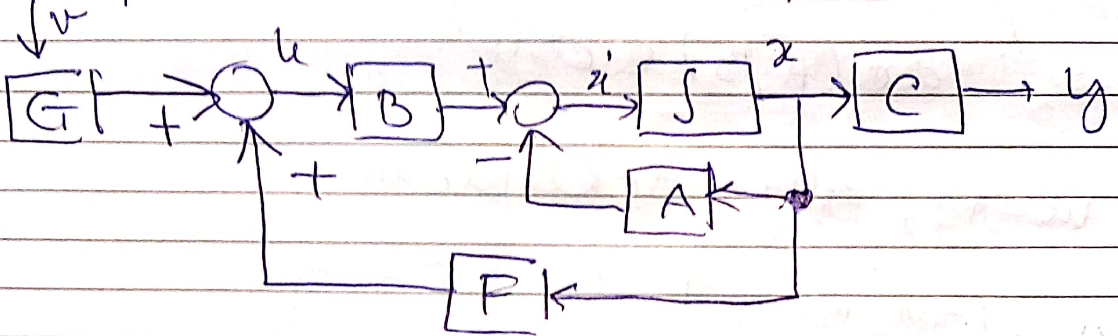
TSA (S7) 14/05/2019 ora 14

MEMO

$$(S) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \leftarrow \text{sinteza stabilizare și reglare}$$

$u(t)$ semnal de comandă ai în b.î. SRA să respecte un comportament impus



$u = Fx + Gv \Rightarrow \dot{x} = (A+BF)x + BGv \leftarrow$ b.î.

$\boxed{Q}$: Care e prima cerință de performanță?

STABILITATEA $\Leftrightarrow \lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}^-$

$\Rightarrow \boxed{Q}$: $F = ?$ ai $\lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}^-$

$\boxed{A}$: 2 probleme
- stabilizare $\lambda(A+BF) \subset \mathbb{C}^-$ (1)
- alocare $\lambda(A+BF) = \Lambda_0 \subset \mathbb{C}^-$ (2)

(1) are sol $\Leftrightarrow$ (A, B) stabilizabilă

(2) are sol $\Leftrightarrow$ (A, B) alocabilă

De (A, B) e necstrl $\overset{TDC}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Fie $F = [F_1 \,\vdots\, F_2] \Rightarrow A + BF = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1F_1 & * \\ & A_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda(A+BF) = \lambda(A_{11} + B_1F_1) \cup \underbrace{\lambda(A_2)}_{\text{imobile!}}$$

$\lambda(A_2)$ este spectru fix.

$\Downarrow$

Prop (A, B) e stabilizabilă $\Leftrightarrow$ $\lambda(A_2) \subset \mathbb{C}^-$

Prop (A, B) e alocabilă $\Leftrightarrow$ (A, B) e ctrb

(Aici se poate scrie schema triunghiulară)

$\boxed{Q}$: $F = ?$ de (A, B) e ctrb?

$\boxed{A}$: $m = 1$, alg. Ackermann

Ex 1: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $m = 1$.

Sol: Caut $F \in \mathbb{R}^{m \times n} = \mathbb{R}^{1 \times 3}$ ai $\lambda(A + BF) \subset \mathbb{C}^-$, pe care il pot alege dacă nu este impus.

$F = -e_n^T R^{-1} \chi(A)$, unde $R = [B\ AB \ldots A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(m=1)$

$\chi(s)$ este pol cu rădăcinile Λ_0 impus

e_n e ultimul vector din baza lui $\mathbb{R}^n$.

$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R^{-1} = R^T = R$ (permutare ortogonală)

$e_n^T R = R(n, :)$

Alegem spectrul impus: $\Lambda_0 = \{-1, -1, -1\}$

$\Rightarrow \chi(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

$\Rightarrow \chi(A) = (A + I_3)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_3$

OBS: $\chi(A)$ se calculează eficient prin înmulțiri vector matrice.

$$F = -\underbrace{[0\ 1\ 0]}_{= e_n^T R^{-1}} \left(A^3 + 3A^2 + 3A + I_3\right)$$

MEMO

$$= -\Big(\underline{[0\ 1\ 0]} + 3\,\underline{[2\ 0\ 0]} + \cancel{3}$$

$$3[2\ 0\ 0]A = 3 \cdot \underline{[-2\ 0\ 2]} +$$

$$\cancel{3}[-2\ 0\ 2]A = \underline{[4\ 2\ -2]}\Big)$$

$$= \underline{-[4\ 3\ 4]}, \quad u(t) = Fx(t)$$

OBS: $F = -q^T \chi(A)$, $q^T = e_n^T R^{-1}$

$\Rightarrow q$ e sol ec. $R^T q = e_n$.

Ex 2. Fie $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s}{s-1} \\ \frac{3s^2-4s}{s^2-3s+2} \\ \frac{1}{s^2(s-2)} \end{bmatrix}$

a) Calculați o realizare minimală

b) O lege de comandă stabilizatoare prin reacție după stare.

Sol: $G(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D = G(\infty)} + \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} \\ \frac{5s-6}{s^2-3s+2} \\ \frac{1}{s^2(s-2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} +$

$$+ \frac{1}{s^2(s-1)(s-2)} \begin{bmatrix} 2s^2(s-2) \\ s^2(5s-6) \\ s-1 \end{bmatrix} = D + \frac{1}{s^4 - 3s^3 + 2s^2} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 2s^3 - 4s^2 \\ 5s^3 - 6s^2 \\ s-1 \end{bmatrix}$$. Deoarece $m < p \Rightarrow$ aleg RSC potențial minimală

RSC : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vf dacă RSC scrisă este observabilă.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -10 & \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } Q = 4$$

Deci RSC e minimală.

Met II Dacă $m = 1 \Rightarrow$ Ackermann. $\Lambda_0 = \{-1 / \text{mult. } 4\}$

$\Rightarrow \chi(s) = (s+1)^4$

$R \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ e greu.

Met 1 : Fie $F = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]$

$$\Rightarrow A + BF = A + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} \\ f_1 \ \ f_2 \ \ f_3 \ \ f_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_1 & f_2 & -2+f_3 & 3+f_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\text{companion canonic controlabil}}$$

$\Rightarrow \lambda(A+BF) = \Lambda_0 \Rightarrow p_{A+BF}(s) = \chi(s)$

MEMO

$A+BF$ e în formă canonică controlabilă

$\Updownarrow$

$$p_{A+BF}(s) = s^4 - (f_4+3)s^3 - s^2(f_3-2) - f_2 s - f_1 = \chi(s)$$
$$= s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -f_4 - 3 = 4 \\ 2 - f_3 = 6 \\ -f_2 = 4 \\ -f_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow f_1 = 1,\ f_2 = -4,\ f_3 = -4,\ f_4 = -7$$

Ex3: $G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s^2-2s} & \dfrac{s+1}{(s-2)^2} \end{bmatrix}$.

a) min real; b) $F = ?$ ai $\lambda(A+BF) = \Lambda_0$

Sol $G(s) = \dfrac{1}{s^3-4s^2+4s}\begin{bmatrix} 2s-4 & s^2+s \end{bmatrix}$

$p=1 \Rightarrow$ RSO: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = 0$ și e minimală

(se demonstrează ușor cu verificarea controlabilității prin HBP)

b) $m = 2 > 1$. Pas1 Se aleg $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $g \in \mathbb{R}^n$ ai

$(\tilde{A}, b) = (A + B\tilde{F}, Bg)$ e ctrb

Pas2: Calc f^T ai $\lambda(\tilde{A} + bf^T) = \Lambda_0$

$\Leftarrow$ aplic Ackermann pe $(\tilde{A}, b)$

$\Rightarrow f^T = -e_3^T R^{-1} \chi(A)$

Pas 3. $F = g f^T + \tilde{F}$. În cazul nostru:

Pas 1. Pot alege $\tilde{F} = 0 \Rightarrow \tilde{A} = A$

OBS. Nu e generală alegerea $\tilde{F} = 0$!

$$Bg = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{Q}$: Cum îmi dau seama că e ctbl?

$\boxed{A}$: RSO arăt prin B sunt coef. ai numărătorului lui G(s)

$\Rightarrow$ aleg ai să nu am simplificări în G(s)

$$G(s) = \frac{\boxed{s^2+2}}{s(s-2)^2}$$ — nu simplific!

Atenție nu este o rețetă, dar, deoarece controlabilitatea este generică, șansele de a cădea pe necontrolabil sunt nule! $\boxed{?}$

$$\tilde{A} = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = Bg = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pas 2. $\tilde{R} = [b \;\; \tilde{A}b \;\; \tilde{A}^2 b] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -16 \\ 1 & 4 & 14 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \tilde{R}^{-1} = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f^T = -e_3^T \tilde{R}^{-1} \chi(\tilde{A}) = -\frac{1}{36}[1 \;\; -4 \;\; -2]$.

- $(A+I_3)(A+2I_3)(A+3I_3)$

<u>Pas 3</u> : $\Phi = gf^T$ ---→

MEMO