

Teoria Sistemelor

Laboratorul 3. Diagrame Bode

1 Scopul laboratorului

Scopul laboratorului constă în studierea răspunsului în frecvență al unui sistem. În particular, pentru clasa de sisteme studiate (liniare, invariante în timp și având funcția de transfer proprie), răspunsul la un semnal de intrare sinusoidal este tot un semnal sinusoidal de aceeași frecvență cu semnalul de intrare. În schimb, amplitudinea și faza semnalului de ieșire diferă de cele ale semnalului de intrare. Prin urmare, vom studia răspunsul staționar al unui sistem la o intrare sinusoidală a cărei frecvență variază. Mai precis, vom examina funcția de transfer $H(s)$, pentru $s = j\omega$ și vom dezvolta unor metode specifice de reprezentare a lui $H(j\omega)$ cu $\omega \in [-\infty, \infty]$.

Vom studia în acest capitol caracteristicile amplitudine–frecvență, respectiv fază–frecvență, cunoscute ca diagramele (caracteristicile) lui Bode. În plus, vom implementa diverse tipuri de filtre, prezentate pe larg în secțiunea Exerciții rezolvate.

2 Breviar teoretic

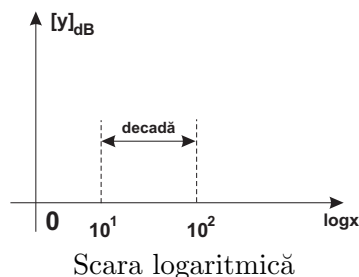
Orice reprezentare grafică a numărului complex $H(j\omega)$ pentru $\omega \in [-\infty, +\infty]$ se numește *reprezentarea în frecvență* a sistemului $H(s)$.

Numărul complex $H(j\omega)$ poate fi reprezentat fie în formă carteziană, fie în formă polară. În reprezentare polară $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg(H(j\omega))}$. Notând

$$H(\omega) = |H(j\omega)| \quad \text{și} \quad \phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$

avem : $H(j\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$.

Definiția 1. Se numește scară logaritmică un sistem de axe în care abscisa este $\log x$ iar ordonata este $[y]_{dB} = 20 \log y$. Graficul $[y]_{dB} = f(\log x)$ se numește *reprezentare la scară logaritmică* a lui $y = f(x)$. dB este prescurtarea de la decibell. Distanța dintre 2 puncte reprezentând puteri consecutive ale lui 10, de pe abscisă, se numește *decadă*.



Definiția 2. Reprezentările

$$[H(\omega)]_{dB} = f(\log \omega) \quad \text{și} \quad \phi(\omega) = f(\log \omega)$$

se numesc *caracteristicile amplitudine-frecvență respectiv fază-frecvență* ale sistemului $H(s)$, sau *diagramele Bode* ale acestuia.

2.1 Diagramele lui Bode

2.1.1 Trasarea calitativă

Vom prezenta o procedură de desenare a caracteristicilor asimptotice și a celor reale, atât pentru amplitudine, cât și pentru fază.

Problemă: Dându-se un sistem $H(s)$, se cere trasarea caracteristicilor $[H(\omega)]_{dB} = f(\log \omega)$ și $\phi(\omega) = f(\log \omega)$, pentru $\omega \in [0, \infty)$.

Algoritm:

- 1) Se rescrie funcția de transfer a sistemului sub formă de produse (conectări în serie) de elemente integratoare, de ordin 1, 2, de întârziere sau anticipație (la numitor, respectiv la numărător):

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \frac{\prod_{i=1}^l (T_i s + 1) \prod_{i=1}^m (T_{n_i}^2 s^2 + 2\zeta_i T_{n_i} s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1) \prod_{j=1}^p (T_{n_j}^2 s^2 + 2\zeta_j T_{n_j} s + 1)},$$

cu $T_i, T_j, T_{n_i}, T_{n_j} > 0, \zeta_i, \zeta_j \in [0, 1)$.

- 2) Se determină *frecvențele de tăiere* în ordinea crescătoare (descrescătoare a constante-lor de timp). Astfel, intervalul $[0, \infty)$ este împărțit pe *benzi de frecvență*: $[0, \infty) = [0, \omega_{T_1}) \cup [\omega_{T_1}, \omega_{T_2}) \cup [\omega_{T_3}, \omega_{T_4}) \cup \dots$, $\omega_{T_k} = \frac{1}{T_k}$.
- 3) (i) **Caracteristica amplitudine-frecvență (AF):** Pe fiecare bandă se trasează caracteristica asimptotică corespunzătoare fiecărui element, adunând de fiecare dată pantele. Caracteristica reală urmărește asimptotele, cu specificitățile fiecărui sistem elementar în parte.
(ii) **Caracteristica fază-frecvență (FF):** Se desenează caracteristica specifică fiecărui element, pe același grafic, apoi se încearcă vizual însumarea graficelor pe fiecare bandă de frecvență.

În Matlab:

```
>> bode(sys) % pentru caracteristica reala
>> bodemag(sys) % pentru caracteristica amplitudine-frecventa
```

2.1.2 Caracteristicile elementelor de bază

Integratorul : $H(s) = \frac{K}{s^q}, K, q \in \mathbb{R}$.

AF : Se obține o familie de drepte având panta de $-20q$ dB/dec, de forma

$$20 \log K - 20q \log \omega = [K]_{dB} - 20q \log \omega.$$

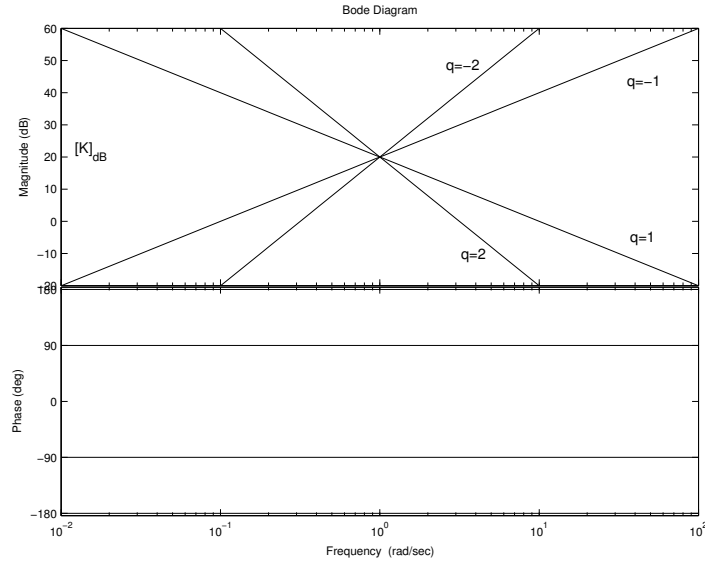


Figura 1: Diagramele Bode ale integratorului (discuție după q , $K = 10$)

FF : Faza este constantă, iar valoarea ei depinde de q , $\phi(\omega) = -q\frac{\pi}{2}$.

Elementul de ordin I. $H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$, $T \in \mathbb{R}$, $K > 0 \Rightarrow [H(\omega)]_{dB} = [K]_{dB} - 20 \log(1 + \omega^2 T^2)$. Cum $T \in \mathbb{R}$ vom vorbi de $|\omega T| = \omega|T| \Rightarrow \omega T = \frac{1}{|T|}$, frecvența de tăiere. Dacă $T > 0$, atunci sistemul este stabil. Dacă $T < 0$, atunci sistemul este instabil.

AF : Cele trei benzi vor fi:

joasă frecvență (j.f.): $[K]_{dB}$;

medie frecvență (m.f.): -3 dB (abatere, ne ajută la caracteristica reală);

întă frecvență (î.f.): dreaptă cu panta de -20 dB/dec .

FF : $\phi(\omega) = -\arctan(\omega T)$. Observăm că dacă $T < 0$, atunci se modifică doar faza, vezi figura 2.

Elementul de ordin II. $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, $\omega_n > 0$, $0 < \zeta < 1$. Notând $x = \frac{\omega}{\omega_n}$ obținem

$$H(\omega) \leftarrow H(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\zeta^2 x^2}}.$$

Frecvența de tăiere este $\omega_T = \omega_n \Leftrightarrow x_T = 1$.

AF:

j.f.: 0; **m.f.**: $-10 \log 4 - 20 \log \zeta$;

î.f.: dreaptă cu panta de -40 dB/dec .

FF : $\phi(\omega) = \arctan(-\frac{2\zeta x}{1-x^2})$.

Observație. Ambele caracteristici depind de ζ . Dacă $\zeta > 1$, atunci elementul de ordin II are 2 poli reali, deci practic elementul de ordin II devine o înscriere a 2 elemente

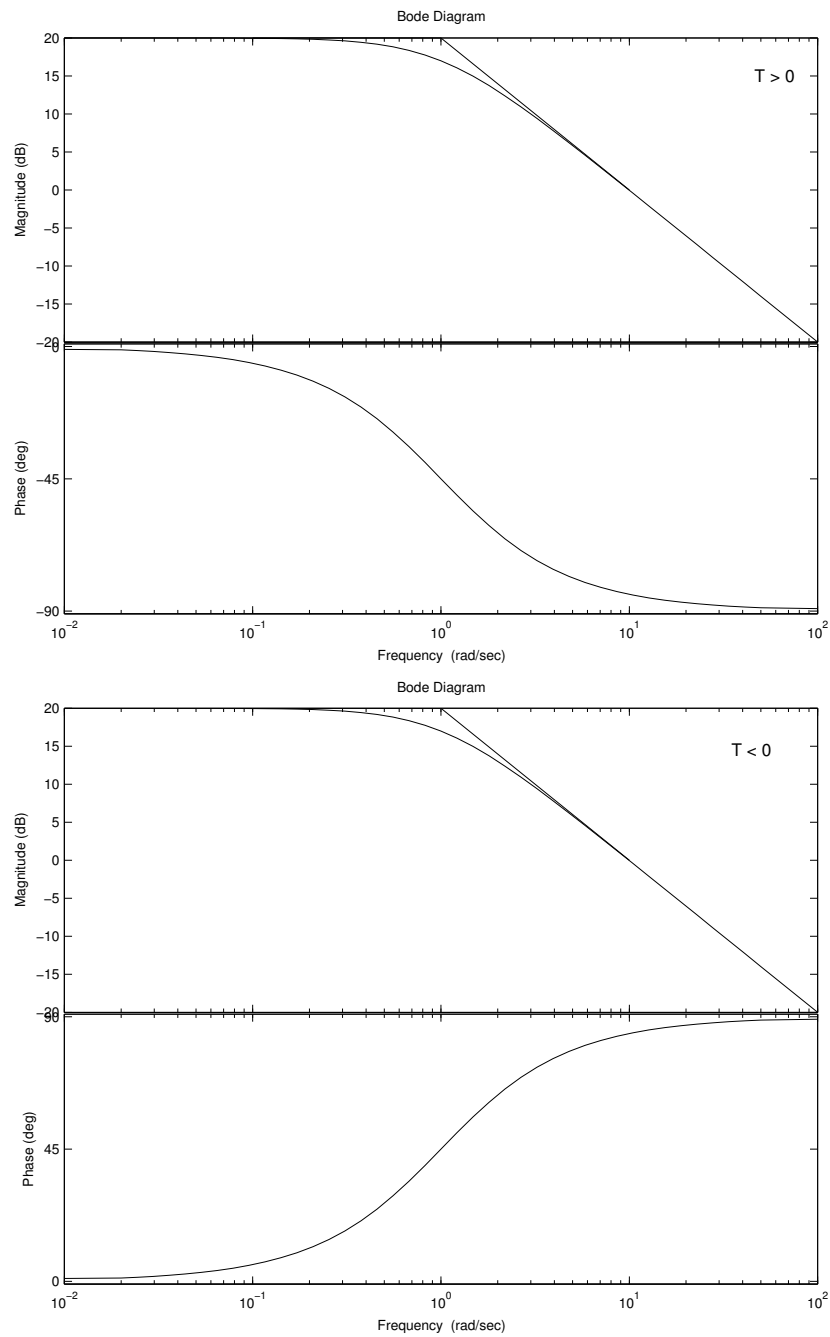


Figura 2: Element de ordin I: stabil (stânga); instabil (dreapta)

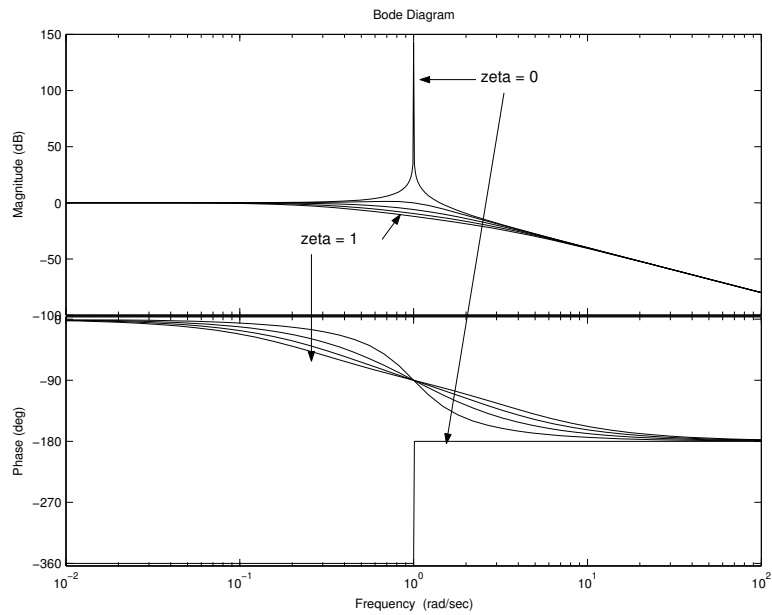


Figura 3: Element de ordin II

de ordin I, iar caracteristica va semăna cu cea a unui sistem de ordin I (doar cu panta mai abruptă). Reamintim că $\zeta = 0$ reprezintă regimul de rezonanță, $\zeta = 1$ este regimul aperiodic critic, iar $\zeta > 1$ reprezintă regimul supracritic.

Observație. Caracteristicile elementelor inverse sunt simetricele celor de mai sus față de abscisă.

2.2 Filtrare

În multe aplicații ne interesează să schimbăm amplitudinile relative ale componentelor frecvențiale dintr-un semnal sau chiar să eliminăm unele componente frecvențiale cu totul. Acest procedeu se numește *filtrare*. Sistemele liniare și invariante în timp care pot schimba forma spectrului unui semnal se numesc *filtre de formare*. Sistemele LTI care lasă să treacă anumite frecvențe esențial nemodificate și atenuează (sau chiar elimină) alte frecvențe se numesc *filtre selective de frecvență*.

Astfel, fie un sistem de convoluție $y(t) = (h * u)(t)$. Conform proprietății de convoluție a transformatei Fourier (TF):

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega), \quad (1)$$

unde $Y(j\omega)$ este TF a ieșirii $y(t)$, $U(j\omega)$ este TF a intrării $u(t)$, iar $H(j\omega)$ este răspunsul în frecvență al sistemului. Așadar, ecuația (1) descrie un filtru de frecvență.

3 Exerciții rezolvate

Trasați caracteristicile Bode pentru următoarele sisteme:

Exercițiul 1. $H(s) = \frac{2s + 1}{s(10s + 1)(s^2 + 4s + 8)}.$

Rezolvare. $H(s) = \frac{1}{8} \frac{1}{s} \frac{2s+1}{(10s+1)} \frac{1}{(\frac{1}{2\sqrt{2}})^2 s^2 + 2(\frac{1}{2\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}})s + 1}$. Obținem

$$K = \frac{1}{8}; \quad T_1 = 10; \quad T_2 = 2; \quad T_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \text{iar } \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7.$$

Așadar, frecvențele de tăiere sunt $\omega_{T_1} = \frac{1}{10} < \omega_{T_2} = \frac{1}{2} < \omega_{T_3} = 2\sqrt{2}$.

AF: Vom respecta algoritmul prezentat anterior.

- 1) $(0, \omega_{T_1})$: integrator, dreaptă cu panta de -20 dB/dec. La $\omega = 1$, asimptota de j.f. are valoarea $[K]_{dB} = [\frac{1}{8}]_{dB} \approx -18$ dB;
- 2) $(\omega_{T_1}, \omega_{T_2})$: element de ordin I, dreaptă cu panta de -20 dB/dec;
- 3) $(\omega_{T_2}, \omega_{T_3})$: ordin I inversat, dreaptă cu panta de $-20 + 20 = 0$ dB/dec.
- 4) (ω_{T_3}, ∞) : ordin II (cu poli complecși), dreaptă cu panta de $0 - 40 = -40$ dB/dec.

FF : $\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(2\omega) - \arctan(10\omega) - \arctan(\frac{1,4\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2})$. În general, aici nu se precizează decât valorile la 0 și la ∞ , dacă se pot calcula. Deci $\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$, iar $\phi(\infty) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -2\pi$.

Codul Matlab este prezentat în Anexă.

Rezultatele sunt prezentate în figura 4. Exercițiile următoare nu vor mai conține explicații analitice extinse, deoarece ele reprezintă din punct de vedere al rezolvării doar aplicarea directă a procedurii, ci doar observații practice din analiza graficelor.

Exercițiul 2. $H(s) = \frac{10}{s} \frac{1+s^2}{(0,1s+1)(0,05s+1)}$.

Rezolvare. $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 10$, $\omega_3 = 20$. Elementul de ordin II prezent în sistem are $\zeta = 0$, funcționând la rezonanță. Acest fenomen va fi pus în evidență clar pe caracteristica de amplitudine. După cum s-a văzut acesta este reprezentat prin discontinuitatea în frecvența de tăiere. Codul Matlab este dat în Anexă. Rezultatul este prezentat în figura 5.

Exercițiul 3. $G(s) = \frac{\alpha s + 1}{\beta s + 1}$, $\alpha, \beta > 0$. Calculați $\sup_{\omega} |G(j\omega)|$. Discuție după α și β .

Rezolvare. Cazul 1. $\alpha < \beta \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\beta} < \omega_2 = \frac{1}{\alpha}$. Valoarea $\sup_{\omega} |G(j\omega)|$ se ia de pe grafic și corespunde valorii maxime a lui $[G]_{dB}$. Aici,

$$[G]_{dB,max} = 0 \Rightarrow \sup_{\omega} |G(j\omega)| = 1.$$

Rezultatul este prezentat în figura 6, iar codul Matlab în Anexă.

Cazul 2. $\alpha > \beta \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\alpha} < \omega_2 = \frac{1}{\beta}$. Graficele sunt simetricele celor de mai sus față de abscisă. În plus $\sup_{\omega} |G(j\omega)| = \frac{\alpha}{\beta}$. Verificați analitic corectitudinea afirmației anterioare. Indicație: Maximul se găsește pe caracteristica asimptotică. De ce?

Exercițiul 4. $H(s) = \frac{s-a}{s+a}$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Rezolvare. Este cazul filtrului de tip trece-tot care are modulul 1 pe întreg spectrul pozitiv de frecvențe.

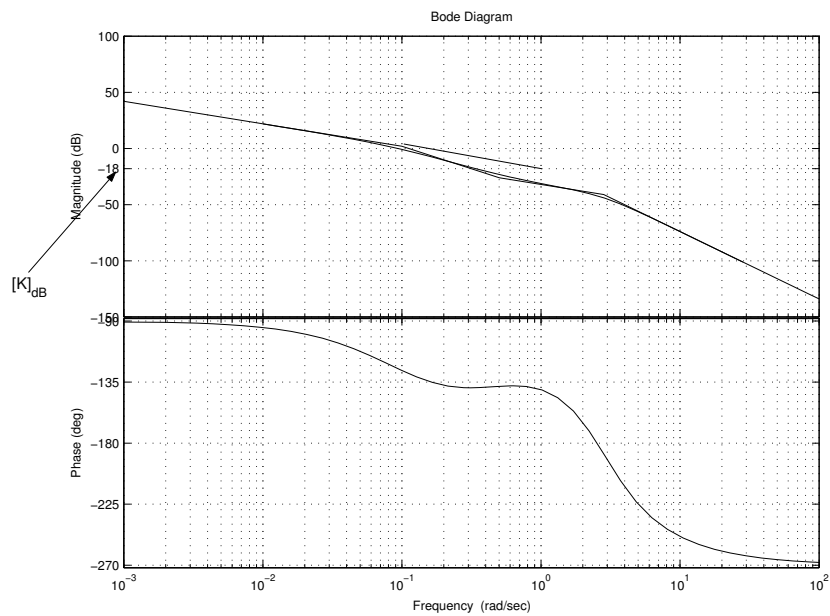


Figura 4: Rezultatul Exercițiului 1

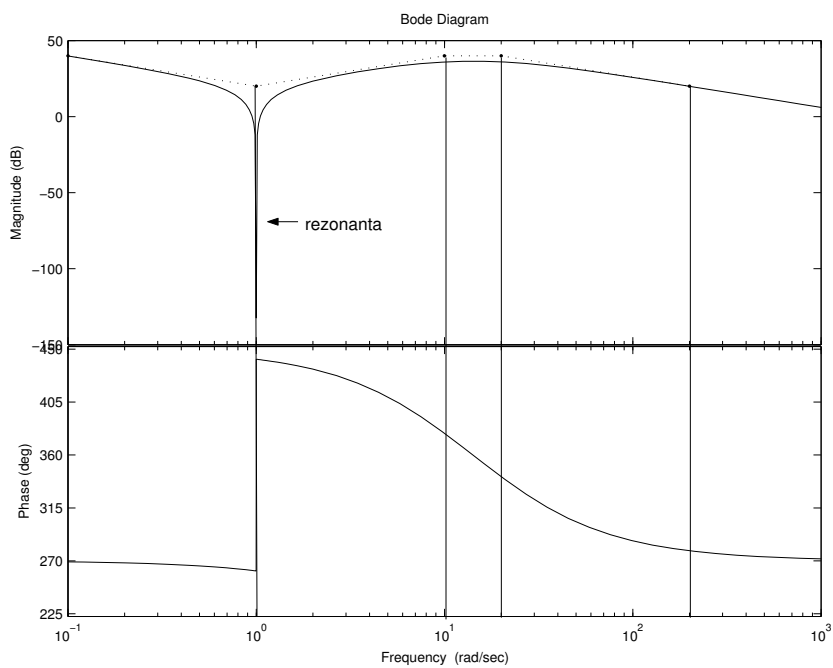


Figura 5: Rezultatul Exercițiului 2

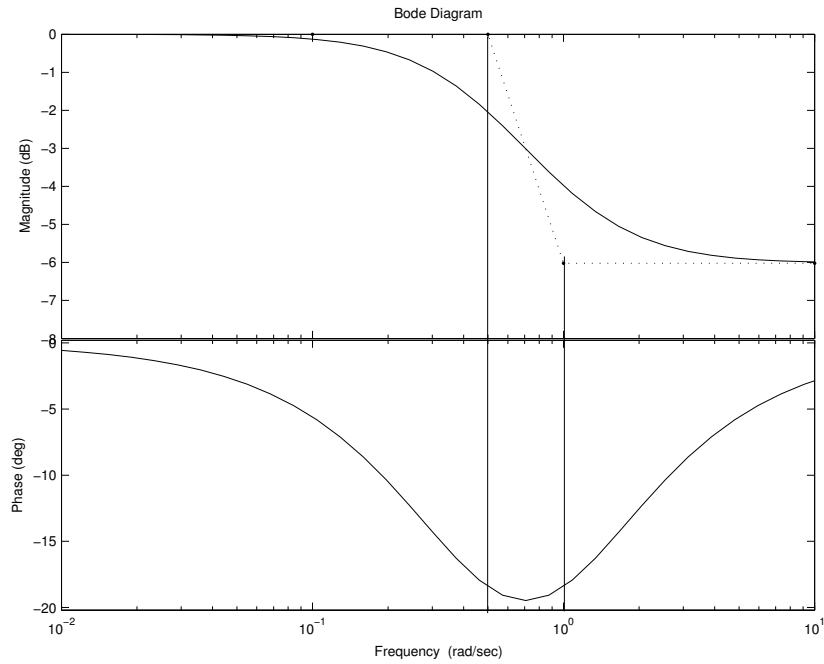


Figura 6: Rezultatul Exercițiului 3

AF: 0 dB pe $\omega \in [0, \infty)$.

FF: $\phi(\omega) = \arctan \frac{2a\omega}{\omega^2 - a^2}$ (asemănătoare cu element de ordin I, doar că se schimbă punctul de inflexiune și capetele între care evoluează, $\phi(0_+) = \frac{\pi}{2}$, iar $\phi(\infty) = 0$).

Construiți o funcție Matlab care primește la intrare parametrul a și afișează diagrama Bode (vezi Anexa). Se dau valori pozitive lui a . Graficul amplitudinii va avea variații mici în jurul semiaxe logaritmice. Care este cauza acestui fenomen și cum se poate proceda pentru vizualizarea corectă a graficului?

Exercițiul 5. Reprezentați diagramele Bode pentru sistemul

$$H(s) = -100 \frac{s}{s^3 + 12s^2 + 21s + 10}.$$

Rezolvare. $H(s) = -10 \frac{s}{(s+1)^2(\frac{1}{10}s+1)}.$

Observăm că sistemul are factorul de amplificare $K = -10$ negativ iar elementele sale sunt: un zero în origine, un pol în $s = -\frac{1}{10}$ de multiplicitate 1 și un pol dublu în $s = -1$.

Matlab :

```
num = [-100 0];
den = [1 12 21 10];
H = tf(num,den);
bode(H)
```

Exercițiul 6. Reprezentați diagramele Bode pentru sistemul:

$$H(s) = 4 \frac{s^2 + s + 25}{s^3 + 100s^2}.$$

Matlab :


```

num = [4 4 100];
den = [1 100 0 0];
H = tf(num,den);
bode(H)

```

Exercițiul 7. $H(s) = \frac{K}{s} e^{-\tau s}$.

Rezolvare.

$$H(\omega) = \frac{K}{\omega}, \text{ iar } \phi(\omega) = -\omega\tau - \frac{\pi}{2}.$$

Se observă că faza este liniară. În general, un sistem cu timp mort are funcția de transfer $H(s) = \tilde{H}(s)e^{-\tau s}$, unde $\tilde{H}(s)$ este o funcție de transfer rațională (strict) proprie. Rezultă că $|H(j\omega)| = |\tilde{H}(j\omega)|$, așadar modulul nu este influențat de timpul mort. În schimb faza este $\phi(\omega) = \arg(\tilde{H}(j\omega)) - \omega\tau$, afectată semnificativ la frecvențe mari ($\phi(\infty) = -\infty$). Propunem cititorului trasarea diagramelor Bode pentru $K = 2$, $\tau = 1$.

Exercițiul 8. Reprezentați diagramele Bode parametrizate atât în funcție de ω cât și de ζ pentru un element de ordinul 2: $H(\omega) = H(\omega, \zeta)$, $\phi(\omega) = \phi(\omega, \zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Codul este dat în Anexă.

Exercițiul 9. Fie semnalul continuu cu frecvența fundamentală $\omega_0 = 2\pi$,

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

unde $a_0 = 1$, $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$, $a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$, $a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$. În plus, considerați sistemul LTI cu funcția pondere $h(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$.

- Folosind relația lui Euler, scrieți semnalul $x(t)$ ca o sumă de funcții cosinus. Reprezentați grafic semnalul.
- Calculați răpunsul în frecvență al sistemului LTI dat, $H(j\omega)$, precum și modulul sau $|H(j\omega)| =: H(\omega)$. Reprezentați grafic $H(\omega)|_{dB} = f(\log(\omega))$.
- Aratați că

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k H(jk2\pi) e^{jk2\pi t}.$$

- Scrieți semnalul $y(t)$ ca o sumă de funcții cosinus. Reprezentați grafic semnalul.

Rezolvare.

- Din ipoteze, avem că

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2} (e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3} (e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

Din relația lui Euler, rezultă ușor că $2 \cos(\omega t) = e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}$. Relația de mai sus devine:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t.$$

În figura 7 avem reprezentarea grafică a semnalului $x(t)$. Se folosește codul prezentat în Anexă.

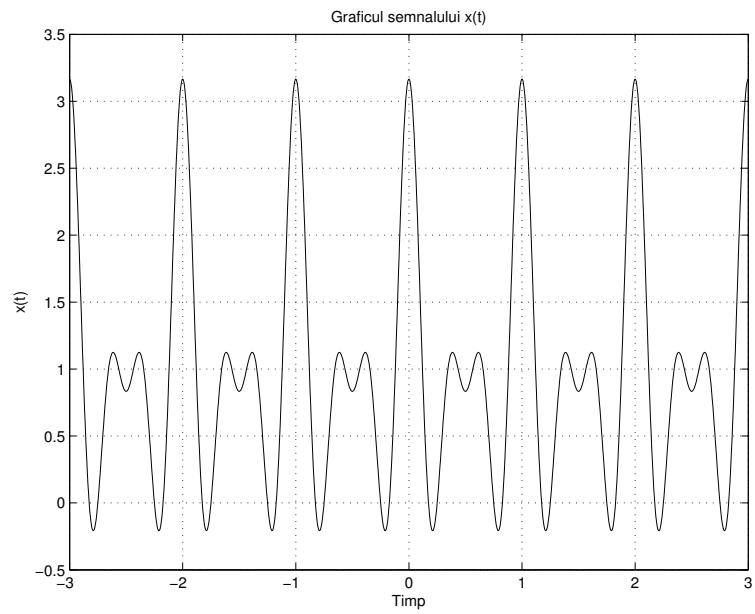


Figura 7: Exercițiul 9.a

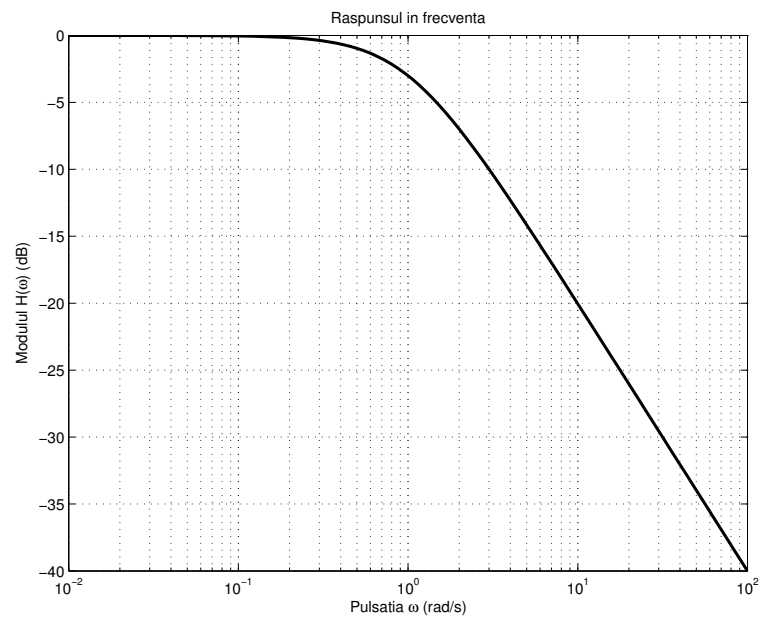


Figura 8: Exercițiul 9.b

b)

$$H(j\omega) = \int_0^\infty e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = -\frac{1}{1+j\omega} e^{-(1+j\omega)\tau} \Big|_0^\infty = \frac{1}{1+j\omega}.$$

$$H(\omega) := |H(j\omega)| = \frac{1}{|1+j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

În figura 8 avem reprezentarea grafică a funcției $H(\omega)$. Codul Matlab se găsește în Anexă.

c) Plecăm de la observația că $x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} x_k(t)$, unde $x_k(t) = a_k e^{jk2\pi t}$. Dacă determinăm răspunsul sistemului la intrarea $x_k(t)$, atunci răspunsul $y(t)$ la semnalul $x(t)$ se obține prin superpoziție, i.e., $y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} y_k(t)$. Vom avea succesiv:

$$y_k(t) = \int_0^\infty h(\tau) x_k(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty h(\tau) a_k e^{jk2\pi(t-\tau)} d\tau = a_k e^{jk2\pi t} \int_0^\infty h(\tau) e^{-jk2\pi\tau} d\tau$$

$$y_k(t) = a_k H(jk2\pi) e^{jk2\pi t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k H(jk2\pi) e^{jk2\pi t}, \text{ q.e.d.}$$

d) Din relația de la c), avem că

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} b_k e^{jk\omega_0 t},$$

unde $b_k = a_k H(jk2\pi)$. Rezulta ca $b_0 = 1$,

$$b_1 = \frac{1}{4} \frac{1}{1+j2\pi}, \quad b_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{1+j4\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \frac{1}{1+j6\pi},$$

$$b_{-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-j2\pi}, \quad b_{-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-j4\pi}, \quad b_{-3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-j6\pi}$$

Reprezentarea ca sumă de funcții cosinus se obține imediat:

$$y(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^3 D_k \cos(2\pi kt + \theta_k), \quad b_k = D_k e^{j\theta_k}.$$

Propunem ca exercițiu determinarea numerică a coeficienților și reprezentarea grafică a semnalului.

Exercițiul 10. Circuitul RC este utilizat pe scară largă pentru implementarea unor filtre specifice de frecvență. Acest exercițiu propune studiul filtrelor de tip Trece-Jos și Trece-Sus realizate cu circuitul RC.

a) Considerând ca intrare tensiunea de alimentare $u(t)$ și ca ieșire tensiunea de pe condensator $v_C(t)$, răspunsul în frecvență al sistemului LTI rezultat este

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+RCj\omega}.$$

Sistemul LTI astfel obținut este un filtru de tip TJ. Reprezentați grafic modulul numărului complex $H(\omega) := |H(j\omega)|$ și fază $\phi(\omega) := \arg[H(j\omega)]$, pentru $RC \in \{1, 2, \dots, 7\} \text{ sec}$. Justificați denumirea de FTJ.

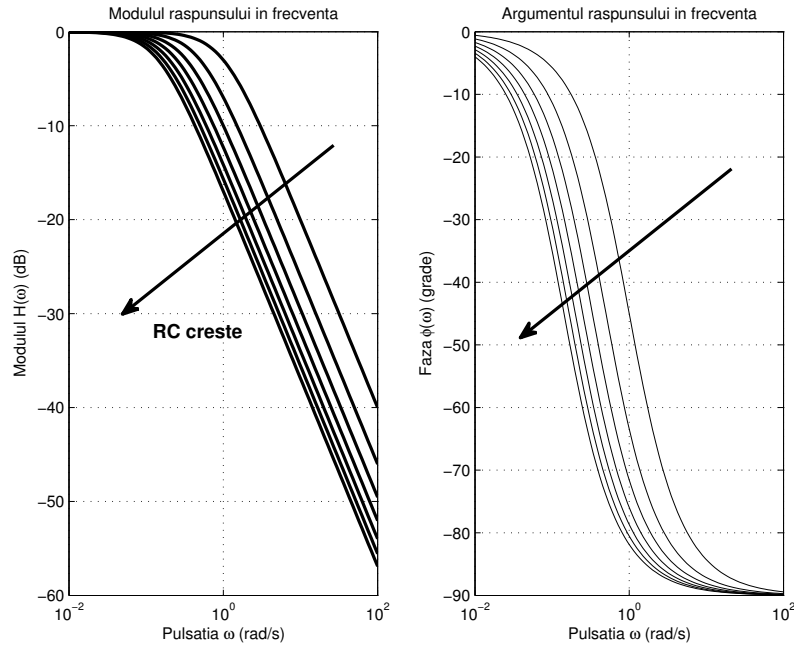


Figura 9: Exercițiul 10.a

- b) Ca alternativă, putem considera ca ieșire tensiunea de pe rezistor $v_R(t)$. Ecuația diferențială care caracterizează sistemul, $z(t) := v_R(t)$ este:

$$RC \frac{dz(t)}{dt} + z(t) = RC \frac{du(t)}{dt}. \quad (2)$$

Determinați răspunsul în frecvență al sistemului $G(j\omega)$ pentru $RC = 5$ sec. Trasați grafic funcțiile $G(\omega) := |G(j\omega)|$ și $\phi(\omega) := \arg[G(j\omega)]$. Obținem un filtru *Trece-Sus* (FTS). Justificați această denumire.

- c) Fie $R \cdot C = 0.1$ sec. Reprezentați diagramele lui Bode pentru sistemele $H(s)$ și $G(s)$. Verificați prin simulare caracterul celor două filtre.
- d) Fie $R \cdot C = 0.1$ sec și fie semnalul de stimul $u(t) = \mathbf{1}(t) + e(t)$, unde $e(t)$ este un zgomot alb de medie nulă și varianță 0.1. Reprezentați grafic răspunsul sistemului $H(s)$.

Rezolvare.

- a) Se obține

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot (RC)^2}}.$$

Faza se calculează cu relația

$$\phi(\omega) = \arctg\left(\frac{\text{Im } H(j\omega)}{\text{Re } H(j\omega)}\right) = \arctg(-\omega RC).$$

Graficul pentru diverse valori RC este dat în figura 9. În Matlab, am determinat modulul și faza folosind relațiile obținute. Rutina se găsește în Anexă.

Observația 1. Pentru frecvențe joase, în vecinătatea punctului $\omega = 0$, se observă pe grafic că $|H(j\omega)| \approx 1$ (0 dB), ceea ce înseamnă că frecvențele joase "trec". Pentru valori mari ale frecvenței ω , $|H(j\omega)|$ este considerabil mai mic și scade liniar cu creșterea lui ω . Astfel, circuitul RC cu ieșirea pe condensator este un *Filtru Trece-Jos*.

Observația 2. Să presupunem că ne dorim ca filtrul să permită trecerea doar pentru frecvențe foarte joase. Se observă din grafic că $1/RC$ trebuie să fie mic, respectiv RC să fie mare.

b) Dacă $u(t) = e^{j\omega t}$, atunci avem că $z(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$. Înlocuind în relația (2), obținem după calcule elementare:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Modulul și argumentul răspunsului în frecvență $G(j\omega)$ rezultă imediat:

$$G(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \phi(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega RC}.$$

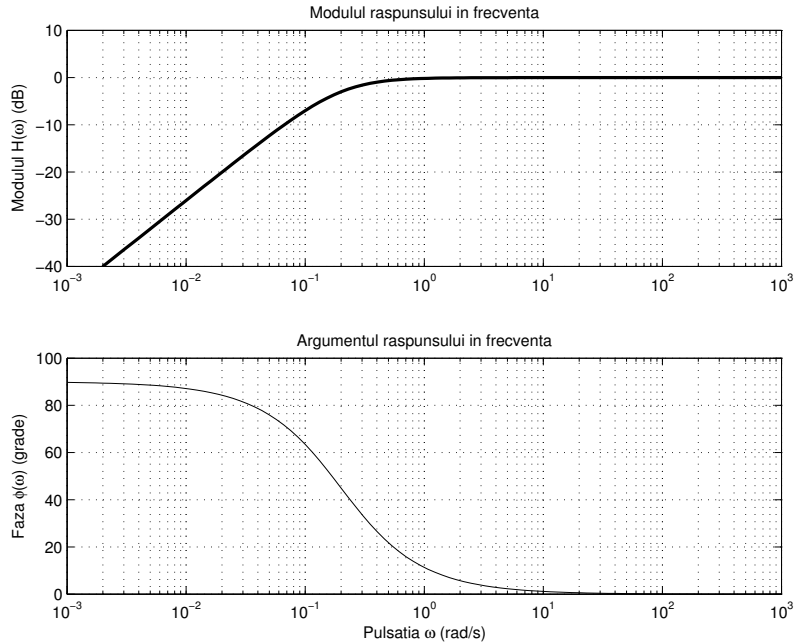


Figura 10: Exercițiul 10.b

Graficele sunt date în figura 10, iar codul Matlab aferent în Anexă.

Observația 3. Se poate observa din figură că sistemul atenuează frecvențele înalte și permite trecerea frecvențelor înalte, adică $|\omega| \gg 1/RC$. Prin urmare, sistemul este un FTS *neideal*.

c) Pentru $R \cdot C = 0.1$ sec, avem frecvența de tăiere $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 10$ rad/sec. Alegem pentru simulare semnalele de stimul

$$u_1(t) = \sin(3t) + 4 \cos(2t), \quad t > 0, \quad u_2(t) = \sin(25t) + 4 \cos(40), \quad t > 0.$$

Se observă că $u_1(t)$ este compus din armonice cu frecvențe mai mici decât ω_0 . Prin urmare, acest semnal "va trece" neamortizat prin sistemul $H(s)$. $u_2(t)$ este compus din armonice cu frecvențe mai mari decât ω_0 . Vom avea la ieșire o armonică amortizată.

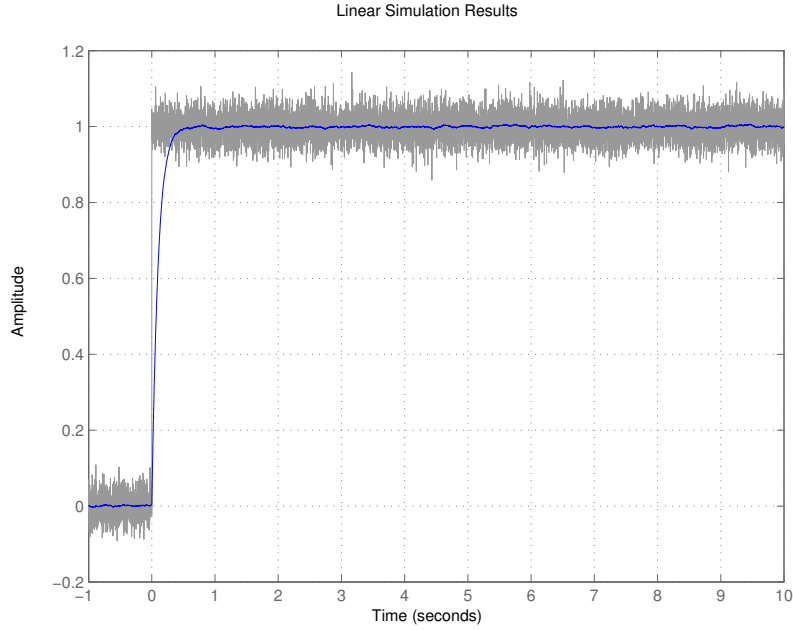


Figura 11: Zgomot alb filtrat

Considerăm acum sistemul $G(s)$, care se comportă ca un filtru trece-sus, i.e., semnalele armonice de frecvențe înalte trec. Reluând raționamentul anterior, $u_1(t)$ este amortizat, iar $u_2(t)$ trece. Propunem ca exercițiu cititorului verificarea afirmațiilor cu Matlab. Se va folosi spre exemplu instrucțiunea `lsim(H,u1,t);`.

d) Codul Matlab este dat în Anexă. Se obține figura 11. Se observă că efectul perturbator al zgomotului alb este înlăturat prin filtrare. Acest procedeu este folosit pe scară largă în practica inginerescă atunci când un semnal de interes (spre exemplu, informația de la un senzor) este perturbat.

Exercițiul 11. Filtrul Trece-Jos ideal și Filtrul Trece-Tot (FTT).

a) Filtrul Trece-Jos ideal are răspunsul în frecvență:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c. \end{cases}$$

Determinați funcția pondere a sistemului, $h(t)$. Reprezentați grafic $H(\omega)$ și $h(t)$. Ce puteți spune despre cauzalitatea sistemului?

b) Răspunsul în frecvență al unui filtru trece-tot este de forma

$$H(j\omega) = \frac{j\omega T_0 - 1}{j\omega T_0 + 1},$$

unde T_0 este un număr real fixat. Calculați $H(\omega)$. Ce observați? Calculați și reprezentați grafic $\phi(\omega)$.

c) Un filtru trece-tot poate fi reprezentat ca o întârziere pură, i.e., $H(s) = e^{-sN}$, $N \in \mathbb{N}$. Rezultă $H(j\omega) = e^{-j\omega N}$. Calculați și reprezentați grafic $H(\omega)$ și $\phi(\omega)$.

Rezolvare.

a) Funcția pondere se calculează pornind de la definiție:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jt} (e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}) \\ &= \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}. \end{aligned}$$

Graficele funcțiilor $H(\omega)$ și $h(t)$ pentru $\omega_c = 2\text{rad/s}$ sunt date în figura 12. Codul Matlab aferent este în Anexă.

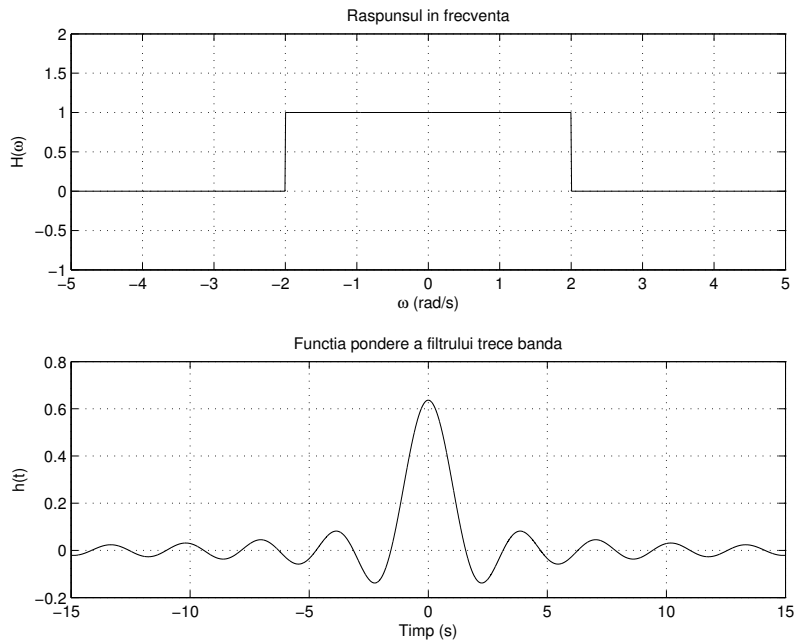


Figura 12: Exercițiul 11.a

Observația 4. De notat că $h(t) \neq 0$, pentru $t < 0$. În consecință, un filtru ideal nu este cauzal, fiind nepotrivit pentru acele aplicații practice care necesită filtre cauzale. Mai mult, chiar dacă cauzalitatea nu este o constrângere esențială, filtrul ideal este greu de implementat fizic, pe când un filtru neideal (spre exemplu, filtrele neideale TS și TJ tratate anterior) este mult mai simplu de realizat (cu un simplu circuit RC).

b)

$$H(\omega) = \frac{|j\omega T_0 - 1|}{|j\omega T_0 + 1|} = 1, \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Pentru calculul fazei $\phi(\omega)$, scriem răspunsul în frecvență sub forma $H(j\omega) = \text{Re } H(j\omega) + j\text{Im } H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega T_0 - 1)(1 - j\omega T_0)}{(1 - j\omega T_0)(1 + j\omega T_0)} = \frac{\omega^2 T_0^2 - 1}{\omega^2 T_0^2 + 1} + j \frac{2\omega T_0}{\omega^2 T_0^2 + 1}.$$

Faza devine:

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} H(j\omega)}{\operatorname{Re} H(j\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{2\omega T_0}{\omega^2 T_0^2 - 1}.$$

Codul Matlab pentru reprezentarea grafică a funcției $\phi(\omega)$ este dat în Anexă. Graficul este dat în figura 13.

Observația 5. Pentru reprezentarea grafică, am folosit funcția Matlab `atan2` în locul clasicei `atan`. Funcția aleasă întoarce valoarea funcției $\arctan(x)$ în toate cele 4 cadrane. Argumentăm aceasta alegere pe baza fenomenului de *phase shift*, adică shiftarea fazei cu 90° la frecvența $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$, care duce la un rezultat eronat al funcției Matlab `atan` - întoarce doar valori între $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

d) Avem că $H(\omega) = |e^{-j\omega N}| = 1, \forall \omega \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}$. Faza este scade liniar cu frecvența, $\phi(\omega) = -j\omega N$. Propunem cititorului să reprezinte grafic (în Matlab și analitic) diagramele Bode pentru acest sistem.

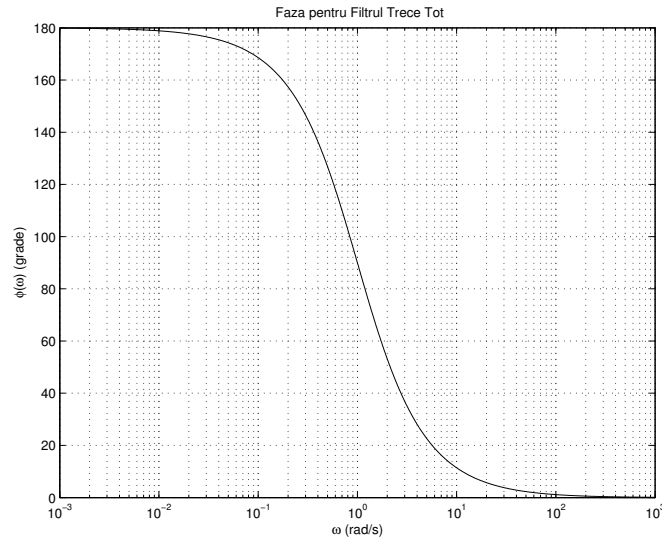


Figura 13: Exercițiul 11.b

Exercițiul 12. Ne propunem studiul *filtrelor nonrecursive discrete*. Aceste filtre nu depind de valori anterioare ale ieșirii, având astfel forma generală

$$y[n] = \sum_{k=-N}^{k=N} b_k u[n-k].$$

Constatăm că ieșirea este o medie ponderată a valorilor intrării de la $u[n-N]$ până la $u[n+N]$, cu ponderile date de coeficienții b_k .

a) Un exemplu des întâlnit este filtrul de *medie alunecătoare* (MA), unde ieșirea $y[n]$ este media valorilor semnalului de intrare $u[n]$ într-o vecinătate a lui n . Luăm un caz simplu:

$$y[n] = \frac{1}{3} (u[n-1] + u[n] + u[n+1]).$$

Determinați funcția pondere și răspunsul în frecvență al filtrului MA. Reprezentați grafic $H(\omega) := |H(e^{j\omega})|$. Interpretați graficul obținut.

b) Reluați punctul anterior pentru cazul general, adică

$$y[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{k=N} u[n-k].$$

Rezolvare.

a) Funcția pondere este răspunsul sistemului la impulsul discret. Într-adevar, dacă $u[n] = \delta[n]$, atunci $y[n] = h[n]$. Obținem:

$$h[n] = \frac{1}{3} (\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]).$$

Pentru sistemele discrete, răspunsul în frecvență $H(e^{j\omega})$ este dat de relația:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}.$$

În cazul nostru, vom avea succesiv:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{3} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n+1]e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n-1]e^{-j\omega n} \right) \\ &= \frac{1}{3} (e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) \\ &= \frac{1}{3} (1 + 2 \cos(\omega)). \end{aligned}$$

Graficul funcției $H(\omega) = \frac{1}{3}|1 + 2 \cos(\omega)|$ este dat în figura 14. Script-ul Matlab necesar se găsește în Anexă.

Observația 6. Se observă din grafic (vezi figura 14) că filtrul nerecursiv dat are caracteristicile unui filtru Trece Jos *neideal*, adică nu are o tranziție bruscă între benzile de frecvență corespunzătoare (banda de trecere, respectiv de atenuare).

b) În acest caz, funcția pondere devine:

$$h[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} \delta[n-k].$$

Rezultă că răspunsul la impuls este un semnal dreptunghiular discret:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2N+1}, & -N \leq n \leq N, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Răspunsul în frecvență devine:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} e^{-j\omega k}.$$

După un volum moderat de calcule, se obține:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin[(2N+1)\frac{\omega}{2}]}{\sin \frac{\omega}{2}}.$$

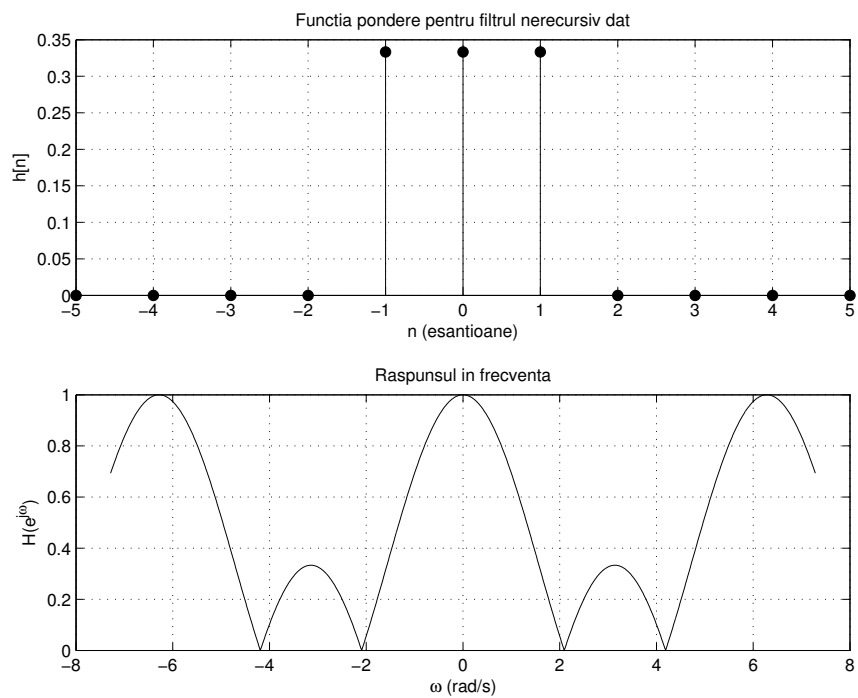


Figura 14: Exercițiul 12.a

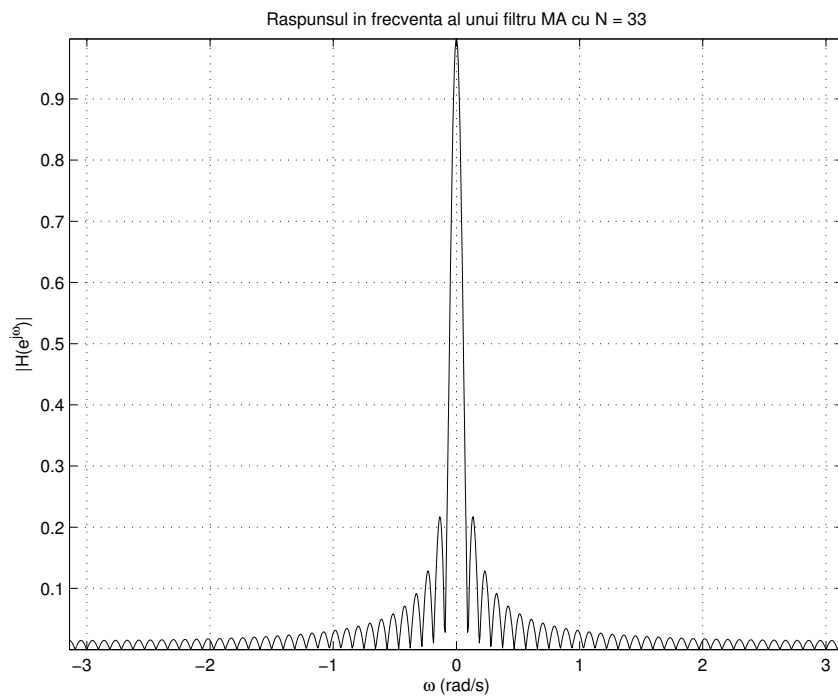


Figura 15: Exercițiul 12.b

Graficul funcției $H(\omega)$ pentru $N = 33$ este dat în figura 15, iar codul Matlab în Anexă. Studiați ce se întâmplă pentru diverse valori ale parametrului N , spre exemplu $N = 16$, $N = 65$.

Observația 7. Filtrele de MA fac parte dintr-o clasă interesantă de filtre, **FIR** (Finite Impulse Response). Justificați această denumire.

Exercițiul 13. Proiectarea filtrelor selective de frecvență. Ne propunem aici proiectarea unui filtru $H(s)$ cu caracteristica amplitudine–frecvență impusă *a priori*: dorim ca modulul la joasă frecvență să fie $0 < A_{inf} < 1$, iar la înaltă frecvență să avem modulul $A_{sup} > 1$. Specificăm banzile de frecvență dorite prin alegerea primei frecvențe de frângere ω_t . Găsiți filtrul, având doar un pol și un zerou.

Rezolvare. Sistemul $H(s)$ are un pol și un zerou. Deoarece se dau 3 parametri, i.e., A_{inf} , A_{sup} , ω_t , vom avea 3 necunoscute:

$$H(s) = \frac{as + b}{cs + 1} \Rightarrow |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{a^2\omega^2 + b^2}{c^2\omega^2 + 1}}.$$

Condițiile impuse devin:

$$|H(j \cdot 0)| = b = A_{inf}; \quad |H(j \cdot \infty)| = \frac{a}{c} = A_{sup} \Rightarrow a = cA_{sup}; \quad \frac{b}{a} = \omega_t.$$

După calcule, se obține $H(s) = \frac{s + \omega_t}{\frac{s}{A_{sup}} + \frac{\omega_t}{A_{inf}}}$. Trebuie să impunem ca prima frecvență de frângere să fie ω_t , i.e., $\frac{1}{c} < \frac{b}{a} \Rightarrow A_{inf} < \omega_t^2 A_{sup}$. Reprezentați în Matlab diagramele Bode pentru sistemul obținut. Alegem $A_{inf} = 0.1$, $A_{sup} = 20$, $\omega_t = 10$ rad/sec.

4 Exerciții propuse

Exercițiul 14. Reprezentați diagramele Bode pentru sistemul

$$H(s) = \frac{0.01(s^2 + 0.01s + 1)}{s^2[s^2/4 + 0.02(s/2) + 1]}.$$

Determinați polii și zerourile sistemului (folosiți funcția `pzmap`).

Exercițiul 15. Un sistem cu zerouri în semiplanul complex drept deschis se numește *sistem de fază neminimă*. Efectul acestor zerouri instabile este vizibil în faza sistemului $\phi(\omega)$. Astfel, se dau funcțiile de transfer de forma

$$G_1(s) = \frac{s + \alpha}{0.1s + 1}, \quad \alpha > 0; \quad G_2(s) = \frac{s - \alpha}{0.1s + 1}, \quad \alpha > 0.$$

- Să se reprezinte diagramele Bode pentru diverse valori ale parametrului α . Ce se întâmplă cu $H(\omega)$? Dar cu $\phi(\omega)$? Argumentați riguros răspunsul.
- Să se reprezinte pe același grafic răspunsul indicial al sistemelor $G_1(s)$ și $G_2(s)$. Ce observați?

Exercițiul 16. Construiți un semnal periodic compus din mai multe armonici distincte, apoi perturbați-l cu un zgomot alb (se generează cu funcția Matlab `randn`). Filtrați apoi semnalul obținut folosind un filtru selectiv de frecvență astfel încât la ieșirea filtrului să se găsească un semnal cât mai apropiat de cel original. Calculați numeric diferențele dintre semnalul obținut după filtrare și cel original.

Exercițiul 17. O conjetură celebră afirmă că sistemul auditiv uman nu sesizează modificările de fază ale unui semnal audio. Pentru a valida conjetura, este suficient să prelucrăm un semnal vocal cu un filtru discret trece-tot de faza minimă (FTT) și să verificăm potrivirea auditiv. Un FTT discret este de forma

$$H(z) = \left(\frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \right)^N.$$

Coeficienții filtrului precizat se găsesc în fișierul `s.vocal.mat`, astfel încât $b(k+1) = b_k$ și $a(k+1) = a_k$. Pentru încărcarea fișierului, se va folosi instrucțiunea Matlab `load`.

- Scrieți în fișierul `discurs0.au` semnalul `speech` din fișierul dat, prin folosirea funcției Matlab `auwrite`. Frecvența de eșantionare este $F_s = 11025$ Hz. Scrierea se va face pe 16 biți, cu metoda de codare liniară.
- Să se implementeze FTT în Matlab pentru $N = 1$, utilizând funcția `filt`. Să se obțină răspunsul la impuls și răspunsul în frecvență al filtrului (funcția `freqz`).
- Reprezentați grafic polii și zerourile filtrului. Folosiți funcția `pzmap`. Este sistemul de faza minimă?
- Aplicați filtrul obținut semnalului vocal din variabila `speech`. Vom folosi funcția Matlab `filter`. Scrieți în fișierul `discurs1.au` semnalul filtrat obținut. Sesizați vreo diferență? Argumentează riguros, pe baza celor studiate a priori.
- Să se refacă punctele b) - d) pentru $N = 50$. Se sesizează o diferență. Descrieți distorsiunea și argumentați.

Exercițiul 18. Filtrele nerecursive pot implementa filtre de tip Trece Sus. Ca un exemplu simplu, fie ecuația cu diferențe

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}.$$

Determinați funcția pondere $h(t)$ și răspunsul în frecvență $H(e^{j\omega})$ pentru sistemul dat. Reprezentați grafic $|H(e^{j\omega})|$. Am obținut un FTS? Argumentați.

Exercițiul 19. Considerăm filtrul dat de

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Fie semnalul de stimul $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 9n)$. Cerințe:

- Ce proprietăți are filtrul $H(j\omega)$ dat? Verificați dacă este real sau complex, cauzal sau necauzal. Calculați

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega.$$

- b) Calculați și reprezentați grafic transformata Fourier a semnalului de stimul $U(j\omega)$.
- c) Determinați și reprezentați grafic răspunsul sistemului $Y(j\omega)$, respectiv $y(t)$.

Exercițiul 20. Se consideră sistemul $H(s)$, având răspunsul în frecvență dat în figura 16a. Dacă

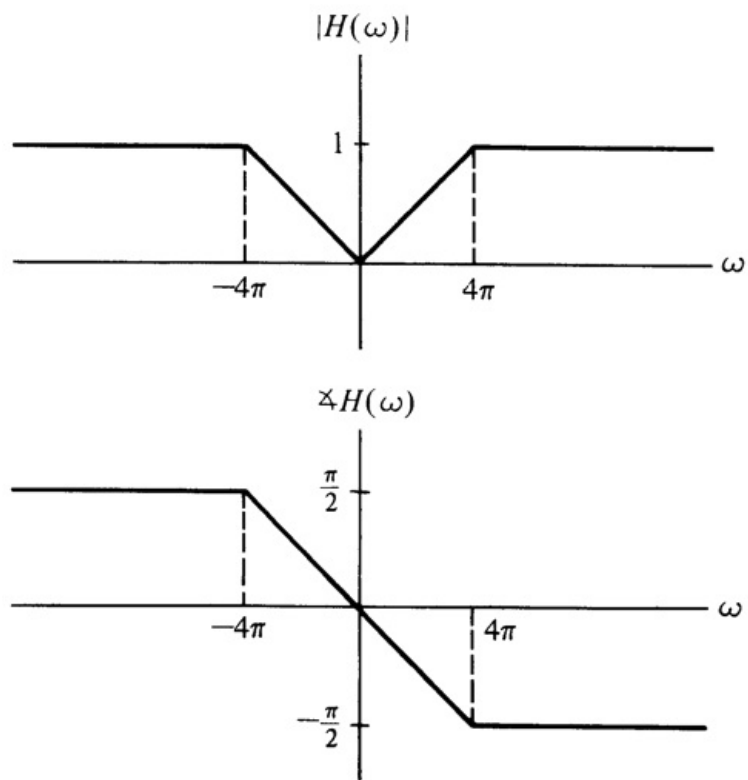
$$u(t) = \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{4}) + 2 \cos(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}),$$

unde $\omega_1, \omega_2 > 0$, calculați și reprezentați grafic $y(t)$. Verificați rezultatul în Matlab.

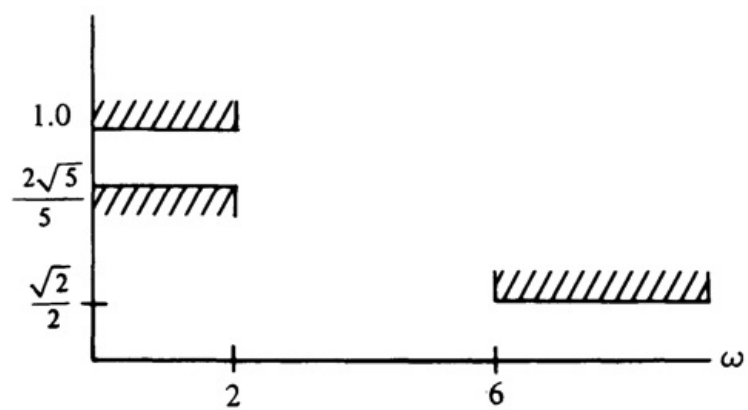
Exercițiul 21. Ne propunem proiectarea unui filtru neideal de tip trece-tot cu specificațiile din figura 16b. În plus, ne dorim $H(0) = 1$. Se impune ca filtrul proiectat să aibă funcția de răspuns în frecvență de forma

$$H(j\omega) = \frac{K}{\alpha + j\omega}.$$

- a) Determinați K astfel încât $H(0) = 1$.
- b) Găsiți intervalul admisibil pentru α a.î. filtrele rezultate să îndeplinească specificațiile din figura 16b.



(a) Răspuns în frecvență



(b) Cerințe de proiectare

Figura 16: