TRANSFORMATA LAPLACE

- O funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, s.n. **funcție original** dacă are proprietățile:
  1. $f(t)=0$ pentru $t<0$ (nu avem semnal);
  2. f este continuă pe porțiuni (număr finit de discontinuități de prima speță) pentru $t\ge 0$; în punctele de discontinuitate, valoarea funcției este egală cu semisuma limitelor laterale calculate în punctul respectiv (ca la Transformata Fourier);
  3. există $M>0$ și $\sigma\in\mathbb{R}$ astfel încât $|f(t)|\le M\cdot e^{\sigma t}$, pentru $\forall t\ge 0$ (cel mai mic σ cu această proprietate se numește "indicele (restricția) de creștere" pentru funcția f).
- **Transformata Laplace (sau funcția imagine)** a unei funcții original f este, prin definiție, funcția complexă:

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

<u>OBS:</u> 1) s se numește *domeniul de frecvență* iar $k(s,t)=e^{-st}$ se numește *nucleul transformării*.

2) $f(t)$ se numește transformarea inversă a lui $F(s)$: $f(t)=L^{-1}(F)$

3) Se dem. că funcția imagine este olomorfă (analitică) în semiplanul $\mathrm{Re}\,s>\sigma$ (integrala improprie este convergentă pe semiplanul $\mathrm{Re}\,s>\sigma$; extinderea în semiplanul $\mathrm{Re}\,s\le\sigma$ se poate face după calcularea integralei).

T. de existență și unicitate a T.L

Dacă $f(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t\ge 0$ și există $M>0$ și $\sigma\in\mathbb{R}$ astfel încât $|f(t)|\le M\cdot e^{\sigma t}$, pentru $\forall t\ge 0$, atunci transformata Laplace $L\left(f(t)\right)$ există și este unică pentru orice $s>\sigma$.

PROPRIETĂȚI:

1. ***(liniaritatea)*** Dacă α , $\beta\in\mathbb{C}$ și f,g sunt două funcții original, atunci:

$$L\left[\alpha f+\beta g\right]=\alpha L\left[f\right]+\beta L\left[g\right]$$

2. ***(asemănarea sau schimbarea de scală)*** Dacă $a>0$ și $f(t)$ are transformata Laplace $F(s)$, atunci:

$$L\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad ,a>0$$

3. ***(întârziere semnal sau translație în t)***

$$L\left[f(t-a)\right]=e^{-as}F(s) \quad ,a>0$$

<u>Observații</u>:

Considerăm funcția ”unitate” Heaviside:

$u(t-a)=\begin{cases}0\,, & t<a\\ 1\,, & t>a\end{cases}$ ($t=a$ poate fi lăsat caz nedefinit)

și o funcție original $f(t)$. Atunci funcția $f(t-a)\cdot u(t-a)$ cu $a>0$ este $f(t)$ *translatată către dreapta cu ”a” unități*.

Dacă $f(t)$ are transformata Laplace $F(s)$, atunci funcția translatată $\tilde{f}(t)=f(t-a)\cdot u(t-a)=\begin{cases}0 & ,t<a\\ f(t-a) & ,t>a\end{cases}$ are transformata Laplace: $e^{-as}F(s)$.

Se reține:

Dacă $L\left[f(t)\right]=F(s)$, atunci $L\left[f(t-a)\cdot u(t-a)\right]=e^{-as}F(s)$
sau forma inversă: $f(t-a)\cdot u(t-a)=L^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right)$
În practică, se poate folosi (pentru ușurința calculelor): $L\left[f(t)\cdot u(t-a)\right]=e^{-as}L\left[f(t+a)\right]$

4. ***(deplasare în s)*** Dacă $f(t)$ are transformata Laplace $F(s)$, cu $s>\sigma$, atunci funcția $e^{at}f(t)$ are transformata Laplace $F(s-a)$, cu $s-a>\sigma$:

$$L\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a) \quad ,a\in\mathbb{C}$$

sau forma inversă: $e^{at}f(t)=L^{-1}\left(F(s-a)\right)$.

5. ***(derivarea originalului)*** Dacă sunt îndeplinite condițiile:

(1) $f(t)$ continuă pentru $\forall t\geq 0$, satisface restricția de creștere și $f'(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t\geq 0$;

(2) Dacă $f(t)$ și $f'(t)$ sunt continue pentru $\forall t\geq 0$, satisfac restricția de creștere și $f''(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t\geq 0$

Atunci:

$$L\left[f'(t)\right]=s\cdot F(s)-f(0+) \quad \text{și}$$

$$L\left[f''(t)\right]=s^2\cdot F(s)-s\cdot f(0+)-f'(0+)$$

unde am notat: $f(0+) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f(t)$

Forma generală: Dacă sunt îndeplinite condițiile: $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}$ sunt continue pentru $\forall t \geq 0$, satisfac restricția de creștere și $f^{(n)}(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t \geq 0$, atunci:

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \ldots. - f^{(n-1)}(0+)$$

6. ***(derivarea imaginii)*** Dacă $f(t)$ are transformata Laplace $F(s)$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$L\left[t \cdot f(t)\right] = -F'(s)$$

Forma generală: $L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

7. ***(integrarea originalului)*** Fie $f(t)$ continuă pe porțiuni pentru $\forall t \geq 0$, care satisface restricția de creștere și are transformata Laplace $F(s)$. Atunci, pentru $s > 0$, $s > \sigma$ și $t > 0$ avem:

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

sau forma inversă: $\int_0^t f(\tau) d\tau = L^{-1}\left(\frac{1}{s} F(s)\right)$.

8. ***(integrarea imaginii)*** dacă $\frac{f(t)}{t}$ este funcția original, cu transformata Laplace F, atunci:

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u) du$$

9. ***(convoluție)***:

$$L\left[(f * g)_{(t)}\right] = F(s) \cdot G(s)$$

unde $F(s)$ și $G(s)$ sunt transformatele Laplace ale celor două funcții original $f(t)$ și respectiv $g(t)$ iar produsul de convoluție (pentru $t \geq 0$) este: $(f * g)_{(t)} = \int_0^t f(x) \cdot g(t - x) dx$

10. ***(teorema inversării Mellin-Fourier)***:

Dacă F este o funcție complexă de variabilă complexă care verifică condițiile:

1) este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} s \geq a > \sigma$
2) $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$, uniform în raport cu $\arg s$ pentru $\forall s$ cu $\operatorname{Re} s \geq a > \sigma$

3) integrala $\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)ds$ este absolut convergentă

Atunci funcția f definită de formula (Mellin-Fourier):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$$

este o funcție original (cu indicele de creștere σ) și $L\left[f(t)\right] = F(s)$.

Observație:

Integrala din membrul drept al formulei Mellin-Fourier este o integrală curbilinie în planul complex pe drumul $p = a + i\omega$, cu $-\infty < \omega < \infty$.

Mod de aplicare al proprietății 10:

Un caz particular, foarte frecvent întâlnit în aplicații, este $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$, unde $A(s)$ și $B(s)$ sunt polinoame cu coeficienți reali iar gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului. În aces caz, putem scrie:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(\frac{A(s)}{B(s)} \cdot e^{st}, s_k) + 2\sum_{k=1}^{n} \text{Re}\left(\text{Res}(\frac{A(s)}{B(s)} \cdot e^{st}, s_k) \right) = S_1 + S_2$$

unde S_1 se calculează pentru toți polii reali ai funcției $F(s)$ iar S_2 pentru toți polii complecși din semiplanul superior (polii care au partea imaginară pozitivă).

Tabel transformate Laplace

$f(t)$	$F(s)=L\{f(t)\}$	Cond. de existență
1	$\dfrac{1}{s}$	$s>0$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$s>0$
$t^n, n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$t^a, a>-1$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s>a$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$s>a$
$t^n\cdot e^{at},\ n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$
$u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t>a\end{cases}$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$s\ge a$
$\delta(t-a)=\begin{cases}0, & t\neq a\\ \infty, & t=a\end{cases}$	e^{-as}	$s>0,\ a>0$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\mathrm{sh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$\mathrm{ch}(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$t\cdot\sin(at)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$s>a$
$t\cdot\cos(at)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$s>a$