Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PEC00144 - Métodos Experimentais em Engenharia Civil

Trabalho final

Eduardo Pagnussat Titello

Fevereiro de 2021

Este trabalho consiste em projetar, construir e instrumentar um modelo reduzido. A estrutura adotada é uma torre de 3 pavimentos/níveis, representada por um *shear building*, e tem-se como objetivo a determinação da frequência fundamental de vibração da estrutura real a partir do modelo reduzido.

Conteúdo

```
# Importando e configurando módulos
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
%config InlineBackend.figure_format = 'svg'
import jupyter2latex as j2l
import scipy.linalg
import scipy.stats as st
from MRPy import MRPy
import serial
import time
```

1 Apresentação da estrutura real

A estrutura a ser representada pelo modelo é uma torre de planta quadrada, formada por um pilar em cada extremidade e construída em concreto C25. Essa e suas dimensões são apresentadas a seguir:

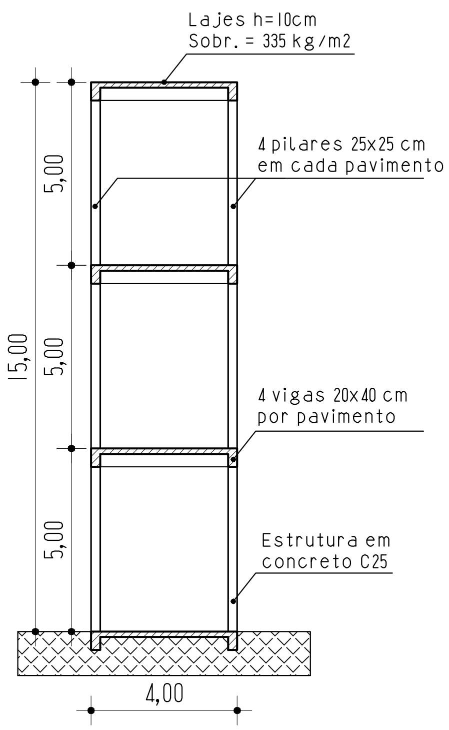


Figura 1: Estrutura

Adotando concreto da classe C25 tem-se $E_C = 28GPa$, transcrevendo as propriedades da estrutura real tem-se:

```
# Dados da geometria
est_L  = 5.0            # Distância entre pisos
est_Pn = 4              # Pilares por pavimento
est_Pb = 0.25           # Largura dos pilares
est_Vn = 4              # Vigas por pavimento
est_Vb = 0.20           # Largura das vigas
est_Vh = 0.40           # Altura das vigas
est_LP = 4.00           # Lado dos pavimentos
est_Lh = 0.10           # Altura das lajes
est_cg = 335            # Carga nas lajes/m²

# Rigidez EI
est_I = est_Pb**4/12    # Inércia do pilar
est_E = 28E9            # E do concreto
est_EI = est_I*est_E    # EI do pilar
```

2 Projeto do modelo reduzido

O projeto do modelo reduzido é baseado na introdução de escalas que relacionem as grandezas do modelo reduzido e do modelo real, onde o número de escalas deve ser menor ou igual ao número de grandezas fundamentais envolvidas no problema. Para o problema em questão as grandezas fundamentais são três: comprimento (L), massa (M) e tempo (T), que formam a base da matriz dimensional. Para construção do modelo reduzido as grandezas escolhidas para serem escaladas são relativas ao comprimento (L), à rigidez à flexão (EI) e à aceleração (a).

Os fatores de escala adotados para L e EI são baseados no material empregado para construção das colunas do modelo, essas são formadas por réguas de alumínio, com $52.5cm$ de comprimento, $2.58cm$ de largura e $0.10cm$ de espessura, dimensões obtidas com auxílio de um paquimetro. As réguas utilizadas são apresentadas na figura a seguir:

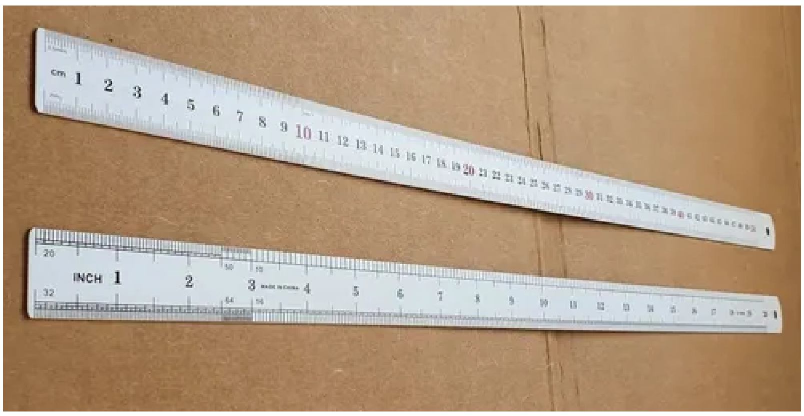


Figura 2: Réguas

```
mod_b = 0.0258
mod_h = 0.0010
mod_E = 70E9
```

Descontando um trecho para realização do engaste e dividindo o comprimento restante da régua em 3 partes iguais, a distância entre os pavimentos é representada por trechos de $16.5cm$, logo, a escala de comprimento λ_L é:

```
mod_L = 0.165
scale_L = mod_L/est_L

j2l.print(f"Escala de comprimentos: $ \lambda_L = 1:{1/scale_L:.2f} $.")
```

Escala de comprimentos: $\lambda_L = 1 : 30.30$.

A escala da rigidez à flexão EI relaciona a rigidez das 2 réguas à das 4 colunas da torre. Assumindo para as réguas $E_{Al} = 70GPa$, a rigidez EI das réguas e a escala de rigidez são dadas por:

```
mod_I = mod_b * mod_h**3 / 12
mod_EI = mod_E*mod_I
scale_EI = (2*mod_EI)/(est_Pn*est_EI)

j2l.print('''- Momento de inércia de uma régua: $I={mod_I:.3E} \: m^4$

- Rigidez à flexão de uma régua: $EI = {mod_EI:.3E} Nm^2$

- Escala de rigidez: $\lambda_{EI}=1:{scale_EI:.3E} $
'''.format(mod_I=mod_I, mod_EI=mod_EI, EI='{EI}', scale_EI=1/scale_EI))
```

- Momento de inércia de uma régua: $I = 2.150E - 12\, m^4$

- Rigidez à flexão de uma régua: $EI = 1.505E - 01Nm^2$

- Escala de rigidez: $\lambda_{EI} = 1 : 1.211E + 08$

Em relação à escala de acelerações (a) optou-se por manter a proporção $\lambda_a = 1 : 1$. Todavia, visto que o problema de vibração livre é independente da aceleração da gravidade essa poderia ser alterada.

```
scale_a = 1/1
```

Em posse das escalas impostas, para construção do modelo reduzido e realização da análise devem ser conhecidas as escalas derivadas necessárias, que são obtidas através de uma análise dimensional, onde a base da nova matriz dimensional será formada pelas grandezas L, EI e a. Fazendo uso da metodologia implementada por Rocha (2021), a base da matriz dimensional é alterada para a base L, EI e a:

```
# Importando DimData
DimData = pd.read_excel('../Resources/DimData.xlsx', index_col=0,␣
 ↪sheet_name='DimData')

# Grandezas fundamentais originais
LMT = ['L', 'M', 'T']

# Novas base de grandezas
ABC = ['L', 'EI', 'a']

# Importa matriz dimensional de ABC na base LMT
base = DimData.loc[ABC, LMT]
j2l.df2table(base, '{} na base {}'.format(','.join(ABC), ','.join(LMT)))

# Inverte base de unidades de LMT para ABC
base_i = pd.DataFrame(np.linalg.inv(base), index=LMT, columns=ABC)
j2l.df2table(base_i, '{} na base {}'.format(','.join(LMT), ','.
 ↪join(ABC)))
```

Tabela 1: L,EI,a na base L,M,T

	L	M	T
L	1	0	0
EI	3	1	-2
a	1	0	-2

Tabela 2: L,M,T na base L,EI,a

	L	EI	a
L	1.0	0.0	0.0
M	-2.0	1.0	-1.0
T	0.5	-0.0	-0.5

Para análise do modelo reduzido é necessário o conhecimento da escala de massa (λ_m), necessária para determinação das massas dos pavimentos, e a escala de frequências (λ_f), que relaciona as frequências de vibração do modelo reduzido e da estrutura real. Para a determinação de tais fatores essas grandezas devem estar presentes na matriz dimensional de base L, EI e a.

```
par = ABC + ['m', 'f']
npar = len(par)

DMat_LMT = DimData.loc[par, LMT]
DMat_ABC = np.matmul(DMat_LMT, base_i)
```

```
DMat_ABC.rename(columns=dict(zip(LMT, ABC)), inplace=True) # Renomeia␣
↪colunas para nova base
j2l.df2table(DMat_ABC, 'Matriz $D$  na base {}'.format(','.join(ABC)))
```

Tabela 3: Matriz D na base L,EI,a

	L	EI	a
L	1.0	0.0	0.0
EI	0.0	1.0	0.0
a	0.0	0.0	1.0
m	-2.0	1.0	-1.0
f	-0.5	0.0	0.5

Por fim, aplicando sobre a matriz **D** as escalas impostas tem-se a tabela de escalas:

```
escalas = np.array([scale_L, scale_EI, scale_a])
escalas = np.tile(escalas, (npar, 1))
escalas = np.prod(escalas**DMat_ABC, axis=1)
escalas = pd.DataFrame({'λ': escalas, '1/λ': 1/escalas}, index=par)
j2l.df2table(escalas, 'Fatores de escala')

j2l.print("""Escalas derivadas:

- Escala de massa: $\lambda_m = 1:{:.2E}$

- Escala de frequências: $\lambda_f = {:.3f}:1$""".format(escalas.
↪loc['m', '1/λ'], escalas.loc['f', 'λ']))
```

Tabela 4: Fatores de escala

	λ	1/λ
L	3.300000e-02	3.030303e+01
EI	8.256000e-09	1.211240e+08
a	1.000000e+00	1.000000e+00
m	7.581267e-06	1.319041e+05
f	5.504819e+00	1.816590e-01

Escalas derivadas:

- Escala de massa: $\lambda_m = 1 : 1.32E + 05$

- Escala de frequências: $\lambda_f = 5.505 : 1$

Para determinação da massa que os pavimentos do modelo reduzido devem possuir, a massa da estrutura real é cálculada e escalada por λ_m:

```
M_vigas   = est_Vb*est_Vh * est_LP * est_Vn * 2500
M_laje    = est_Lh * est_LP**2 * 2500
M_cargas  = est_cg * est_LP**2
M_pilares = est_Pb**2 * est_L * est_Pn * 2500

M_pavtipo = M_vigas + M_laje + M_cargas + M_pilares
M_pavcob  = M_vigas + M_laje + M_cargas + M_pilares/2

j2l.print("""Massas da estrutura:

- Massa dos pavimentos tipo: {:.1f} kg

- Massa do pavimento de cobertura {:.1f} kg""".format(M_pavtipo,␣
↪M_pavcob))
```

Massas da estrutura:

- Massa dos pavimentos tipo: 15685.0 kg

- Massa do pavimento de cobertura 14122.5 kg

Logo as massas dos pavimentos do modelo em escala deverão ser:

```
mod_m23 = M_pavtipo*escalas.loc['m', 'λ']
mod_m1  = M_pavcob*escalas.loc['m', 'λ']

j2l.print("""
Massas do modelo em escala:

- Massa dos pavimentos tipo: {:.3f} kg

- Massa do pavimento de cobertura {:.3f} kg""".format(mod_m23, mod_m1))
```

Massas do modelo em escala:

- Massa dos pavimentos tipo: 0.119 kg

- Massa do pavimento de cobertura 0.107 kg

3 Construção do modelo

Para construção do modelo são utilizados, além das réguas, perfis cantoneira de alumínio, com lado $3.20cm$ e espessura $0.18cm$, fita isolante, presilhas de papel e alguns metais para obtenção da massa cálculada. Pedaços do perfil cantoneira são utilizados para fixação da régua na base, formando um engaste de $\approx 3cm$. O modelo construído é apresentado na figura a seguir:

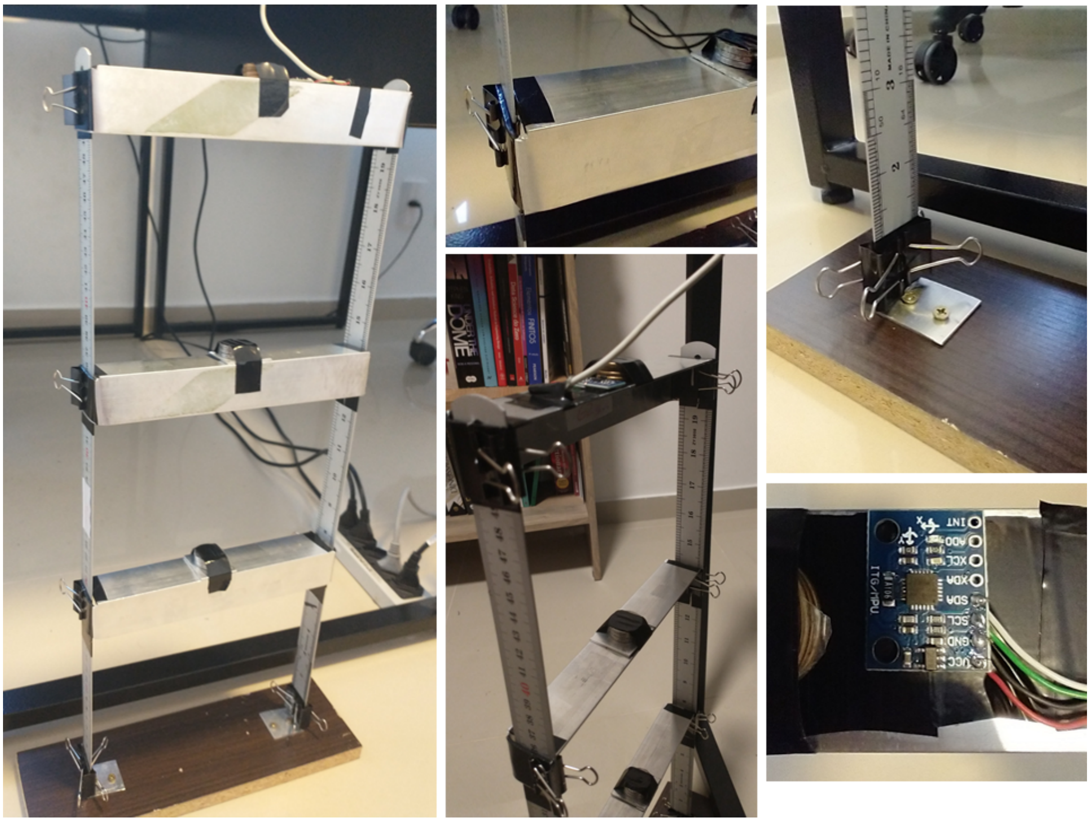


Figura 3: Modelo construído

Para determinação da massa dos pavimentos, a massa das duas réguas ($2 \times 37g$) é dividida pelos seus tamanhos ($52.5cm$), obtendo uma massa linear de $1.41g/cm$. Essa massa linear é aplicada sobre cada pavimento considerando que a massa dos pilares é dividida entre os pavimentos superiores e inferiores, dessa forma, a massa relativa às réguas aplicada sobre o pavimento da cobertura considera o comprimento de meio desnível ($8.25cm,\ 12g$), enquanto nos demais pavimentos é considerado o desnível completo ($16.5cm,\ 23g$).

A massa projetada para cada pavimento foi obtida posicionando sobre a balança a base do modelo com apenas as colunas instaladas. Conhecida a massa do modelo foi fixada a estrutura do pavimento seguinte e sua massa obtida pela diferença de massas. Esse processo foi adotado pois a balança utilizada não apresentou boa precisão para massas muito pequenas, e também pelo fato do cabo de conexão do acelerômetro estar conectado à uma mesa acima do modelo.

A massa média/aproximada dos elementos empregados no modelo são:

- $62g$ por pedaço de perfil cantoneira;
- $4g$ por presilha de papel;
- Na cobertura:

- $6g$ do acelerômetro;
- $12g$ relativos às régua;
- $19g$ de massa adicional;

- Nos demais pavimentos:
  - $23g$ relativos às régua;
  - $26g$ de massa adicional;

4 Determinação teórica das frequências de vibração

As frequências na qual o modelo deve vibrar podem ser obtidas matematicamente, para isso as matrizes de rigidez e de massa do modelo devem ser conhecidas. Esse processo é implementado em uma função para que a propagação de erro seja posteriormente avaliada, dessa forma:

```python
def freqs(EI, L1, L2, L3, m1, m2, m3):
    k1 = 12*EI/L1**3
    k2 = 12*EI/L2**3
    k3 = 12*EI/L3**3
    K = np.array([
        [+2*k1, -2*k1,       0],
        [-2*k1, +2*k1+2*k2, -2*k2],
        [    0, -2*k2,      +2*k2+2*k3]])

    M = np.diag(np.array([m1, m2, m3]))
    w21, _ = scipy.linalg.eig(K, M)

    iw = w21.argsort()
    w21 = w21[iw]
    wk = np.sqrt(np.real(w21))
    fk = wk/(2*np.pi)

    return fk
```

```python
fk = freqs(mod_EI, mod_L, mod_L, mod_L, mod_m1, mod_m23, mod_m23)
j2l.print("""Frequências naturais teóricas de vibração do modelo:

- $f_1 = {:.2f} Hz$

- $f_2 = {:.2f} Hz$

- $f_3 = {:.2f} Hz$""".format(*fk))
```

Frequências naturais teóricas de vibração do modelo:

- $f_1 = 5.99 Hz$

- $f_2 = 16.63Hz$

- $f_3 = 23.73Hz$

5 Análise de propagação de erro

Diversas incertezas estão presentes na construção do modelo reduzido, como a massa dos pavimentos, a rigidez à flexão das réguas, o real coeficiente de engastamento das ligações e a distância entre os pisos. Tratando tais incertezas como variáveis aleatórias pode-se estimar o erro propagado por essas nas frequências naturais.

Empregando a distribuição normal para todas as variáveis aleatórias os paramêtros adotados são:

- Módulo de elasticidade E do alumínio: $\mu_E = 70GPa$ com $CV_E = 0.05$, com CV baseado no valor adotado para o aço;
- Distâncias entre pavimentos $L1, L2, L3$ (3 variáveis diferentes): $\mu_L = 0.165m$ com $\sigma_L = 0.01m$, de forma a englobar possíveis problemas de posicionamento e tentar emular a flexibilidade dos engastes.
- Massa do pavimento da cobertura $m1$: $\mu_{m1} = 0.107kg$ com $\sigma_{m1} = 0.001kg$, visto que a balança tem precisão de $1g$;
- Massa dos demais pavimentos $m2$ e $m3$: $\mu_{m2,3} = 0.119kg$ com $\sigma_{m2,3} = 0.001kg$.

A largura e a espessura das réguas foram medidas com auxílio de um paquimetro e não apresentaram divergências, dessa forma, são adotados para essas propriedades valores constantes. Cabe observar que a resolução do equipamento é $0.01mm$, de forma que o coeficiente de variação das variáveis seria $CV \leq 0.01$.

Dessa forma, através do método de simulação por Monte Carlo:

```
def properro(Ns):
    # Variáveis aleatórias
    dist_E   = st.norm(mod_E,   mod_E*0.05)
    dist_L1  = st.norm(mod_L,   0.01)
    dist_L2  = st.norm(mod_L,   0.01)
    dist_L3  = st.norm(mod_L,   0.01)
    dist_m1  = st.norm(mod_m1,  0.001)
    dist_m23 = st.norm(mod_m23, 0.001)

    # fixa semente
    np.random.seed(66681186)

    # Coloca tudo em um dataframe
    dados = pd.DataFrame()
```

```
    dados['EI']  = mod_I*dist_E.rvs(Ns)
    dados['L1']  = dist_L1.rvs(Ns)
    dados['L2']  = dist_L2.rvs(Ns)
    dados['L3']  = dist_L3.rvs(Ns)
    dados['m1']  = dist_m1.rvs(Ns)
    dados['m23'] = dist_m23.rvs(Ns)

    # Cálcula frequências e armazena no dataframe também
    #dados['f1'], dados['f2'], dados['f3']
    res = np.array(list(map(freqs, dados['EI'].values, dados['L1'].
↪values, dados['L2'].values, dados['L3'].values, dados['m1'].values,␣
↪dados['m23'].values, dados['m23'].values)))

    dados['f1'], dados['f2'], dados['f3'] = res[:, 0], res[:, 1], res[:
↪, 2]

    return dados
```

Realizando 100.000 simulações tem-se:

```
sims = properro(100_000)
```

```
# Configura saída do pandas
pd.set_option('display.float_format', lambda x: f'{x:.3E}')
# Calcula CV
desc_geral = sims.describe().loc[['mean', 'std', 'min', 'max']].T
desc_geral['CV'] = desc_geral['std']/desc_geral['mean']
desc_geral = desc_geral.T
# Printa
j2l.df2table(desc_geral[['EI', 'L1', 'L2', 'L3', 'm1', 'm23']],␣
 ↪'Descrição geral dos dados de entrada','tab:descE')
j2l.df2table(desc_geral[['f1', 'f2', 'f3']], 'Descrição geral das␣
 ↪frequências naturais', 'tab:descf')
```

Tabela 5: Descrição geral dos dados de entrada

	EI	L1	L2	L3	m1	m23
mean	1.505E-01	1.650E-01	1.650E-01	1.650E-01	1.071E-01	1.189E-01
std	7.510E-03	9.970E-03	9.982E-03	9.997E-03	1.001E-03	9.962E-04
min	1.157E-01	1.203E-01	1.227E-01	1.222E-01	1.028E-01	1.146E-01
max	1.804E-01	2.058E-01	2.090E-01	2.072E-01	1.113E-01	1.235E-01
CV	4.990E-02	6.043E-02	6.050E-02	6.059E-02	9.351E-03	8.377E-03

Tabela 6: Descrição geral das frequências naturais

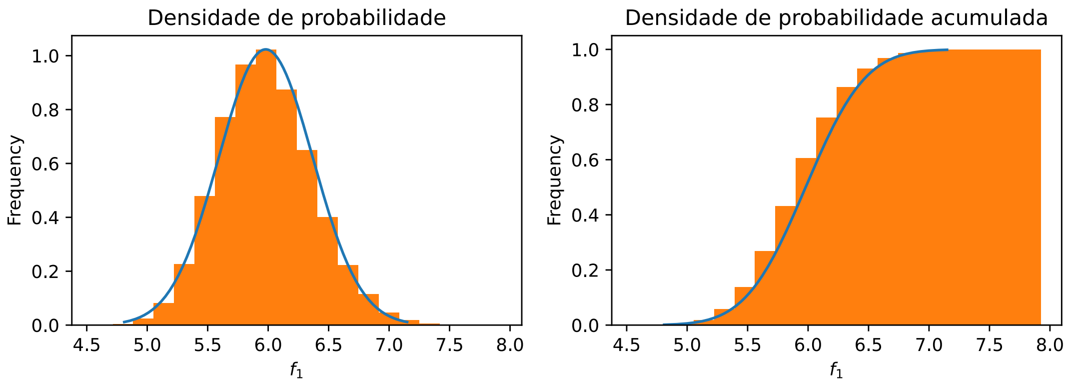
	f1	f2	f3
mean	5.980E+00	1.663E+01	2.406E+01
std	3.898E-01	1.060E+00	1.601E+00
min	4.546E+00	1.289E+01	1.843E+01
max	7.928E+00	2.210E+01	3.312E+01
CV	6.519E-02	6.371E-02	6.653E-02

Na tabela 6 são apresentadas as propriedades estatísticas das variáveis aleatórias que representam as três frequências da estrutura.

Comparando os dados simulados da primeira frequência à uma distribuição normal tem-se:

```
dist_f1 = st.norm(desc_geral['f1']['mean'], desc_geral['f1']['std'])
x = np.linspace(-3*desc_geral['f1']['std'] +   desc_geral['f1']['mean'],
                          desc_geral['f1']['mean']+ 3*desc_geral['f1']['std'],␣
 ↪200)

plt.figure(num=0, figsize=(10,3))
# Hstograma simples
ax1 = plt.subplot(1,2,1)
ax1.set_title('Densidade de probabilidade')
ax1.plot(x, dist_f1.pdf(x))
sims['f1'].plot(kind='hist', density=True, bins=20)
ax1.set_xlabel('$f_1$')

# Hstograma acumulado
ax1 = plt.subplot(1,2,2)
ax1.set_title('Densidade de probabilidade acumulada')
ax1.plot(x, dist_f1.cdf(x))
sims['f1'].plot(kind='hist', density=True, bins=20, cumulative=True)
ax1.set_xlabel('$f_1$')
```

```
Text(0.5, 0, '$f_1$')
```



Logo a primeira frequência f_1 pode ser representada por uma distribuição normal.

6 Leitura e análise do sinal

Para leitura e processamento das acelerações são utilizados um Arduino Uno, um acelerômetro MPU6050 e os códigos desenvolvidos por Rocha (2021), onde foram introduzidas pequenas alterações. Essencialmente os códigos são transformados em uma única função onde as acelerações são lidas, reescaladas, reamostradas (fixando o time step) e gravadas/lidas em um registro. Conforme:

```
def Acelr(nlines, arq=None, port='COM3', baud=115200):
    # Le arquivo antigo
    if nlines == 0:
        print(f'Lendo dados anteriores de `registros\\{arq}.xlsx`.')
        data = MRPy.from_file(f'registros\\{arq}', form='excel')
        return data

    #--------------
    # Inicia conexão
    Ardn  =  serial.Serial(port, baud, timeout=1)

    # Função que faz leitura
    def ReadSerial(nchar, nvar, nlines):
        Ardn.write(str(nlines).encode())
        data = np.zeros((nlines,nvar))
        for k in range(nlines):
            wait = True
            while(wait):
                if (Ardn.inWaiting() >= nchar):
                    wait = False
                    bdat = Ardn.readline()
                    sdat = bdat.decode()
                    sdat = sdat.replace('\n',' ').split()
                    data[k, :] = np.array(sdat[0:nvar], dtype='int')
        return data

    # Precisa deixar tipo 1 segundo para realizar conexão.
    # No caso aumentei o tempo para facilitar na hora da excitação.
    # OBS: A luz TX do arduino acende quando a conexão está ligada!
    print("Wait for it...")
    time.sleep(4)
    print("Reading, go!")

    try:
        data = ReadSerial(30, 4, nlines)
        t    = data[:,0 ]
```

```
        acc  = data[:,1:]

        Ardn.close()
        print('Acquisition ok!')

        # Ajusta escala dos dados
        ti  = (t - t[0])/1000
        a   =  2*9.81*acc/2**15
        # Fixa tamaho do timestep
        data = MRPy.resampling(ti, a)
        print('Average sampling rate is {0:5.1f}Hz.'.format(data.fs))

        if arq:
            # Salva dados
            print(f'Salvando dados em `registros\\{arq}.xlsx`.')
            data.to_file(f'registros\\{arq}', form='excel')

        # Entrega dados processados
        return data

    except:
        Ardn.close()
        sys.exit('Acquisition failure!')
```

Ao total foram realizadas 3 medições excitando o primeiro modo e 1 excitando todos os modos, todas através de impulsos laterais. Visto que movimento esperado do modelo está alinhado com o eixo X do acelerômetro as medições nas outras direção foram removidas da etapa de processamento de dados.

6.1 Excitação do primeiro modo

Conforme determinado anteriormente, a frequência teórica de vibração do primeiro modo é $5.99Hz$. Através da análise de propagação de erro foram ainda determinados para a primeira frequência $\mu_{f1} = 5.98Hz$ e $\sigma_{f1} = 0.39Hz$.

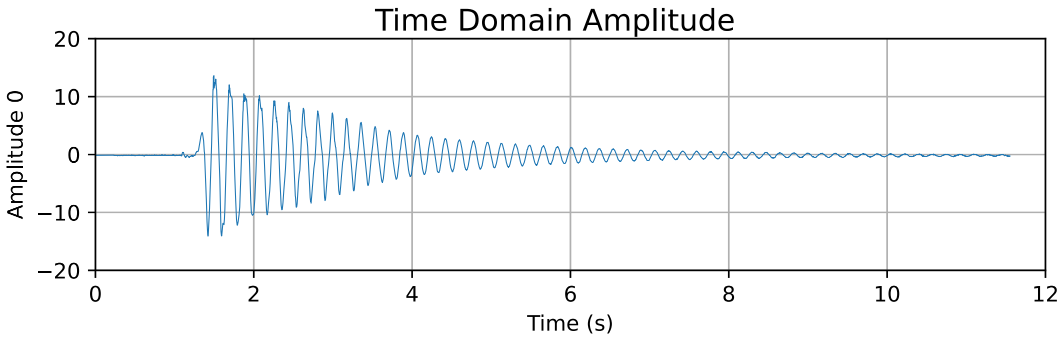
Plotando as 3 medições de aceleração pelo tempo tem-se:

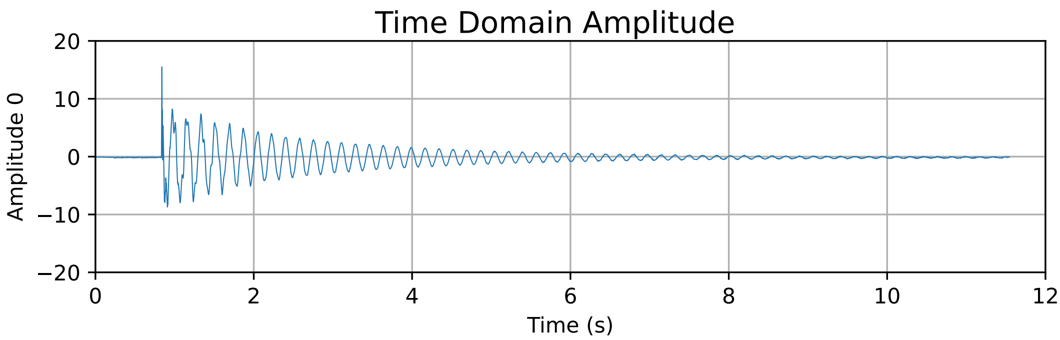
```
med = Acelr(0, arq="med11ok")
med11 = MRPy(med[0], Td=med.Td)

med = Acelr(0, arq="med12ok")
med12 = MRPy(med[0], Td=med.Td)

med = Acelr(0, arq="med13ok")
med13 = MRPy(med[0], Td=med.Td)
```

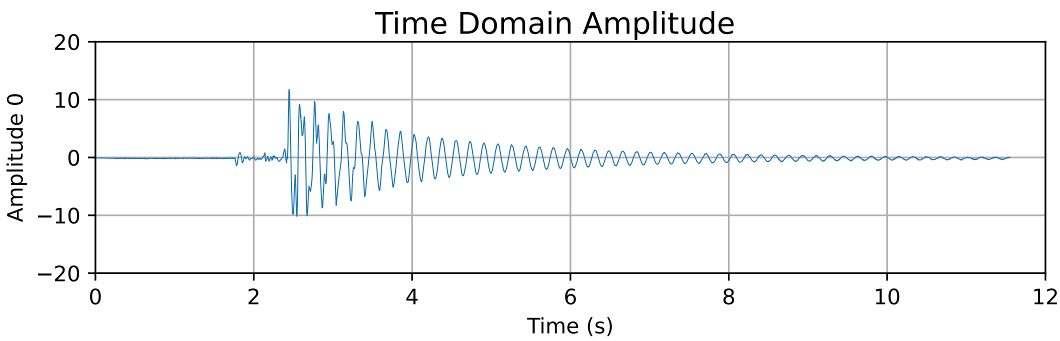
```
Lendo dados anteriores de `registros\med11ok.xlsx`.
Lendo dados anteriores de `registros\med12ok.xlsx`.
Lendo dados anteriores de `registros\med13ok.xlsx`.
```

```
med11.plot_time(fig=3, figsize=(8,2), axis_t=[0,12,-20,20])
med12.plot_time(fig=4, figsize=(8,2), axis_t=[0,12,-20,20])
med13.plot_time(fig=5, figsize=(8,2), axis_t=[0,12,-20,20])
```

```
[[<matplotlib.lines.Line2D at 0x28cf5cc9130>]]
```



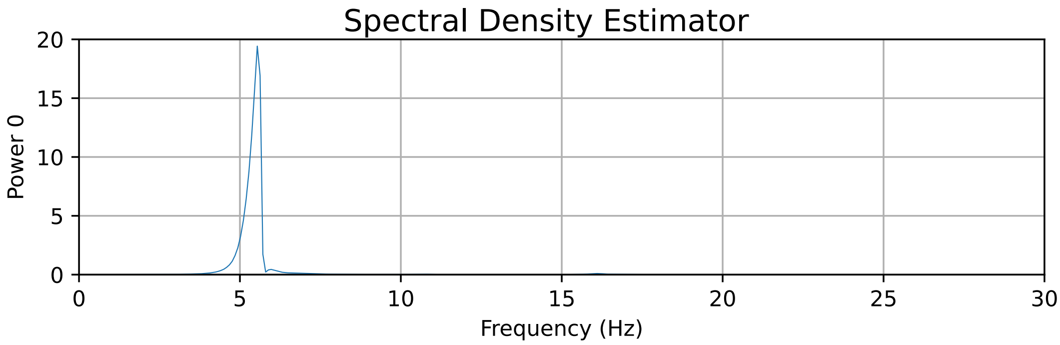


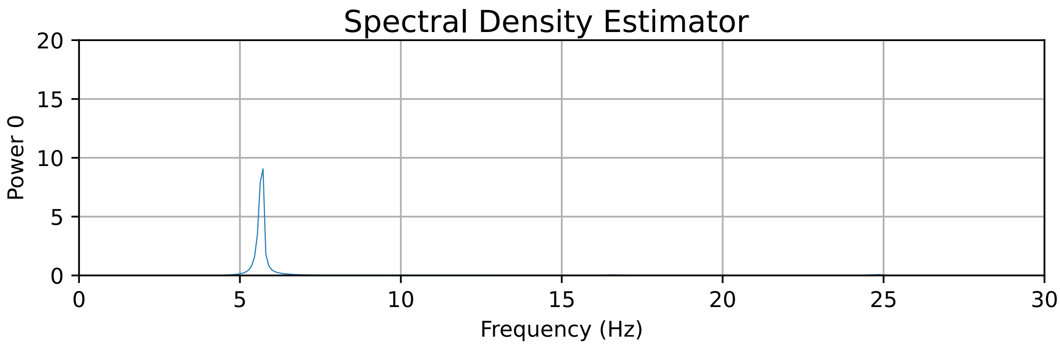


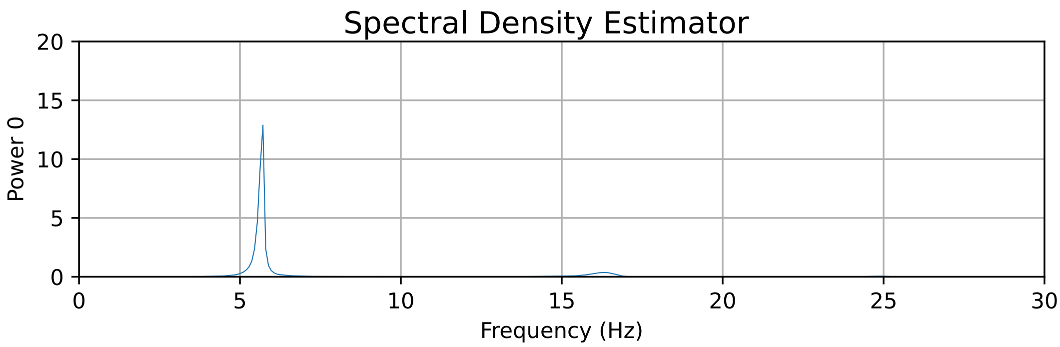
Enquanto plotando os periodogramas tem-se:

```
med11.plot_freq(fig=3, figsize=(8,2), axis_f=[0,30,0,20])
med12.plot_freq(fig=4, figsize=(8,2), axis_f=[0,30,0,20])
med13.plot_freq(fig=5, figsize=(8,2), axis_f=[0,30,0,20])
```

```
[[<matplotlib.lines.Line2D at 0x28cf5d6d0d0>]]
```



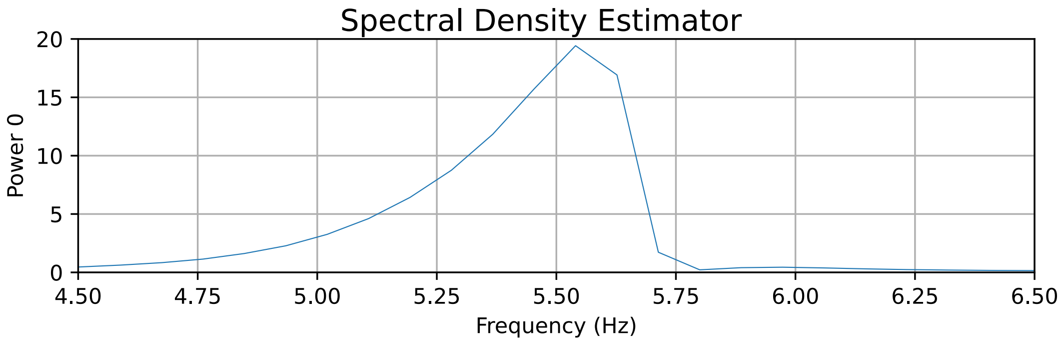


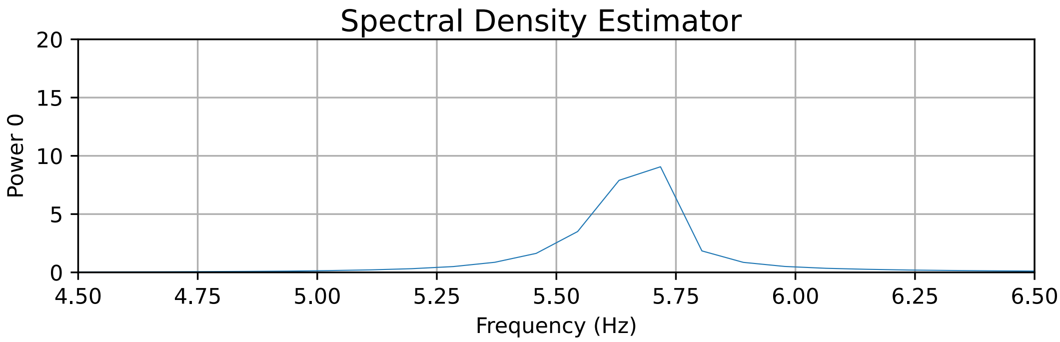


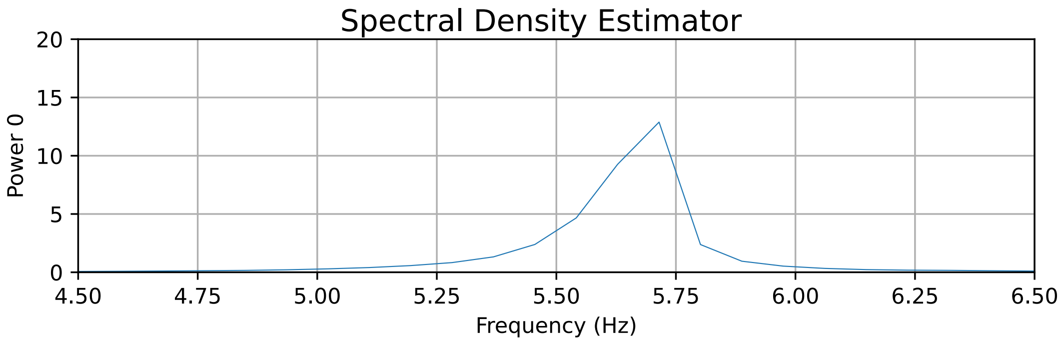
Ampliando na região do pico de energia tem-se:

```
med11.plot_freq(fig=3, figsize=(8,2), axis_f=[4.5,6.5,0,20])
med12.plot_freq(fig=4, figsize=(8,2), axis_f=[4.5,6.5,0,20])
med13.plot_freq(fig=5, figsize=(8,2), axis_f=[4.5,6.5,0,20])
```

```
[[<matplotlib.lines.Line2D at 0x28cf5f39c10>]]
```







Pela primeira medição, de maior energia, o pico é observado na frequência de $5.6Hz$, enquanto nas demais esse está em aproximadamente $5.7Hz$. Em todos os casos é ainda observado um intervalo de frequências atuantes, que cresce com o aumento da energia atuante no modo. Comparando os valores observados aos estimados pela propagação de erro esses estão cerca de $1 \times \sigma$ e $0.7 \times \sigma$ abaixo do valor esperado.

Adotando como frequência fundamental do modelo $5.7Hz$ e aplicando sobre esse o fator de escala de frequências λ_f tem-se:

```
j2l.print("Frequência fundamental da estrutura obtida a partir do modelo reduzido: $$f_1 = {:.2f} Hz$$".format(5.7/escalas.loc['f','λ']))
```

Frequência fundamental da estrutura obtida a partir do modelo reduzido:

$$f_1 = 1.04Hz$$

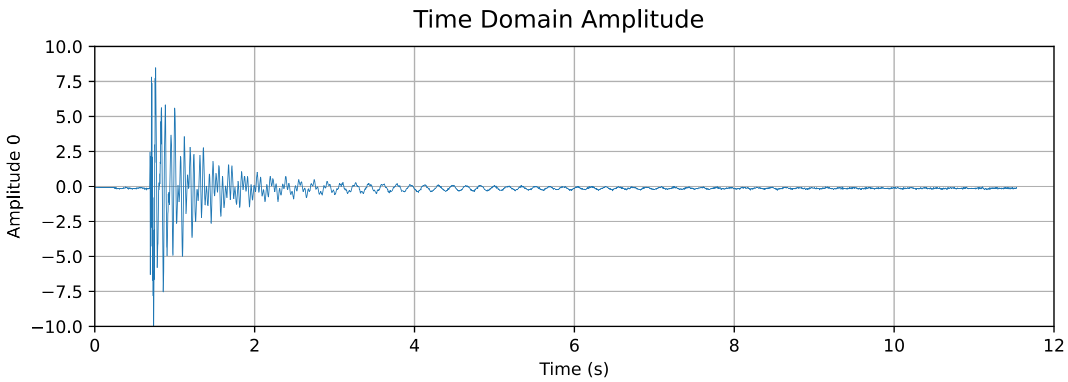
6.2 Excitação de todos os modos

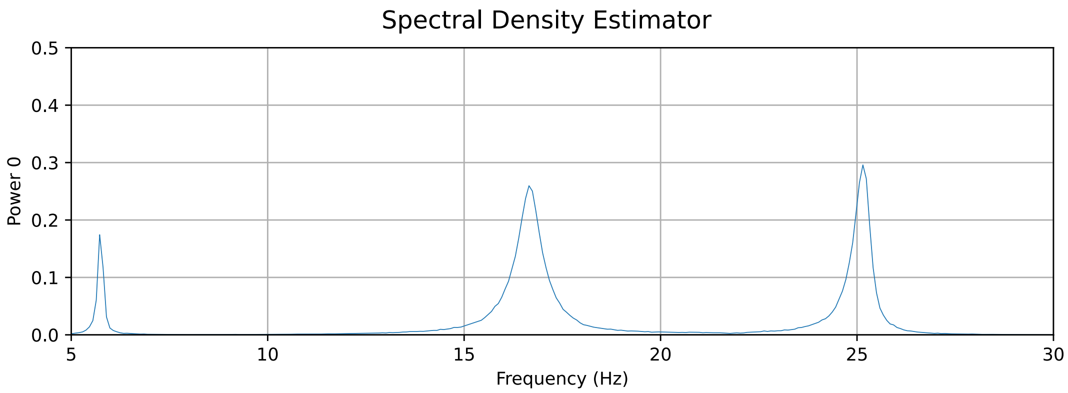
Por tratar-se de um *shear building* de 3 pavimentos a estrutura apresenta 3 frequências teoricas de vibração. Através de um impulso próximo à base foram excitados os 3 modos e medidas as acelerações do modelo. Nas figuras a seguir são apresentadas as acelerações e o periodograma de uma dessas medições:

```
med = Acelr(0, arq="med22ok")
med21 = MRPy(med[0], Td=med.Td)

med21.plot_time(fig=3, figsize=(10,3), axis_t=[0,12,-10,10])
med21.plot_freq(fig=4, figsize=(10,3), axis_f=[5,30,0,0.5])
```

```
Lendo dados anteriores de `registros\med22ok.xlsx`.
```

```
[[<matplotlib.lines.Line2D at 0x28cf610f5e0>]]
```

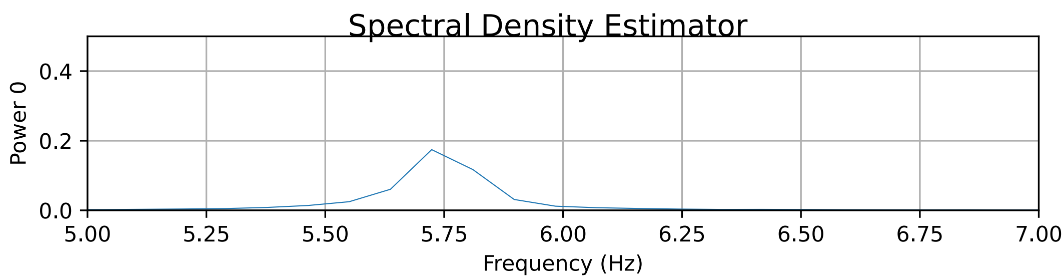


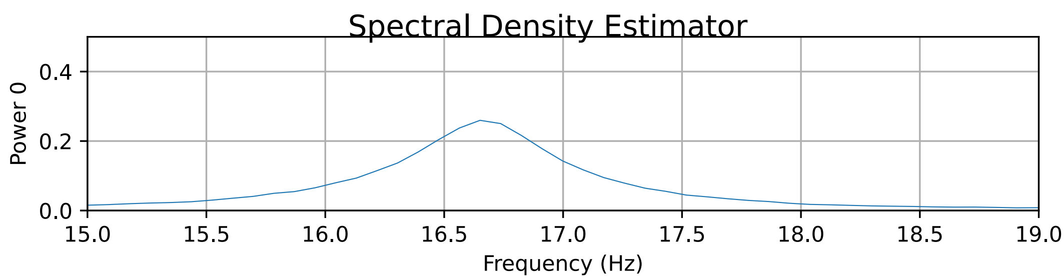


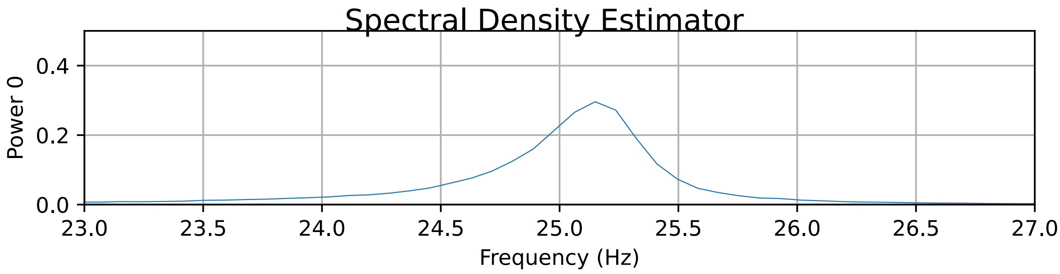
No primeiro gráfico, de acelerações, é nítida a presença de mais de uma frequência no sinal. Através do periodograma são então observadas as três frequências atuantes no sinal, de aproximadamente 6, 17 e 25 Hz. Ampliando a região dos picos tem-se:

```
med21.plot_freq(fig=4, figsize=(8,1.5), axis_f=[5,7,0,0.5])
med21.plot_freq(fig=5, figsize=(8,1.5), axis_f=[15,19,0,0.5])
med21.plot_freq(fig=6, figsize=(8,1.5), axis_f=[23,27,0,0.5])
```

```
[[<matplotlib.lines.Line2D at 0x28cf5b733d0>]]
```







Observa-se que a primeira frequência medida é de cerca de $5.7Hz$, a segunda de $16.7Hz$ e a terceira de $25.2Hz$. Comparando essas às obtidas pela análise de propagação de erro observa-se que todas estão no intervalo de até 1 desvio padrão ($1 \times \sigma$). Observa-se ainda que a segunda frequência medida é a mais próxima da frequência teórica, enquanto a primeira medida é menor, e a terceira é maior.

Aplicando sobre as frequências estimadas o fator de escala de frequências λ_f tem-se:

```
j2l.print("""Demais frequências da estrutura obtidas a partir do modelo␣
↪reduzido:
$$f_2 = {:.2f} Hz$$
$$f_3 = {:.2f} Hz$$
""".format(16.7/escalas.loc['f', 'λ'], 25.2/escalas.loc['f', 'λ']))
```

Demais frequências da estrutura obtidas a partir do modelo reduzido:

$$f_2 = 3.03Hz$$

$$f_3 = 4.58Hz$$

7 Considerações finais

Para fins de comparação as frequências teóricas de vibração da estrutura real podem ser determinadas através da função programada anteriormente:

```
est_fk = freqs(est_EI*2, est_L, est_L, est_L, M_pavcob, M_pavtipo,␣
↪M_pavtipo)
# EI*2 pq código considera 2 pilares e estrutura tem 4

j2l.print("""Frequências naturais teóricas de vibração da estrutura:

- $f_1 = {:.2f} Hz$

- $f_2 = {:.2f} Hz$

- $f_3 = {:.2f} Hz$""".format(*est_fk))
```

Frequências naturais teóricas de vibração da estrutura:

- $f_1 = 1.09Hz$

- $f_2 = 3.02Hz$

- $f_3 = 4.31Hz$

Observa-se que as frequências teóricas da estrutura real são condizentes com as frequências do modelo reduzido escaladas por λ_f, validando seu projeto. Ao comparar as frequências esperadas, obtidas da análise de propagação de erro, às medidas experimentalmente, são observados resultados satisfatórios, com erros inferiores à 1 desvio padrão.

Conclui-se então que o uso de modelos reduzidos e de equipamentos de baixo custo, como o Arduino Uno e o acelerômetro MPU6050, são ferramentas poderosas para realização de ensaios experimentais.

8 Referencias

Rocha, M. M. **PEC00144 - Experimental Methods in Civil Engineering**, 2021. Disponível em: `https://github.com/mmaiarocha/PEC00144`.