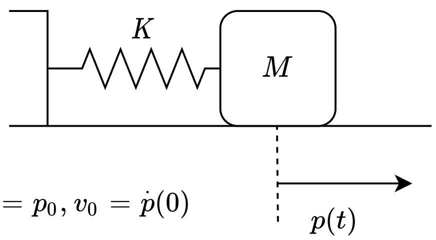
Sisteme dinamice = Sisteme descrise de ecuatii diferentiale

Oscilatorul mecanic



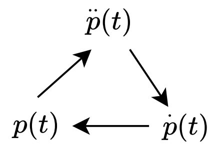
$p(0) = p_0, v_0 = \dot{p}(0)$

Iesirea curenta nu depinde doar de intrarea curenta ci si evolutia precedenta.

$$M\ddot{p}(t) = -Kp(t)$$

$$\ddot{p}(t) = -\frac{K}{M}p(t)$$

Acceleratie



Pozitie   Viteza

Sistemul evolueaza, este dinamic

evolutia viitoare = f(stadiul curent)

derivata starii = f(starea actuala)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Noua modalitate de descriere a unui sistem

! In sistem putem avea si o sursa externa de energie sub forma unui semnal de intrare $u(t)$ (de ex o forta aplicata corpului M):

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

! Putem alege parametrii de interes pe care dorim sa ii masuram ca fiind iesirile sistemului, rezultand semnalul de iesire $y(t)$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Lucram cu sisteme LTI (Linear Time-Invariant) deci f si g sunt de fapt combinatii liniare intre x si u

Reprezentarea pe stare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Dependenta liniara a evolutiei sistemului de starea actuala x si intrarile sale u

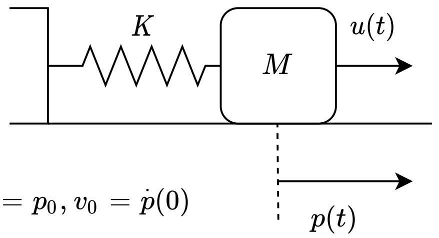
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dependenta liniara a iesirilor sistemului de starea actuala x si intrarile sale u

Ce sunt variabilele de stare x ale sistemului? $\longrightarrow$ Setul minim de variabile care descriu complet sistemul.

Complet? - Un set de variabile descrie complet sistemul daca cu ajutorul lor putem prezice comportamentul viitor al sistemului.

Oscilatorul mecanic



$p(0) = p_0, v_0 = \dot{p}(0)$

$$\ddot{p}(t) = -\frac{K}{M}p(t) \quad (+u(t))$$

Ex: De ce variabile e nevoie pentru a putea spune cum se va comporta oscilatorul peste o secunda?

- constantele sistemului (K pentru arc si M pentru corp)
- fortele externe care actioneaza asupra sistemului, adica intrarile $u(t)$ (daca exista)
- **conditiile initiale**: corpul se misca? arcul trage de corp?

Viteza $\dot{p}(t)$

Forta elastica $F_e(t) = K \cdot p(t)$ $\downarrow$ Pozitia $p(t)$

Numarul de variabile necesar descrierii complete a sistemului este 2 iar acestea sunt pozitia $x_1(t) = p(t)$ si viteza $x_2(t) = \dot{p}(t)$.
Pornind de la o ecuatie diferentiala de ordin 2, rezulta un sistem de 2 ecuatii diferentiale de ordin 1:

$$\ddot{p}(t) = -\frac{K}{M}p(t) + u(t) \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{x_1}(t) = x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) = -\frac{K}{M}x_1(t) + u(t) \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{c} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ A = \begin{pmatrix} -\frac{K}{M} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

De ce nu mai multe variabile de stare? Ex: acceleratia $\ddot{p}(t)$? $\longrightarrow$ Acceleratia $\ddot{p}(t)$ depinde de marimea de stare pozitie $x_1(t) = p(t)$ deci e redundant sa o includem ca stare.

$$\ddot{p}(t) = -\frac{K}{M}p(t) \quad (+u(t))$$

In general numarul de variabile de stare necesare pentru descrierea unui sistem e dat de numarul de elemente acumulatoare de energie independente din sistemul respectiv.

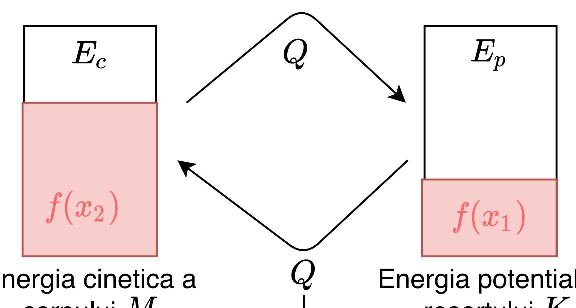
Dinamica sistemului este data de transformarea repetata a energiei potentiale in energie cinetica si invers, cu eventuale pierderi la fiecare transformare.

Un sistem dinamic depoziteaza energie in diferite moduri.
In cazul oscilatorului mecanic avem energie stocata in:

- corp - energie cinetica depinzand de viteza corpului (deci de starea $x_2 = \dot{p}$)

- resort - energie potentiala care depinde de intinderea resortului (deci de starea $x_1 = p$)

Astfel, daca am adauga frecare la sistem, avand in vedere ca aceasta doar disipa si nu acumuleaza energie, tot doua variabile de stare am avea.



Energia cinetica a corpului M

Energia potentiala a resortului K

Pierderi de energie (daca $\zeta \neq 0$)
(+ eventuala energie introdusa prin semnale de intrare)

Reprezentarea pe stare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Dependenta liniara a evolutiei sistemului de starea actuala x si intrarile sale u

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dependenta liniara a iesirilor sistemului de starea actuala x si intrarile sale u

$$H(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Perspectiva intrare-iesire

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Descrierea proceselor prin relatii strict intre intrare si iesire.

Nu exista variabile intermediare intre intrari si iesiri.

Ecuatii diferentiale de grad superior care descriu relatia intrare iesire:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Functia/matricea de transfer

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Sistemul este stabil daca polii lui H sunt in semiplanul stang:

$$Re(P) \in R^{-}$$

Perspectiva pe stare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Descrierea proceselor prin intermediul evolutiei variabilelor de stare care descriu procesul, iesirile nu depind doar de intrari ci si de stari

Apar starile ca variabile intermediare intre intrari si iesiri.

Sisteme liniare de ecuatii diferentiale de ordin I care descriu evolutia fiecarei variabile de stare:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = u - x_1 - x_2 \end{cases}$$

Matricele A,B,C,D

$$(A, B, C, D)$$

Sistemul este stabil daca valorile proprii ale lui A sunt in semiplanul stang:

$$\Lambda(A) \in R^{-}$$

$A \in R^{n \times n}$ - matricea de stare (descrie dependenta intre evolutia viitoare a starii si starea curenta)

$B \in R^{n \times m}$ - matricea asociata intrarilor (descrie dependenta intre evolutia viitoare a starii si intrarile sistemului)

$C \in R^{p \times n}$ - matricea asociata iesirilor (descrie dependenta intre iesirile sistemului si starea sa curenta)

$D \in R^{p \times m}$ - matricea asociata transferului direct (descrie modul in care iesirile depind direct de intrari)

m - numarul de variabile de intrare

n - numarul de variabile de stare

p - numarul de variabile de iesire

Raspunsul liber

Raspunsul sistemului pentru:
- conditii initiale nenule;
- stimuli externi nuli.

$c.i. \neq 0 \qquad u(t) = 0$

Raspunsul fortat

Raspunsul sistemului pentru:
- conditii initiale nule;
- stimuli externi nenuli.

$c.i. = 0 \qquad u(t) \neq 0$

Σ

Raspunsul total

Raspunsul sistemului pentru:
- conditii initiale nenule;
- stimuli externi nenuli.

$c.i. \neq 0 \qquad u(t) \neq 0$

Functii Matlab utile:

`sys=ss(A,B,C,D);` generarea unui model pe stare folosind matricele A, B, C, D

`H = tf(ss(A,B,C,D));` trecerea de la model de stare la functie de transfer

`y = lsim(sys,u,t);` aflarea iesirii unui sistem pentru o intrare data

`[y,t,x] = initial(sys,x0,t);` aflarea raspunsului liber al unui sistem pt conditiile initiale x_0