Teoria Sistemelor

Laboratorul 6: Sisteme dinamice pe spatiul starilor. Proprietati structurale

1 Scopul laboratorului

Laboratorul prezinta unele metode de testare a proprietatilor sistemice structurale (controlabilitate si observabilitate). In acelasi context sunt tratate metode de descompunere structurala ce conduc la calculul realizarilor minimale. Laboratorul mai abordeaza calculul comenzii ce asigura o anume tranzitie de stare si calculul nivelelor energetice ale unui sistem.

2 Proprietati structurale

Un sistem dinamic liniar descris pe spatiul starilor

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{1}$$

are aceleasi proprietati I/O cu matricea de transfer $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ (cand realizarea este minimala). Prin proprietati I/O intelegem stabilitate, raspuns in timp, raspuns in frecventa. Sistemul dinamic descris de (1) are unele proprietati care nu se regasesc la $H(s)$, numite proprietati de structura. Acestea ne spun in ce conditii sistemul poate avea o anumita traiectorie de stare, in ce masura putem determina o stare masurand raspunsul sau in ce conditii poate fi stabilizat un sistem dinamic.

2.1 Controlabilitatea

Definiţia 1. Spunem ca un sistem liniar este controlabil daca orice tranzitie de stare dorita se poate realiza prin alegerea adecvata a semnalului de intrare.

Consideram un sistem liniar descris de ecuatiile (1). Definim matricea de controlabilitate, notata R, avand expresia

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \tag{2}$$

de dimensiune $n \times nm$.

Teorema 1. *Spunem ca perechea (A, B) este* controlabila *(sistemul $S = (A, B, C, D)$ este controlabil) daca si numai daca matricea de controlabilitate R este epica. O stare x este* accesibila *(controlabila) daca si numai daca $x \in ImR$.*

2.2 Observabilitatea

Definiţia 2. Spunem ca un sistem liniar este observabil daca starea initiala este unic determinata cunoscand functiile de intrare si de iesire, obtinute prin masuratori.

Definim matricea de observabilitate, notata Q, avand expresia

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Teorema 2. *Spunem ca perechea (C, A) este observabila (sistemul $S = (A, B, C, D)$ este observabil) daca si numai daca matricea de observabilitate Q este monica. O stare x este observabila daca si numai daca $x \notin KerQ$.*

Spunem ca proprietatile de controlabilitate si observabilitate sunt *duale*, in sensul ca, daca perechea (A, B) este controlabila atunci perechea (B^T, A^T) este observabila.

2.3 Descompuneri structurale

Din cele doua teoreme de mai sus rezulta clar ca, pentru ca un sistem sa fie controlabil trebuie ca toate starile (din spatiul starilor pe care este el descris) sa fie accesibile, la fel cum, pentru ca el sa fie observabil trebuie ca toate starile sa fie observabile.

Ne ocupam de controlabilitate. Daca proprietatea nu este indeplinita inseamna ca o parte din stari nu sunt accesibile, adica orice comanda as alege, traiectoria evolutiei fortate nu va trece niciodata prin acele stari. Ne intereseaza care sunt acele stari ce nu pot fi accesate si, mai ales, care sunt starile ce pot fi accesate. Este clar ca starile accesibile stau intr-un subspatiu al spatiului starilor (accesibile+neaccesibile). Acesta se numeste *subspatiu controlabil.* Ne intereseaza sa rescriem ecuatiile de stare intr-un nou sistem de coordonate in care starile accesibile sa fie proiectii ale tuturor starilor pe axele ce subintind subspatiul controlabil.

La curs se demonstreaza ca subspatiul controlabil este imaginea matricei de controlabilitate, i.e. $\mathcal{C}=\mathrm{Im}R$.

Teorema 3. *Consideram ca dispunem de o matrice* $U=\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *nesingulara, unde coloanele lui* U_1 *constituie o baza pentru ImR. Daca aplicam aceasta transformare de coordonate pe ecuatiile* (1)

$$\begin{array}{cc} \tilde{A}=U^{-1}AU=\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \tilde{B}=U^{-1}B=\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C}=CU=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} & \tilde{D}=D. \end{array} \tag{4}$$

atunci sistemul $S_1=(A_1,B_1,C_1,D)$ *este controlabil si echivalent I/O cu* $S=(A,B,C,D)$.

Cu alte cuvinte, realizarea S_1 reprezinta restrictia realizarii S la subspatiul controlabil, $\mathrm{Im}R$.
Similar, pentru observabilitate. Daca un sistem este neobservabil inseamna ca anumite stari nu pot fi estimate indiferent ce masuratori facem pe raspunsul $y(t)$. Aici ne intereseaza starile ce pot fi estimate, adica subspatiul observabil. Se demonstreaza ca subspatiul neobservabil este nucleul matricei de observabilitate, i.e. $\mathcal{N}=\mathrm{Ker}Q$.

Teorema 4. *Consideram ca dispunem de o matrice* $V=\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *nesingulara, unde coloanele lui* V_2 *constituie o baza pentru KerQ. Daca aplicam aceasta transformare de coordonate pe ecuatiile* (1)

$$\begin{array}{cc} \tilde{A}=V^{-1}AV=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} & \tilde{B}=V^{-1}B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \tilde{C}=CV=\begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} & \tilde{D}=D. \end{array} \tag{5}$$

atunci sistemul $S_1=(A_1,B_1,C_1,D)$ *este observabil si echivalent I/O cu* $S=(A,B,C,D)$.

Realizarea S_1 este, deci, restrictia realizarii S la subspatiul observabil.

2.4 Realizari minimale

Am vazut ca doua realizari de stare ale aceleiasi matrice de transfer $H(s)$ sunt echivalente pe stare daca au aceeasi dimensiune. Putem spune, deci, ca o matrice de transfer admite o infinitate de realizari de stare de un anumit ordin, n. Dimensiunea acestor realizari poate sa fie oricat de mare, dar nu poate sa fie oricat de mica. Cu alte cuvinte, exista un ordin de realizare sub care nu se poate scadea, numit *ordinul realizarii minimale.* Spunem ca polii matricei de transfer se gasesc printre valorile propriei ale matricei A din realizarea sa de stare. Daca realizarea nu este de ordin minim, deducem ca A are unele valori proprii care nu se regasesc printre polii lui $H(s)$. Acestia se numesc *polii ficsi* ai sistemului.

La sistemele SISO, este destul de intuitiv ce inseamna acesti poli ficsi. Anume, daca in functia de transfer avem radacini comune ale numaratorului si numitorului si scriem o realizare de stare a functiei de transfer nesimplificata, atunci matricea A va avea drept valori proprii toate radacinile numitorului, inclusiv cele care se simplifica cu radacinile numaratorului, deci care nu sunt poli ai functiei de transfer. La sistemele MIMO lucrurile se complica.

Definiţia 3. O realizare de stare a unei matrice de transfer $H(s)$ care este de cel mai mic ordin posibil dintre toate realizarile sale posibile se numeste **minimala**. O realizare este minimala daca este simultan controlabila si observabila.

3 Algoritmi numerici

Unul dintre principalele avantaje ale sistemelor descrise de realizari de stare este faptul ca acestea pot fi procesate cu usurinta pe calculator.

3.1 Testarea numerica a controlabilitatii

Controlabilitatea unui sistem $S = (A, B, C, D)$ este o proprietate ce tine doar de perechea (A, B). Unul din testele simple de controlabilitate este calculul rangului matricei de controlabilitate. Schema de calcul se poate rezuma astfel

a Se calculeaza R dupa formula (2).

b Se calculeaza rangul matricei R si se compara cu 0.

In general, in ciuda simplitatii sale, schema de mai sus nu este recomandabila intrucat matricea R este de mari dimensiuni, iar calculul coloanelor sale implica riscuri la efectuarea testului de rang.
De exemplu, daca avem un sistem cu o singura intrare ($m = 1$), deci matricea B se reduce la o singura coloana, atunci, conform relatiei (2) coloanele $b, Ab, \ldots A^k b, \ldots$ ale matricei patrate R coincid cu vectorii obtinuti aplicand metoda puterii vectorului initial $b_1 = b$. Prin urmare, daca $n \gg 1$, iar matricea A are o valoare proprie dominanta, i.e. $|\lambda_1| \gg |\lambda_i|$ cu $i = 2 : n$, atunci ultimele coloane ale lui R sunt practic aliniate cu vectorul propriu u_1 al lui A asociat cu λ_1. Prin urmare, matricea R este numeric aproape singulara, chiar daca perechea (A, b) este controlabila. Acest fenomen se numeste necontrolabilitate numerica si nu poate fi evitat, indiferent de metoda prin care testam rangul matricei R.

Ne intereseaza, deci, un alt tip de procedura de testare a controlabilitatii, bazata pe transformari de asemanare, ce aduc perechea (A, B) la o forma "simpla" pe care proprietatea sa poata fi testata "prin inspectie". Aceste proceduri sunt cele mai utilizate in aplicatii, cu atat mai mult cu cat ele faciliteaza si rezolvarea altor probleme conexe, cum ar fi separarea subspatiului controlabil de cel necontrolabil sau alocarea polilor. Cea mai eficienta procedura de transformare consta in aducerea perechii initiale (A, B) la **forma Hessenberg controlabila** prin transformari de asemanare ortogonale.

Considerăm sistemul liniar $S = (A, B, C)$ şi fie $\tilde{S} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ un sistem *asemenea* cu S, având matricele

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B, \quad \tilde{C} = CT, \tag{6}$$

unde $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice nesingulară arbitrară. Între matricele de controlabilitate şi observabilitate ataşate sistemelor S şi $\tilde{S}$ există următoarele relaţiile

$$\tilde{R} = T^{-1}R, \quad \tilde{Q} = QT. \tag{7}$$

Rezultă că matricele R şi $\tilde{R}$ au acelaşi rang, deci perechile (A, B) şi $(\tilde{A}, \tilde{B})$ sunt simultan controlabile sau necontrolabile. În mod similar, perechile (C, A) şi $(\tilde{C}, \tilde{A})$ sunt simultan observabile sau neobservabile. Pe scurt, proprietăţile de controlabilitate şi observabilitate sunt invariante în raport cu transformările de asemănare.

Dacă în (6) presupunem că matricea $T = U$ este ortogonală, deci sistemele S şi $\tilde{S}$ sunt *ortogonal asemenea*

$$\tilde{A} = U^T AU, \quad \tilde{B} = U^T B, \quad \tilde{C} = CU, \tag{8}$$

atunci relaţiile (7) devin

$$\tilde{R} = U^T R, \quad \tilde{Q} = QU. \tag{9}$$

În cele ce urmează vom descrie procedurile de aducere a perechii (A, B) la o formă simplă utilizând transformările de asemănare ortogonală, cu scopul identificării invarianţilor (ortogonali ai) acestei perechi şi, în particular, al testării controlabilităţii acesteia.

În consecinţă, vom considera o pereche (A, B) cu m intrări, nu neapărat controlabilă, şi pentru claritate vom discuta succesiv cazurile $m = 1$ şi $m > 1$. Peste tot vom presupune $B \neq 0$ şi vom nota

$$r \overset{\text{def}}{=} \text{rang}R, \quad \bar{r} \overset{\text{def}}{=} n - r, \tag{10}$$

unde evident r satisface inegalitatea $1 \leq r \leq n$.

În cazul unei perechi (A, B) de ordin n cu m intrări, $m \geq 1$, procedura de transformare are la bază următorul rezultat general.

Teorema 5. (Lema de deflaţie controlabilă). *Oricare ar fi perechea (A, B) cu rang$B = r_1 > 0$, există o matrice ortogonală $U_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ astfel încât*

$$A \leftarrow \tilde{A} = U_1^T AU_1 = \begin{bmatrix} A_1 & X \\ G & F \end{bmatrix}, \quad B \leftarrow \tilde{B} = U_1^T B = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

unde matricea $H_1 \in \mathbb{R}^{r_1\times m}$ este epică, i.e. rang$H_1 = r_1$. Mai mult, perechea (A, B) este controlabilă dacă şi numai dacă perechea redusă (F, G), de ordin $n - r_1 < n$, este controlabilă.

Matricea U_1 se determină e.g. aplicând lui B procedura de descompunere a valorilor singulare (**DVS**). Avem

$$U_1^T BV = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

unde U_1 şi $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sunt ortogonale iar Σ_1 este diagonală de ordin $r_1 > 0$ cu elementele diagonale pozitive. Partiţionând $V = [V_1 \ V_2]$, unde V_1 are r_1 coloane, obţinem

$$\tilde{B} = U_1^T B = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 V_1^T \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

unde $H_1 = \Sigma_1 V_1^T$ este evident epică de rang r_1.

După determinarea lui U_1 se aplică U_1 lui A, i.e. se calculează $\tilde{A} = U_1^T A U_1$, şi în acord cu (11) se evidenţiază perechea redusă (F, G) de ordin $n - r_1$ cu r_1 intrări.

În ipoteza $G \neq 0$, perechii (F, G) cu *rang* $G = r_2 > 0$ i se poate aplica din nou o transformare de tip (11). Se obţine

$$F \leftarrow \tilde{F} = \bar{U}_2^T F \bar{U}_2 = \begin{bmatrix} A_2 & X \\ G_{nou} & F_{nou} \end{bmatrix}, \quad G \leftarrow \tilde{G} = \bar{U}_2^T G = \begin{bmatrix} H_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

sau echivalent

$$\begin{aligned} A \leftarrow \tilde{A} = U_2^T A U_2 &= \left[\begin{array}{c|cc} A_1 & X & X \\ \hline H_2 & A_2 & X \\ 0 & G_{nou} & F_{nou} \end{array}\right], \\ B \leftarrow \tilde{B} = U_2^T B &= \left[\begin{array}{c} H_1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right], \end{aligned} \tag{15}$$

unde matricele $\bar{U}_2$ precum şi

$$U_2 = \begin{bmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & \bar{U}_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

sunt ortogonale iar matricea H_2 este epică de rang r_2.

Forma finală a perechii (A, B), obţinută prin aplicarea repetată a procedurii de deflaţie descrisă în Propoziţia 5, se numeşte *forma bloc-superior Hessenberg* şi este definită prin

$$A \leftarrow \tilde{A} = U^T A U = \begin{bmatrix} A_R & A_{R\bar{R}} \\ 0 & A_{\bar{R}} \end{bmatrix}, \quad B \leftarrow \tilde{B} = U^T B = \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

în care perechea (A_R, B_R), de ordin r, se găseşte în forma *bloc-superior Hessenberg controlabilă*

$$A_R = \begin{bmatrix} A_1 & X & \cdots & X & X \\ H_2 & A_2 & \cdots & X & X \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & H_k & A_k \end{bmatrix}, \quad B_R = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

unde toate blocurile $H_i \in \mathcal{R}^{r_i \times r_{i-1}}$ sunt epice, i.e.

$$\mathrm{rang} H_i = r_i > 0, \quad i = 1:k, \quad r_0 \stackrel{\text{def}}{=} m. \tag{19}$$

Evident avem

$$r = \sum_{i=1}^{k} r_i \leq n \tag{20}$$

şi în virtutea condiţiilor (19) perechea (A_R, B_R) din (17) este controlabilă. Mai mult, perechea iniţială (A, B) *este controlabilă* dacă şi numai dacă $r = n$, i.e. $(\tilde{A}, \tilde{B}) = (A_R, B_R)$, şi în acest caz numărul k de blocuri din (18) coincide cu *indicele de controlabilitate* ν al lui (A, B).

Matricea ortogonală $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ din (17) rezultă prin acumularea transformărilor parţiale, i.e.

$$U = U_k \cdots U_2 U_1, \tag{21}$$

în care U_1 se determină ca în demonstraţia lemei 5, U_2 are forma (16) etc. Subliniem că în virtutea structurii lui U_2, premultiplicarea cu U_2 nu modifică primele r_1 linii, iar postmultiplicarea cu U_2^T nu modifică primele r_1 coloane ale matricei asupra căreia acţionează transformarea corespunzătoare. De asemenea, proprietăţi asemănătoare au toate matricele U_i, $i = 2:k$ din (21).

În rezumat, aducerea pe loc a perechii iniţiale (A, B) la forma bloc-superior Hessenberg (17), (18) se face printr-o succesiune de transformări ortogonale de asemănare

$$A \leftarrow U_i^T A U_i, \quad B \leftarrow U_i^T B, \quad i = 1 : k. \tag{22}$$

La etapa $i = 1$ se operează asupra perechii iniţiale (A, B) ca în propoziţia 5, iar la etapele $i \geq 2$ se operează analog asupra perechii reduse corespunzătoare (F, G), conţinute în tabloul A. În particular, transformările U_i, $i \geq 2$ nu modifică forma lui B obţinută după prima etapă, deci pentru $i \geq 2$ relaţiile (21) se reduc la

$$A \leftarrow U_i^T A, \quad A \leftarrow A U_i. \tag{23}$$

Prezentam in continuare algoritmul de reducere a unei perechi (A, B) oarecare la forma Hessenberg controlabila.

Algoritm 1: Algoritm pentru reducerea unei perechi (A, B) la forma Hessenberg controlabila

---

Date de intrare: Perechea (A, B)

Date de iesire: Perechea transformata $(\tilde{A}, \tilde{B})$ in forma (17) si r, dimensiunea subspatiului controlabil

Se gaseste U_1 ortogonal astfel incat $U_1^T B = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ si r_1=rangH_1;

Se aplica U_1 pe A:

$$A \leftarrow U_1^T A U_1 \tag{24}$$

Se initializeaza matricea de transformare $U = U_1$;

$r = r_1$;

$G = A(r + 1 : n, 1 : r)$;

Cat timp $||G|| > 0$ **executa**

  Se gaseste U_1 astfel incat $U_1^T G = \begin{bmatrix} H_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ si r_1=rangH_2;

  Daca $r_1 = n - r$ **Atunci**

    Se afiseaza 'Perechea (A, B) este controlabila';

    STOP;

  Altfel

    Se aplica transformarea $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}$ pe A:

$$\begin{aligned} A(r+1:n, r-r_1+1:n) &= U_1^T A(r+1:n, r-r_1+1:n) \\ A(:, r+1:n) &= A(:, r+1:n) U_1 \end{aligned} \tag{25}$$

    Se acumuleaza transformarea

$$U(:, r+1:n) = U(:, r+1:n) U_1 \tag{26}$$

    $r = r + r_1$;

    $G = A(r + 1 : n, r - r_1 + 1 : n)$;

  final

final

Se afiseaza 'Perechea (A, B) necontrolabila';

Pentru acest algoritm se recomanda apelul $[A_H, B_H, r, U] = fhc(A, B)$, unde perechea (A_H, B_H) este in forma (18), U este matricea ortogonala de transformare, iar variabila r este dimensiunea matricei A_R din (18), adica dimensiunea subspatiului controlabil. Algoritmul de mai sus realizeaza, deci, nu doar un test de controlabilitate fiabil numeric, ci si descompunerea structurala controlabila.

3.2 Testarea numerica a observabilitatii

In mod dual, un test de observabilitate a unei perechi (A, C) este echivalent cu testul de controlabilitate aplicat perechii (A^T, C^T). Metoda directa de a testa observabilitatea unei perechi (A, C) consta in constructia matricei de observabilitate Q din relatia (3) si verificarea rangului acesteia. Aceasta procedura este identica cu testarea rangului matricei de controlabilitate a perechii (A^T, C^T), prin urmare pune aceleasi probleme de conditionare numerica, fiind recomandata doar in cazul sistemelor de dimensiuni mici.

O procedura robusta numeric care rezolva simultan si problema descompunerii structurale observabile este reducerea perechii (A, C) la **forma Hessenberg observabila**. Procedam prin dualitate fata de forma Hessenberg controlabila si obtinem schema de calcul a $[A_H, B_H, r_o, U] = fhc(A^T, C^T)$

b $A_{Ho} = A_H^T$, $C_{Ho} = B_H^T$, $V_o = U^T$,

unde perechea (A_{Ho}, B_{Ho}) este in forma (inferior) Hessenberg observabila

$$A_{Ho} = \begin{bmatrix} A_Q & 0 \\ A_{Q\bar{Q}} & A_{\bar{Q}} \end{bmatrix} \quad C_{Ho} = \begin{bmatrix} C_Q & 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

cu perechea (A_Q, C_Q) observabila. Sintetizam schema de mai sus in apelul $[A_{Ho}, C_{Ho}, r_o, V] = fho(A, C)$

3.3 Calculul realizarilor minimale

Fiind data o realizare de stare $S = (A, B, C, D)$ oarecare, schema de mai jos gaseste realizarea $S_m = (A_m, B_m, C_m, D_m)$ simultan controlabila si observabila, echivalenta I/O cu S.

Algoritm 2: Algortitm pentru calculul realizarii minimale, bazat pe descompunerile structurale controlabila si obserbabila.

Date de intrare: Realizarea $(S = (A, B, C, D)$

Date de iesire: Realizarea $S_m = (A_m, B_m, C_m, D_m)$ ce reprezinta realizarea minimala a lui S

1 Se calculeaza descompunerea structurala controlabila pentru perechea (A, B)
$[A_H, B_H, r_o, U] = fhc(A, B)$, $C_H = CU$ (transformarea se aplica intregului sistem, deci si matricei C)

2 Se selecteaza restrictia acestei realizari la subspatiul controlabil $A_c = A_H(1:r, 1:r)$, $B_c = B_H(1:r, :)$, $C_c = C_H(:, 1:r)$

3 Se calculeaza descompunerea structurala observabila pentru perechea (A_c, C_c)
$[A_{Ho}, B_{Ho}, r_o, V] = fho(A_c, C_c)$, $B_{Ho} = V^T B_c$

4 Se selecteaza restrictia acestei realizari la subspatiul observabil $A_m = A_{Ho}(1:r_o, 1:r_o)$, $B_m = B_{Ho}(1:r_o, :)$, $C_m = C_{Ho}(:, 1:r_o)$

Se observa ca algoritmul realizeaza extragerea unei realizari controlabile S_c, echivalenta I/O cu cea originala S, apoi extragerea unei realizari observabile S_m, echivalenta I/O cu S_c (deci si cu S). Prin urmare S_m este, conform definitiei 3, realizarea minimala a sistemului S.

4 Gramieni. Calculul comenzii

Definiţia 4. Matricea variabila in timp definita de relatia

$$L_c(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \tag{28}$$

se numeste gramian de controlabilitate in timp continuu cu orizont de timp finit si este solutia ecuatiei matriceale diferentiale Lyapunov continua

$$\dot{L}_c(t) = A L_c(t) + L_c(t) A^T + B B^T. \tag{29}$$

Teorema 6. *O stare x este controlabila (accesibila) la momentul $t > 0$ daca si numai daca $x \in Im L_c(t)$.*

Daca $x \in Im L_c(t)$ inseamna ca exista $z \in \mathbb{R}^n$ astfel incat $x = L_c(t) z = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} z d\tau$. Obtinem astfel functia de intrare care duce starea nula in starea dorita, x

$$u(\tau) = B^T e^{A^T(t-\tau)} L_c^\sharp(t) x, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{30}$$

In cazul in care starea dorita nu este accesibila, putem calcula comanda care duce starea initiala cat de aproape posibil de starea dorita.

4.1 Nivele energetice

Definiţia 5. Daca sistemul S este strict stabil (spectrul lui A este inclus in semiplanul complex stang deschis) definim gramianul de controlabilitate in timp continuu, cu orizont infinit de timp ca fiind matricea simetrica si semipozitiv definita

$$Lc = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau. \tag{31}$$

Acesta este solutia ecuatiei matriceale algebrice Lyapunov continue

$$0 = A L_c + L_c A^T + B B^T. \tag{32}$$

Matricea L_c fiind simetrica si semipozitiv definita inseamna ca exista $U = \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}\right]$ ortonormat (coloanele ortogonale si de norma 1) astfel incat

$$U^T L_c U = \tilde{L}_c = \left[\begin{array}{cccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{array}\right] \quad (33)$$

unde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ sunt valorile proprii ale gramianului L_c. Daca, in plus, perechea (A, B) e controlabila, atunci L_c este strict pozitiv definit, deci valorile sale proprii sunt strict pozitive. Scriem sistemul transformat $\tilde{S}$

$$\tilde{A} = U^T A U \quad \tilde{B} = U^T B \quad \tilde{C} = CU. \quad (34)$$

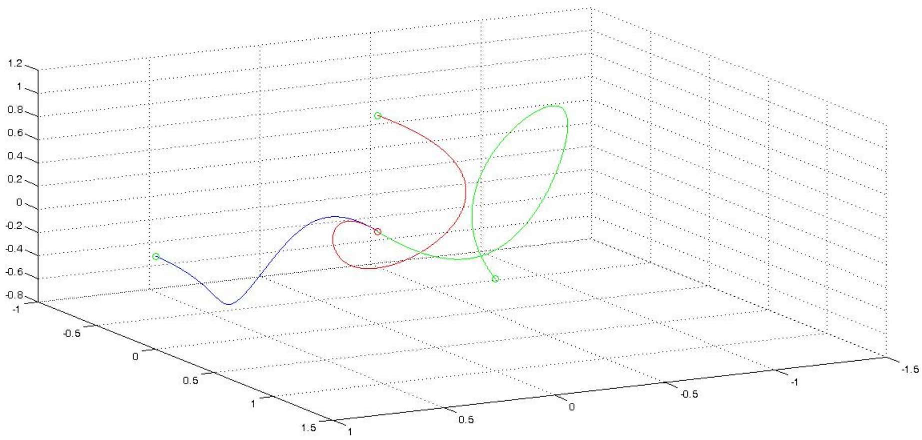
Pentru acest sistem comanda ce duce starea initiala nula intr-o stare $e_i = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]^T$ (cu 1 pe pozitia i) este

$$u_i(\tau) = B^T e^{A^T \tau} \frac{1}{\sigma_i}, \quad (35)$$

iar energia acestei comenzi este

$$||u_i(\tau)||_2^2 = \frac{1}{\sigma_i}. \quad (36)$$

Spunem ca gramianul in timp infinit masoara efortul energetic al sistemului pentru a duce starea nula pe sfera unitate. In figura de mai jos se vede traiectoria starilor catre fiecare dintre starile tinta e_i, pentru un sistem cu 3 stari si o intrare.



5 Rutine Matlab®

a Pentru calculul matricelor de controlabilitate (R) si observabilitate (Q) din relatiile (2) si (3) se folosesc rutinele **ctrb** si, respectiv, **obsv**.

b Pentru evaluarea rangului unei matrice se foloseste rutina **rank**. Pentru descompunerea valorilor singulare se foloseste rutina **svd**.

c Pentru reducerea unei perechi oarecare (A, B) la forma Hessenberg controlabila se foloseste rutina **ctrbf**. Pentru reducerea unei perechi oarecare (A, C) la forma Hessenberg observabila se foloseste rutina **obsvf**.

d Pentru calculul unei realizari minimale a unei matrice de transfer se foloseste rutina **ss**, cu apelul **ss(sys,'min')**.

e Pentru rezolvarea ecuatiilor matriceale algebrice Lyapunov se foloseste rutina **lyap**. Pentru calculul gramienilor cu orizont de timp infinit se foloseste rutina **gram**.

Prezentam in continuare doua rutine utile pentru rezolvarea unor cerinte ale exercitiilor propuse.

a Cod pentru calculul comenzii $u(t)$ care duce sistemul *sys* din starea initiala nula in starea finala x.

```
function [u,t]=comanda(sys,x)
A=sys.a;
B=sys.b;
[~,n]=size(A);
h=1e-4;
tf=5;
N=tf/h;
A0=[A B*B'; zeros(n) A'];
F0=expm(h*A0);
F=F0(1:n,1:n);
G=F0(1:n,n+1:2*n);
F1=F0(n+1:2*n,n+1:2*n);
Lc=zeros(n);
for k=1:N
    Lc=F*Lc*F1+G;
end
Lci=pinv(Lc);
z=Lci*x;
t=0:h:tf-h;
fi=z;
for k=N:-1:1
fi=F1*fi;
    u(:,k)=B'*fi;
end
```

b Cod pentru simularea 3D a evolutiei fortate a starii.

```
function evolf(sys,U,t,x0)
[y,T,x]=lsim(sys,U,t);
 N=length(T);
 grid on
 hold on
 plot3(x0(1),x0(2),x0(3),'or')
 plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3))
 plot3(x(N,1),x(N,2),x(N,3),'og')
 hold off
figure
hold on
plot(T,x(:,1))
plot(T,x(:,2),'g')
plot(T,x(:,3),'r')
hold off
```

6 Exercitii

Exerciţiul 1. Introduceti in Matlab un sistem controlabil cu 3 stari si o intrare.

a Calculati comanda care duce starea initiala intr-o stare dorita, data de voi si simulati evolutia fortata a starii pentru comanda calculata la punctul anterior. Verificati ca starea tinta este intr-adevar atinsa. Se vor folosi rutinele **comanda.m** si **evolf.m**, expuse in sectiunea 5.

b Repetati procedura pentru o noua pereche (A, B), de data aceasta necontrolabila

c Reduceti perechea (A, B) la forma Hessenberg controlabila si repetati procedura.

Exerciţiul 2. Fie sistemul descris pe spatiul starilor

$$H(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{37}$$

a Gasiti o stare necontrolabila folosind imaginea matricei de controlabilitate. *Indicatie*: o stare $x \in \mathbb{R}^n$ este necontrolabila daca satisface $x^T R = 0$, deci exista $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal astfel incat $x^T Q Q^T R = x^T Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. Avem deci ca $[\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, deci starea x ce satisface $x^T Q = [0 \quad \tilde{x}_2]$ este necontrolabila.

b Gasiti comanda care duce starea initiala nula cat mai aproape posibil de starea gasita la punctul anterior si simulati (in spatiul starilor) evolutia fortata a starilor la aceasta comanda.

Exercițiul 3. Introduceti in Matlab un sistem stabil si controlabil cu 3 stari si o intrare.

a Calculati gramianul de controlabilitate cu orizont infinit de timp.

b Gasiti realizarea de stare pentru care gramianul de controlabilitate in timp infinit este o matrice diagonala.

c Pentru realizarea de la punctul anterior, gasiti comenzile care duc starea initiala nula in fiecare dintre starile e_i cu $i = 1:3$. Figurati pe acelasi grafic cele 3 traiectorii de stare.

Exercițiul 4. Considerati urmatoarea matrice de transfer

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{(s-1)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)^2} & \frac{s-2}{(s+3)^2} \end{bmatrix} \tag{38}$$

a Introduceti matricea de transfer in Matlab.

b Gasiti o realizare de stare a acesteia.

c Scrieti descompunerea structurala controlabila a realizarii obtinute la punctul precedent, folosind forma Hessenberg controlabila

d Scrieti descompunerea structurala observabila, folosind forma Hessenberg observabila.

e Folositi descompunerile structurale pentru a reduce realizarea la forma minimala. Gasiti matricea de transfer asociata realizarii minimale.

f Implementati doua metode pentru a calcula o baza ortogonala a subspatiului controlabil.

Exercițiul 5. Se considera perechea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 20 & 2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 20 & 19 & \\ & & & 20 & 20 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

a Testati controlabilitatea perechii (A, b) folosind evaluarea rangului matricei de controlabilitate. Calculati valorile singulare ale matricei de controlabilitate R. Ce constatati?

b Testati controlabilitatea perechii folosind reducerea la forma Hessenberg controlabila.

Exercițiul 6. Fie $H(s) = \frac{s+1+\epsilon}{(s+1)(s+2)}$.

a Scrieti o realizare standard observabila.

b Verificati controlabilitatea acestei realizari pentru $\epsilon = 10^{-7}$, $\epsilon = 10^{-15}$, $\epsilon = 0$.

Exercițiul 7. Scrieti in Matlab un sistem SISO (A, b, c^T, d). Gasiti realizarea echivalenta pentru care avem $R = I$. Gasiti apoi realizarea echivalenta pentru care avem $Q = I$.

7 Anexa - Laborator 6

Algoritm 3: Algoritm pentru scrierea realizărilor de stare pentru sisteme SISO

Date de intrare: Funcţia de transfer $H(s)$

Date de iesire: Modelul de stare (A, B, C, D)

1 Se calculează $D = H(\infty)$;

2 Se calculează

$$\tilde{H}(s) = H(s) - D = \frac{\tilde{\nu}_{n-1}s^{n-1} + \tilde{\nu}_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \tilde{\nu}_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

3 Se formează cele 4 matrice în acord cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_0 & \tilde{\nu}_1 & \tilde{\nu}_2 & \ldots & \tilde{\nu}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D = H(\infty),$$

numită *realizare standard controlabilă* sau în acord cu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_0 \\ \tilde{\nu}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\nu}_{n-2} \\ \tilde{\nu}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = H(\infty),$$

numită *realizare standard observabilă* .

Algoritm 4: Algoritm pentru scrierea realizărilor de stare pentru sisteme MIMO

Date de intrare: Matricea de transfer $H(s)$

Date de iesire: Modelul de stare (A, B, C, D)

1 Se calculează $D = H(\infty)$ şi $\tilde{H}(s) = H(s) - D$

2 Se calculează $p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$, numitorul comun al tuturor funcţiilor de transfer din $\tilde{H}(s)$, pe care îl scriem acum $\tilde{H}(s) = N(s)\frac{1}{p(s)}$, unde $N(s) = K_{n-1}s^{n-1} + K_{n-2}s^{n-2} + \ldots + K_0$ este "numărătorul" matriceal rămas după extragerea numitorului comun;

3 Se scriu cele 4 matrice în acord cu

$$A = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \ldots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \ldots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \ldots & I_m \\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & -a_2 I_m & \ldots & -a_{n-1} I_m \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix} \tag{42}$$
$$C = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & \ldots & K_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D = H(\infty)$$

sau în acord cu

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & 0_p & \ldots & 0_p & -a_0 I_p \\ I_p & 0_p & \ldots & 0_p & -a_1 I_p \\ 0_p & I_p & \ldots & 0_p & -a_2 I_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_p & 0_p & \ldots & I_p & -a_{n-1} I_p \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{n-2} \\ K_{n-1} \end{bmatrix} \tag{43}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0_p & 0_p & \ldots & 0_p & I_p \end{bmatrix} \qquad D = H(\infty),$$

Algoritm 5: Algoritm pentru conversia unui model stare SISO într-o funcţie de transfer

Date de intrare: Matricele A, B, C, D

Date de iesire: Polinoamele N, p, astfel încât $T(s) = \frac{N(s)}{p(s)}$

1 Se calculează valorile proprii λ_i ale matricei A utilizând algoritmul QR

2 Se formează $A_0 = A - BC$

3 Se calculează valorile proprii λ_{0i} ale matricei A_0 utilizând algoritmul QR

4 Se calculează $p\left(s\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(s - \lambda_i\right)$

5 Se calculează $p_0\left(s\right) = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(s - \lambda_{0i}\right)$

6 Se calculează $N\left(s\right) = p_0\left(s\right) - p\left(s\right)$