# Sisteme de convoluție–proprietăți, stabilitate, răspuns

**Tudor C. Ionescu**

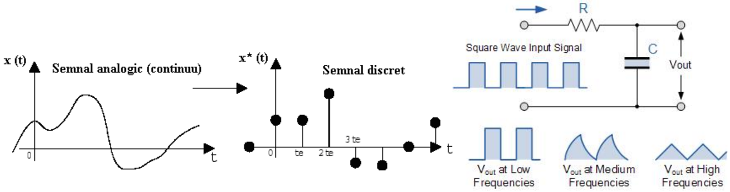
Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@acse.pub.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

13 octombrie 2020

# Semnale & Sisteme–definiții






Un semnal este o *funcție* de timp.

## Definiția 1

Un semnal este o funcție $f : \mathcal{T} \to A$, unde $A$ este imaginea (sau mulțimea de valori a) semnalului și $\mathcal{T}$ este axa (sau domeniul de definiție a) semnalului. Dacă $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ (mulțime „continuă”), atunci $u$ este un semnal *continual*; în cazul în care $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$ (mulțime „discretă”) atunci $u$ este un semnal *discret*.

## Definiția 2

Un sistem, în accepțiunea intrare-ieșire, este o aplicație $T : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$, $y = T(u)$, unde $\mathcal{U}$ este spațiul semnalelor de **intrare** și $\mathcal{Y}$ spațiul semnalelor de **ieșire**.

# Caracterizări. Exemple

Un semnal este o *funcție* de timp.

Mărimi fizice variabile în timp

- forța $F$ care acționează asupra unui punct material,
- tensiunea $v_o$ la ieșirea unui AO,
- curentul $i$. printr-un element de circuit,
- presiunea $p$ a unui fluid.

**Notație**:

- $F$, $v_o$, $p$ sau $F(\cdot)$, $v_o(\cdot)$, $p(\cdot)$ se referă la *semnal* sau *funcție*;
- $F(t)$, $v_o(10.33)$, $p(t-1)$ desemnează *valoarea* semnalelor la *momentele* $t$, $10.33$, $t-1$.

### Observația 1

Pentru utilizarea calculatorului semnalele cu timp continuu pot fi discretizate/eșantionate = transformate în semnale cu timp discret. Folosim anumiți pași astfel încât pierderea de informație să fie cât mai puțină și să putem reconstrui semnalul la nevoie.

# Exemple

1. Cursul leu-dolar. Axa semnalului: discretă; imaginea: $\mathbb{R}_+$.

2. O secvență semi-infinită de biți: $0111001\ldots$. Axa semnalului: $\mathbb{Z}_+$; imaginea: $\{0, 1\}$.

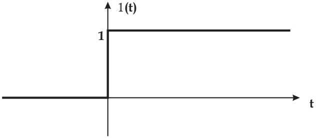
3. Tensiunea de ieșire a unui AO. Axa semnalului: $\mathbb{R}_+$; imaginea: $\mathbb{R}$.

4. Nivelul apelor Dunării: semnal eșantionat.

# Semnale standard–treaptă & rampă

a) Treaptă unitară: $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

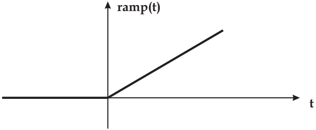
Semnal scalar
real, continuu pe porțiuni. De tip „curent continuu".




b) Treaptă unitară discretă: $\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$

c) Rampă: $\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Semnal scalar real. Funcție de tip „polinomial".




### Observația 2

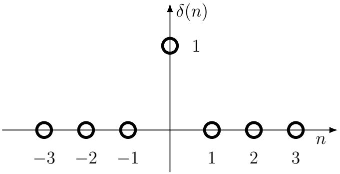
$\mathrm{ramp}(t) = t\,\mathbf{1}(t)$. În general, pentru a pune în evidență suportul pozitiv al semnalului, îl înmulțim cu $\mathbf{1}(t)$, i.e.[a], $\begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = f(t) \cdot \mathbf{1}(t)$, cu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Similar în cazul discret.

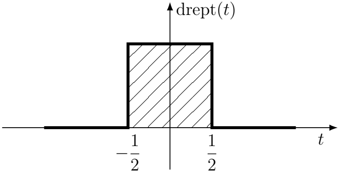
[a] Id est (în latinește) care înseamnă adică.

# Semnale standard–impuls & semnale geometrice

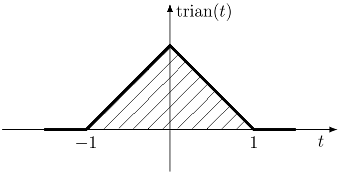
d) Impuls discret: $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$



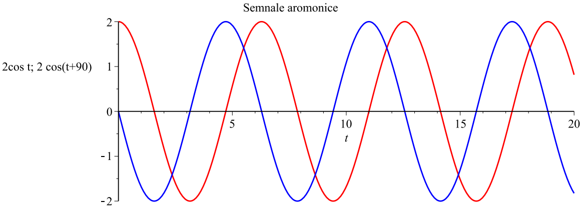

e) Impuls dreptunghiular: $\text{drept}(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq b, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$




f) Impuls triunghiular:
$\text{trian}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$



# Semnale standard–armonice




$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

cu

- $A$ - amplitudinea,
- $\omega$ - pulsația, i.e., $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ unde $f \in \mathbb{R}_+$ este frecvența semnalului iar $T \in \mathbb{R}_+$ este perioada acestuia,
- $\phi$ - faza (sau defazajul).

Reprezentarea *complexă* a semnalelor armonice ($a \in \mathbb{C}$):

$$u(t) = a\, e^{j\omega t} = A e^{j\phi} e^{j\omega t} = A\cos(\omega t + \phi) + j\, A\sin(\omega t + \phi).$$

1. Semnale & Sisteme - definiții

2. Semnale. Operații. Transformări
   - Operații
   - Transformata Laplace
   - Transformata $\mathcal{Z}$

3. Sisteme. Proprietăți fundamentale.
   - Sisteme de convoluție
   - Stabilitate
   - Răspunsul în timp
   - Răspunsul în frecvență
   - Funcția de transfer

# Operații cu semnale

Fie $u(t)$ și $v(t)$ două semnale.

*Operații standard*

- Adunarea/suma: $(u+v)(t) = u(t) + v(t)$;
- Produs (modulare): $(uv)(t) = u(t) \cdot v(t)$;
- (Produs de) Convoluție: $(u * v)(t) = \ldots$ va urma;

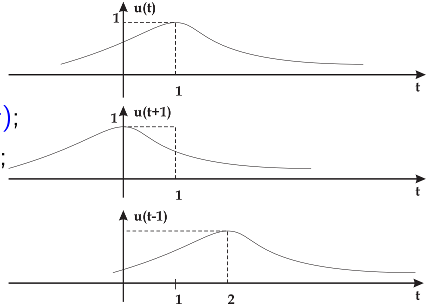



Figura 1: Translație cu $\tau = 1$

*Transformarea axei de timp*

- Scalarea axei de timp: $u_\alpha(t) = (u)(\alpha t),\ \alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $\alpha < 1 \Rightarrow$ dilatarea axei de timp. Dacă $\alpha > 1 \Rightarrow$ contractarea axei de timp.
- Inversarea: $u_-(t) = u(-t),\ t \geq 0$;
- Translația/întârzierea (Figura 1): $(\sigma^\tau u)(t) = u_\tau(t) = u(t-\tau),\ \tau \in \mathbb{R}$. În discret: $(\sigma^l x)(n) = x(n-l),\ n \in \mathbb{Z}$. Translația - rol important în definirea invarianței în timp a sistemelor liniare.

# Operații cu semnale–Convoluția

Importantă în definirea sistemelor liniare și a răspunsurilor/evoluțiilor lor.

Definiția 3 (Produsul de convoluție a două semnale (funcții de timp))

*Cont.* Fie $u, v \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$. Presupunem că pentru $t \in \mathbb{R}$, funcția $\tau \to u(t-\tau)v(\tau)$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau = (u * v)(t) \\ &\overset{\theta=t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\theta)v(t-\theta)\mathrm{d}\theta = (v * u)(t) \end{aligned} \tag{1}$$

este o funcție bine definită în $t \in \mathbb{R}$ și se numește *produsul de convoluție* sau CONVOLUȚIA semnalelor *continuale* $u$ și $v$.

*Disc.* Fie $x, y \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}^{d}$. Presupunem că pentru $n \in \mathbb{Z}$, funcția $k \to x(n-k)y(k)$ este sumabilă pe $\mathbb{Z}$. Atunci

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k) = (x * y)(n) \overset{l=n-k}{=} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)y(n-l) = (y * x)(n) \tag{2}$$

este o funcție bine definită în $n \in \mathbb{Z}$ și se numește *produsul de convoluție* sau CONVOLUȚIA semnalelor *discrete* $x$ și $y$.

# Semnale cu impulsuri–Impulsul Dirac

- **Motivație**: $\exists$ situații în care anumite semnale (funcții) acționează pe intervale foarte scurte de timp, unde pot lua valori extrem de mari.
- **Consecință**: este imposibil să măsurăm valorile *instantanee* ale unui astfel de semnal (există o limită fizică a măsurării unui interval de timp). Putem insă observa/măsura efectul acțiunii acestui semnal. *Important pentru definirea unui sistem - funcția pondere.*

## Definiția 4 (Impuls Dirac)

Se numește impuls Dirac, notat $\delta(t)$, (un „obiect" care este) o **idealizare** a unui semnal având proprietățile:

a) este foarte mare intr-o vecinătate a lui $t = 0$: $\delta(t)$ este *nedefinit* în 0; poate fi chiar infinit;

b) este foarte mic în afara acestei vecinătăți: $\delta(t) = 0$ pentru $t \neq 0$;

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$

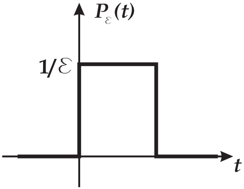
# Aproximări ale lui $\delta$–o proprietate remarcabilă

## Observația 3

$\delta$ nu este un semnal per se, dar acționează ca un semnal. El nu poate fi vizualizat nici măcar grafic după definiție, dar poate fi aproximat (pe calculator).

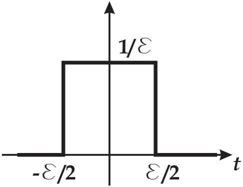
În Figura 2,
avem $p_\varepsilon(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\varepsilon)$,
de unde

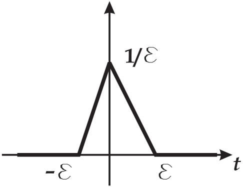
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{1}(t)}{\mathrm{d}t}!$$




Nu contează
forma și valorile pe care le ia
o aproximație oarecare a lui $\delta$,
ci *efectul acțiunii* acesteia,
adică faptul că $\int_{\mathbb{R}} = 1$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) \mathrm{d}t = f(0)}.$$



# Transformări

Ne interesează semnalele care pot fi descompuse în sumă de exponențiale $\leftarrow$ specific sistemelor limiare $\rightarrow$ Principiul Superpoziției. Foarte pe scurt...

$$f(t) = \sum_k f_k \, e^{p_k t}.$$

Clasa de semnale

- Periodice: $f(t) = f(t+T)$, $T > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, pe care le scriem ca serii de armonice $\Leftrightarrow f(t) = \sum_0^\infty a_k \, e^{j\omega t}$, unde $\omega = 2\pi/T \leftarrow$ transformata Fourier $\rightarrow$ transformata Laplace.
- Aperiodice: Orice $f \in L^1(\mathbb{R})$ (cu acțiune finită) și continuu. E ca și cum am avea perioada $T \rightarrow \infty \leftarrow$ armonicele se apropie infinit una de alta $\Rightarrow$ suma devine integrală.

$f(t) := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \, e^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega \leftarrow$ *combinație liniară* de oscilații armonice $e^{j\omega t}$ de amplitudine variabilă $|F(j\omega)|$, unde

$$F(j\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t = \underbrace{|F(j\omega)|}_{\text{amplitudinea}} \; e^{\,j \overbrace{\arg[F(j\omega)]}^{\text{faza}}}, \quad F : j\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$\leftarrow$ transformata Fourier a lui $f(t)$.

# Transformarea Laplace pentru semnale continuale

Transformarea Laplace + Laplace discretă sau transformarea $\mathcal{Z}$

**Definiția 5 (Transformata Laplace)**

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Se numește transformata Laplace unilaterală la dreapta a lui $f$ în punctul $s$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

$F$ este *bine definită* în $s$ (integrala improprie converge) dacă $s \in \mathbf{S}_f^+$,
unde $\mathbf{S}_f^+ = \{s \in \mathbb{C} : \ (3) \text{ este absolut convergentă}\}$.
Aplicația $f \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} F$ se numește transformarea Laplace (unilaterală la dreapta).

# Funcții original (Laplace)

Spunem că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție original Laplace, $f \in \mathcal{O}$, dacă $f$ are următoarele proprietăți:

i. $f(t) = 0$, pentru $t < 0$.
ii. $f$ este continuă pe porțiuni în $[0, \infty)$.
iii. $\exists\ M > 0$, $s_0 > 0$ astfel încât $|f(t)| < M\ \mathrm{e}^{s_0 t}$, $\forall\ t \geq 0$. Numărul real $s_0$ se numește *indice de creștere* (exponențială) $\Rightarrow f(t)$ funcție de indice $s_0$.

**Teorema 1**

*Fie $f \in \mathcal{O}$ o funcție fixată de indice $s_0$. Atunci $F(s)$ este olomorfă în $\mathbf{S}_f^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > s_0\}$ (derivabilă într-o vecinătate a oricărui punct din mulțime).*

*Notație:*

- Transformata Laplace a funcției $f$ în punctul $s$: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.
- Transformarea Laplace: $F = \mathcal{L}(f)$.
- Funcția $F$ se numește funcția imagine (Laplace) a funcției (original) $f$.

# Proprietățile transformatei Laplace

1. Transformata Laplace inversă. Fie $f \in \mathcal{O}$ cu indicele de creștere $s_0$ și $F = \mathcal{L}(f)$. Atunci
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) := \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\, e^{st}\, \mathrm{d}s, \quad \forall\, \sigma > s_0 \text{ și } t \geq 0.$$
2. Liniaritate. $\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha F + \beta G$.
3. Asemănare (scalarea axei de timp). $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\}(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$.
4. Translație (întârziere) în timp. $\mathcal{L}\{f(t-\tau)\}(s) = e^{-\tau s}\, F(s)$, $\tau > 0$.
5. Translație în frecvență. $\mathcal{L}\{e^{-at}\, f(t)\}(s) = F(s+a)$.
6. Derivarea imaginii. $\mathcal{L}\{t^n\, f(t)\}(s) = (-1)^n\, F^{(n)}(s)$.
7. Derivarea funcției original. Dacă $f, \dot{f}, \ddot{f}, \ldots, f^{(n)} \in \mathcal{O}$, atunci
$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}\, f(0_+) - \ldots - f^{(n-1)}(0_+),$$
unde $g(0_+) = \lim_{t \searrow 0} g(t)$.
În particular, $\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\}(s) = sF(s) - f(0_+)$.

# Proprietățile transformatei Laplace. Exemplu.

8) Teorema valorii finale (TVF). Dacă $f, \dot{f} \in \mathcal{O}$ și dacă există $\lim_{t\to\infty} f(t) \overset{\text{not.}}{=} f(\infty) < \infty$, atunci $\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty)$.

9) Teorema valorii inițiale (TVI). Dacă $f, \dot{f} \in \mathcal{O}$ și dacă există $\lim_{s\to\infty} sF(s)$, atunci $\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0_+)$.

10) Convoluția. Dacă $h, u \in \mathcal{O}$ și $h * u$ este bine definită, atunci $y = h * u$ este funcție original și

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = H(s)U(s). \tag{4}$$

**Exemplu.** Funcția treaptă unitară $\mathbf{1}(t)$ este o funcție original având $s_0 = \varepsilon > 0$. Atunci $\mathbf{S}_f^+ = \{s \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\, s > 0\}$ și

$$\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}.$$

# Exemple

1. $\mathcal{L}\left\{t\,\mathbf{1}(t)\right\}(s) \overset{6}{=} \dfrac{1}{s^2}$. $\quad \mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathbf{1}(t)\right\}(s) \overset{6}{=} \dfrac{1}{s^n}$.
2. $\mathcal{L}\left\{e^{at}\;\mathbf{1}(t)\right\}(s) \overset{5}{=} \dfrac{1}{s-a}$.
3. 

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\cos\omega t\,\mathbf{1}(t)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\,\mathbf{1}(t)\right\}(s) \\
&\overset{1}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\,\mathbf{1}(t)\right\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega t}\,\mathbf{1}(t)\right\}(s) \\
&\overset{4}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

În mod similar, $\quad \mathcal{L}\left\{\sin\omega t\,\mathbf{1}(t)\right\}(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

4. $\mathcal{L}\left\{e^{-t}\cos 3t\mathbf{1}(t)\right\}(s)$, $\mathcal{L}\left\{t\,e^{2t}\,\mathbf{1}(t)\right\}(s)$, $\mathcal{L}\left\{t\sin t\mathbf{1}(t)\right\}(s)$, $\mathcal{L}\left\{t\,e^{2t}\,\mathbf{1}(t)+\delta(t)\right\}(s)$, $\mathcal{L}\left\{t\sin t\mathbf{1}(t)+\delta(t)+\frac{1}{2}\dot{\delta}(t)\right\}(s)$?

**Observația 4**

Dacă avem impulsuri la $t=0$, le includem $\Rightarrow F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t$. În consecință, $\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}(s) = e^{-st}\big|_{t=0} = 1$. Mai mult,

$$\mathcal{L}\left\{\delta^{(k)}(t)\right\}(s) = \int_{0_-}^{\infty}\delta^{(k)}(t)\,e^{-st}\,\mathrm{d}t = (-1)^k\,\frac{\mathrm{d}^k\,e^{-st}}{\mathrm{d}t^k}\bigg|_{t=0} = s^k\,e^{-st}\big|_{t=0} = s^k.$$

# Transformarea $\mathcal{Z}$

### Definiția 6 (Transformata $\mathcal{Z}$)

Fie $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ un semnal discret. Se numește transformata $\mathcal{Z}$ (bilaterală) a lui $x$, funcția $X : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită de

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-k}, \tag{5}$$

unde $D$ este *domeniul de convergență* al seriei dublu-infinite.
Vom nota în mod obișnuit $X(z) = \mathcal{Z}\,\{x(k)\}\,(z)$, sau, mai simplu, $X = \mathcal{Z}\{x\}$.
Aplicația $x \mapsto X$ se numește transformarea $\mathcal{Z}$.

Mulțimea $D$ este în mod uzual o coroană circulară.
Ne concentrăm atenția (ca și în cazul continuu) asupra transformatei $\mathcal{Z}$ unilaterale la dreapta,

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, z^{-k}. \tag{6}$$

# Exemple

a) Impulsul discret: $\mathcal{Z}\{\delta(k)\}(z) = \delta(0) + \delta(1)z^{-1} + \delta(2)z^{-2} \ldots = \delta(0) = 1$.
Domeniu de convergență: $\mathbb{C}$.

b) Treapta unitară discretă: $\mathbf{1}(k) = 1$, pt. $k \geq 0$ si $\mathbf{1}(k) = 0$, pt. $k < 0$. Avem
$$\mathcal{Z}\{\mathbf{1}(k)\}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{z^{-n} - 1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{z-1}.$$
Domeniu de convergență: $|z| > 1$.

c) Eșantionarea exponențialei: $x(k) = \mathrm{e}^{-\alpha t_k} = \mathrm{e}^{-\alpha k T} = a^k$, $a = \mathrm{e}^{-\alpha T}$. Avem
$$\mathcal{Z}\{x(k)\}(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \ldots =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a^{-1}z)^{-n} - 1}{(a^{-1}z)^{-1} - 1} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}.$$
Domeniu de convergență: $|z| > |a|$. Intuitiv: $\boxed{z = \mathrm{e}^{sT}}$.

Coexistă 2 tipuri de notații: în $z$ și în $z^{-1}$. Cea de-a doua este folosită frecvent în Identificarea Sistemelor și în Prelucrarea Semnalelor.

**Exercițiu.** Calculați transformata $\mathcal{Z}$ pentru $x(n) = a^{|n|}$. Discuție după $a > 0,\ a \neq 1$.
*Indicație*: Se scrie $x(n) = a^n\mathbf{1}(n) + a^{-n}\mathbf{1}(-n-1)$ și se analizează convergența celor 2 factori ai sumei.

# Proprietăți

- Convergența seriei din (5) depinde exclusiv de $r = |z|$, seria fiind convergentă acolo unde $x(n)r^{-n}$ este absolut sumabilă pe $\mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)\, r^{-n}| < \infty$. Dacă seria converge în $z_0$, atunci converge evident pentru orice $z$ cu $|z| = |z_0|$.
- Domeniul de convergență va conține așadar cercuri concentrice, centrate ın jurul originii planului complex.
- Domeniul de convergență nu poate conține poli ai lui $X(z)$.
- Pentru semnalele cu suport finit, convergența are loc pentru orice $z \in \mathbb{C}$, eventual cu excepția originii și a punctului de la infinit.
- Dacă domeniul de convergență al transformatei $\mathcal{Z}$ a unui semnal $x(n)$, cu $x(n) = 0$ pentru orice $n < N_0$, conține cercul $|z| = r_0$, atunci seria din (5) va converge pentru acei $z$ pentru care $|z| > r_0$ (eventual și pentru $z = \infty$).

## Proprietăți – continuare

1. Liniaritate: $\mathcal{Z}\left\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right\}(z) = \alpha_1 \mathcal{Z}\left\{x_1\right\}(z) + \alpha_2 \mathcal{Z}\left\{x_2\right\}(z)$.
2. Inversarea timpului: $\mathcal{Z}\left\{x(-n)\right\}(z) = X(z^{-1})$ – $\mathcal{Z}$ bilaterală.
3. Translație în timp: $\mathcal{Z}\left\{x(k-l)\right\}(z) = z^{-l}X(z),\ l \in \mathbb{Z}$ – $\mathcal{Z}$ bilaterală.

3a. Translație în timp (la dreapta): $\mathcal{Z}\left\{x(k-l)\,\mathbf{1}(k-l)\right\}(z) = z^{-l}X(z)$.

3b. Translație în timp (la dreapta):
$\mathcal{Z}\left\{x(k-l)\right\}(z) = z^{-l}X(z) + \sum_{m=1}^{l} x(-m)z^{m-l}$, $l \geq 1$.

3c. Translație în timp (la stânga):
$\mathcal{Z}\left\{x(k+l)\,\mathbf{1}(k)\right\}(z) = z^{l}X(z) - \sum_{m=0}^{l-1} x(m)z^{l-m}$, $l \geq 1$.

4. Translație în frecvență: $\mathcal{Z}\left\{a^k x(k)\right\}(z) = X(a^{-1}z)$.
5. Derivarea imaginii: $\mathcal{Z}\left\{k\,x(k)\right\}(z) = -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$.
6. Convoluție: $\mathcal{Z}\left\{(x * y)(k)\right\}(z) = X(z)Y(z)$.
7. Teorema valorii inițiale (TVId): $x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$.
8. Teorema valorii finale (TVFd): Dacă $\exists \lim_{k\to\infty} x(k)$, atunci

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z).$$

# Proprietăți - atenție! Alte exemple

9. Transformarea $\mathcal{Z}$ inversă:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint z^{k-1}X(z)\mathrm{d}z. \tag{7}$$

**Atenție la domeniul de convergență!**
**Exemple:**

1. Fie $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \mathbf{1}(n-2)$. Atunci

$$X(z) \overset{2}{=} z^{-2}\,\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \mathbf{1}(n)\right\}(z) \overset{3}{=} z^{-2}\,\mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}(n)\right\}(3z) = z^{-2}\,\frac{3z}{3z-1} = \frac{3}{3z^2-z}.$$

2. Semnale armonice *eșantionate*:

$$x(k) = \cos(\omega t_k) = \cos(\omega\, kT) = \frac{\mathrm{e}^{j\omega\, kT} + \mathrm{e}^{-j\omega\, kT}}{2} = \frac{a^{-k} + a^{k}}{2},$$

unde $a = \mathrm{e}^{-j\omega T}$.

# Armonice–continuare

Rezultă

$$\mathcal{Z}\left\{\cos(\omega kT)\right\}(z) = \frac{1}{2}(\mathcal{Z}\left\{a^{-k}\right\}(z) + \mathcal{Z}\left\{a^{k}\right\}(z)) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-a^{-1}} + \frac{z}{z-a}\right)$$
$$= \frac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}.$$

Similar, pentru $y(k) = \sin(\omega kT)$ se obține

$$\mathcal{Z}\left\{\sin(\omega kT)\right\}(z) = \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}.$$

3. Fie $x(n) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \mathbf{1}(n) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbf{1}(n)$. Atunci

$$X(z) \stackrel{1}{=} 3\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n \mathbf{1}(n)\right\}(z) + 2\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbf{1}(n)\right\}(z) = \frac{12z}{4z-1} + \frac{6z}{3z-1}.$$

# Sistem

Recall Definiția 2: $T : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$, $y = T(u)$, $\mathcal{U}$–spațiul semnalelor de **intrare**, & $\mathcal{Y}$–spațiul semnalelor de **ieșire**.

- Sistemul se numește
    - (cu timp) continuu dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{Y}$ sunt spații de semnale continuale,
    - (cu timp) discret dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{Y}$ sunt spații de semnale discrete,
    - hibrid dacă $\mathcal{U}$ și $\mathcal{Y}$ sunt unul spațiu de semnale continuale iar celălalt spațiu de semnale discrete.

- Caz remarcabil: $\mathcal{U} = L^2(\mathbb{R})\ \big(\text{sau } l^2(\mathbb{Z})\big)$, $\mathcal{Y} = L^2(\mathbb{R})\ \big(\text{sau } l^2(\mathbb{Z})\big)$.

**Q:** Ce studiem?

**A:** Sisteme liniare, invariante în timp și cauzale $\leftarrow$ sisteme de convoluție.

# Sisteme liniare și invariante în timp (LTI). Cazul discret

Un sistem $y = T(u)$ este LTI dacă este

- Liniar: $T(\alpha u[n] + \beta v[n]) = \alpha T(u[n]) + \beta T(v[n]) \leftarrow$ Principiul superpoziției,
- Invariant în timp: $y[n] = T(u[n]) \Rightarrow y[n-k] = T(u[n-k]) \leftarrow$ orice întârziere a ieșirii este reflectarea imediată a întârzierii intrării.

Proprietățile sunt valabile și în cazul continuu.

**Propoziția 1**

*$y = T(u)$, discret, liniar și invariant în timp este un sistem de convoluție caracterizat de* ***răspunsul la impuls*** *$h[n] = T(\delta[n])$, pentru $\mathcal{U} = \mathcal{Y} = l^2(\mathbb{Z})$.*

Obiect de studiu: **Sisteme de convoluție**

# Sisteme de convoluție

Idee: Generic, un sistem liniar și invariant în timp este un sistem de convoluție (e.g.[1], când $\mathcal{U}$ și $\mathcal{Y}$ sunt $l^2(\mathbb{Z})$).

### Definiția 7

Un sistem $y = Tu$ este un sistem de convoluție dacă există un semnal $h$ astfel încât $y = h * u$. Funcția $h$ se numește funcția pondere a sistemului de convoluție.

- Sistem de convoluție cu timp continuu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)u(t-\theta)\mathrm{d}\theta.$$

- Siteme de convoluție cu timp discret:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)u(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)u(n-l).$$

[1] Exempli gratia, pe latinește, care înseamnă spre exemplu.

# Proprietăți

## Propoziția 2

*Un sistem de convoluție este liniar și invariant în timp.*

## Demonstrație.

**Liniaritate**. Dacă $y_1(t) = (h * u_1)(t)$ și $y_2(t) = (h * u_2)(t)$, $\alpha, \beta \in R$, atunci

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,(\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,\alpha u_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\,\beta u_2(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \alpha(h * u_1)(t) + \beta(h * u_2)(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t). \end{aligned}$$

$\square$

# Invarianța în timp a unui sistem de convoluție

Demonstrație.

**Invarianță în timp**. Fie $u(k)$ o intrare oarecare a sistemului de convoluție discret $y(n) = (h * u)(n)$ și fie $\tilde{y}(n)$ ieșirea sistemului la intrarea $\tilde{u}(k) = u(k - l)$, $l \in \mathbb{Z}$ arbitrar, fixat.
Avem

$$\begin{aligned}\tilde{y}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)\tilde{u}(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)u(k-l) \\ &\overset{k-l=m}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(n-l-m)u(m) = y(n-l).\end{aligned}$$

$\square$

Reciproca este, în general, adevărată $\leftarrow$ Sisteme definite de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

# Cauzalitate

Cauzalitate = ieșirea nu depinde decât de „informația” furnizată la intrare în prezent și din trecut $\leftarrow$ fără caracter anticipativ.

**Q:** Când este un sistem de convoluție și cauzal?

### Propoziția 3

*Un sistem de convoluție $y = h * u$ este cauzal $\Leftrightarrow$ $h(t) = 0, \quad \forall t < 0$ $(h(n) = 0, \quad \forall n < 0)$.*

Dar stabil? $\leftarrow$ proprietate fundamentală pentru filtrare și pentru funcționarea „device”-urilor $\Leftrightarrow$ semnale de ieșire mărginite pe canalele de ieșire!

# Stabilitate (intrare–ieșire)

Reamintim că un semnal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este mărginit dacă există $M > 0$ astfel încât

$$|f(t)| < M, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

### Definiția 8

Un sistem $y = T(u)$ este stabil în sens intrare mărginită– ieșire mărginită sau stabil BIBO[a], dacă pentru **orice** intrare $u$ mărginită ieșirea rezultată, $y = T(u)$, este de asemenea mărginită.

[a] Bounded Input/Bounded Output

# Stabilitatea sistemelor de convoluție

### Teorema 2

*Fie $\Sigma$ un sistem de convoluție $y = h * u$. Sunt adevărate următoarele afirmații:*

1. *Sistemul $\Sigma$ este stabil dacă și numai dacă funcția pondere este*

Continuu:
*absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, $h \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.,*

$$\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \mathrm{d}t < \infty;$$

Discret:
*absolut sumabilă pe $\mathbb{Z}$, $h \in l^1(\mathbb{Z})$, i.e.,*

$$\|h\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

*adică h are acțiune finită.*

2. *Dacă $\Sigma$ este stabil atunci*

Continuu:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| \leq \|h\|_1 \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|;$$

Discret:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |y(n)| \leq \|h\|_1 \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u(n)|.$$

# Stabilitate în sens nestrict

## Observația 5

Stabilitatea BIBO a sistemelor de convoluție, caracterizată de condiția $h \in L^1(\mathbb{R})$ ($h \in \ell^1(\mathbb{Z})$), se mai numește și stabilitate externă în sens strict.

## Definiția 9

Un sistem de convoluție $y = h * u$ este stabil extern (sau BIBO) în sens nestrict dacă $h$ este mărginită.

**Exemple.**

1. Analizați stabilitatea sistemului de convoluție având funcția pondere semnal treaptă, $h(t) = \mathbf{1}(t)$. Ce se constată?
   *Sol.* $\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_0^{\infty} |h(t)|dt = t|_0^{\infty} = \infty \Rightarrow$ sistemul este stabil BIBO doar în sens nestrict $\leftarrow$ $h$ marginită, dar are acțiune infinită și e cauzal.
2. Aceeași problemă pentru sistemul discret cu $h(n) = 2^n\,\mathbf{1}(-n)$.

   *Sol.* $\|h\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n = \lim_{n\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \infty$. Sistemul nu este stabil (nici măcar în sens strict $\leftarrow$ nemărginire), nefiind nici cauzal.

# Răspunsul în timp al sistemelor de convoluție

**A.** Răspunsul la impuls.

1. Cazul **continuu**. Fie $y(t) = (h * u)(t)$ un sistem de convoluție cu timp continuu. Dacă $u(\tau) = \delta(\tau)$ atunci răspunsul sistemului la impuls este

$$y_{\perp}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = h(t). \tag{8}$$

2. Cazul **discret**. Fie $y(n) = (h * u)(n)$ un sistem de convoluție cu timp discret. Dacă $u(k) = \delta(k)$, atunci răspunsul sistemului la impuls este

$$y_{\perp}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)\delta(k) = h(n). \tag{9}$$

**Funcția pondere a unui sistem de convoluție este răspunsul la impuls al sistemului respectiv.**

**B.** Răspunsul la treaptă unitară.

1. Cazul **continuu**. Fie $y(t) = (h * u)(t)$ un sistem de convoluție cu timp continuu, unde $u(\tau) = \mathbf{1}(\tau)$. Atunci răspunsul sistemului este

$$y_{\mathbf{1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\mathbf{1}(t-\theta)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{10}$$

Se observă că $h(t) = y_{\perp}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y_{\mathbf{1}}(t)}{\mathrm{d}t}$: funcția pondere este derivata răspunsului la treaptă unitară.

2. Cazul **discret**. Fie $y(n) = (h * u)(n)$ un sistem de convoluție discret, unde $u(k) = \mathbf{1}(k)$. Atunci răspunsul sistemului este

$$y_{\mathbf{1}}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(l)\mathbf{1}(n-l) = \sum_{l=-\infty}^{n} h(l). \tag{11}$$

Observația 6

$h(n) = y_{\mathbf{1}}(n) - y_{\mathbf{1}}(n-1)$.

1. Semnale & Sisteme - definiții

2. Semnale. Operații. Transformări
   - Operații
   - Transformata Laplace
   - Transformata $\mathcal{Z}$

3. Sisteme. Proprietăți fundamentale.
   - Sisteme de convoluție
   - Stabilitate
   - Răspunsul în timp
   - Răspunsul în frecvență
   - Funcția de transfer

# Răspunsul în frecvență al unui sistem de convoluție

**C.** Răspunsul la intrare de tip armonic. Fie $u(t) = e^{j\omega t}$, unde $\omega = 2\pi f$ este pulsația iar $f$ este frecvența semnalului armonic.

$$\begin{aligned} y_{\sim}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, e^{j\omega(t-\theta)}\, d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, e^{-j\omega\theta}\, d\theta\, e^{j\omega t} \\ &= \widehat{h}(j\omega)\, u(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Funcția

$$\widehat{h}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, e^{-j\omega\theta}\, d\theta$$

este răspunsul în frecvență al sistemului de convoluție $y = h * u$.

# Proprietăți ale răspunsului în frecvență

## Observația 7

$\widehat{h}(j\omega) = H(j\omega)$, unde $H(j\omega)$ este *transformata Fourier* a funcției pondere $h$. Aceasta este bine definită dacă $h \in L^1(\mathbb{R})$.

## Lema 1

*Dacă $h(t)$ ia valori reale, atunci $\overline{\widehat{h}(j\omega)} = \widehat{h}(-j\omega)$. Mai mult, $|\widehat{h}(j\omega)| = |\widehat{h}(-j\omega)|$, $arg[\widehat{h}(-j\omega)] = -arg[\widehat{h}(j\omega)]$.*

## Propoziția 4

*$y_{\sim}(t)$ este un semnal armonic de* aceeași *frecvență $\omega$ cu intrarea $u(t)$, dar de amplitudine și fază* modificate. *Mai precis, fie $u(t) = A\cos\omega t$ și $\widehat{h}(j\omega) = |\widehat{h}(j\omega)|\ e^{j\,arg[\widehat{h}(j\omega)]}$. Atunci*

$$y_{\sim}(t) = A|\widehat{h}(j\omega)|\ \cos(\omega t + arg[\widehat{h}(j\omega)]). \tag{13}$$

## Corolarul 1

*Dacă $u(t) = e^{j\omega t}$, atunci $y_{\sim}(t) = |\widehat{h}(j\omega)|\ e^{j(\omega t + arg[\widehat{h}(j\omega)])}$.*

# Cazul discret

Fie $u(n) = e^{j\omega n}$, unde $\omega = 2\pi f$ este pulsația iar $f$ este frecvența semnalului armonic.

$$y_{\sim}(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, e^{j\omega(n-l)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, e^{-j\omega l}\, e^{j\omega n} = \widehat{h}(e^{j\omega})\, u(n). \tag{14}$$

Funcția

$$\widehat{h}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, e^{-j\omega l} = |\widehat{h}(e^{j\omega})|\, e^{arg[\widehat{h}(e^{j\omega})]}\,.$$

este răspunsul în frecvență al sistemului de convoluție $y = h * u$.

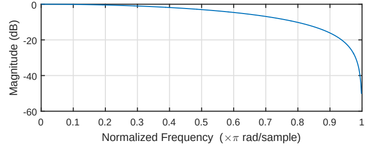
## Propoziția 5

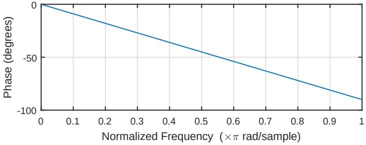
*Dacă* $u(n) = A\, e^{j\omega n}$, *atunci* $y_{\sim}(n) = A|\widehat{h}(e^{j\omega})|\; e^{j(\omega n + arg[\widehat{h}(j\omega)])}\,.$

# Exemplu de răspuns în frecvență

Considerăm un filtru discret cu răspuns finit la impuls (FIR) $y(n) = \frac{1}{2}[u(n) + u(n-1)] \Rightarrow h(n) = \frac{1}{2}[\delta(n) + \delta(n-1)]$. Analizăm răspunsul în frecvență al sistemului.

$$\widehat{h}(e^{j\omega}) \overset{\text{not.}}{=} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega})$$
$$= e^{\frac{-j\omega}{2}} \frac{e^{\frac{j\omega}{2}} + e^{\frac{-j\omega}{2}}}{2}$$
$$= \cos\frac{\omega}{2} e^{\frac{-j\omega}{2}}.$$



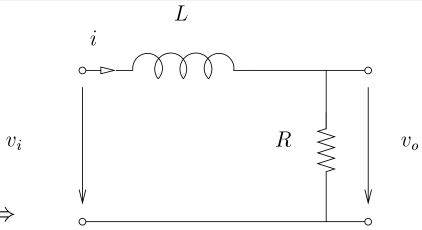

Caracteristici deduse:

- Amplitudine $|H(e^{j\omega})| = \cos\frac{\omega}{2}$;
- Fază (argument) $\arg(H(e^{j\omega})) = -\frac{\omega}{2}$.
- Pentru $u = e^{j\cdot 0\cdot n} = 1 \Rightarrow y(n) = 1 \Leftrightarrow H(e^{j\cdot 0}) = H(1) = 1$.
- Pentru $u = e^{j\pi n} = (-1)^n \Rightarrow y(n) = 0 \Leftarrow H(e^{j\pi}) = 0 \Rightarrow$ trec doar armonicele cu pulsații între 0 și $\pi \leftarrow$ trece-bandă.

# Divizorul de tensiune

Ecuațiile (cu $u = v_i$, $y = v_o$)

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L} i + \frac{1}{L} u, \quad i(0) = 0 \\ y &= Ri \end{aligned}$$




Prin urmare, $i(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \, \frac{1}{L} u(\tau)\mathrm{d}\tau \Longrightarrow$

$$y(t) = R \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \, \frac{1}{L} u(\tau)\mathrm{d}\tau = \left( \frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(\cdot)} * u \right)(t), \quad y = T(u);$$

Egalitatea de mai sus arată că circuitul definește un sistem de convoluție (cauzal).

Funcția pondere este $h(t) = \frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} t}$ pentru $t \geq 0$ și $h(t) = 0$ pentru $t < 0$.

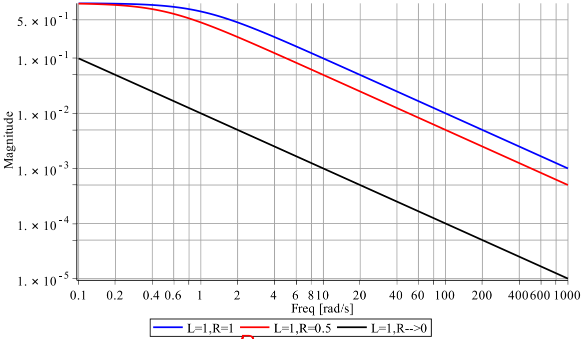
Funcția de răspuns în frecvență este

$$\widehat{h}(j\omega) = \int_0^\infty \frac{R}{L} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}(\theta)} \, \mathrm{e}^{-j\omega\theta} \, \mathrm{d}\theta = \frac{R}{j\omega L + R},$$

ceea ce arată că circuitul LR are un comportament de tip filtru trece-jos.

# Divizorul de tensiune–Filtru trece-jos

Intr-adevăr, relația (13) arată că amplitudinea ieșirii $v_o(t)$ la o intrare de tip armonic de pulsație „mare" (de exemplu, $v_i(t) = A\cos\omega t$ cu $\omega > 10^3 R/L$) este practic 0. Filtrul „distruge" amplitudinile oscilațiilor armonice de frecvență mare, pentru care $\widehat{h}(j\omega) \approx 0$.




Pe de altă parte, relația $V_o(s) = \dfrac{R}{sL+R} V_i(s)$ caracterizează comportamentul I/O în domeniul operațional. $H(s) := \dfrac{R}{sL+R}$ este așa-numita funcție de transfer a circuitului.

# Funcția de transfer a unui sistem de convoluție

Fie sistemul de convoluție $y = h * u$. Fie $s \in \mathbb{C}$ și $u(t) = \mathrm{e}^{st}$. Răspunsul sistemului este

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, \mathrm{e}^{s(t-\theta)}\, \mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)\, \mathrm{e}^{-s\theta}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{st} \\ &= H(s)\, u(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Funcția $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t \tag{16}$$

este funcția de transfer a sistemului de convoluție $y = h * u$. Aceasta este bine definită în punctele $s \in \mathbb{C}$ pentru care integrala din (16) converge absolut. Dacă sistemul de convoluție este **cauzal** ($h(t) = 0$ pentru $t < 0$), atunci

$$H(s) = \int_{0}^{\infty} h(t)\, \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t \tag{17}$$

este transformata Laplace (unilaterală, la dreapta) a funcției pondere $h(t)$.

# Funcție de transfer

Dacă $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}(s)$ și $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, atunci are loc

$$\begin{aligned} \text{Domeniul frecvență} &: Y(s) = H(s)\,U(s), \\ \text{Domeniul timp} &: y(t) = (h * u)(t), \end{aligned} \tag{18}$$

în domeniul *comun* de bună definire a celor trei transformate Laplace din formula de mai sus.

# Funcția de transfer a sistemelor de convoluție discrete

Fie $z \in \mathbb{C}$ și $u(n) = z^n$. Răspunsul sistemului este

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)\, z^{n-l} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) z^{-l}\, z^n = H(z)\, u(n). \tag{19}$$

Funcția

$$H(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l) z^{-l} \tag{20}$$

este funcția de transfer a sistemului de convoluție $y = h * u$. Aceasta este bine definită în punctele $z \in \mathbb{C}$ pentru care suma din (20) converge absolut.
Dacă sistemul de convoluție este **cauzal** ($h(n) = 0$ pentru $n < 0$), atunci

$$H(z) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)\, z^{-l} \tag{21}$$

e transformata Laplace **discretă** (unilaterală, la dreapta) a funcției pondere $h(n)$.

# Funcție de transfer în cazul discret

Dacă $U(s) = \mathcal{Z}\{u(n)\}(z)$ și $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\}(z)$, atunci are loc

$$\begin{aligned} \text{Domeniul frecvență}: \ & {\color{red} Y(z) = H(z)\, U(z)}, \\ \text{Domeniul timp}: \ & {\color{blue} y(n) = (h * u)(n)}, \end{aligned} \tag{22}$$

în domeniul *comun* de bună definire a celor trei transformate $\mathcal{Z}$.

# Observații

**1.** În mod uzual, vom considera sisteme de convoluție cauzale ale căror funcții pondere sunt funcții original (Laplace) - $h \in \mathcal{O}$. De exemplu, ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți definesc astfel de sisteme - vezi exemplul divizorului de tensiune în c.a. Cum semnalele (de intrare) standard sunt de asemenea funcții original, $u \in \mathcal{O}$, rezultă că $y = h * u \in \mathcal{O}$ și $Y(s) = H(s)U(s)$.

**2.** De altfel, egalitățile (18) sunt valabile într-un context mai larg, impus de situația în care sistemul este definit de o ecuație diferențială. Vom considera în cele ce urmează sisteme de convoluție având funcții de transfer raționale, definite de ecuații diferențiale liniare având coeficienți constanți.

**3.** Formulele (18) și (22) sugerează o metodă de calcul (analitic) a răspunsului (în timp al) unui sistem pentru o intrare dată. Cum $H$ și $U$ se cunosc, $Y$ rezultă în mod banal și $y$ se obține ca transformată Laplace/$\mathcal{Z}$ **inversă** a lui $Y$.

# Sisteme de convoluție cu funcții de transfer raționale

• Ecuațiile fizico-matematice ale unui sistem: exprimarea matematică a relațiilor dintre variabilele care intervin în sistemul fizic.

• Relațiile dintre variabile $\dashrightarrow$ ecuații diferențiale: exprimă în mod obișnuit o ecuație de echilibru, determinată de principiile (legile) fizicii care descriu fenomenele care au loc în sistem.

• Sisteme fizice cu parametri constanți. Elemente liniare, intervale de liniaritate, liniarizare. Sisteme fizice cu parametri concentrați.

Modele matematice:

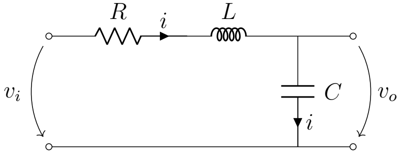
**Ecuații diferențiale ordinare, liniare și cu coeficienți constanți**.

# Exemplu: circuitul RLC serie

- *elemente liniare* de circuit: $R$, $L$, $C$ (e.g., $R$ este un element liniar *numai* în intervalul de funcționare pentru care a fost prevăzut: legea lui Ohm).
- coeficienții sunt *constanți* (ipoteză de lucru: capacitatea condensatorului variază foarte *lent* cu timpul, fiind practic constantă).

Relația dintre variabile

- legile Kirchoff $v_i = v_R + v_L + v_C$ $(= v_o)$ și
- caracteristicile curent-tensiune (legile constitutive/de funcționare) la bornele elementelor $v_R = Ri$, $v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $i = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$




$\Rightarrow$ ecuație diferențială ordinară, liniară și cu coeficienți constanți

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2 v_o}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + v_o = v_i(t)}.$$

În accepțiunea I/O:

- $v_i$ (tensiunea la bornele circuitului) - intrarea sistemului,
- $v_o$ (tensiunea la bornele condensatorului) - ieșirea sistemului.

Ecuația (forțată sau comandată) *definește* (în mod riguros) un sistem.

# RLC serie: Ecuații diferențiale (forțate)

Considerăm ecuația diferențială generală, de ordinul al doilea, în necunoscuta $z(t)$

$$\boxed{a_2\ddot{z}(t) + a_1\dot{z}(t) + a_0 z(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t),\ z(0_+) = z_0,\ \dot{z}(0_+) = z_1},\ a_2 \neq 0. \tag{23}$$

## Observația 8

- În general, putem trata problema pentru orice ordin $n \in \mathbb{N}$. Pentru claritatea expunerii, scriem rezultatele pentru $n = 2$.
- Sistemele de ordinul al doilea cuprind o clasă largă de procese/fenomene mecanice, electrice etc.
- Ecuațiile de acest tip provin din legi fizice de mișcare sau de conservare.
- Circuitul RLC serie, este descris de o ecuație diferențială de ordinul 2, cu
  - necunoscuta $z(t) = v_o(t)$,
  - $a_2 = LC$, $a_1 = RC$, $a_0 = 1 \leftarrow$ coeficienți constanți,
  - $u(t) = v_i(t)$,
  - $b_1 = 0$, $b_0 = 1 \leftarrow$ coeficienți constanți.
- Condițiile inițiale $z(0_+) = z_0$, $\dot{z}(0_+) = z_1$.

# Rezolvarea ecuației diferențiale cu transformarea Laplace

Aplicăm transformarea Laplace în ambii membri ai ecuației (23),

$$\mathcal{L}\Big| \; a_2\ddot{z}(t) + a_1\dot{z}(t) + a_0 z(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t).$$

Cu notațiile $\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = U(s)$, $\mathcal{L}\{z(t)\}(s) = Z(s)$ și folosind proprietatea de derivare a imaginii, se obținem

$$a_2[s^2 Z(s) - sz_0 - z_1] + a_1[sZ(s) - z_0] + a_0 Z(s) = b_1[sU(s) - u(0_+)] + b_0 U(s)$$
$$\Leftrightarrow (a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Z(s) + (a_2 z_0 s - a_2 z_1 - a_1 z_0) = (b_1 s + b_0)U(s) - b_1 u(0_+)$$

sau, în formă compactă,

$$\boxed{A(s)Z(s) - A_i(s) = B(s)U(s) - B_i(s)},$$

unde

$$\begin{aligned} A(s) &= a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \\ B(s) &= b_1 s + b_0, \\ A_i(s) &= a_2 z_0 s - a_2 z_1 - a_1 z_0, \\ B_i(s) &= b_1 u(0_+). \end{aligned}$$

# Răspunsul forțat al unui sistem cu *funcție de transfer*

Notând $Y(s) = Z(s)$, rezultă ieșirea unui sistem dată de

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\mathbf{B(s)}}{\mathbf{A(s)}}U(s)}_{\text{Componentă forțată}} + \underbrace{\frac{A_i(s)}{A(s)}}_{\text{Componentă liberă}} - \underbrace{\frac{B_i(s)}{A(s)}}_{\text{Condiții inițiale } u} \qquad (24)$$

În condiții inițiale nule, $z_0 = z_1 = 0$ și $u(0_+) = 0$, ecuația (24) devine

$$Y(s) = H(s)U(s), \ \text{ unde } H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

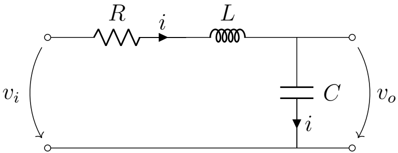
este funcția de transfer de la intrarea $u$ la ieșirea $y$ definită de ecuația (23). Dimensiunea/ordinul sistemului $=$ grad $A(s)$.

### Observația 9

De cele mai multe ori, în membrul drept al ecuației diferențiale (23) nu apar derivatele lui $u$, situație în care $B(s) = b_0$ și $B_i(s) = 0$, de unde rezultă că

$$Y(s) = H(s)U(s) + \frac{A_i(s)}{A(s)}.$$

# RLC serie, sistem

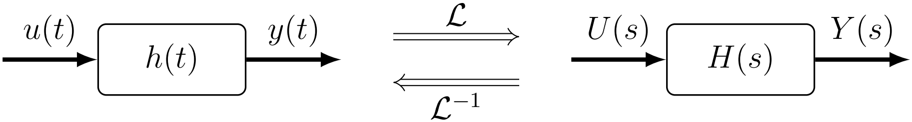



Ecuație diferențială
ordinară, liniară și cu coeficienți constanți

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2 v_o}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + v_o = v_i(t)}.$$

În accepțiunea I/O:

- $v_i$ (tensiunea la bornele circuitului) – intrarea sistemului,
- $v_o$ (tensiunea la bornele condensatorului) – ieșirea sistemului.




RLC serie: Sistem cu funcția de transfer $\boxed{H(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}}$, cu

- intrarea $U(s) = V_i(s) = \mathcal{L}\{v_i\}$ și
- ieșirea $Y(s) = V_o(s) = \mathcal{L}\{v_o\}$.

# Considerații finale

**„Morala”**: Ecuația diferențială (23) *definește* un sistem de convoluție, $y = h * u$, având funcție de transfer **rațională**,

$$\boxed{H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}},$$

a cărui funcție pondere este dată de

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))(t).$$

Acest sistem $u \to y$ realizează tranziția între semnalul de intrare (comanda) $u$ și componenta *forțată* a răspunsului sistemului (soluției ecuației diferențiale).

Celelalte componente ale răspunsului (soluției) sunt nule în condiții inițiale nule.

Componenta liberă corespunde unei soluții a ecuației omogene, în condiții inițiale date.

# Cazul discret: ecuații cu diferențe, sisteme discrete

Echivalentul discret al ecuației (23) este ecuația cu diferențe

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{l=0}^{M} b_l\, u(n-l) \tag{25}$$

În mod similar cazului continuu (cand lucrăm cu ecuații diferențiale), soluția unei astfel de ecuații se obține ca suma dintre ecuația omogenă și o soluție particulară a ecuației (25).

O ecuație cu diferențe definește un sistem discret în accepțiunea intrare/ieșire. Acesta este reprezentat prin funcția de transfer asociată ecuației cu diferențe. Presupunem că $a_n \neq 0$ și aplicăm transformarea $\mathcal{Z}$ ambilor membri

$$\begin{aligned} a_0\, Y(z) + a_1 z^{-1}\, Y(z) + \ldots + a_N z^{-N}\, Y(z) \\ = b_0\, U(z) + b_1 z^{-1}\, U(z) + \ldots + b_M z^{-M}\, U(z). \end{aligned}$$

Rezultă că $Y(z) = H(z)U(z)$, unde

$$H(z) = \frac{b_M z^{-M} + b_{M-1} z^{-M+1} + \ldots + b_0}{a_N z^{-N} + a_{N-1} z^{-N+1} + \ldots + a_0}.$$

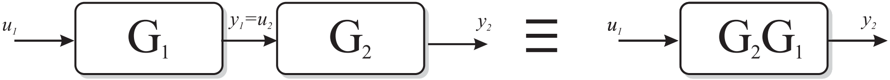
este funcţia de transfer a sistemului definit de ecuaţia (25).

În condiţiile în care, dacă $u(n) = 0$ pentru $n < n_0$, atunci $y(n) = 0$ pentru $n < n_0$, ecuaţia (25) defineşte un sistem liniar şi invariant în timp care este şi cauzal.

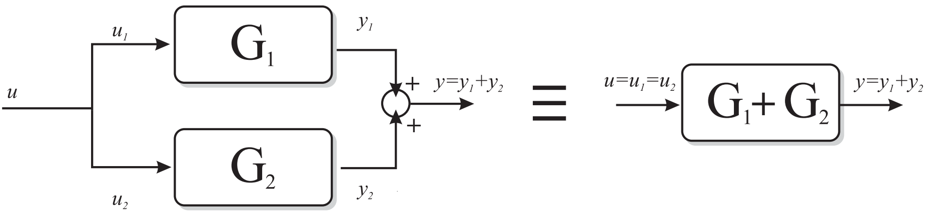
# Conexiunile sistemelor: serie & paralel

Fie două sisteme $G_1$ și $G_2$ cu intrările $u_i$ și $y_i$ ; $i = 1, 2$.
Vom spune că cele două sisteme sunt conectate în:

- **Serie** dacă $u_2 = y_1$

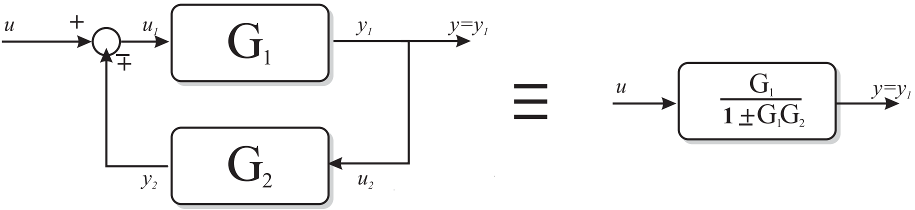



- **Paralel** dacă $u_1 = u_2 = u$ și $y = y_1 + y_2$



# Conexiunea în reacție (negativă)

- **Reacție** dacă $u_1 = \pm y_2 + u, u_2 = y_1, y = y_1$




În ultima diagramă semnul „+" definește conexiunea în reacție pozitivă iar semnul „−" definește conexiunea în reacție negativă.