

PEC00144 - Métodos Experimentais em Engenharia Civil

Trabalho 1

Eduardo Pagnussat Titello

Novembro de 2020

Este trabalho tem dois objetivos, logo está dividido em duas partes:

Parte I: pesquisar por um número Π importante, escrever a matriz dimensional das grandezas envolvidas, confirmar a adimensionalidade usando a fórmula $\vec{\alpha} \mathbf{D}$ e descrever exemplos de aplicação.

Parte II: definir um problema de interesse, para o qual existe uma expressão **dimensional** conhecida e utilizada na prática; reformular a expressão em termos de números Π propostos; apresentar resultados na forma de gráficos relacionando estes números.

1 Parte I

O número de Strouhal (St) é um importante adimensional da mecânica dos fluídos que descreve oscilações no escoamento. Conforme White (2017), mesmo escoamentos que aparentam estar perfeitamente em regime permanente apresentam padrões de oscilação que variam conforme o número de Reynolds (Re , considerado por muitos o mais importante adimensional da mecânica dos fluídos).

St relaciona a frequência de desprendimento de vortices (f), a dimensão característica (L) e a velocidade do escoamento (v) através de:

$$St = \frac{fL}{v} \quad (1)$$

onde para esferas e cilindros L é seu diâmetro.

Fazendo uso da metodologia adotada por Rocha (2020), a matriz dimensional \mathbf{D} do problema é:

```
# Importando módulos
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
%config InlineBackend.figure_format = 'svg' # Muda backend do jupyter
↳ para SVG ;)
import jupyter2latex as j2l # Uma maneira que encontrei para tabelas
↳ ficarem ok (github.com/dutitello/Jupyter2Latex)

# Importando todas grandezas
DimData = pd.read_excel('../resources/DimData.xlsx',
                        index_col = 0,
                        sheet_name = 'DimData')

# Filtrando apenas as grandezas envolvidas no problema:
DMat = DimData.loc[['f', 'L', 'v'], ['L', 'M', 'T']]
j2l.df2table(DMat, caption='Matriz D')
```

Tabela 1: Matriz D

	L	M	T
f	0	0	-1
L	1	0	0
v	1	0	-1

Que adotando o sistema internacional de unidades leva à:

$$[f] = \text{m}^0 \text{kg}^0 \text{s}^{-1} = 1/\text{s} = \text{Hz}$$

$$[L] = \text{m}^1 \text{kg}^0 \text{s}^0 = \text{m}$$

$$[v] = \text{m}^1 \text{kg}^0 \text{s}^{-1} = \text{m/s}$$

Logo a matriz **D** está correta.

Reescrevendo St tem-se:

$$\Pi_{St} = f^1 L^1 v^{-1} \quad (2)$$

logo:

$$\vec{\alpha}_{St} = [1, 1, -1] \quad (3)$$

Com isso o produto $\vec{\alpha}_{St} \cdot \mathbf{D}$ é:

```
alpha_St = np.array([1, 1, -1])
prod = alpha_St.dot(DMat.values)
print(prod)
```

[0 0 0]

Logo a expressão de St apresentada é adimensional.

Fenômenos relacionados ao número de Strouhal são o cantar de cabos com o vento, o galope de linhas de ancoragem submarinas e as vibrações de construções esbeltas com o vento; sendo que o nome Strouhal faz menção ao físico V. Strouhal, que estudou o cantar a fios excitados pelo vento em 1878. Esses fenômenos ocorrem pelo desprendimento periódico de vórtices, denominados vórtices de van Kármán, em menção ao físico T. von Kármán que os explicou teoricamente em 1912 (White, 2017).

Os vórtices de van Kármán podem levar estruturas à ressonância caso sua frequência de desprendimento se aproxime da frequência de vibração livre da estrutura, como ocorrido na ponte Tacoma em 1940. Em esferas, por exemplo, os vórtices são desprendidos quando $St \approx 0,21$ no intervalo $10^2 < Re < 10^7$ (White, 2017).

No Brasil, a norma NBR 6123:1988 - Forças devidas ao vento em edificações, no anexo H, fornece valores para St com base em Re e no tipo da seção da edificação, de forma a permitir a obtenção de uma velocidade crítica na qual a frequência de desprendimento de um par de vórtices coincide com uma das frequências naturais de vibração da estrutura. Através desse anexo os projetistas podem então, mesmo que de forma aproximada, avaliar o fenômeno de desprendimento de vórtices em edificações.

2 Parte II

A expressão adotada, apresentada em 4, determina o momento resistente de uma viga em concreto armado, com armadura simples de tração, no domínio II ou III (armadura escoando, conforme norma brasileira). Essa é obtida através do equilíbrio de esforços internos da seção considerando o diagrama retangular de tensões para o concreto.

$$M = A_s f_y \left(d - \frac{A_s f_y}{2b f_c} \right) \quad (4)$$

onde seus parâmetros são:

- M : momento resistente da seção;
- A_s : área de armadura tracionada;
- f_y : tensão de escoamento da armadura;
- d : altura útil (do topo da viga ao centro da armadura);

- b : largura da viga;
- f_c : resistência à compressão do concreto.

A matriz dimensional \mathbf{D} é então:

```
DMatCA = DimData.loc[['M', 'A', 'σ', 'L', 'L', 'σ'], ['L', 'M', 'T']]
j2l.df2table(DMatCA, caption='Matriz D - Viga CA')
```

Tabela 2: Matriz D - Viga CA

	L	M	T
M	2	1	-2
A	2	0	0
σ	-1	1	-2
L	1	0	0
L	1	0	0
σ	-1	1	-2

Conforme Rocha (2020) e Carneiro (1993), o teorema dos Π 's de Vaschy-Buckingham pode produzir $r = n - k$ números Π 's não dimensionais, onde n é o número de variáveis do problema (incluindo a variável independente) e k é o número de grandezas fundamentais envolvidas (L, M, T).

Para o problema em questão tem-se $n = 6$ e $k = 3$, logo, 3 números Π 's podem ser produzidos, onde cada Π_j é um monômio formado pelas n variáveis elevadas aos expoentes α_{j,n_i} . A adimensionalidade de Π_j é garantida montando um vetor $\vec{\alpha}_j$, contendo os expoentes de cada uma das n variáveis, e garantindo que $\vec{\alpha}_j \cdot \mathbf{D} = \vec{0}$. Assim, Π_j e α_j são genericamente dados por:

$$\Pi_j = M^{\alpha_{j,M}} A_s^{\alpha_{j,A_s}} f_y^{\alpha_{j,f_y}} d^{\alpha_{j,d}} b^{\alpha_{j,b}} f_c^{\alpha_{j,f_c}} \quad (5)$$

$$\vec{\alpha}_j = [\alpha_{j,M}, \alpha_{j,A_s}, \alpha_{j,f_y}, \alpha_{j,d}, \alpha_{j,b}, \alpha_{j,f_c}] \quad (6)$$

Adotando Π_1 como a razão entre as áreas de armadura e concreto tem-se:

$$\Pi_1 = \frac{A_s}{bd} \quad (7)$$

$$\vec{\alpha}_1 = [0, 1, 0, -1, -1, 0] \quad (8)$$

que tem sua adimensionalidade provada por:

```
alpha_Pi1 = np.array([0, 1, 0, -1, -1, 0])
prod_Pi1 = alpha_Pi1.dot(DMatCA.values)
print(prod_Pi1)
```

[0 0 0]

Para Π_2 é adotada a razão entre a tensão de escoamento da armadura e resistência à compressão do concreto:

$$\Pi_2 = \frac{f_y}{f_c} \quad (9)$$

$$\vec{\alpha}_2 = [0, 0, 1, 0, 0, -1] \quad (10)$$

que tem sua adimensionalidade provada por:

```
alpha_Pi2 = np.array([0, 0, 1, 0, 0, -1])
prod_Pi2 = alpha_Pi2.dot(DMatCA.values)
print(prod_Pi2)
```

[0 0 0]

Adotando em Π_3 o momento M como numerador, diferentes formulações podem ser obtidas como:

$$\Pi_3 = \frac{M}{A_s f_y d} \quad (11)$$

$$\Pi_3 = \frac{M}{b d^2 f_c} \quad (12)$$

Adotando a segunda formulação, de forma a eliminar de Π_3 a dependencia de A_s , o vetor $\vec{\alpha}_3$ é:

$$\vec{\alpha}_3 = [1, 0, 0, -2, -1, -1] \quad (13)$$

que tem sua adimensionalidade provada por:

```
alpha_Pi3 = np.array([1, 0, 0, -2, -1, -1])
prod_Pi3 = alpha_Pi3.dot(DMatCA.values)
print(prod_Pi3)
```

[0 0 0]

Dessa forma 4 pode ser reescrita em função dos adimensionais Π_1 , Π_2 e Π_3 :

$$\Pi_3 = \Pi_1 \Pi_2 - \frac{1}{2}(\Pi_1 \Pi_2)^2 \quad (14)$$

onde observa-se que um único adimensional $\Pi_{12} = \Pi_1 \Pi_2$ poderia ser empregado, porém este não será adotado.

Em posse de 14 e de Π_1 , Π_2 e Π_3 , curvas que relacionam tais variáveis podem ser traçadas. Visto que $\Pi_1 = A_s/bd$ é a taxa de armadura tracionada da viga (ρ), cada valor desse parâmetro, que pela norma brasileira é limitado a 4%, será plotado em uma curva diferente.

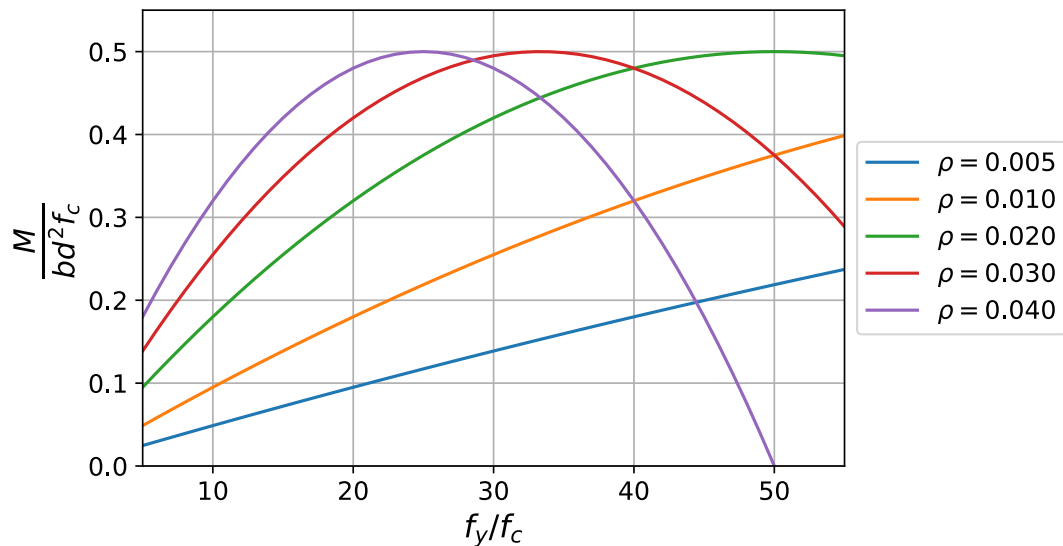
Adotando Π_2 como eixo horizontal e Π_3 como eixo vertical, considerando $5 \leq \Pi_2 \leq 55$, o que engloba combinações de concretos das classes C20 à C90 e aços CA-50 e CA-60:

```
# Basedo em Pi1 gera curvas de Pi2 e Pi3 no intervalo [5,55]
def graf(Pi1):
    Pi2 = np.linspace(5, 55, 51)
    Pi3 = Pi1*Pi2 - 1/2*(Pi1*Pi2)**2
    plt.plot(Pi2, Pi3, label=f'$\\rho={Pi1:.3f}$')

# Configura plot
# inline ou qt
#%matplotlib inline
matplotlib.rcParams.update({'font.size': 12})
plt.figure(1, figsize=(6,4))
plt.grid()
plt.axis((5,55,0,0.55))
plt.ylabel('$\\frac{M}{b d^2 f_c}$', size=20)
plt.xlabel('$f_y/f_c$', size=15)

# Plota linhas para cada rho
graf(0.005)
graf(0.010)
graf(0.020)
graf(0.030)
graf(0.040)

# Legenda
_ = plt.legend(ncol=1, loc='center left', bbox_to_anchor=(1.0,0.5))
```



Através de 4 e forçando valores para Π_1 (ρ), combinações das variáveis de entrada devem produzir pontos sobre as linhas da figura anterior, dessa forma:

```
# Pega valores calcula Mu e Pi's
def PontosValid(As, fy, d, b, fc):
    Mu = As*fy*(d-As*fy/(2*b*fc))
    Pi1 = As/(b*d)
    Pi2 = fy/fc
    Pi3 = Mu/(b*d**2*fc)

    # Cria pontos em grafico do tipo scatter
    plt.scatter(Pi2, Pi3, s=60, marker='x', label=f'Valid.: $\rho$={Pi1:.3f}$')

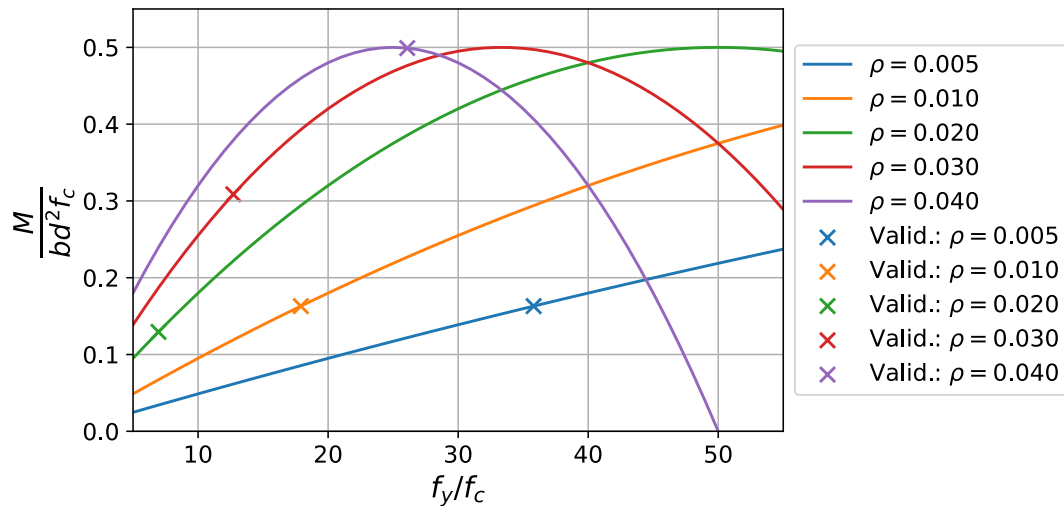
# Configura plot
plt.figure(2, figsize=(6,4))
plt.grid()
plt.axis((5,55,0,0.55))
plt.ylabel('$\frac{M}{b d^2 f_c}$', size=20)
plt.xlabel('$f_y/f_c$', size=15)

# Linhas
graf(0.005)
graf(0.010)
graf(0.020)
graf(0.030)
graf(0.040)

# Pontos - Um para cada linha anterior, assim repete as cores
PontosValid(As=0.005*15*36, fy=50/1.15, d=36, b=15, fc=2*0.85/1.4)
```

```
PontosValid(As=0.01*15*60, fy=50/1.15, d=60, b=15, fc=4*0.85/1.4)
PontosValid(As=0.02*10*36, fy=40/1.15, d=36, b=10, fc=5)
PontosValid(As=0.03*15*36, fy=50/1.15, d=36, b=15, fc=3*1.14)
PontosValid(As=0.04*15*36, fy=60/1.15, d=36, b=15, fc=2)

# Legenda
_ = plt.legend(ncol=1, loc='center left', bbox_to_anchor=(1.0,0.5))
```



Assim, pode-se concluir que a adimensionalização e figura gerada estão corretas. Cabe observar que sua aplicação prática requer a verificação do domínio da peça pela norma vigente, visto que a expressão 4 considera o escoamento da armadura.

3 Referências Bibliográficas

Carneiro, F. L. **Análise dimensional e teoria da semelhança e dos modelos físicos**. Rio de Janeiro: Editora UFRJ. 1993.

Rocha, M. M. **PEC00144 - Experimental Methods in Civil Engineering**. 2020. Disponível em: <https://github.com/mmaiarocha/PEC00144>.

White, F. M. **Fluid Mechanics**. 8th ed. McGraw-Hill Education. 2017.