

Răspunsul sistemelor de convoluție în frecvență. Filtrare

Tudor C. Ionescu

Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@upb.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

20 noiembrie 2020

- 1 Introducere
- 2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
 - Diagrame Bode
 - Norma ∞ a unui sistem
- 3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

Introducere

Electronică: curba de **răspuns în frecvență** a unui amplificator arată cum se schimbă câștigul unui amplificator, când frecvența semnalului de intrare variază.

Banda amplificatorului: plaja de frecvențe unde amplificarea este practic constantă, la un nivel apropiat de valoarea sa maximă.

Răspunsul în frecvență al unui sistem care admite funcție de transfer $H(s)$ este

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

Pe de altă parte, $H(j\omega) e^{j\omega t}$ este răspunsul **permanent** al unui sistem *stabil* la o intrare de tip armonic, $u(t) = e^{j\omega t}$. Mai precis, dacă la intrarea sistemului avem $u(t) = A \sin \omega t$, răspunsul **permanent** (sau staționar) al acestuia va fi¹

$$y_p(t) = A |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi(\omega)),$$

unde $\phi(\omega) = \arg[H(j\omega)]$.

¹Vezi Cap. 2—argument prin operația de convoluție.

Reprezentarea în frecvență:

... a funcției de transfer $H(s)$ e o reprezentare grafică a dependenței numărului complex $H(j\omega)$ de ω , pentru $\omega \in \mathbb{R}$:

1 Exponențială (sau polară)

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg[H(j\omega)]} \stackrel{\text{not}}{=} H(\omega) e^{j\phi(\omega)}. \quad (1)$$

⇒

- **Caracteristicile amplitudine-pulsație și fază-pulsație** sau caracteristicile (semi)logaritmice sunt graficele amplitudinii $H(\omega)$ și respectiv ale fazei $\phi(\omega)$. Aceste caracteristici se mai numesc și **diagrame (de tip) Bode** ← **caracteristicile de filtrare**.

∃ și alte reprezentări, cum ar fi locul de transfer... Similar pentru sistemele discrete (un pic mai încolo...)

Proprietăți

Deoarece $H(s)$ este o rațională cu coeficienți reali, rezultă că

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

și

$$\overline{H(j\omega)} = U(\omega) - jV(\omega) = H(\overline{j\omega}) = H(-j\omega) = U(-\omega) + jV(-\omega),$$

de unde

$$U(\omega) = U(-\omega), \quad -V(\omega) = V(-\omega),$$

pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte,

- U este o funcție *pară*,
- V o funcție *impară*.

Cum

$$H(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \quad \text{și} \quad \phi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

rezultă că

- H este o funcție *pară*,
- ϕ o funcție *impară*.

⇒ este *suficientă* trasarea caracteristicilor pentru valori *pozitive* ale pulsației ω .

- 1 Introducere
- 2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
 - Diagrame Bode
 - Norma ∞ a unui sistem
- 3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

- 1 Introducere
- 2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
 - Diagrame Bode
 - Norma ∞ a unui sistem
- 3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

Diagrame de tip Bode: $H(\omega)$, $\phi(\omega)$

Aceste caracteristici se mai numesc și (semi)logaritmice deoarece pe abscisă se alege o scară logaritmică pentru ω , $x = \log \omega$, iar pe ordonată $y = H(\omega)$ și $y = \phi(\omega)$ se măsoară în **decibeli** (unitate de măsură a câștigului unui amplificator)

$$[H(\omega)]_{\text{dB}} := 20 \log H(\omega), \quad H(\omega) > 0,$$

respectiv în **radiani** (sau grade).

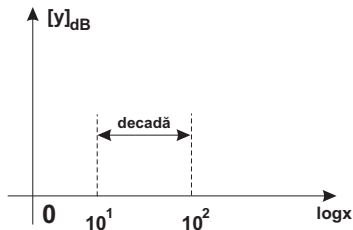


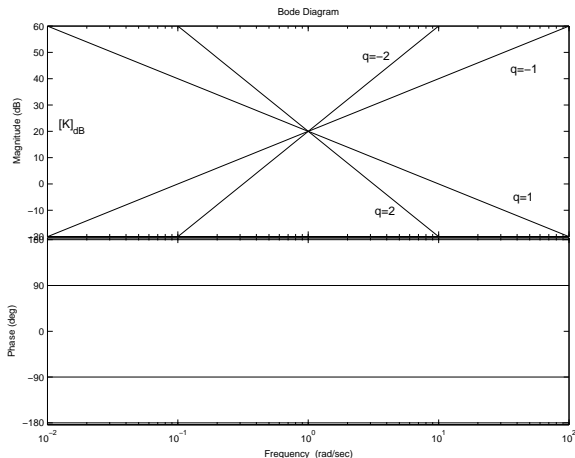
Figura 1: Abscisă logaritmică: o decadă

Avem $\log 2 \approx 0.3$, $\log 5 \approx 0.7$, $\log 3 = 0.48 \approx 0.5$.

Diagramele Bode ale sistemelor elementare

1. Elementul (multi)integrator: $H(s) = \frac{K}{s^q}$, $K > 0$, $q \in \mathbb{Z}$.

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad H(\omega) = \frac{K}{\omega^q}, \quad \phi(\omega) = -q\frac{\pi}{2} \Rightarrow [H(\omega)]_{\text{dB}} = [K]_{\text{dB}} - 20q \log \omega.$$



Diagramele Bode ale sistemelor elementare

2. Element de ordinul I: $H(s) = \frac{1}{Ts + 1}$, $T > 0$.

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \phi(\omega) = \text{arctg}(-\omega T).$$

Atunci

$$[H(\omega)]_{dB} = 20 \log (1 + \omega^2 T^2)^{-\frac{1}{2}} = -10 \log (1 + \omega^2 T^2).$$

a) joasă frecvență: $\omega \ll \frac{1}{T}$, $1 + \omega^2 T^2 \approx 1$

$$\Rightarrow [H(\omega)]_{dB} \approx 0, \quad \phi(0) = \text{arctg}(0_-) = 0.$$

b) înaltă frecvență: $\omega \gg \frac{1}{T}$, $1 + \omega^2 T^2 \approx \omega^2 T^2$

$$\Rightarrow [H(\omega)]_{dB} \approx 20 \log 1/T - 20 \log \omega, \quad \phi(+\infty) = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

c) medie frecvență: $\omega = \frac{1}{T}$

$$\Rightarrow [H(\omega)]_{dB} = -10 \log 2 = -3\text{dB}, \quad \phi(1/T) = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$\omega_T = 1/T$ se numește *pulsăția de frângere*.

Diagramele Bode ale sistemelor elementare

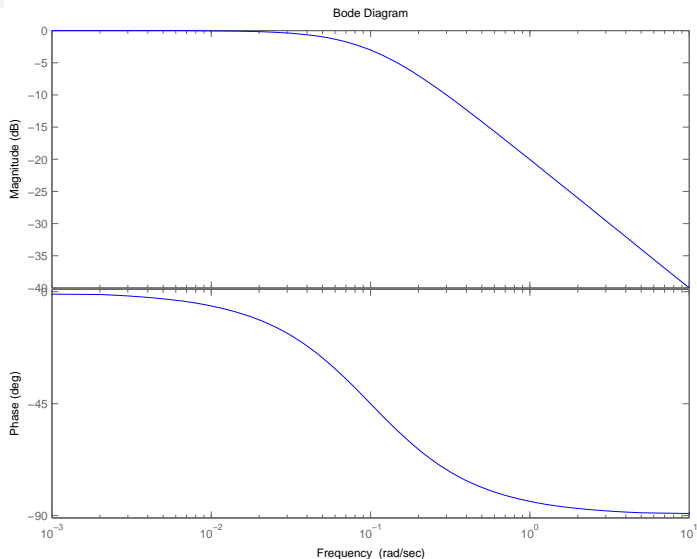


Figura 2: Element de ordinul I

Diagramele Bode ale sistemelor elementare

2. Element de ordinul II:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{1 - x^2 + j2\zeta x} = H(jx),$$

unde $x = \omega/\omega_n \stackrel{\text{not}}{=} \Omega$ - pulsație normalată.

Avem

$$H(\omega) = |H(jx)| = [(1 - x^2)^2 + 4\zeta^2 x^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad \phi(\omega) = \arctg \frac{-2\zeta x}{1 - x^2}$$

Rezultă că

$$[H(\omega)]_{\text{dB}} = -10 \log [(1 - x^2)^2 + 4\zeta^2 x^2] \quad (2)$$

Diagramele Bode ale sistemelor elementare

a) joasă frecvență: $\omega \ll \omega_n$, $x \ll 1 \Rightarrow (1 - x^2)^2 + 4\zeta^2 x^2 \approx 1$

$$\Rightarrow [H(\omega)]_{\text{dB}} \approx -10 \log 1 = 0,$$

$$\phi(0) = \arctg(0_-) = 0.$$

b) înaltă frecvență: $\omega \gg \omega_n$, $x \gg 1 \Rightarrow (1 - x^2)^2 + 4\zeta^2 x^2 \approx x^4$

$$\Rightarrow [H(\omega)]_{\text{dB}} \approx -40 \log x = 40 \log \omega_n - 40 \log \omega,$$

$$\phi(+\infty) = \arctg(0_+) = -\pi.$$

c) medie frecvență: $\omega = \omega_n$, $x = 1$

$$\Rightarrow [H(\omega_n)]_{\text{dB}} = -10 \log 4\zeta^2 = 20 \log \frac{1}{2\zeta} = \left[\frac{1}{2\zeta} \right]_{\text{dB}},$$

$$\phi(\omega_n) = \arctg(\mp\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Puncte de extrem

Calculăm punctele critice ale funcției $[H(\omega)]_{\text{dB}}(x)$ (definită de 2):

$$\frac{d[H(\omega)]_{\text{dB}}(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \text{sau} \quad 1 - 2\zeta^2 - x^2 = 0.$$

Rezultă $x = 0$ și, dacă $\zeta < 1/\sqrt{2} = 0.707$, $x = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Se poate arăta că acestea sunt puncte de *maxim*, valoarea amplitudinii (exprimată în dB) fiind 0 în primul caz și, respectiv,

$$[H_{\text{max}}(\omega)]_{\text{dB}} = -10 \log 4\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

în cel de-al doilea.

Diagramele Bode ale sistemelor elementare

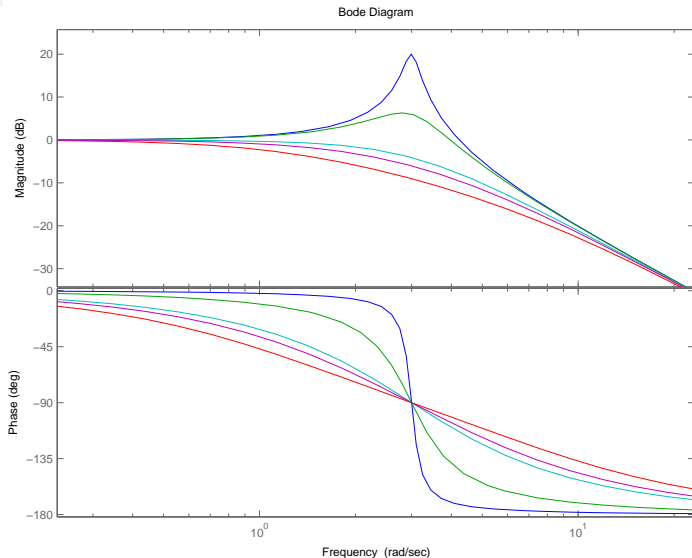


Figura 3: Elemente de ordinul al II-lea cu $\omega_n = 3$; parametrizare după ζ .

Concluzii procedurale

Se trasează mai întâi caracteristicile **asimptotice**:

$$\text{Sistem de ordinul I: } [H_A(\omega)]_{\text{dB}} = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \frac{1}{T}, \\ -20 \log \omega T, & \frac{1}{T} < \omega. \end{cases}$$

$$\text{Sistem de ordinul al II-lea: } [H_A(\omega)]_{\text{dB}} = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_n, \\ -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}, & \omega_n < \omega. \end{cases}$$

Se deduc valorile caracteristicii exacte la pulsațiile de frângere $1/T$, respectiv ω_n , și se trasează caracteristica exactă (ținând cont de valorile lui ζ pentru sistemele de ordin 2).

De exemplu, dacă $\zeta = 0.5 < 0.707$, caracteristica amplitudine-pulsăție admite un maxim, iar

$$[H(\omega_n)]_{\text{dB}} = -10 \log 4\zeta^2 = 20 \log \frac{1}{2\zeta} = \left[\frac{1}{2 \cdot 0.5} \right]_{\text{dB}} = 0.$$

Variația totală a fazei este de $-\frac{\pi}{2}$ pentru elementul de ordinul 1, respectiv de $-\pi$ pentru cel de ordinul 2.

Trasarea calitativă a caracteristicilor de tip Bode

Fie funcția de transfer (strict) proprie

$$H(s) = \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{K}{s^q} \frac{\tilde{r}(s)}{\tilde{p}(s)}, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad K \in \mathbb{R}, \quad \tilde{r}(0) = \tilde{p}(0) = 1. \quad (3)$$

q se numește *tipul* funcției de transfer iar K este *factorul de amplificare/atenuare* sau *câștigul* (DC gain).

Punem în evidență factorii specifici care apar în expresiile lui $\tilde{r}(s)$ și $\tilde{p}(s)$:

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \frac{\prod_{i=1}^{n'_r} (1 + \hat{T}_{ri}s) \prod_{i=1}^{n''_r} (1 + 2\zeta_{ri} T_{ri}s + T_{ri}^2 s^2)}{\prod_{j=1}^{n'_p} (1 + \hat{T}_{pj}s) \prod_{j=1}^{n''_p} (1 + 2\zeta_{pj} T_{pj}s + T_{pj}^2 s^2)}$$

Presupunem (deocamdată) că toate *constantele de timp* sunt pozitive ($T_k > 0$),
că $0 \leq \zeta < 1$ și $K > 0$.

Factori elementari

În expresia lui $H(s)$ apar 3 tipuri de factori:

- poli/zerouri în origine ($j\omega$) alături de factorul constant $K: \frac{K}{j\omega^q}$, $q \in \mathbb{Z}$;
- poli/zerouri reali/reale ($j\omega T + 1$);
- Poli/zerouri complex conjugați/complex conjugate ($1 - \omega^2 T^2 + j 2\zeta T\omega$).

Observații

Dacă $H(s) = H_1(s)H_2(s)$, atunci

$$[H(\omega)]_{\text{dB}} = [H_1(\omega)]_{\text{dB}} + [H_2(\omega)]_{\text{dB}}$$

și

$$\arg[H(j\omega)] = \arg[H_1(j\omega)] + \arg[H_2(j\omega)].$$

În consecință,

$$\begin{aligned} [H(\omega)]_{\text{dB}} = & \left[\frac{K}{\omega^q} \right]_{\text{dB}} + \sum_{i=1}^{n'_r} |1 + j\omega \hat{T}_{ri}|_{\text{dB}} + \sum_{i=1}^{n''_r} |1 - \omega^2 T_{ri}^2 + j2\zeta_{ri} T_{ri}\omega|_{\text{dB}} + \\ & - \sum_{j=1}^{n'_p} |1 + j\omega \hat{T}_{pj}|_{\text{dB}} - \sum_{j=1}^{n''_p} |1 - \omega^2 T_{pj}^2 + j2\zeta_{pj} T_{pj}\omega|_{\text{dB}} \end{aligned}$$

și caracteristica amplitudine-pulație se obține **adunând caracteristicile fiecărui factor în parte.**

Observații

Similar, deoarece

$$\begin{aligned}\phi(\omega) = & -q\frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{n'_r} \arg(1 + j\omega \hat{T}_{ri}) + \sum_{i=1}^{n''_r} \arg(1 - \omega^2 T_{ri}^2 + j2\zeta_{ri} T_{ri}\omega) + \\ & - \sum_{j=1}^{n'_p} \arg(1 + j\omega \hat{T}_{pj}) - \sum_{j=1}^{n''_p} \arg(1 - \omega^2 T_{pj}^2 + j2\zeta_{pj} T_{pj}\omega),\end{aligned}$$

obținem caracteristica fază-pulsație însumând caracteristicile fiecărui factor elementar în parte.

Diagrame Bode: Procedura de trasare

- 1) Scriem sistemul în forma (3), i.e.,

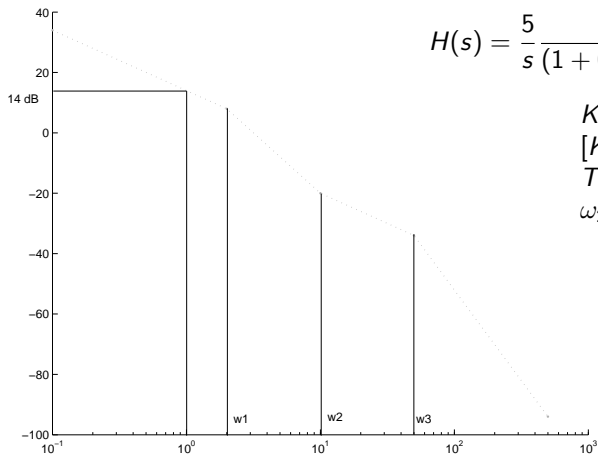
$$H(s) = \frac{K}{s^q} \frac{\prod_{i=1}^{n'_r} (1 + \hat{T}_{ri}s) \prod_{i=1}^{n''_r} (1 + 2\zeta_{ri} T_{ri}s + T_{ri}^2 s^2)}{\prod_{j=1}^{n'_p} (1 + \hat{T}_{pj}s) \prod_{j=1}^{n''_p} (1 + 2\zeta_{pj} T_{pj}s + T_{pj}^2 s^2)}.$$

- 2) Determinăm valoarea lui K în dB, $[K]_{\text{dB}} = 20 \log K$ și marcăm punctul $(10^0, [K]_{\text{dB}})$.
- 3) Așezăm în ordine *crescătoare* pe abscisă - axa $\log \omega$ - toate pulsațiile de frângere $\omega_k = \frac{1}{T_k}$. Trasăm câte o verticală în fiecare pulsație de frângere. Ordonata (axa verticală, cu unitatea de măsură în dB) o traseazăm la stânga celei mai mici pulsații de frângere (la aproximativ două decade mai la stânga).
- 4) Trasăm asimptota de joasă frecvență trecând prin punctul $(10^0, [K]_{\text{dB}})$ și având panta de $-20q$ dB/decadă. Aceasta rămâne nemodificată până când întâlnește *prima* pulsație de frângere. Aplicăm apoi regula de trasare de la 5. Nu are nici un fel de relevanță dacă prima pulsație de frângere se află la stânga sau la dreapta punctului 10^0 de pe abscisă.

Procedura de trasare

- 5) La intersecția caracteristicii asimptotice cu fiecare verticală, modificăm panta acesteia cu ± 20 sau ± 40 dB/decadă, după cum respectiva pulsație de frângere corespunde unui factor de ordinul 1 sau de ordinul 2, plasat la numărător (+) sau la numitor (–).
- 6) Caracteristica fază-pulsație se trasează prin însumarea caracteristicilor fiecărui factor elementar. Pentru elementele de ordin 1 și ordin 2 considerăm că faza variază semnificativ pe o decadă înaintea, respectiv o decadă după punctul de frângere corespunzător. În afara acestui interval (de două decade) putem aproxima faza cu valorile asimptotice de joasă, respectiv înaltă frecvență.

Exemplu



$$H(s) = \frac{5}{s} \frac{1 + 0.1s}{(1 + 0.5s)(1 + 0.6s/50 + (s/50)^2)}$$

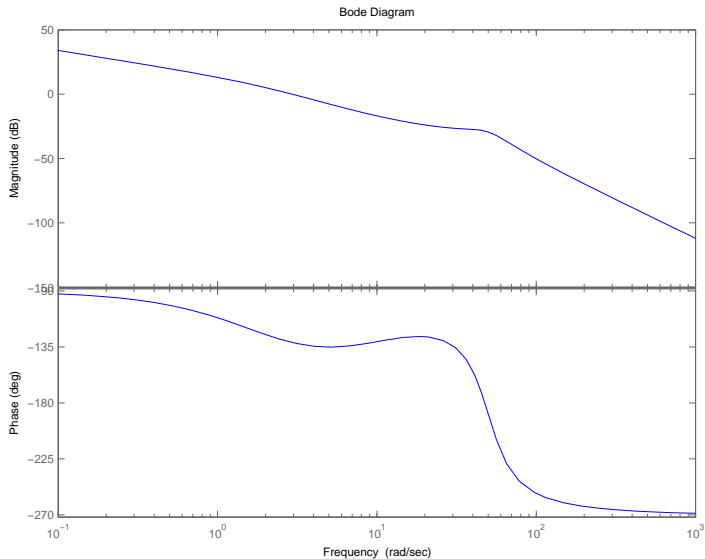
$$K = 5, q = 1;$$

$$[K]_{\text{dB}} = 20 \log 5 \approx 14 \text{ dB}.$$

$$T_1 = 0.5, \omega_1 = 2; T_2 = 0.1, \omega_2 = 10; T_3 = 0.02, \omega_3 = 50.$$

Figura 4: Caracteristica asimptotică

Caracteristicile „reale”



- 1 Introducere
- 2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
 - Diagrame Bode
 - Norma ∞ a unui sistem
- 3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

Norme sistemice

Considerăm un sistem de convoluție descris de o funcție pondere $g(t)$, cu suport pozitiv, cu transformată Laplace $G(s)$, având intrarea $u(t)$ și ieșirea $y(t)$, cu transformatele Laplace $u(s)$ și respectiv $y(s)$ și relațiile intrare-ieșire

$$y = g * u, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau) d\tau, \quad y(s) = G(s)u(s).$$

Sistemele (ca și semnalele) se pot măsura prin diferite norme care relevă sintetic proprietăți sofisticate ale acestora. Cele mai importante norme sistemice sunt norma 2 și norma ∞ .

Norma L^∞ a unui sistem - amplificarea maximă

Norma L^∞ (pe scurt, norma ∞) a unui sistem este prin definiție

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|. \quad (4)$$

Norma ∞ este bine definită (finită) dacă și numai dacă sistemul G este propriu și nu are poli pe axa imaginară. În plus, dacă sistemul G este stabil, ducând L^2 în L^2 , atunci norma ∞ sistemică coincide cu norma *indusă* de norma 2 a semnalelor:

$$\|G\|_{2_{\text{ind}}} := \sup_{\substack{u \in L^2 \\ u \neq 0}} \frac{\|g * u\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{\substack{u \in L^2 \\ u \neq 0}} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{\|u\|_2 \leq 1} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \sup_{\|u\|_2=1} \|y\|_2 = \|G\|_\infty \quad (5)$$

Norma ∞

În acest caz, este de asemenea interesant de observat că norma sistemică *indusă* ∞ coincide de fapt cu norma 1 a funcției pondere (văzută ca semnal)

$$\|G\|_{\infty \text{ ind}} = \sup_{\|u\|_{\infty} \neq 0} \frac{\|y\|_{\infty}}{\|u\|_{\infty}} = \|g\|_1.$$

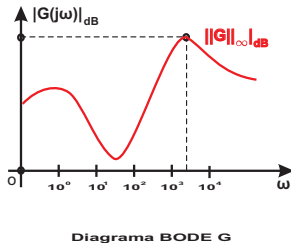
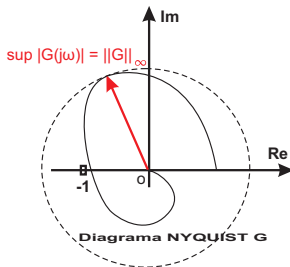
Toate aceste evaluări **cantitative** între normele semnalelor de intrare, ieșire și diferite norme sistemice joacă un rol important în metodele moderne de sinteză ale sistemelor de reglare automată, deoarece **normele sistemice** "controlează" d.p.d.v. cantitativ transferul intrare-ieșire, evaluat prin intermediul diverselor norme ale semnalelor de intrare și ieșire:

$$\begin{aligned}\|y\|_2 &\leq \|G\|_{\infty} \|u\|_2 \\ \|y\|_{\infty} &\leq \|g\|_1 \|u\|_{\infty}\end{aligned}$$

Localizarea normei L^∞ pe diagramele Bode

Lema 1

Norma L^∞ este finită dacă și numai dacă G este proprie și nu are poli pe axa imaginară.



- 1 Introducere
- 2 Reprezentarea sistemelor continue în frecvență
 - Diagrame Bode
 - Norma ∞ a unui sistem
- 3 Reprezentarea sistemelor discrete în frecvență

Reprezentarea discretă în frecvență

Deoarece $H(z) = \mathcal{Z} \{h(k)\} (z)$, unde h este funcția pondere a sistemului,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-j\omega k} = \hat{h}(\omega),$$

transformata Fourier discretă a lui h .

Arătăm că $\hat{h}(\omega)$ este răspunsul în frecvență al sistemului $y = h * u$, $u(k) = e^{j\omega k}$.

$$y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) u(n-k) = \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-j\omega k} \right] e^{j\omega n} = \hat{h}(\omega) u(n) \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = U(\omega) + j V(\omega) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}.$$

Caracteristicile de frecvență Bode sunt similare celor din cazul continuu, cu mențiunea că $H(e^{j\omega})$ este o funcție *periodică* de perioadă $T = 2\pi$. Pulsația se găsește într-un interval *finit*, de exemplu $[0, \pi]$ – similar cu $[0, \infty]$ în cazul continuu.

$$\overline{H(e^{j\omega})} = U(\omega) - jV(\omega) = H(\overline{e^{j\omega}}) = H(e^{-j\omega}) = U(-\omega) + jV(-\omega).$$

Reprezentarea discretă în frecvență

Se poate, de asemenea, introduce un „echivalent” de tip continuu al reprezentărilor în frecvență, cu ajutorul transformării omografice inverse \leftarrow pentru sisteme cauzale.

Pe scurt,

$$s = \left. \frac{z-1}{z+1} \right|_{z=e^{j\omega}} = j \tan \frac{\omega}{2} =: j\eta.$$

Așadar, punând $\omega = 2 \cdot \arctan \eta \implies$ echivalentul continuu

$$\hat{H}(j\eta) = H(z)|_{z=\frac{1+j\eta}{1-j\eta}} = \hat{H}(s)|_{s=j\eta}, \quad \hat{H}(s) = H(z)|_{z=\frac{1+s}{1-s}}.$$

Concluzii: Cum desenăm caracteristica de frecvență a unui sistem discret?

- $H(z)$ are coeficienți reali \implies desenăm doar pentru

$$\omega \in [0, \pi] \Leftrightarrow \frac{\omega}{\pi} \in [0, 1] \leftarrow \text{pulsăția normalizată.}$$

- Valoarea principală a fazei este $\arg[H(e^{j\omega})] \in [-\pi, \pi]$.

Exemplul 1: Media a două eșantioane

Considerăm un filtru discret cu răspuns finit la impuls (FIR)

$$y(n) = \frac{1}{2}[u(n) + u(n-1)] \Rightarrow H(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1}) = \frac{1}{2} \frac{z+1}{z}.$$

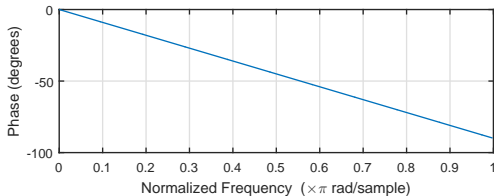
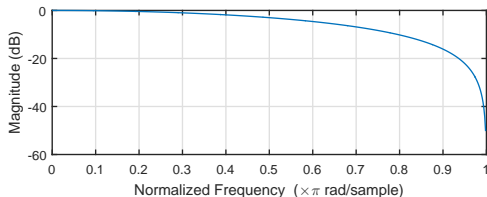
Analizăm

răspunsul în frecvență al filtrului.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}(1 + e^{-j\omega}) \\ &= e^{\frac{-j\omega}{2}} \frac{e^{\frac{j\omega}{2}} + e^{\frac{-j\omega}{2}}}{2} \\ &= \cos \frac{\omega}{2} e^{\frac{-j\omega}{2}}. \end{aligned}$$

Caracteristici:

- Amplitudine $|H(e^{j\omega})| = \cos \frac{\omega}{2}$;
fază $\arg(H) = -\frac{\omega}{2}$.
- Pentru $u = e^{j \cdot 0 \cdot n} = 1 \Rightarrow$
 $y(n) = 1 \Leftrightarrow \hat{h}(e^{0j}) = H(1) = 1$.
- Pentru $u = e^{j\pi n} = (-1)^n \Rightarrow$
 $y(n) = 0 \Leftrightarrow \hat{h}(e^{j\pi}) = H(-1) = 0$.



Interpretare

- Pentru $u(n) = e^{j \cdot 0 \cdot n} = 1 \Rightarrow y(n) = 1$. Amplificarea staționară $H(1) = 1$.
- Pentru $u(n) = e^{j \cdot \pi \cdot n} = (-1)^n \Rightarrow y(n) = 0$. Amplificarea $H(-1) = 0$.
- Pentru $u(n) = e^{j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot n} \Rightarrow$

$$H(e^{j \frac{\pi}{2}}) = \cos \frac{\pi}{4} e^{-j \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j \frac{\pi}{2} n - j \frac{\pi}{4}}.$$

- Luând partea reală, pentru $u(n) = \cos \frac{n\pi}{2} \Rightarrow$

$$y(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Exemplul al doilea: Sistemul medie pe M eșantioane

$$y(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} u(n-k) = \frac{u(n) + u(n-1) + \dots + u(n-M+1)}{M}.$$

Funcția de transfer: $H(z) = \frac{1}{M} \frac{z^{M-1} + z^{M-2} + \dots + 1}{z^{M-1}} = \frac{1}{M} \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-1}}.$

Răspunsul în frecvență: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}}.$ Dând factori comuni pe $e^{-\frac{j\omega M}{2}}$ la

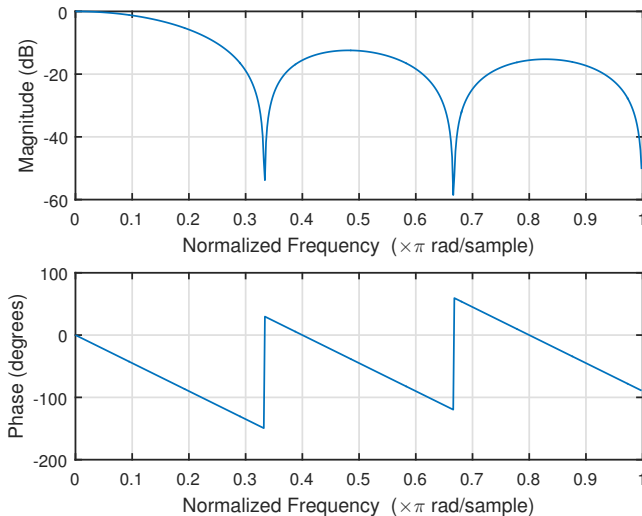
numărător și pe $e^{-\frac{j\omega}{2}}$ la numitor $\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \frac{\sin \frac{\omega M}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-\frac{j\omega(M-1)}{2}}.$

- Amplitudinea: $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M} \left| \frac{\sin \frac{\omega M}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right|.$

- $\sin \frac{\omega}{2} > 0$ pentru $\omega \in [0, \pi]$, dar semnul lui $\sin \frac{\omega M}{2}$ variază.

- Deoarece $-1 = e^{-j\pi}$, faza este $\begin{cases} -\frac{\omega(M-1)}{2}, & \sin \frac{\omega M}{2} \geq 0, \\ -\frac{\omega(M-1)}{2} - \pi, & \sin \frac{\omega M}{2} < 0. \end{cases}$

Sistemul de medie pe 6 eșantioane



Exemplul al treilea: Filtrul de medie alunecătoare

Funcția de transfer: $H(z) = \frac{1}{3} \left(z + 1 + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{3} \frac{z^2 + z + 1}{z}$.

Răspunsul în frecvență: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}(e^{j\omega} + e^{-j\omega} + 1) = \frac{1}{3}(2 \cos \omega + 1)$.

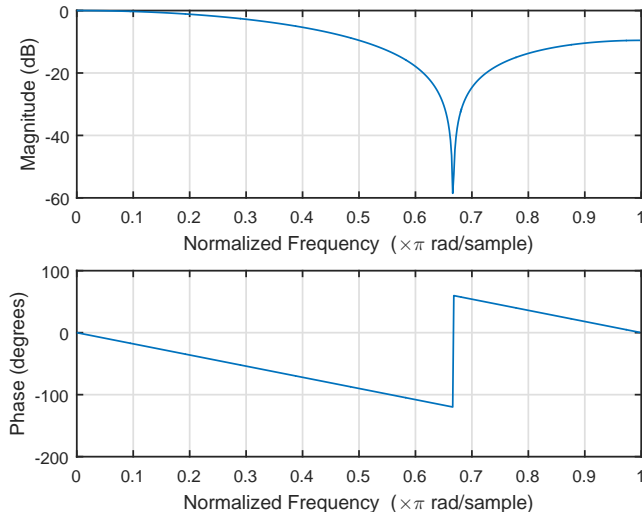
Observația 3

Pe intervalul $[0, \pi]$, $2 \cos \omega + 1 > 0$, pentru $\omega < \frac{2\pi}{3}$.

Prin urmare, $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} (2 \cos \omega + 1) e^{j \cdot 0}, & \omega \in [0, \frac{2\pi}{3}] , \\ (2 \cos \omega + 1) e^{-j \cdot \pi}, & \omega \in [\frac{2\pi}{3}, \pi] , \end{cases}$.

- Amplitudinea: $|H(e^{j\omega})| = |2 \cos \omega + 1|$,
- Faza: $\arg[H(e^{j\omega})] = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, \frac{2\pi}{3}] , \\ -\pi, & \omega \in [\frac{2\pi}{3}, \pi] . \end{cases}$

Filtrul de medie alunecătoare: caracteristica în frecvență



Pentru sisteme/filtre discrete în Matlab: `freqz(num,den)`.

Filtrul de MA: trasarea manuală

Deoarece filtrul este *necauzal*, nu se aplică transformarea omografică per se. Totuși, observăm că

- $H(z) = z\tilde{H}(z)$, $\tilde{H}(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1}{3} \frac{z^2 + z + 1}{z^2} \leftarrow$ cauzal. Mai mult, $y(k) = x(k+1)$, unde $x(k)$ este răspunsul sistemului $\tilde{H}(z)$ la $u(k)$, i.e., $X(z) = \tilde{H}(z)U(z)$.
- Prin urmare,

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega} \tilde{H}(e^{j\omega}).$$

Rezultă că

- $|H(e^{j\omega})| = |\tilde{H}(e^{j\omega})|;$
- $\arg[H(e^{j\omega})] = \omega + \arg[\tilde{H}(e^{j\omega})].$

Concluzie: Pentru trasarea manuală, aplicăm transformarea omografică lui $\tilde{H}(z)$ și desenăm caracteristicile de frecvență ale $\hat{H}(s) = \tilde{H}(z) \Big|_{z=\frac{1+s}{1-s}}$. În final, la caracteristica de fază adăugăm ω .
Pentru exemplul nostru, la tablă, sau temă.