Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PEC00144 - Métodos Experimentais em Engenharia Civil

Trabalho 2

Eduardo Pagnussat Titello

Novembro de 2020

Este trabalho tem por objetivo: no tema de interesse, adotar um problema imaginário de formulação explícita, com 2 ou mais parâmetros dimensionais. Desenhar, formular e definir uma nova escala para o problema, fazendo uma análise de mudança de escala de forma a poder construir tal modelo.

```
# Importando e configurando módulos
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
#import matplotlib
%config InlineBackend.figure_format = 'svg' # Muda backend do jupyter␣
↪para SVG ;)
import jupyter2latex as j2l # Uma maneira que encontrei para tabelas␣
↪ficarem ok (github.com/dutitello/Jupyter2Latex)
from math import pi
```

1 Apresentação do problema

O problema adotado consiste na avaliação das duas primeiras frequências naturais de vibração de um poste em concreto armado, considerando seu comportamento como elástico linear. O poste adotado tem comprimento efetivo $L = 12m$, seção constante de diâmetro externo $d_e = 50cm$ e espessura $e = 6cm$, resultando em um diâmetro interno $d_i = 38cm$, conforme a figura:

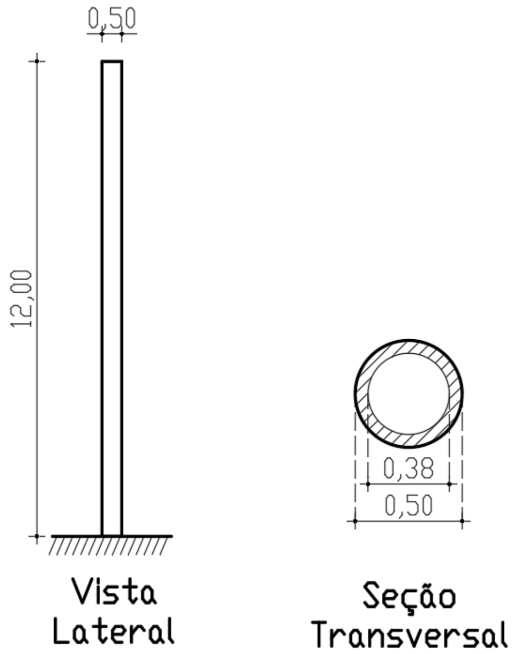

Figura 1: Poste

Conforme Rocha (2020a), as frequências naturais de vibração de uma viga engastada livre (modelo adotado para o poste) podem ser obtidas por 1:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu_L}} \tag{1}$$

onde, para as duas primeiras frequências naturais, $\alpha_1 = 1.88$ e $\alpha_2 = 4.69$, respectivamente, e μ_L é a massa linear da estrutura (massa/comprimento).

A área da seção transversal circular vazada A e seu momento de inércia I são dados por:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(d_e^2 - d_i^2\right) \tag{2}$$

$$I = \frac{\pi}{64}\left(d_e^4 - d_i^4\right) \tag{3}$$

Adotando o subíndice "$_c$" para representar a estrutura real em concreto, sendo empregado concreto da classe C25, o módulo de elasticidade do material é $E_c = 28GPa$, enquanto sua densidade é aproximadamente $\rho_c = 2500kg/m^3$. As propriedades da estrutura original são então:

```python
L_c   = 12.0   # m
de_c  = 0.50   # m
di_c  = 0.38   # m
E_c   = 28.0E9 # N/m^2
rho_c = 2500   # kg/m^3

A_c   = pi/4*(de_c**2 - di_c**2)  # m^2
I_c   = pi/64*(de_c**4 - di_c**4) # m^4

EI_c  = E_c*I_c   # Nm^2
muL_c = A_c*rho_c # kg/m
m_c   = muL_c*L_c # kg

print(f'''
Propriedades da estrutura:
    Área da seção              A_c = {A_c:.3f} m^2
    Momento de Inércia         I_c = {I_c:.3E} m^4
    Rigidez EI              (EI)_c = {EI_c:.3E} N.m^2
    Massa linear              µL_c = {muL_c:.2f} kg/m
    Massa total                m_c = {m_c:.2f} kg
''')
```

```
Propriedades da estrutura:
    Área da seção              A_c = 0.083 m^2
    Momento de Inércia         I_c = 2.044E-03 m^4
    Rigidez EI              (EI)_c = 5.724E+07 N.m^2
    Massa linear              µL_c = 207.35 kg/m
    Massa total                m_c = 2488.14 kg
```

2 Definição do modelo reduzido

Conforme a expressão 1, as frequências naturais da estrutura são dependentes do seu comprimento L, da sua rigidez à flexão EI e da sua massa linear μ_L. Em relação às dimensões, o fator de escala adotado é 1:25. Adotando um modelo reduzido em alumínio, com módulo de elasticidade $E_m = 70GPa$ e densidade $\rho_m = 2700kg/m^3$, os demais fatores de escala adotados são relativos à rigidez EI e a massa linear μ_L.

Os fatores de escala EI e μ_L devem considerar perfis de alumínio comercialmente viáveis, dessa forma, é adotado o perfil cilindrico cheio VR-002 da Aluita (Aluita, 2019), de diâmetro externo $d_{e,m} = 6.00mm$. O perfil cilíndrico cheio é adotado de forma a reduzir as frequências naturais do modelo reduzido, visto que esse possuí razão EI/μ_L menor que os perfis tubulares da marca (TR-002 e TR-004). Os fatores de escala são então obtidos relacionando as propriedades da seção do modelo à seção do poste:

```python
# Perfil tubular TR-004
#de_m  = 12.70/1000 # m
#di_m  = 10.22/1000 # m
# Perfil tubular TR-002
#de_m  = 9.53/1000  # m
#di_m  = 6.35/1000  # m
# Perfil cilíndrico VR-002
de_m  = 6/1000     # m
di_m  = 0/1000     # m
E_m   = 70.0E9     # N/m^2
rho_m = 2700       # kg/m^3

A_m   = pi/4*(de_m**2 - di_m**2)  # m^2
I_m   = pi/64*(de_m**4 - di_m**4) # m^4
EI_m  = E_m*I_m    # Nm^2
muL_m = A_m*rho_m  # kg/m

print(f'''
Propriedades do modelo reduzido:
    Área da seção             A_m = {A_m:.3E} m^2
    Momento de Inércia        I_m = {I_m:.3E} m^4
    Rigidez EI             (EI)_m = {EI_m:.3E} N.m^2
    Massa linear             µL_m = {muL_m:.2E} kg/m
''')
```

```
Propriedades do modelo reduzido:
    Área da seção             A_m = 2.827E-05 m^2
    Momento de Inércia        I_m = 6.362E-11 m^4
    Rigidez EI             (EI)_m = 4.453E+00 N.m^2
    Massa linear             µL_m = 7.63E-02 kg/m
```

```python
escala_L   = 1/25
escala_muL = muL_m/muL_c
escala_EI  = EI_m/EI_c

print(f'''
Fatores de escala impostos:
    Comprimento      L = 1:{1/escala_L:.3E}
    Massa linear    µL = 1:{1/escala_muL:.3E}
    Rigidez         EI = 1:{1/escala_EI:.3E}
''')
```

```
Fatores de escala impostos:
    Comprimento      L = 1:2.500E+01
    Massa linear    µL = 1:2.716E+03
    Rigidez         EI = 1:1.285E+07
```

3 Análise do modelo reduzido

A interpretação dos resultados do modelo reduzido requer que sua resposta seja escalada de forma à corresponder à estrutura real. Para obtenção de tal fator de escala, a base fundamental do sistema de unidades deve corresponder aos dimensionais das escalas impostas, dessa forma o sistema L, M, T (comprimento, massa, tempo) é inicialmente transformado em um sistema de base L, μ_L, EI (comprimento, massa linear, rigidez EI), denominado no código como ABC. Fazendo uso da metodologia implementada em Rocha (2020b):

```
# Importando DimData
DimData = pd.read_excel('../resources/DimData.xlsx',
                         index_col  =  0,
                         sheet_name = 'DimData')


# Unidades fundamentais originais
LMT = ['L', 'M', 'T']

# Novas unidades fundamentais
ABC = ['L', 'μL', 'EI']

# Importa matriz dimensional de ABC na base LMT
base = DimData.loc[ABC, LMT]
j2l.df2table(base, 'L, μL, EI na base L, M, T')

# Inverte base de unidades de LMT para ABC
base_i = pd.DataFrame(np.linalg.inv(base), index=LMT, columns=ABC)
j2l.df2table(base_i, 'L, M, T na base L, μL, EI')
```

Tabela 1: L, µL, EI na base L, M, T

	L	M	T
L	1	0	0
µL	-1	1	0
EI	3	1	-2

Tabela 2: L, M, T na base L, µL, EI

	L	µL	EI
L	1.0	0.0	0.0
M	1.0	1.0	0.0
T	2.0	0.5	-0.5

Conforme 1, os parâmetros dimensionais relacionados as frequências naturais de vibração f são L, μ_L e EI, sendo que L, μ_L e EI são impostos, enquanto f é mantido livre.

Formando a matriz dimensional **D** do problema no sistema ABC, considerando ainda, a titulo de verificação, a massa m, temos que:

```
par = ['f', 'L', 'µL', 'EI', 'm']
npar = len(par)

DMat_LMT = DimData.loc[par, LMT]
DMat_ABC = np.matmul(DMat_LMT, base_i)
DMat_ABC.rename(columns=dict(zip(LMT, ABC)), inplace=True) # Renomeia␣
↪colunas para nova base
j2l.df2table(DMat_ABC, 'Matriz D na base L, µL, EI')
```

Tabela 3: Matriz D na base L, µL, EI

	L	µL	EI
f	-2.0	-0.5	0.5
L	1.0	0.0	0.0
µL	0.0	1.0	0.0
EI	0.0	0.0	1.0
m	1.0	1.0	0.0

Através da matriz dimensional **D** no sistema ABC os parâmetros de escala podem ser calculados:

```
# Ok, não é "bonito" isso de ficar fazendo escala=f(escala)...
escalas = np.array([escala_L, escala_muL, escala_EI])
escalas = np.tile(escalas, (npar, 1))
escalas = np.prod(escalas**DMat_ABC, axis=1)
escalas = pd.DataFrame({'λ': escalas, '1/λ': 1/escalas}, index=par)
j2l.df2table(escalas, 'Fatores de escala')
```

Tabela 4: Fatores de escala

	λ	1/λ
f	9.084917e+00	1.100726e-01
L	4.000000e-02	2.500000e+01
µL	3.681818e-04	2.716049e+03
EI	7.779366e-08	1.285452e+07
m	1.472727e-05	6.790123e+04

Observa-se então que as escalas impostas estão de acordo, e, que as frequências naturais de vibração do modelo reduzido são 9.08 vezes maiores que as da estrutura, enquanto sua massa é 1/67901 da massa do poste original.

4 Validação do modelo reduzido

A validade do modelo em escala pode ser verificada pela expressão 1. Para isso o comprimento L_m do modelo reduzido deve ser determinado, enquanto as demais propriedades foram determinadas anteriormente.

```
L_m = L_c * escalas.loc['L', 'λ']
print(f'Comprimento do modelo reduzido  L_m = {L_m:.3f} m')
```

```
Comprimento do modelo reduzido  L_m = 0.480 m
```

Aplicando os parâmetros do modelo reduzido na função analítica e a correspondente correção na escala de frequências:

```
def fn(L, EI, muL):
    fns = 1/(2*pi) * 1/L**2 * (EI/muL)**0.5
    fn1 = 1.88**2 * fns
    fn2 = 4.69**2 * fns
    return fn1, fn2

fn_m = fn(L_m, EI_m, muL_m)
fn_m_esc = np.array(fn_m) * escalas.loc['f', '1/λ']

print(f'''
Frequências naturais de vibração do modelo reduzido:
    f_1 = {fn_m[0]:.3f} Hz
    f_2 = {fn_m[1]:.3f} Hz

Frequências naturais de vibração do poste:
    (obtidos através do fator de escala 1:{escalas.loc['f', '1/λ']:.3f}␣
 ↪ou {escalas.loc['f', 'λ']:.3f}:1)
    f_1 = {fn_m_esc[0]:.3f} Hz
    f_2 = {fn_m_esc[1]:.3f} Hz
''')
```

```
Frequências naturais de vibração do modelo reduzido:
    f_1 = 18.647 Hz
    f_2 = 116.049 Hz

Frequências naturais de vibração do poste:
    (obtidos através do fator de escala 1:0.110 ou 9.085:1)
    f_1 = 2.053 Hz
    f_2 = 12.774 Hz
```

Aplicando agora os parâmetros da estrutura real na função analítica:

```
fn_c = fn(L_c, EI_c, muL_c)

print(f'''
```

```
Frequências naturais de vibração do poste:
    f_1 = {fn_c[0]:.3f} Hz
    f_2 = {fn_c[1]:.3f} Hz
''')
```

```
Frequências naturais de vibração do poste:
    f_1 = 2.053 Hz
    f_2 = 12.774 Hz
```

Logo o modelo em escala representa corretamente as frequências do poste.

Visto que escala de massa linear μ_L foi imposta, a massa do modelo reduzido é a massa de um trecho de tamanho L_m do perfil de alumínio adotado, aplicando sobre essa a escala de massa calculada λ_m, a massa do poste real deve então ser encontrada, conforme:

```
m_m     = muL_m * L_m
m_m_esc = m_m * escalas.loc['m', '1/λ']

print(f'''
Comparação das massas:
    Massa do poste                        m_c = {m_c:.3f} kg
    Massa do modelo reduzido              m_m = {m_m:.3f} kg
    Massa escalada do modelo reduzido   m_m_esc = {m_m_esc:.3f} kg
''')
```

```
Comparação das massas:
    Massa do poste                        m_c = 2488.141 kg
    Massa do modelo reduzido              m_m = 0.037 kg
    Massa escalada do modelo reduzido   m_m_esc = 2488.141 kg
```

Logo o modelo em escala está corretamente definido.

5 Referências Bibliográficas

Aluita - Alumínio Porto Alegre Ltda. **Catálogo de Perfis 2019/2020**, 2020. Disponível em: https://aluita.com.br/wp-content/uploads/2020/01/Cat%C3%A1logo-Perfil-2019.pdf.

Rocha, M. M. **PEC00025 - Introduction to Vibration Theory**, 2020a. Disponível em: https://github.com/mmaiarocha/PEC00025.

Rocha, M. M. **PEC00144 - Experimental Methods in Civil Engineering**, 2020b. Disponível em: https://github.com/mmaiarocha/PEC00144.