Sisteme dinamice pe spațiul stărilor

Tudor C. Ionescu
Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: tudor.ionescu@upb.ro

URL: http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/

3 decembrie 2020

1. Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2. Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

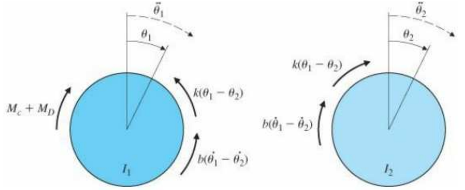
3. Echivalența sistemelor dinamice liniare
   - Echivalența pe stare
   - Echivalența intrare-ieșire

4. Stabilitatea sistemelor dinamice
   - Ecuația matriceală Liapunov și stabilitatea

HDD–ecuații fizice

$$
\begin{aligned}
I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) &= M_c + M_D,\\
I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) &= 0,
\end{aligned}
$$

unde I_1, I_2 sunt momentele de inerție, b coeficientul de frecare, k coeficientul de elasticitate.



Alegem

- ieșirea = mărimea măsurată, de interes $y = \theta_2$, i.e., poziția acului pe disc;
- intrarea $u = M_c$;
- perturbația = M_D.

Ne interesează evoluția liberă și cea forțată de M_C a poziției acului de scriere θ_2 determinată de dinamica „internă" a sistemului $\leftarrow$ luăm în considerare și celelalte mărimi prezente (nu neapărat măsurabile) care influențează evoluția ieșirii.

Q: Cum scriem compact modelul dinamic? Care este răspunsul modelului dinamic? Are legătură cu funcția de transfer? Ce proprietăti specifice are modelul dinamic? Poate fi stabilizat? Dar reglat?

A: Analiza și sinteza sistemelor (dinamice) pe spațiul stărilor.

HDD - sistem dinamic

Scriem

$$\begin{aligned} \theta_1 &= x_1 \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dot{x}_1 = x_2, \\ \theta_2 &= x_3 \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \dot{x}_3 = x_4. \end{aligned}$$

Prin urmare, manipulând algebric ecuațiile fizice $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{I_1}x_1 - \frac{b}{I_1}x_2 + \frac{k}{I_1}x_3 + \frac{b}{I_1}x_4 + u, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{k}{I_2}x_1 + \frac{b}{I_2}x_2 - \frac{k}{I_2}x_3 - \frac{b}{I_2}x_4, \\ y &= x_3. \end{aligned}$$

HDD - sistem pe stare (A, B, C, D)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases},$$

unde

$$x(t) := x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \; u(t) = M_c \in \mathbb{R},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{l_1} & -\frac{b}{l_1} & \frac{k}{l_1} & \frac{b}{l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{l_2} & \frac{b}{l_2} & -\frac{k}{l_2} & -\frac{b}{l_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

$$y(t) := y = x_3 \in \mathbb{R}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 4}, \quad D = 0.$$

Sisteme dinamice pe spațiul stărilor

Clasa sistemelor considerate:

- LINIARE;
- INVARIANTE ÎN TIMP;
- FINIT DIMENSIONALE;
- MULTI-INTRARE/MULTI-IEȘIRE (MIMO).

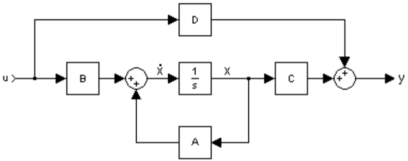
Definiția 1

Se numește sistem dinamic liniar, invariant în timp, cu timp continuu, de dimensiune n, un cuadruplu de matrici constante (A, B, C, D), unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ ce se explicitează prin

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_o) = x_o \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), & \end{cases} \tag{1}$$

unde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$;
$u(t) \to$ intrarea sistemului, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \to$ spațiul semnalelor de intrare;
$y(t) \to$ ieșirea sistemului, $y(\cdot) \in \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} \to$ spațiul semnalelor de ieșire;
$x(t) \to$ starea sistemului, $x(\cdot) \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \to$ spațiul stărilor.

Observații



- Sistemul dinamic admite o scriere matricială care explicitează un sistem de n ecuații diferențiale liniare, cu n necunoscute (stări) iar ieșirile sunt o combinație liniară a stărilor și a intrărilor.
- Sistemul este LTI, finit dimensional și cauzal!
- Invariant în timp $\Rightarrow$ se poate lua întotdeauna $t_o = 0$, iar condiția inițială se rescrie $x(0) = x_o$.
- Sistemul dinamic se poate figura ca un sistem intrare–ieșire (I/O) în care starea joacă rolul de variabilă de cuplare.
- Sistemul este complet precizat de cele patru matrici (A, B, C, D).
- Condiții uzuale: $u(t)$ continuă cel puțin pe porțiuni $\Rightarrow$ $x(t)$ și $y(t)$ funcții continue.

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația matriceală Liapunov și stabilitatea

Evoluția stării

Prima ecuație a sistemului

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_o$$

este (dpdv matematic) un sistem de n ecuații diferențiale ordinare cu n necunoscute cu o soluție unică în cazul în care starea inițială x_o și comanda $u(t), t \geq 0$, sunt precizate ($u(\cdot)$ este continuă pe porțiuni). Din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare soluția este

$$\begin{aligned} x(t) = \phi(t, x_o, u(\cdot)) &= \mathrm{e}^{At}\, x_o + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}\, Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \phi(t, x_o, 0) + \phi(t, 0, u(\cdot)) \\ &= x_\ell(t) + x_f(t). \end{aligned}$$

Funcția $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ se numește funcția de tranziție a stării. Descompunerea aditivă de mai sus pune în evidență superpoziția efectelor (datorate stării inițiale x_o – regim liber – și, respectiv, comenzii $u(\cdot)$ – regim forțat).

Matricea de tranziție a stării

Matricea

$$\Phi(t) := e^{At}$$

se numește matricea de tranziție a stării. Cu această notație, soluția sistemului de ecuații diferențiale se rescrie

$$x(t) = \Phi(t)x_o + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (2)$$

Q: Ce înseamnă și cum se calculează e^{At}?

Avem, prin definiție,

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

care în cazul matricial devine

$$e^{At} = I_n + \frac{1}{1!}(At) + \frac{1}{2!}(At)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(At)^n + \ldots. \qquad (3)$$

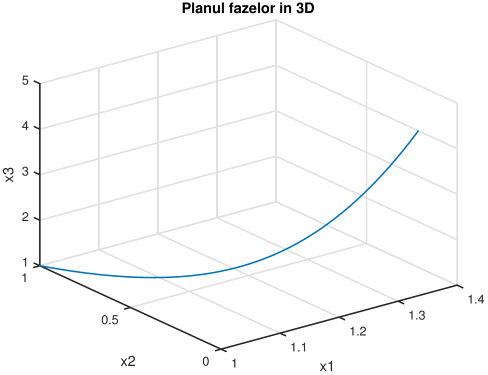
Calculul matricii de tranziție a stării se bazează pe forma Jordan a matricii A și va fi explicitat mai tarziu.

Matricea de tranziție a stării - continuare

Reversibilitatea timpului: Deoarece $\Phi(t) \neq 0$, $\forall t$ finit, obținem din (2)

$$\begin{aligned} x_o &= \Phi(-t)x(t) - \int_0^t \Phi(-t)\Phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \Phi(-t)x(t) - \int_0^t \Phi(-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{4}$$

$\Rightarrow$ în cazul sistemelor netede (cu timp continuu) starea inițială se poate întotdeauna recupera dacă se cunoaște “unde s-a ajuns” și comanda care a generat starea.



Matricea pondere și matricea de răspuns cauzal la impuls

Ieșirea sistemului se obține imediat ca o combinație liniară de intrări și stări sub forma (vezi (1) și (2))

$$\begin{aligned} y(t) = f(t, x_o, u(\cdot)) &= C\,\mathrm{e}^{At}\,x_o + \int_0^t C\,\mathrm{e}^{A(t-\tau)}\,Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= f(t, x_o, 0) + f(t, 0, u(\cdot)) \\ &= y_\ell(t) + y_f(t). \end{aligned}$$

Matricile

$$T(t) := C\Phi(t)B, \qquad T_c(t) := \begin{cases} 0, & t < 0, \\ T(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

se numesc matricea pondere și, respectiv, matricea de răspuns cauzal la impuls și

$$T_c(t) = T(t)\mathbf{1}(t),$$

unde $\mathbf{1}(t) := \mathrm{diag}\{1(t)\}$, iar $1(t)$ este semnalul treaptă (Heaviside). Mai mult,

$$y(t) = C\Phi(t)x_o + \int_0^t T_c(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Matricile pondere și cea de răspuns cauzal la impuls - cont.

În particular, dacă $x_o = 0 \Rightarrow$

$$y(t) = \int_0^t T_c(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = y_f(t),$$

ceea ce arată că matricea de răspuns cauzal la impuls permite exprimarea ieșirii atunci când condiția inițială este nulă. Mai precis, în condiții inițiale nule sistemul dinamic este un sistem de convoluție

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T_c(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = T_c(t) * u(t),$$

($u = 0$ pentru $t < 0$ și $T_c(t-\tau) = 0$ pentru $t - \tau < 0$). Dacă $m = p = 1$ (SISO) $\Longrightarrow T_c(t) = h(t)$ și are semnificația de răspuns cauzal al sistemului excitat la intrare de un impuls Dirac $u(t) = \delta(t)$.

Matricea de transfer a unui sistem dinamic pe stare

Restrângem intrările la clasa funcțiilor original, i.e., $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$. Atunci automat $x(t)$ și $y(t)$ vor fi funcții original, i.e. $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}$ și $\mathcal{Y} \subset \mathcal{O}$. În aceste condiții, aplicând transformatele Laplace sistemului original (1) obținem

$$\begin{cases} sX(s) - x_o = AX(s) + BU(s), \\ Y(s) = CX(s) + DU(s), \end{cases} \tag{5}$$

de unde, ținând cont că funcția complexă $(sI - A)$ este a.p.t. nesingulară

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_o + (sI - A)^{-1}BU(s) = X_\ell(s) + X_f(s).$$

Deasemenea

$$\Phi(s) := \mathcal{L}\{\Phi(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{At}\right\}(s) = (sI - A)^{-1},$$

numită matricea rezolventă $\Longrightarrow$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}(t).$$

Matricea de transfer - continuare

Mai mult,

$$\Phi(s) = s^{-1}I + s^{-2}A + s^{-3}A^3 + \dots,$$

care are loc pentru $|s| > R$, unde $R := \max\{|\lambda|, \lambda \in \Lambda(A)\}$. Deasemenea

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^*}{\chi(s)} = \frac{G(s)}{\nu(s)}$$

unde $\chi(s) := \det(sI - A)$ și $\nu(s)$ sunt polinomul caracteristic și, respectiv, minimal ale matricii A. În operațional (domeniul s) ieșirea devine

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) = C(sI - A)^{-1}x_o + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ &= Y_\ell(s) + Y_f(s). \end{aligned}$$

Matricea de transfer și o *realizare* de stare asociată

Definiția 2

Matricea de transfer este

$$T(s) := \mathcal{L}\{T_c(t)\}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =: \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right], \ T(s) \in \mathbb{C}^{p \times m},$$

unde ultima expresie explicită se obține comparând expresiile ieșirii în domeniul timp și cel operațional. Mai mult, spunem că (A, B, C, D) este **o** realizare de stare asociată matricii de transfer $T(s)$.

Prin urmare,

$$T(s) = \frac{C(sI - A)^{*}B}{\chi(s)} + D = \frac{\widetilde{R}(s)}{\chi(s)} = \frac{R(s)}{\nu(s)} = \{T_{ij}(s)\}_{\substack{i = 1 : p \\ j = 1 : m}}.$$

Matricea de transfer a unui sistem dinamic (în accepțiunea definiției date) este o matrice de dimensiune $p \times m$, de funcții raționale **proprii**. Ea permite explicitarea în operațional a ieșirii în funcție de intrare în condiții inițiale nule, i.e.,

$$Y(s) = T(s)U(s) = Y_f(s), \ \text{pentru } x_o = 0.$$

1. Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2. Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3. Echivalența sistemelor dinamice liniare
   - Echivalența pe stare
   - Echivalența intrare-ieșire

4. Stabilitatea sistemelor dinamice
   - Ecuația matriceală Liapunov și stabilitatea

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația matriceală Liapunov și stabilitatea

Echivalența pe stare a sistemelor dinamice liniare

Definiția 3

Două sisteme dinamice liniare (A, B, C, D) și $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$ având același număr de intrări și de ieșiri și aceeași dimensiune a spațiului stărilor $(p = \widetilde{p},\ m = \widetilde{m},\ n = \widetilde{n})$ se numesc echivalente pe stare dacă există o matrice inversabilă T, denumită transformare, astfel incât

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= TAT^{-1}, \\ \widetilde{B} &= TB, \\ \widetilde{C} &= CT^{-1}, \\ \widetilde{D} &= D. \end{aligned}$$

Observația 1

Transformarea T este de fapt o schimbare de coordonate la nivelul stării.

Echivalența pe stare - continuare

Într–adevăr, dacă

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{6}$$

și definim pentru un T inversabil fixat

$$\widetilde{x}(t) := Tx(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = T^{-1}\widetilde{x}(t),$$

atunci

$$\begin{cases} T^{-1}\dot{\widetilde{x}}(t) = AT^{-1}\widetilde{x}(t) + Bu(t), \\ y(t) = CT^{-1}\widetilde{x}(t) + Du(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = TAT^{-1}\widetilde{x}(t) + TBu(t), \\ y(t) = CT^{-1}\widetilde{x}(t) + Du(t), \end{cases} \Rightarrow \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = \widetilde{A}\widetilde{x}(t) + \widetilde{B}u(t), \\ y(t) = \widetilde{C}\widetilde{x}(t) + \widetilde{D}u(t), \end{cases}$$

unde

$$\widetilde{A} = TAT^{-1}, \quad \widetilde{B} = TB, \quad \widetilde{C} = CT^{-1}, \widetilde{D} = D.$$

Propoziția 1

Două sisteme echivalente pe stare care au condițiile inițiale asemenea prin T și sunt supuse aceleiași comenzi $u(\cdot)$ au traiectoriile de stare asemenea prin T și evoluții la ieșire identice.

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația matriceală Liapunov și stabilitatea

Echivalența intrare-ieșire

Definiția 4

Două sisteme dinamice (A, B, C, D) și $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$, cu același număr de intrări $(m = \widetilde{m})$ și același număr de ieșiri $(p = \widetilde{p})$, se numesc echivalente intrare–ieșire dacă au aceeași matrice de transfer, i.e.,

$$\widetilde{T}(s) = \widetilde{C}(sI - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{B} + \widetilde{D} = C(sI - A)^{-1}B + D = T(s).$$

Observația 2

- Două sisteme echivalente intrare–ieșire pot avea dimensiunea vectorului de stare diferită, i.e. $n \neq \widetilde{n}$.
- Pentru două sisteme echivalente intrare–ieșire avem automat

$$D = T(\infty) = \widetilde{T}(\infty) = \widetilde{D}.$$

Relația între echivalența pe stare și echivalența I/O

Propoziția 2

Două sisteme echivalente pe stare sunt echivalente intrare–ieșire.

Demonstrație.

$$\begin{aligned}\widetilde{T}(s) &= \widetilde{C}(sI - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{B} + \widetilde{D} = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D \\ &= CT^{-1}(T(sI - A)T^{-1})^{-1}TB + D = C(sI - A)^{-1}B + D = T(s).\end{aligned}$$

□

Observația 3

- Reciproca nu este în general valabilă ← este posibil ca pentru două sisteme echivalente intrare–ieșire) să avem $n \neq \widetilde{n}$).
- Diferența în definițiile echivalenței constă în aceea că una este centrată pe stare, iar cealaltă este centrată pe funcția de transfer (intrare–ieșire).
- Pentru orice matrice de transfer există o infinitate de realizări de stare.
- Problema dimensiunii minime a realizării de stare este esențială!

1 Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2 Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3 Echivalența sistemelor dinamice liniare
- Echivalența pe stare
- Echivalența intrare-ieșire

4 Stabilitatea sistemelor dinamice
- Ecuația matriceală Liapunov și stabilitatea

STABILITATE

Stabilitatea este o proprietate calitativă a sistemelor, asociată comportării dinamice a acestora.
Dacă stabilitatea se referă la comportarea lui $x(t)$ se numește stabilitate de tip Liapunov, iar dacă se referă la $y(t)$ se numește stabilitate externă.

Stabilitate internă (liberă sau Liapunov): Acest tip de stabilitate se referă la comportarea stării $x(t)$ atunci când intrarea este identic nulă. Ecuația relevantă este

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(0) = x_o.$$

Definiția 5 (Stabilitatea unui sistem dinamic)

- Un sistem dinamic s. n. intern stabil dacă $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ a.i. $\forall x_o$ cu $\|x_o\| < \delta(\epsilon)$ avem
$$\|x(t)\| \leq \epsilon, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
- Un sistem dinamic s. n. intern asimptotic stabil dacă
$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0, \ \forall x_o.$$

Stabilitatea sistemelor dinamice

Observația 4

- Definiția este generală, folosindu-se și în cazul sistemelor neliniare. În cazul liniar există anumite consecințe simple deoarece

$$x(t) = \Phi(t)x_o = e^{At}\,x_o.$$

- Sistemul este intern asimptotic stabil dacă și numai dacă

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \lim_{t\to\infty} e^{At} = 0.$$

Q: Cum evaluăm stabilitatea?

Evaluarea exponențialei matriciale e^{At}: considerăm succesiv urmatoarele cazuri:

a) A este un bloc Jordan elementar cu valoare proprie 0;

b) A este un bloc Jordan elementar oarecare;

c) A oarecare.

Evaluarea lui $\Phi(t) = e^{At}$

a) În acest caz presupunem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ și

$$A = J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Observând că A este nilpotentă cu indice de nilpotență n, i.e. $A^n = 0$ și $A^{n-1} \neq 0$ și folosind definiția (3) a exponențialei matriciale $\Longrightarrow$

$$e^{At} = I_n + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t}{1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Evaluarea lui $\Phi(t) = e^{At}$ - continuare

b) În acest caz presupunem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ și

$$A = J_o + \Lambda_o, \qquad \text{unde} \qquad \Lambda_o = \begin{bmatrix} \lambda_o & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_o \end{bmatrix} = \lambda_o I_n.$$

Atunci $e^{At} = e^{(J_o+\Lambda_o)t} = e^{J_o t}\, e^{\Lambda_0 t}$ (relație care are loc pentru că Λ_o comută cu J_o la înmulțire). Ținând cont că $e^{\Lambda_o t} = e^{\lambda_o t} I_n \Longrightarrow$

$$e^{At} = e^{\lambda_o t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Evaluarea lui $\Phi(t) = e^{At}$ - cazul general

c) Cazul general se reduce la cazurile precedente prin aducerea matricii A la forma canonică Jordan. Mai precis, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nesingulară a.î.

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}$$

unde J este o matrice Jordan (bloc diagonală având pe diagonală blocuri elementare Jordan J_i la valorile proprii ale matricii A). Matricea de tranziție a stării devine

$$e^{At} = e^{T^{-1}JTt} = T^{-1}e^{Jt}\,T = T^{-1}\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{J_k t} \end{bmatrix} T.$$

Evaluarea lui $\Phi(t) = e^{At}$ - cazul A diagonalizabilă

Cazul în care A este o matrice cu spectrul cu valori proprii simple distincte ($\Lambda_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i, j = 1 : n$) este o instanță particulară cazului c), i.e., $J_i = \lambda_i$, $i = 1 : k$, cu $k = n$. Prin urmare,

$$e^{At} = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T,$$

unde T este o matrice nesingulară a.î.

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Caracterizarea stabilității

Noțiuni necesare: Polinom caracteristic, minimal, forma canonică Jordan, valori proprii, multiplicități algebrice și geometrice[1,2].

Teorema 1 (Stabilitatea internă a unui sistem dinamic)

- *Sistemul dinamic* (A, B, C, D) *este intern asimptotic stabil dacă si numai dacă* $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$, *i.e., spectrul matricii de stare A este localizat în semiplanul complex stâng, deschis).*
- *Sistemul dinamic* (A, B, C, D) *este intern stabil dacă și numai dacă* $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}_0$, *iar valorile proprii de pe axa imaginară sunt rădăcini simple ale polinomului minimal.*

Observația 5

- Testarea numerică a stabilității interne pentru un sistem dinamic se reduce dpdv procedural la calculul valorilor proprii ale matricii de stare A (aducerea matricii la forma Schur).
- Deoarece stabilitatea internă a unui sistem depinde exclusiv de localizarea spectrului matricii de stare A, uneori se folosește *abuziv* terminologia de matrice (asimptotic) stabilă.

1. Modelarea sistemelor dinamice pe spațiul stărilor

2. Evoluția stării, tranziția intrare–ieșire

3. Echivalența sistemelor dinamice liniare
   - Echivalența pe stare
   - Echivalența intrare-ieșire

4. Stabilitatea sistemelor dinamice
   - Ecuația matriceală Liapunov și stabilitatea

Ecuația Liapunov și stabilitatea sistemelor dinamice liniare

Ecuația

$$A^T P + PA + Q = 0, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{8}$$

în necunoscuta $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numește ecuație Liapunov (matriceală, algebrică, în timp continuu).

Teorema 2

Dacă matricea A este asimptotic stabilă ($\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$) atunci ecuația Liapunov are o soluție unică dată explicit de expresia

$$P := \int_0^\infty \mathrm{e}^{A^T t}\, Q\, \mathrm{e}^{At}\, \mathrm{d}t. \tag{9}$$

Deoarece A este asimptotic stabilă, expresia (9) este bine definită (integrala este convergentă). Calculând

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \int_0^\infty \left(A^T \mathrm{e}^{A^T t}\, Q\, \mathrm{e}^{At} + \mathrm{e}^{A^T t}\, Q\, \mathrm{e}^{At} A\right) \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\mathrm{e}^{A^T t}\, Q\, \mathrm{e}^{At}\right) \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{A^T t}\, Q\, \mathrm{e}^{At}\Big|_0^\infty = -Q, \end{aligned}$$

într-adevar P dat de (9) este o soluție a ecuației Liapunov. Apoi se demonstrează unicitatea...

Ecuația Liapunov și stabilitatea sistemelor liniare

Observația 6

- Dacă $Q = Q^T$ atunci rezultă, automat din (9), că $P = P^T$.
- Dacă $Q = Q^T \geq 0$ atunci $P = P^T \geq 0 \Leftrightarrow$ numărul $x^T Px \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.
- Dacă $Q = Q^T > 0$ atunci $P = P^T > 0 \Leftrightarrow$ numărul $x^T Px > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

Teorema 3 (Liapunov)

Presupunem că $\exists P = P^T > 0$ *și* $Q = Q^T \geq 0$ *a.î.*

$$A^T P + PA + Q = 0.$$

Atunci $\Lambda(A) \subset \mathbb{C}_0^-$.

Observația 7

- Dacă în teorema de mai sus întărim ipotezele a.î. $P > 0$, $Q > 0$ atunci rezultă că A este asimptotic stabilă ($\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^-$).
- $\Rightarrow$ Proceduri de testare a (semi)pozitivității și de rezolvare a ec. Liapunov.
- Ecuația Liapunov se poate folosi pentru a testa stabilitatea unui sistem prin rezolvarea unui sistem de ecuații liniare (o problemă considerabil mai simplă decât calculul valorilor proprii ale matricii A).