_f2, mean_f2 + k*std_f2, 500)

Nhs = [100, 1000, 10000, int(1e6)]

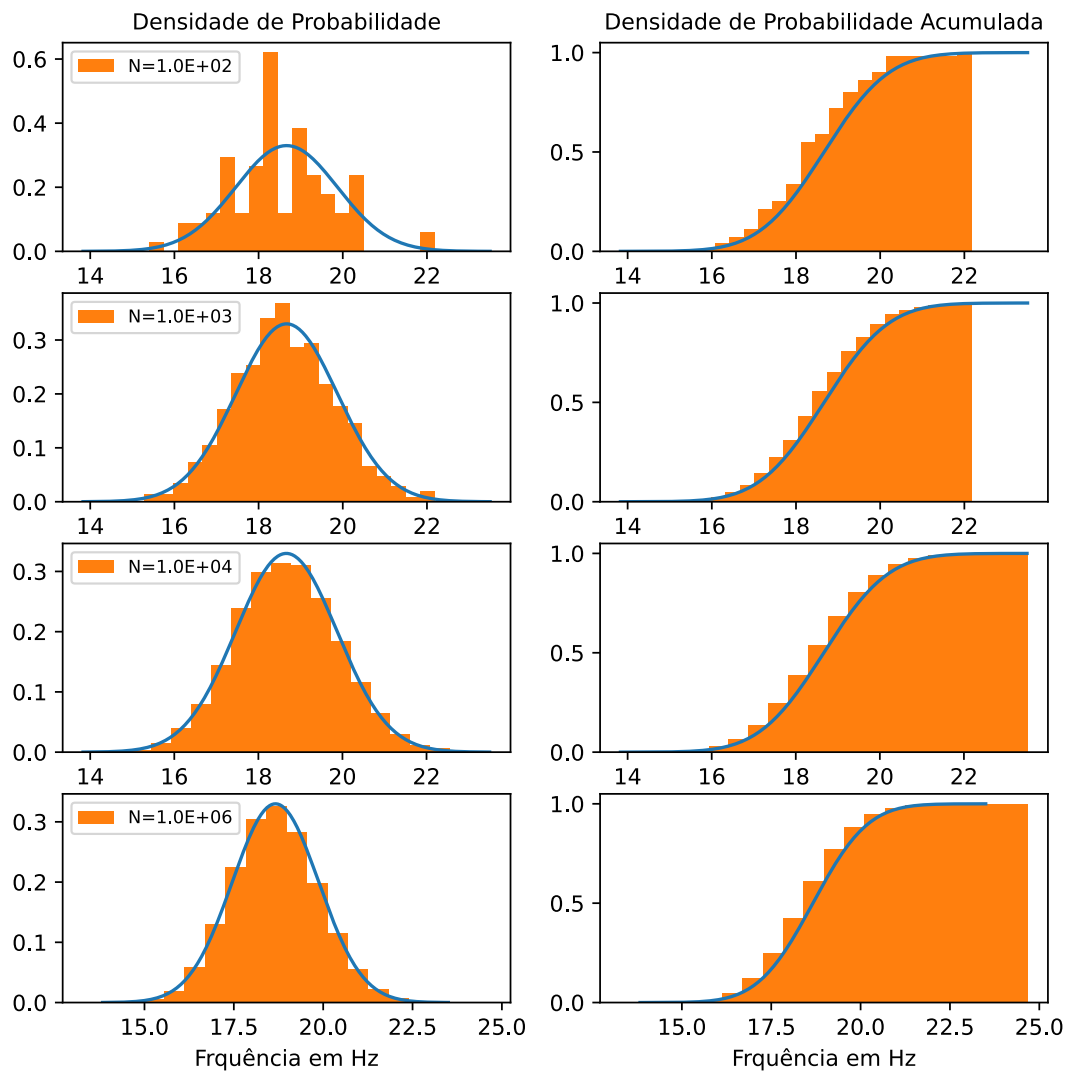
figHists = plt.figure(2, figsize=(8,8))
figHists.suptitle('Primeira Frequência Natural')
for i, Nh in enumerate(Nhs):
    pl = plt.subplot(len(Nhs), 2, 2*(i+1)-1)
    if i==0: plt.title('Densidade de Probabilidade', size=10)
    plt.plot(x1, rv_f1.pdf(x1))
    dados['fn1_m'][0:Nh].plot(kind='hist', density=True, bins=20,
    ↳ label=f'N={Nh:.1E}')
    plt.ylabel(None)
    if i+1==len(Nhs): plt.xlabel('Frquência em Hz')
    plt.legend(loc='upper left', fontsize=8)
```

```

pl = plt.subplot(len(Nhs), 2, 2*(i+1))
if i==0: plt.title('Densidade de Probabilidade Acumulada', size=10)
plt.plot(x1, rv_f1.cdf(x1))
dados['fn1_m'][0:Nh].plot(kind='hist', density=True, bins=20,
cumulative=True)
plt.ylabel(None)
if i+1==len(Nhs): plt.xlabel('Frquência em Hz')

```

### Primeira Frequência Natural



```

figHists = plt.figure(3, figsize=(8,8))
figHists.suptitle('Segunda Frequência Natural')
for i, Nh in enumerate(Nhs):
    pl = plt.subplot(len(Nhs), 2, 2*(i+1)-1)
    if i==0: plt.title('Densidade de Probabilidade', size=10)
    plt.plot(x2, rv_f2.pdf(x2))

```



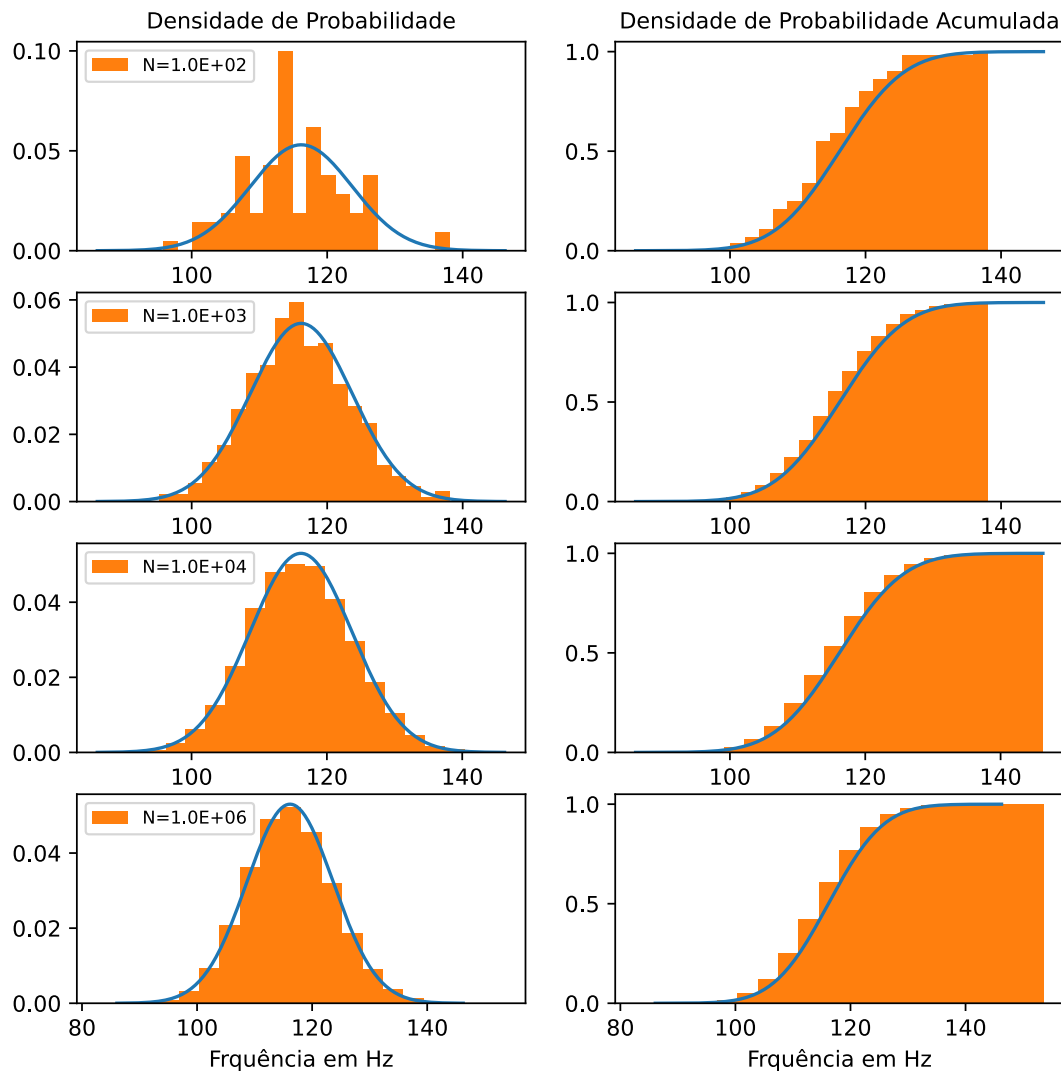
```

dados['fn2_m'][0:Nh].plot(kind='hist', density=True, bins=20,
↪label=f'N={Nh:.1E}')
plt.ylabel(None)
if i+1==len(Nhs): plt.xlabel('Frquência em Hz')
plt.legend(loc='upper left', fontsize=8)

p1 = plt.subplot(len(Nhs), 2, 2*(i+1))
if i==0: plt.title('Densidade de Probabilidade Acumulada', size=10)
plt.plot(x2, rv_f2.cdf(x2))
dados['fn2_m'][0:Nh].plot(kind='hist', density=True, bins=20,
↪cumulative=True)
plt.ylabel(None)
if i+1==len(Nhs): plt.xlabel('Frquência em Hz')

```

### Segunda Frequência Natural



Conforme esperado, o aumento do número de simulações consideradas na construção dos histogramas melhorou a suavidade desses. Em relação à distribuição dos resultados, mesmo com uma função não-linear é observada boa aderência desses à distribuição normal.

Sendo o erro propagado uma variável aleatória de distribuição normal, podem ser determinados intervalos de confiança das frequências do modelo reduzido, considerando erros bilaterais, por:

$$\mu_{f_i} - k\sigma_{f_i} \leq f_i \leq \mu_{f_i} + k\sigma_{f_i} \quad (6)$$

onde  $k$  é obtido através do inverso da distribuição de probabilidade acumulada para um dado erro  $\varepsilon$  tal que:

$$k = -\Phi^{-1}(\varepsilon/2) \quad (7)$$

Supondo erros bilaterais aceitáveis de 2.5%, 5%, 10% e 50% os limites obtidos são:

```
def IC(mean, std, err):
    k = -st.norm.ppf(err/2) # Bilateral
    return mean-k*std, mean+k*std, k

def printIC(err):
    f1min, f1max, k = IC(mean_f1, std_f1, err)
    f2min, f2max, k = IC(mean_f2, std_f2, err)
    print(f'''Com uma confiança de {1-err:.2%}: (k={k:.3f})
    * {f1min:.2f} Hz <= f1 <= {f1max:.2f} Hz
    * {f2min:.2f} Hz <= f2 <= {f2max:.2f} Hz
    ''')

printIC(0.025)
printIC(0.050)
printIC(0.100)
printIC(0.500)
```

Com uma confiança de 97.50%: (k=2.241)  
 \* 15.96 Hz <= f1 <= 21.38 Hz  
 \* 99.30 Hz <= f2 <= 133.03 Hz

Com uma confiança de 95.00%: (k=1.960)  
 \* 16.30 Hz <= f1 <= 21.03 Hz  
 \* 101.41 Hz <= f2 <= 130.91 Hz

Com uma confiança de 90.00%: (k=1.645)  
 \* 16.68 Hz <= f1 <= 20.65 Hz  
 \* 103.78 Hz <= f2 <= 128.54 Hz

Com uma confiança de 50.00%: (k=0.674)

```
* 17.85 Hz <= f1 <= 19.48 Hz
* 111.09 Hz <= f2 <= 121.24 Hz
```

Evidentemente, a aceitação de um erro maior reduz o tamanho do intervalo de frequências possíveis. Dos resultados apresentados acima, adotando a confiança de 95%, ou probabilidade do valor estar fora do intervalo de 5%, as frequências do modelo estão nos intervalos:

$$16.30\text{Hz} \leq f_1 \leq 21.03\text{Hz}$$

$$101.41\text{Hz} \leq f_2 \leq 130.91\text{Hz}$$

Os intervalos podem ainda ser ilustrados sobre a curva de densidade de probabilidade das distribuições de frequências:

```
def plotIC(mean, std, err):
    limmin = mean - k*std
    limmax = mean + k*std

    ea      = 0
    colors = ['g', 'y', 'b', 'pink', 'purple']

    for i, e in enumerate(err):
        fmin, fmax, _ = IC(mean, std, e)
        xa = np.linspace(limmin, fmin, 100)
        xb = np.linspace(fmax, limmax, 100)

        y1a = np.zeros(xa.shape)
        y1b = np.zeros(xb.shape)

        y2a = st.norm.pdf(xa, mean, std)
        y2b = st.norm.pdf(xb, mean, std)

        pl.fill_between(xa, y1a, y2a, color=colors[i], alpha=0.2,
        ↪label=f'Conf. de {1-ea:.2%} à {1-e:.2%}')
        pl.fill_between(xb, y1b, y2b, color=colors[i], alpha=0.2,
        ↪label=None)

        limmin = fmin
        limmax = fmax
        ea      = e

figHists = plt.figure(4, figsize=(10,3))

pl = plt.subplot(1, 2, 1)
plt.title('Primeira Frequência')
```

```

plt.plot(x1, rv_f1.pdf(x1), label='FDP')
plotIC(mean_f1, std_f1, err=[0.025, 0.050, 0.100, 0.5, 1])

plt.grid(False)
plt.ylabel(None)
plt.xlabel('Frquência em Hz')
plt.xlim(x1.min(), x1.max())
plt.ylim(0)
plt.legend(ncol=3, loc='upper center', bbox_to_anchor=(1.1,-0.2),
          ↵fontsize=9, frameon=False)

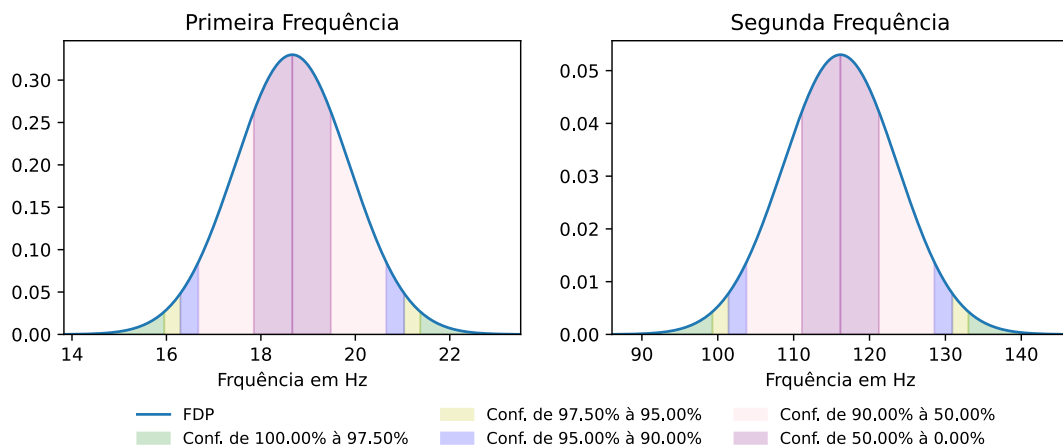
pl = plt.subplot(1, 2, 2)
plt.title('Segunda Frequência')

plt.plot(x2, rv_f2.pdf(x2), label='FDP')
plotIC(mean_f2, std_f2, err=[0.025, 0.050, 0.100, 0.5, 1])

plt.grid(False)
plt.ylabel(None)
plt.xlabel('Frquência em Hz')
plt.xlim(x2.min(), x2.max())
plt.ylim(0)

```

(0.0, 0.05567011217681224)



## 5 Considerações finais

A consideração das incertezas intrínsecas dos materiais usados na construção do modelo reduzido tornou seu comportamento também incerto. As incertezas existentes nas propriedades dos materiais foram propagadas no modelo através da realização de

$N = 5 \times 10^6$  simulações de Monte Carlo e, posteriormente, as  $N$  respostas observadas foram caracterizadas através de análises estatísticas. Observou-se que ambas as frequências naturais de vibração do modelo reduzido são bem descritas por variáveis de distribuição normal/Gaussiana:

$$f_1 \sim N(\mu_{f_1} = 18.67Hz; \sigma_{f_1} = 1.21Hz)$$

$$f_2 \sim N(\mu_{f_2} = 116.16Hz; \sigma_{f_2} = 7.52Hz)$$

onde as médias das variáveis aleatórias são aproximadamente as frequências obtidas com as propriedades médias dos materiais.

Conhecidas as distribuições de probabilidade das frequências naturais foram determinados seus intervalos de confiança, onde, com uma confiança de 95%, tem-se que as frequências são:

$$16.30Hz \leq f_1 \leq 21.03Hz$$

$$101.41Hz \leq f_2 \leq 130.91Hz$$