Introdução a Teoria dos Grafos

Paulo Vinícius Moreira Dutra[1]

[1]IF Sudeste MG – Campus Muriaé

Sistemas Inteligentes, 2022

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Sumário

- **Parte I**
  - Primeiros conceitos
  - Aplicações
  - Exercícios

Parte I

- Primeiros conceitos
- Aplicações
- Exercícios

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Primeiros conceitos

- Um grafo(**G**) é um conjunto finito de vértices(**V**) e arestas (**E**) de pares não ordenados. Matematicamente um grafo é representado por **G(V,E)**.

V={1,2,3,4,5,6}

E={(1,2),(1,3),(3,2),(3,6),(5,3),(5,1),
(5,6),(4,6),(4,5),(6,1),(6,2),(3,4)}

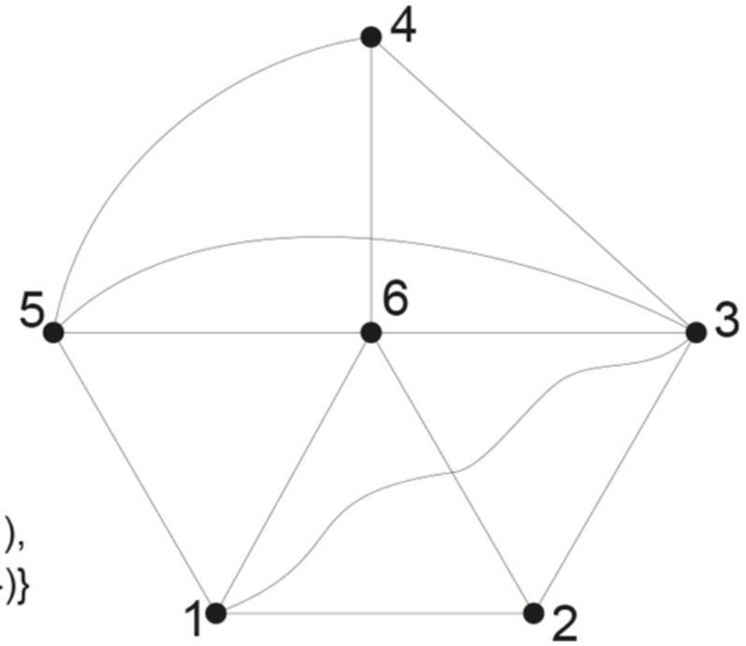


Figura: Representação geométrica de um G(V,E)

Primeiros conceitos

- Há grafos de diversos tipos. Como os grafos de laços(a), onde ***e* = *(v,v)***, onde, uma aresta é forma por um mesmo par de vértices. Temos também o multigrafo(b) com arestas paralelas entre o mesmo par de vértices.

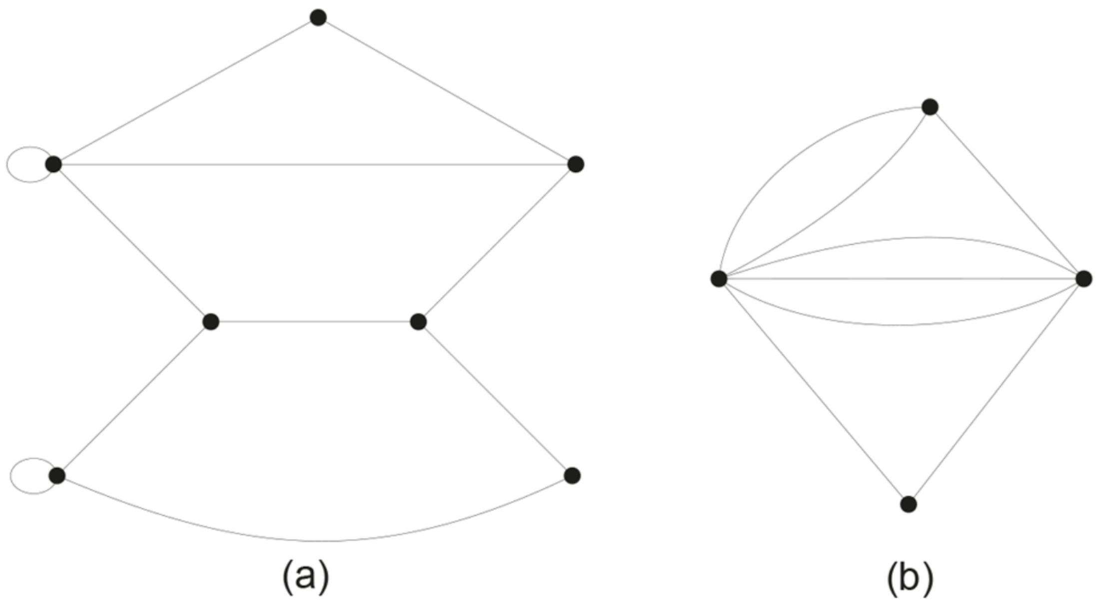


Figura: Grafo com laços e multigrafo

Primeiros conceitos

- Um grafo é considerado simples se não possui loops ou arestas paralelas. Existe somente uma única aresta para cada vértice.

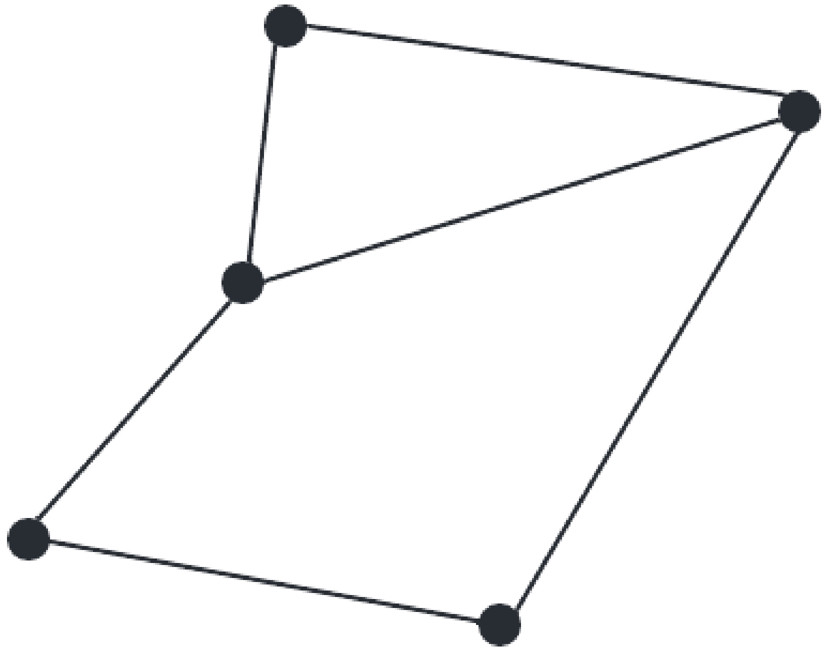


Figura: Grafo simples

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Primeiros conceitos

- Um grafo é dito nulo se o conjunto de arestas é vazio.

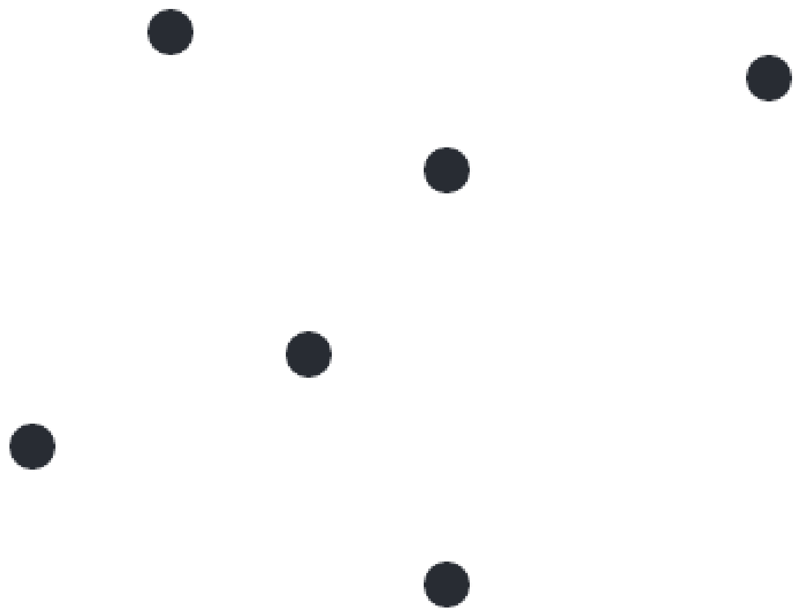


Figura: Grafo nulo

Primeiros conceitos

- Grafos conexos é quando existe caminho entre cada par de vértice G, senão é desconexo

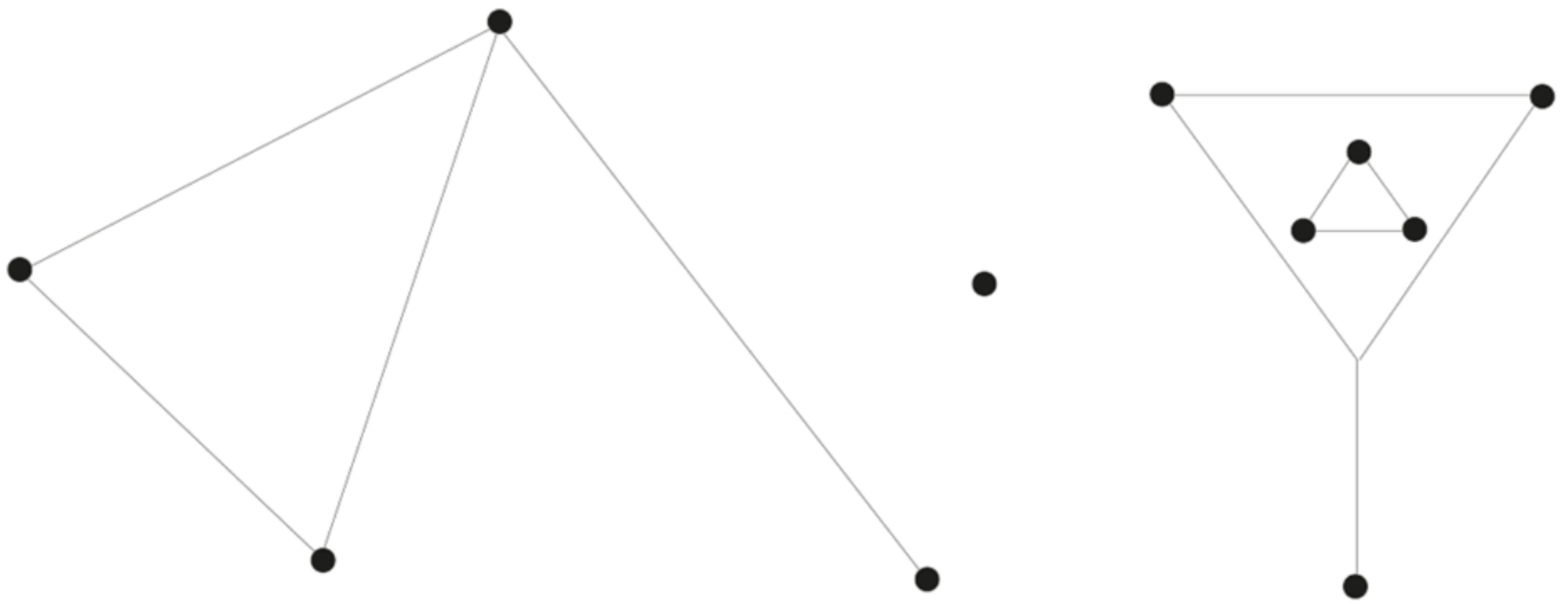


Figura: Grafo desconexo

Dígrafos – Grafos direcionados

- Os grafos vistos anteriormente são denominados de não direcionados, ou seja, não existe uma ordem. Neste caso, seja um par de vértices $(v\,,w) \in V$ (que pertence ao conjunto de vértices) eles são adjacentes.

V={1,2,3,4,5,6}

E={(1,2),(1,3),(3,2),(3,6),(5,3),(5,1),
(5,6),(4,6),(4,5),(6,1),(6,2),(3,4)}

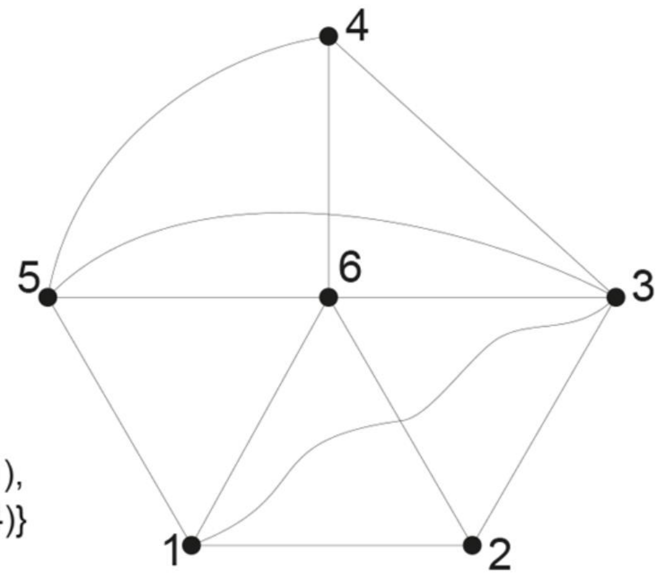


Figura: Grafo não-direcionado

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Dígrafos – Grafos direcionados

- Em dígrafos, grafos direcionados $D(V,E)$, possui um conjunto finito de vértices, e um conjunto de arestas ordenadas.

- Em dígrafos, um par de vértices $(v\,,w) \in V$ somente é adjacente de $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ nunca de $\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{v}$. Entenda que, $\boldsymbol{v}$ é a origem e $\boldsymbol{w}$ é o destino.

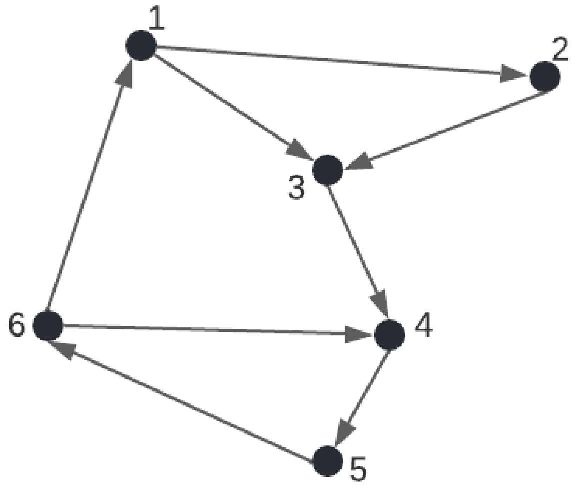


Figura: Grafo direcionado

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (4,5),$$
$$(5,6), (6,1), (6,4)\}$$

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

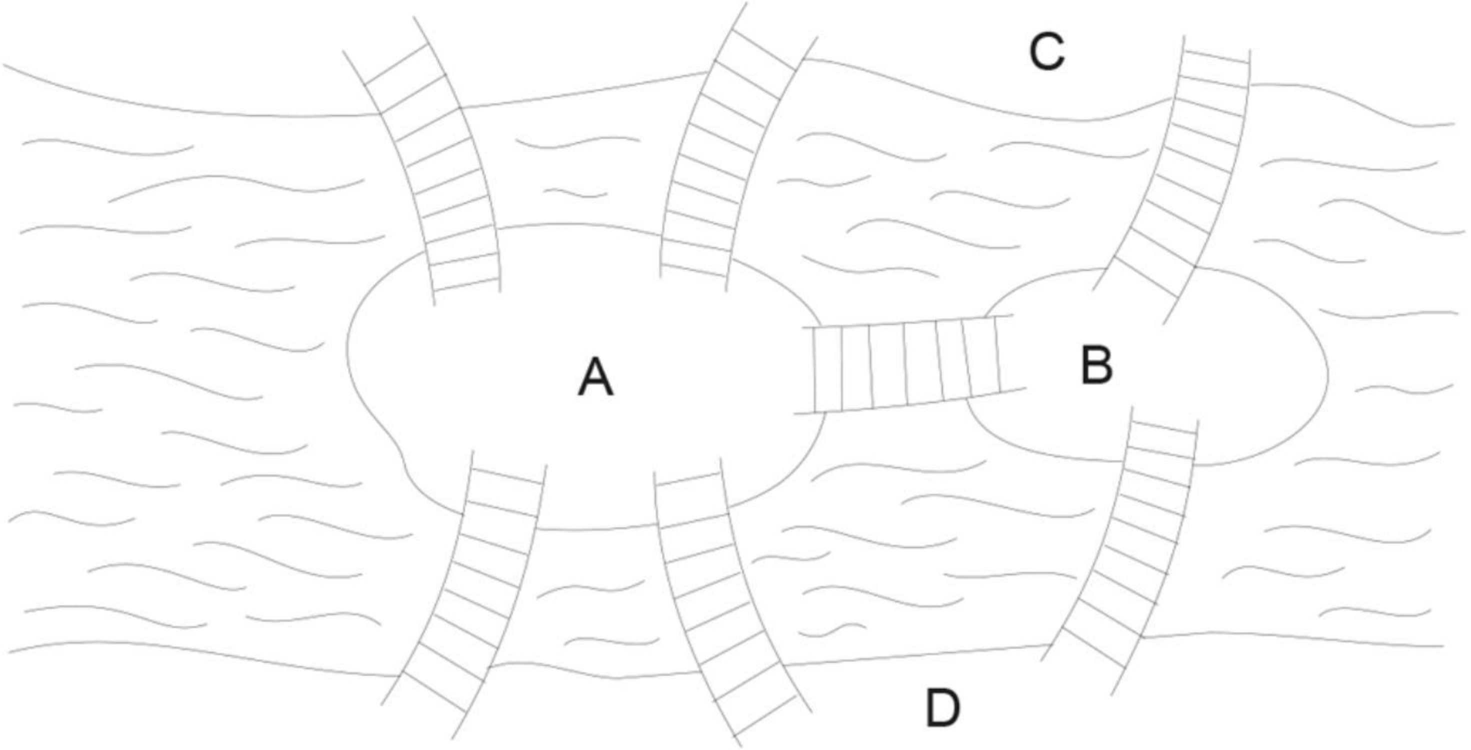
Primeiros conceitos

- Na **Teoria de Grafos** podemos entender é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Aplicações - Problema da ponte de Königsberg

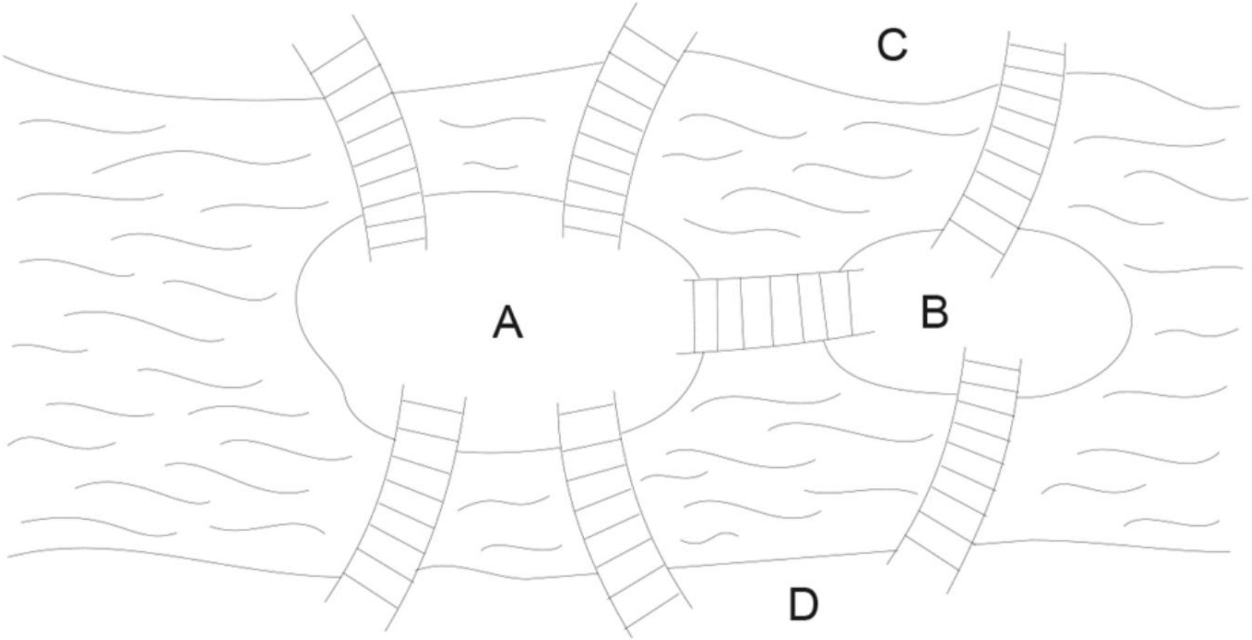
- O problema da ponte de Konigsberg (Prússia): A partir de um ponto inicial passar por todas as pontes sem repetir até achegar ao ponto inicial.



INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

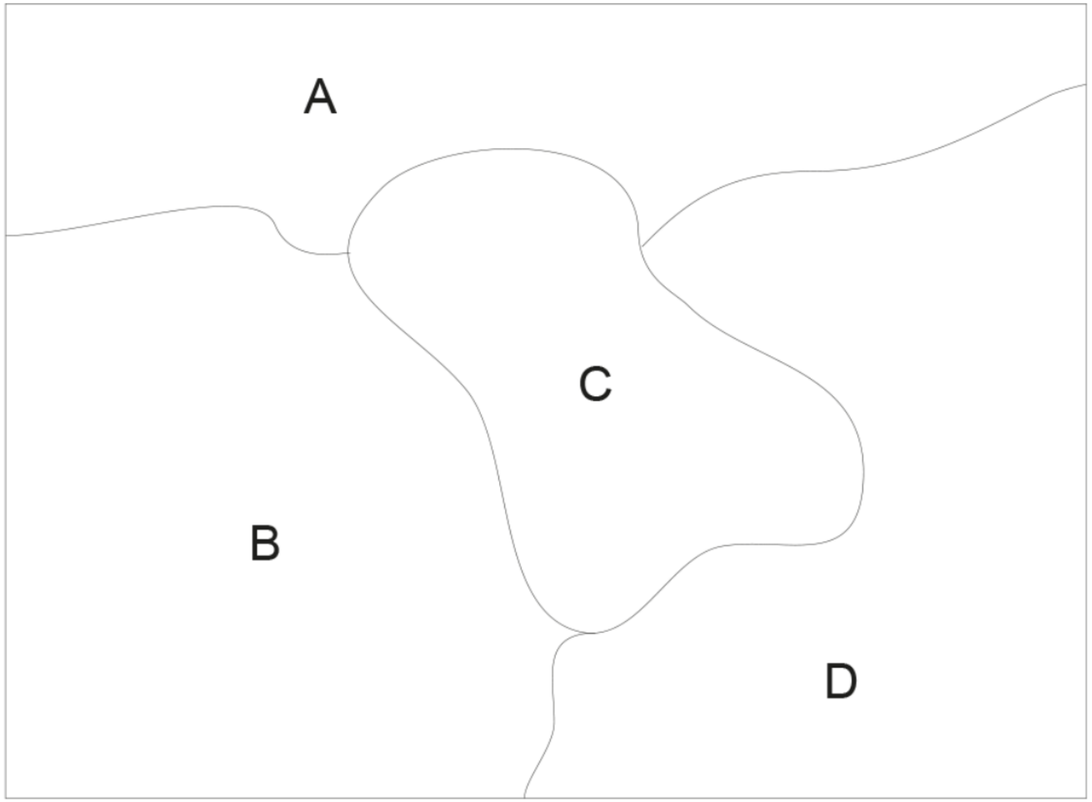
Aplicações - Problema da ponte de Königsberg

- Euler em 1736 provou que não existe o trajeto ao utilizar um modelo de grafos para generalizar o problema. Segundo Euler, somente é possível quando região possuir um número par de pontes.



Aplicações - Problema das 4 cores

- Colorir um mapa cada um com uma cor, de tal forma que países fronteiros possuam cores diferentes



INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Aplicações

- Ambos os problemas apresentados, foram os que deram inicio a teoria dos grafos com o objetivo de resolver um problema matematicamente dado um conjunto.

- Na literatura existem diversos outros problemas, tais como o do cacheiro viajante. Esse problema consiste em preparar um roteiro de viajem, no qual, cada cidade seja visitada apenas uma única vez até retornar a cidade de origem.

    - Caso exista uma rota, qual delas minimiza o trecho viajado?

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Exercícios:

- Desenhe os seguinte grafos e os classifique:
  - Grafo A
    - V = {v1, v2, v3, v4,v5}
    - E = {(v1,v2), (v1,v3), (v2,v4), (v3,v4), (v4,v5), (v1,v2), (v2,v2)}
  - Grafo B
    - V = {a, b, c, d}
    - E = {(a, b), (a, a), (b, a), (c, d), (c, c), (d,b), (d,c)}

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Exercícios:

- Desenhe os seguinte grafos e os classifique:
  - Grafo C
    - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    - $E = \{\}$
  - Grafo D
    - $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
    - $E = \{(1,2), (1,1), (3,4), (3,4), (4,5), (1,2), (2,2), (5,6)\}$

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Exercícios:

- Considerem que existam 3 casas e que cada uma delas precisa ser ligada ao sistema de eletricidade, gás e água. Pôr questões de segurança, deseja-se saber se é possível fazer as ligações sem que haja cruzamento das tubulações. Represente este problema através de um grafo.
    - Faça o problema para 2 casas e 3 serviços.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Sumário

- **Parte II**
  - Representação dos grafos

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Representação dos grafos

- Os grafos podem ser representados de duas estruturas diferentes:
  - **Matriz de Adjacências**. Utilizado com grafos densos, ou seja, com muitas arestas.
  - **Listas de Adjacência:** É a forma mais utilizada, pois fornece uma forma mais fácil de manipular os grafos. Forma utilizada em grafos esparsos, ou seja, com poucas arestas. Mas também pode ser utilizados com grafos densos.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Representação dos grafos

- **Matriz de Adjacências:** As colunas e linhas da matriz representam os vértices do grafo. As matrizes de adjacências de grafo $G(V, E)$ possui dimensões $n\ x\ n$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

Figura: Matrizes de adjacências

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Representação dos grafos – Não direcionados

- Para grafos não-direcionados a matriz de adjacência possui dimensão simétrica:

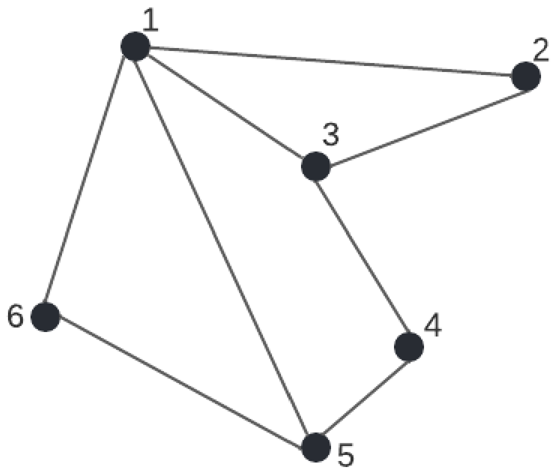


Figura: Grafo não-direcionado

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	1	1
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	0
5	1	0	0	1	0	1
6	1	0	0	0	1	0

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E\ \{(1,2), (1,3), (1,5), (1,6), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,1), (5,4), (5,6), (6,1), (6,5)\}$

Representação dos grafos – Dígrafos

- Para grafos direcionados as linhas são a origem e as colunas são o destino:

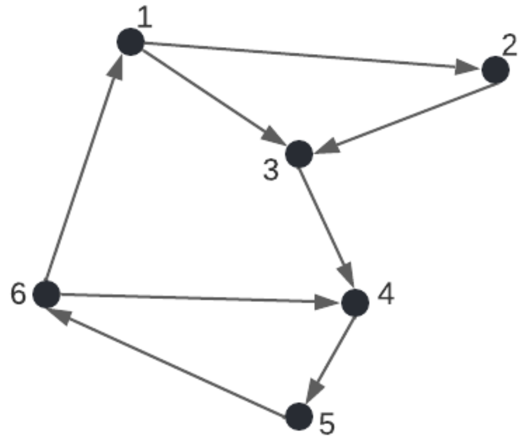


Figura: Grafo direcionado

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	1	0	0

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E\ \{(1{,}2), (1{,}3), (1{,}5), (2{,}3), (3{,}4),$

$(4{,}5), (5{,}6), (6{,}1)\ \}$

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé

Representação dos grafos

- **Lista de Adjacências:** A lista é uma das formas mais simples de se implementar. Em relação a matriz que é necessário saber a quantidade de vértices, na lista, não sofre com esse problema.

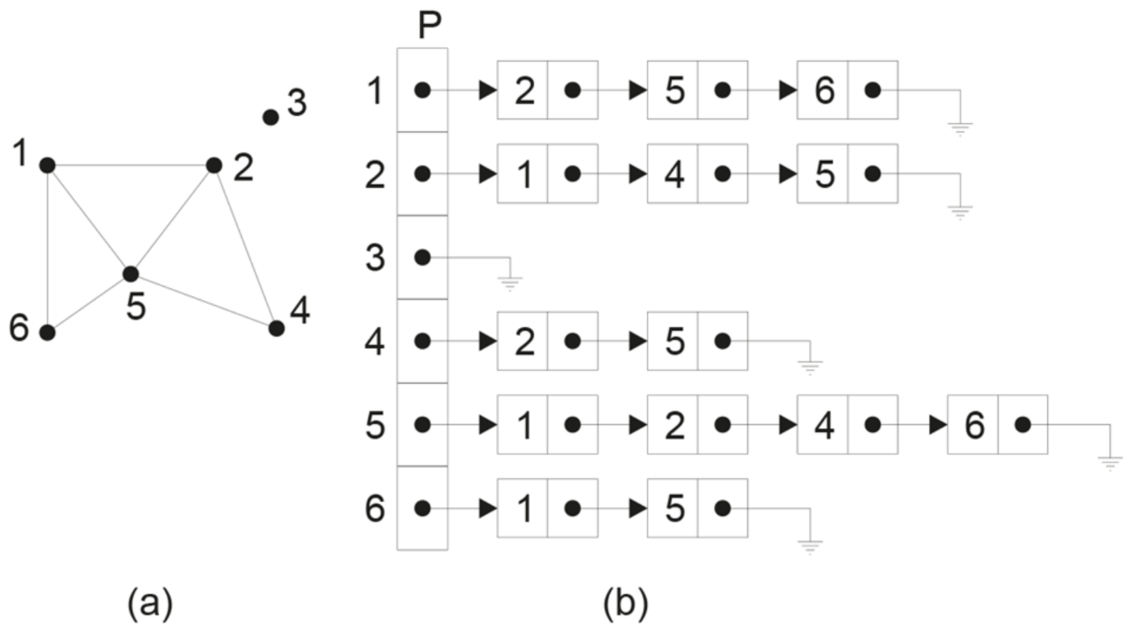


Figura: Lista de adjacências

Referências

Szwarciter, Jaime Luiz. **Teoria Computacional de Grafos**. Elsevier, 2018. ISBN 978-85-352-8884-1.

INSTITUTO FEDERAL
Sudeste de Minas Gerais
Campus Muriaé