Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Кафедра інформатики та програмної інженерії

Звіт

з лабораторної роботи № 3 з дисципліни
«Алгоритми та структури даних-1.
Основи алгоритмізації»

«Циклічні алгоритми»

Варіант 13

Виконав студент ІП-43 Дутов Іван Андрійович

Перевірила Вітковська Ірина Іванівна

Київ 2024

Лабораторна робота №3
ЦИКЛІЧНІ АЛГОРИТМИ

Задача. Обчислити з точністю ε наближене значення функції $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ за формулою:

$$S = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{x^9}{9} - \cdots$$

Математична постановка

З математичної точки зору, ми повинні:

1. Довести, що задана формула дійсна для певної області визначення.
2. Знайти цю саму область визначення формули.
3. Створити алгоритм для обчислення формули з точністю ε.

Задача 1

Доведення. Помітимо, що:

$$\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Існує відома формула для розкладу бінома в ряд Тейлора при $x_0 = 0$:

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}z^3 + \cdots$$

доказів якої наводити не будемо, бо це займе **половину** лабораторної роботи (але в інтернеті є доведення). В нашому випадку $f(x) = (1+x^2)^{-1/2}$, тобто $z = x^2$ та $n = -1/2$, отримаємо:

$$\begin{aligned}
(1+x^2)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 \\
&\quad + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^6 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{4!}x^8 + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^8\cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8\cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}x^8 + \cdots
\end{aligned}$$

Помітимо, що $\ln(0+\sqrt{1+0^2}) = \ln 1 = 0$. Тоді:

$$\begin{aligned}
\ln(x+\sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}t^6 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}t^8 + \cdots\right)dt \\
&= x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{x^9}{9} + \cdots
\end{aligned}$$

що повністю співпадає з формулою, даною в завданні. Доведення завершено. $\square$

Задача 2

Тепер ми повинні зрозуміти, у яких випадках наша послідовність сходиться, а в яких ні. Так як це степенева послідовність, то можна застосувати ознаку д'Аламбера (ratio test):

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Причому, коли $L < 1$, то ряд сходиться, коли $L > 1$, то не сходиться, а при $L = 1$ ознака не дає результату. У нашому випадку:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}x^2\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{4n^2-4n+1}{4n^2+2n}x^2\right| = \left|-\frac{4}{4}x^2\right| = x^2
\end{aligned}$$

Таким чином, ряд сходиться при $x^2 < 1$ тобто $x \in (-1, 1)$. Додатково слід перевірити точки $\{1, -1\}$ на сходимість для алгоритму, що використовуватимемо в подальшому, бо може виявитись їхня сходимість.

Задача 3

Аби обчислити наближене значення $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ при заданій точності ε, ми сумуватимемо усі доданки розкладу даної формули. Кожен додаток знаходитимемо завдяки рекурентному співвідношенню, що вивели, виявляючи сходимість ряду (задача 2):

$$a_{n+1} = -\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}x^2\cdot a_n$$

Алгоритм розв'язання задачі буде таким:

1. Як результат записати $S := x$
2. Початкове наближення a ми беремо число x як перший член нашого розкладу
3. Номер останнього опрацьованого доданка $n := 1$
4. Перевірити істинність рівності $|a| > \varepsilon$. Якщо вона є істинною, перейти до кроку 5, інакше перейти до кроку 8.
5. Знаходимо наступний доданок $a := -\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}x^2\cdot a$
6. Обчислюємо нову суму $S := S + a$
7. Збільшуємо номер на одиницю $n := n + 1$
8. Записати значення S.

Оскільки нам невідомо, скільки доданків потребується, будемо використовувати ітераційний цикл. Програмну специфікацію напишемо у псевдокоді та графічній формі у вигляді блок-схеми.

Табл. 1: Таблиця імен змінних

Змінна	**Тип**	**Ім'я**	**Призначення**
Результат	Дійсний	res	Кінцевий результат
Нинішній доданок	Дійсний	cur	Допоміжна змінна
Номер останнього опрацьованого доданка	Додатний цілий	n	Допоміжна змінна

Крок 1. Визначимо основні дії.

Крок 2. Уточнимо дію встановлення початкових значень змінних res та cur.

Крок 3. Уточнимо дію знаходження приблизного значення $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Псевдокод

Крок 1

1. **Початок**.
2. **Ввід** x.
3. **Ввід** ε.
4. Встановити початкові значення змінним res та cur.
5. Знаходження значення $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
6. **Вивід** res.
7. **Кінець.**

Крок 2

1. **Початок**.
2. **Ввід** x.
3. **Ввід** ε.
4. $res := x$
5. $cur := x$
6. Знаходження значення $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
7. **Вивід** res.
8. **Кінець.**

Крок 3

1. **Початок**.

2. **Ввід** x.

3. **Ввід** ε.

4. $res := x$.

5. $cur := x$.

6. **Поки** $|cur| > \varepsilon$,
   Повторити

   6.1 $cur := -\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}x^2 \cdot cur$.

   6.2 $res := res + cur$.

   6.3 $n := n + 1$

   6.4 **Вивід** «Сума n доданків рівна res.»

   Все повторити.

7. **Вивід** res.

8. **Кінець.**

Блок-схеми алгоритму

Рис. 1: Крок 1

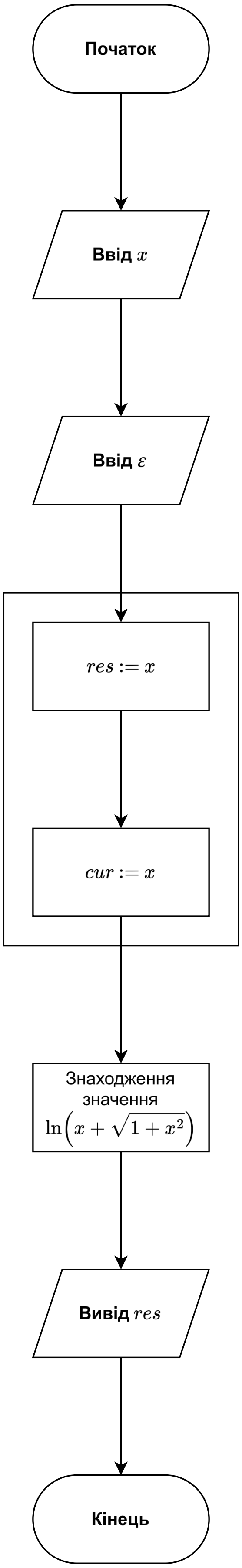
Початок
Ввід x
Ввід ε
$res := x$
$cur := x$
Знаходження
значення
$\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
Вивід res
Кінець

Рис. 2: Крок 2

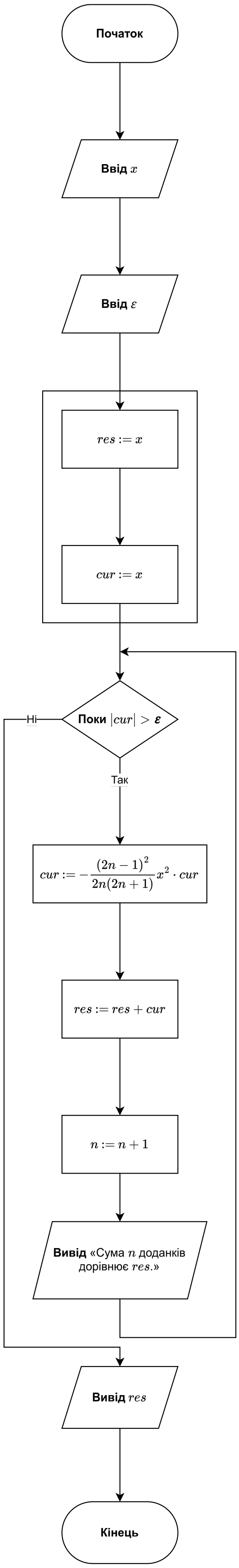
Початок
Ввід x
Ввід ε
$res := x$
$cur := x$
Поки $|cur| > \varepsilon$
Ні
Так
$cur := -\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}x^2 \cdot cur$
$res := res + cur$
$n := n + 1$
Вивід «Сума n доданків дорівнює res.»
Вивід res
Кінець

Рис. 3: Крок 3

Перевірка правильності алгоритму для $x = 1$ з точністю $\varepsilon = 0.03$

1. $res := 1$
2. $cur := 1$
3. $n := 1$
4. $cur := -\frac{(2\cdot1-1)^2}{2\cdot1\cdot(2\cdot1+1)} \cdot 1^2 \cdot 1 = -\frac{1}{6}$
5. $res := 1 + (-\frac{1}{6}) = \frac{5}{6}$
6. $n := 1 + 1 = 2$
7. $|-\frac{1}{6}| > 0.03$ істина, тому переходимо до п. 4
8. $cur := -\frac{(2\cdot2-1)^2}{2\cdot2\cdot(2\cdot2+1)} \cdot 1^2 \cdot (-\frac{1}{6}) = -\frac{9}{20}(-\frac{1}{6}) = \frac{3}{40}$
9. $res := \frac{5}{6} + \frac{3}{40} = \frac{109}{120}$
10. $n := 2 + 1 = 3$
11. $|\frac{3}{40}| > 0.03$ істина, тому переходимо до п.8
12. $cur := -\frac{(2\cdot3-1)^2}{2\cdot3\cdot(2\cdot3+1)} \cdot 1^2 \cdot (\frac{3}{40}) = -\frac{25}{42} \cdot \frac{3}{40} = -\frac{5}{112}$
13. $res := \frac{109}{120} + (-\frac{5}{112}) = \frac{1451}{1680}$
14. $n := 3 + 1 = 4$
15. $|-\frac{5}{112}| > 0.03$ істина, тому переходимо до п.12
16. $cur := -\frac{(2\cdot4-1)^2}{2\cdot4\cdot(2\cdot4+1)} \cdot 1^2 \cdot (-\frac{5}{112}) = -\frac{49}{72} \cdot (-\frac{5}{112}) = \frac{35}{1152}$
17. $res := \frac{1451}{1680} + \frac{35}{1152} = \frac{36049}{40320}$
18. $n := 4 + 1 = 5$
19. $|\frac{35}{1152}| > 0.03$ істина, тому переходимо до п.16
20. $cur := -\frac{(2\cdot5-1)^2}{2\cdot5\cdot(2\cdot5+1)} \cdot 1^2 \cdot (\frac{35}{1152}) = -\frac{81}{110} \cdot (\frac{35}{1152}) = -\frac{63}{2816}$
21. $res := \frac{36049}{40320} - \frac{63}{2816} = \frac{773233}{887040}$
22. $n := 5 + 1 = 6$
23. $|\frac{35}{1152}| > 0.03$ хиба, тому переходимо до п. 24
24. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \approx res = 0.87170026154$

Справжнє значення $\ln(1 + \sqrt{1 + 1^2}) = 0.881373587$. Справді, похибка була меншою за ε.

Код програми мовою C

```c
#include <math.h>
#include <stdio.h>

int main() {
  long double x;
  long double e;

  printf(
      "Введіть значення x для підстановки в формулу ln(x + sqrt(1 + x^2)): \n");

  if (scanf("%Lf", &x) != 1 || x > 1 || x < -1) {
    printf("ПОМИЛКА: x має бути числом між 1 та -1 включно.\n");
    return 1;
  }

  printf("Введіть точність e для приблизного обчислення формули:\n");
  if (scanf("%Lf", &e) != 1 || e <= 0) {
    printf("ПОМИЛКА! Точність e повинна бути додатнім числом!\n");
    return 1;
  }

  unsigned int decimal_places = (unsigned int)ceil(-log10l(e));

  long double result = x;
  long double cur = x;
  int n = 1;

  do {
    cur *=
        (-1.0L) * x * x * (2 * n - 1) * (2 * n - 1) / (2.0 * n * (2.0 * n + 1));
    result += cur;
    n++;
    printf("Сума %u доданків рівна %.*Lf\n", n, decimal_places, result);
  } while (fabsl(cur) > e);

  printf("Приблизний результат обчислень: %.*Lf.\n", decimal_places, result);

  return 0;
}
```

Висновок

Ми дослідили подання операторів повторення дій та набули практичних навичок їх використання під час складання циклічних програмних специфікацій на прикладі ітеративного обчислення $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ з точністю ε.