Proprietăți structurale. Descompunere structurală. Realizări minimale. Conexiuni

Tudor C. Ionescu
Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: tudor.ionescu@upb.ro

URL: http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/

5 decembrie 2020

1. Proprietăți structurale
   - Controlabilitatea
   - Observabilitatea
   - Descompunerea structurală
2. Realizabilitate
   - Problema existenței
   - Realizări minimale
3. Conexiunile sistemelor dinamice și operații

Controlabilitate: „Posibilitatea de a controla”

Controlabilitatea = proprietate calitativă care caracterizează abilitatea unui sistem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{1}$$

de a putea tranzita dintr-o stare în alta printr-o comandă (printr-un control) $u(t)$. Pentru controlabilitate este relevantă numai prima ecuație din (1) și soluția

$$x(t) = e^{At}x_o + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Definiția 1 (Stare controlabilă/Sistem controlabil)

O stare $x \in \mathbb{R}^n$ se numește controlabilă la momentul $t > 0$ dacă există o comandă $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ care transferă $x_o = 0$ (originea) în starea $x(t) = x$. Echivalent, o stare x se numește controlabilă dacă există $t > 0$ și o comandă $u(\cdot)$, $u : [0, t]$, a.î. traiectoria satisface $x(t) = x$.

Matricea de controlabilitate

Controlabilitatea unei stări depinde de momentul de timp $t > 0$. În continuare vom vedea că, de fapt, proprietatea de controlabilitate este independentă de t. Introducem matricea de controlabilitate asociată unui sistem dinamic (unei perechi matriciale (A, B), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$):

$$R := \left[\, B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \;\; A^{n-1}B \,\right]. \tag{3}$$

Matricea de controlabilitate are dimensiune $n \times (nm)$.

Teorema 1

O stare x este controlabilă dacă și numai dacă $x \in \mathcal{R}$, unde $\mathcal{R} = \operatorname{Im} R$ este subspațiul controlabil *al perechii (A, B).*

Observația 1

O stare $x \in \mathbb{R}^n$ este controlabilă independent de momentul $t > 0$. Proprietatea este intrinsecă stării x și perechii (A, B).

Caracterizarea controlabilității perechii (A, B)

Introducem noțiunea de sistem controlabil (sau pereche (A, B) controlabilă) cu semnificația că fiecare stare $x \in \mathbb{R}^n$ este controlabilă.

Teorema 2

Fie perechea (A, B).

- *O stare* x *este controlabilă dacă și numai dacă* $x \in \mathcal{R}$.
- *Perechea* (A, B) *(sistemul) este controlabilă (controlabil) dacă și numai dacă*

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \operatorname{rang} R = n.$$

Observația 2

Procedural, controlabilitatea unui sistem se poate testa verificând că rangul matricii de controlabilitate, i.e., $\operatorname{rang} R = n$. Pentru testarea controlabilității există un algoritm dedicat foarte eficient numit "controllability staircase". Cu toate că acest algoritm este numeric stabil, problema testării controlabilității este o problemă "ill–posed" (prost condiționată numeric).

Subspațiul de controlabilitate de dimensiune maximă

Pp. că (A, B) nu este controlabil. Căutăm ssp. controlabil $\mathcal{R}$ de dim. $\nu < n$. Căutăm subspațiul $\mathcal{V}$ de dimensiune ν care este A–invariant. Avem $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, iar dacă $\mathcal{V} = \operatorname{Im} V$, unde V este o $n \times \nu$ matrice bază pentru $\mathcal{V}$ atunci automat

$$AV = VJ$$

unde J este o matrice pătrată $\nu \times \nu$ cu $\Lambda(J) \subset \Lambda(A)$. Făcând o completare până la o matrice nesingulară $T^{-1} = \begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, obținem

$$\widehat{A} := TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix}.$$

Punem condiția ca subspațiul $\mathcal{V}$ de dimensiune ν A–invariant să conțină $\operatorname{Im} B$. Repetând schimbarea de coordonate și aplicând-o corespunzător și lui B avem

$$\widehat{A} := TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ O \end{bmatrix}$$

deoarece $\operatorname{Im} B \subset \mathcal{V}$.

Subspațiul de controlabilitate

Cu această schimbare de coordonate, matricea de controlabilitate corespunzătoare a perechii $(\widehat{A}, \widehat{B})$ este

$$\widehat{R} = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & A_1^2 B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \\ O & O & O & \cdots & O \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\nu \\ \end{array}.$$

Dacă spațiul A–invariant, $\mathcal{V}$, care conține $\operatorname{Im} B$, în raport cu care s-a facut descompunerea este chiar $\mathcal{R}$, atunci perechea (A_1, B_1) este automat controlabilă și avem că $\operatorname{rang} R = \operatorname{rang} \widehat{R} = \nu$ (indicele de controlabilitate).
Prin urmare, subspațiul de controlabilitate este $\mathcal{R} = \operatorname{Im} \widehat{R},\ \dim \mathcal{R} = \nu$.

Corolarul 1

Un sistem (A, B, C, D) este controlabil dacă și numai dacă $\nu = n$.

Descompunere controlabilă

Teorema 3 (Teorema de descompunere controlabilă (TDC))

Un sistem (A, B, C, D) *necontrolabil, cu* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *este întotdeauna echivalent pe stare cu un sistem* $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *având structura*

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\nu \\ \}n-\nu \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{\nu} & \underbrace{\qquad}_{n-\nu} \end{array} & \end{array}, \tag{4}$$

$$\widehat{B} = TB = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ O \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\nu \\ \}n-\nu \end{array}, \qquad \widehat{C} = CT^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{\nu} & \underbrace{\qquad}_{n-\nu} \end{array} \end{array}, \tag{5}$$

în care perechea (A_1, B_1) *este controlabilă. Mai mult, sistemele* (A, B, C, D), $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *și* (A_1, B_1, C_1, D) *sunt echivalente intrare–ieșire, i.e.,*

$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right].$$

Descompunere controlabilă–continuare

Observația 3

- Teorema afirmă în particular că, dându-se un sistem dinamic putem întotdeauna găsi un alt sistem echivalent intrare–ieșire care este controlabil (cu dimensiunea spațiului stărilor $\leq$ dimensiunea sistemului inițial).
- Procedural, obținerea descompunerii controlabile se bazează în mod esențial pe matricea $S = T^{-1}$ care se poate obține făcând o completare până la o matrice inversabilă a oricărei baze V a subspațiului controlabil $\mathcal{R} = \operatorname{Im} R$.
- Proprietatea de controlabilitate este invariantă în raport cu relația de echivalență pe stare. Mai precis, un sistem este controlabil dacă și numai dacă orice sistem echivalent pe stare este controlabil.

Criteriul Popov–Belevitch–Hautus (PBH)

Folosind TDC se obține un criteriu extrem de util pentru testarea controlabilității unei perechi (A, B).

Teorema 4 (Criteriul PBH)

Perechea (A, B), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, este controlabilă dacă și numai dacă

$$\operatorname{rang}\left[\, sI - A \,\middle|\, B \,\right] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Corolarul 2

(A, B) *este controlabilă dacă criteriul PBH este satisfăcut* $\forall s \in \Lambda(A)$.

Observația 4

- Corolarul justifică introducerea de valoare proprie controlabilă (necontrolabilă), i.e., care satisface (nu satisface) criteriul PBH. O valoare proprie λ a lui A este controlabilă (necontrolabilă) dacă și numai dacă $\lambda \in \Lambda(A_1)$ ($\lambda \in \Lambda(A_2)$).
- Dacă două sisteme (A, B, C, D) și $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$ sunt echivalente pe stare cu transformarea T, atunci matricile de controlabilitate corespunzătoare R și $\widetilde{R}$ satisfac $\widetilde{R} = TR$.

1. Proprietăți structurale
   - Controlabilitatea
   - Observabilitatea
   - Descompunerea structurală

2. Realizabilitate
   - Problema existenței
   - Realizări minimale

3. Conexiunile sistemelor dinamice și operații

Influența stării x în răspunsul liber y_ℓ. Definiție

Observabilitatea este o proprietate calitativă a sistemului (A, B, C, D) cu $x(0) = x$ de a determina o stare x din prelucrarea mărimii măsurate y. Pentru observabilitate este relevant răspunsul liber, i.e., sub comenzi externe nule,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax, \quad x(0) = x, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{7}$$

deci observabilitatea este o proprietate caracterizată numai prin perechea (C, A) – observați ordinea în pereche. Din (7) rezultă

$$y(t) = y_\ell(t) = Ce^{At}x, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Este mai simplu de introdus noțiunea de stare neobservabilă!

Definiția 2 (Stare neobservabilă)

O stare $x \in \mathbb{R}^n$ se numeste neobservabilă la momentul $t > 0$ dacă pentru $x(0) = x$ răspunsul liber y_ℓ este identic zero pe intervalul $[0, t]$, i.e.,

$$y_\ell(\tau) = Ce^{A\tau}x = 0, 0 \leq \tau \leq t.$$

Noțiunea de stare observabilă se obține prin **negarea** definiției de mai sus.

Matricea de observabilitate. Dualitate

Introducem matricea de observabilitate asociată unui sistem dinamic, sau mai precis unei perechi matriciale (C, A), $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$Q := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \left[\, C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \ldots \ (A^T)^{n-1} C^T \,\right]^T = \overline{R}^T. \qquad (9)$$

Matricea de observabilitate are dimensiune $(np) \times n$.

Teorema 5

O stare x este neobservabilă dacă și numai dacă $x \in \mathcal{N}$, unde $\mathcal{N} = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} \overline{R}^T$ este subspațiul neobservabil *al perechii (C, A).*

Observația 5

- O stare $x \in \mathbb{R}^n$ este observabilă/neobservabilă independent de momentul $t > 0$. Proprietatea este intrinsecă starii x și perechii (C, A).
- Se poate introduce definiția echivalentă: o stare x s.n. neobservabilă dacă $\exists\ t > 0$ pentru care x este neobservabilă la acel moment.

Caracterizarea observabilității perechii (C, A). Dualitate

Introducem noțiunea de sistem observabil (sau pereche (C, A) observabilă) cu semnificația că fiecare stare $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ este observabilă.

Teorema 6

Fie perechea (C, A).

1. *O stare x este observabilă dacă și numai dacă $x \in Im\,\overline{R}$.*
2. *Perechea (C, A) (sau sistemul corespunzător) este observabilă (observabil) dacă și numai dacă singura stare neobservabilă este $x = 0$, i.e.*
$$\mathcal{N} = \{0\} \Leftrightarrow \text{rang } Q = n.$$

Q: Există vreo legătură specială între noțiunile de controlabilitate și observabilitate?

A: DA (se observă deja din Teoremă). Cele două proprietăți sunt duale una alteia $\leftarrow$ proprietate specifică numai sistemelor liniare!

Principiul dualității

Principiul dualității este un principiu fundamental în teoria sistemelor dinamice, arătând în ce condiții anumite proprietăți structurale sunt echivalente.

Teorema 7 (Principiul dualității)

- (C, A) *este observabilă dacă și numai dacă* (A^T, C^T) *este controlabilă.*
- (A, B) *este controlabilă dacă și numai dacă* (B^T, A^T) *este observabilă.*

Pe baza principiului dualității se formulează rezultate fundamentale asemănător controlabilității.

Teorema 8 (Criteriul PBH)

Perechea (C, A), $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *este observabilă dacă și numai dacă*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Corolarul 3

(C, A) *este observabilă dacă criteriul PBH este satisfăcut* $\forall s \in \Lambda(A)$.

PBH - observabilitate

Observația 6

- Corolarul justifică introducerea de valoare proprie observabilă (neobservabilă), i.e., care satisface (nu satisface) criteriul PBH. O valoare proprie λ a lui A este observabilă (neobservabilă) dacă și numai dacă $\lambda \in \Lambda(A_1)$ ($\lambda \in \Lambda(A_2)$).
- Dacă două sisteme (A, B, C, D) și $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D})$ sunt echivalente pe stare cu transformarea T, atunci matricile de observabilitate corespunzătoare Q și $\widetilde{Q}$ satisfac $\widetilde{Q} = QT^{-1}$.

Descompunerea observabilă

Teorema 9 (Teorema de descompunere observabilă(TDO))

Un sistem descris de (A, B, C, D), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *este echivalent pe stare cu un sistem* $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$, *unde*

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix} \\ \underbrace{}_{n-\mu}\underbrace{}_{\mu} \end{array} \begin{array}{l} \}n-\mu \\ \}\mu \end{array},$$

$$\widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}n-\mu \\ \}\mu \end{array}, \qquad \widehat{C} = CT^{-1} = \Big[\, \underbrace{O}_{n-\mu} \;\; \underbrace{C_2}_{\mu} \,\Big],$$

în care perechea (C_2, A_2) *este observabilă. Mai mult, sistemele* (A, B, C, D), $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *și* (A_2, B_2, C_2, D) *sunt echivalente intrare–ieșire, i.e.,*

$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D \end{array}\right].$$

TDO - variantă

Teorema 10 (TDO – variantă)

Un sistem (A, B, C, D) *este echivalent pe stare cu un sistem* $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *unde*

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_3 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \}\mu \\ \}n-\mu \end{array} \\ \underbrace{}_{\mu}\ \underbrace{}_{n-\mu} & \end{array},$$

$$\widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\mu \\ \}n-\mu \end{array}, \qquad \widehat{C} = CT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} C_1 & O \end{bmatrix} \\ \underbrace{}_{\mu}\ \underbrace{}_{n-\mu} \end{array},$$

în care perechea (C_1, A_1) *este observabilă. Mai mult, sistemele* (A, B, C, D), $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *şi* (A_1, B_1, C_1, D) *sunt echivalente intrare–ieşire, i.e.,*

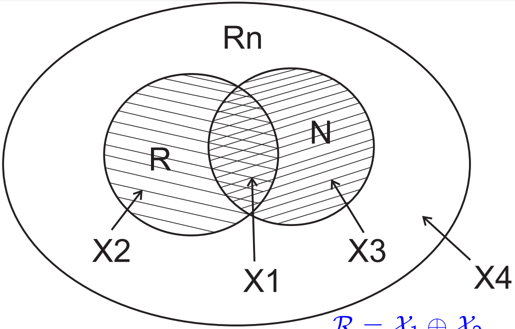
$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right].$$

1. Proprietăți structurale
   - Controlabilitatea
   - Observabilitatea
   - Descompunerea structurală

2. Realizabilitate
   - Problema existenței
   - Realizări minimale

3. Conexiunile sistemelor dinamice și operații

Teorema de descompunere structurală (TDS)



Fie un sistem (A, B, C, D). Fie $\mathcal{R}$ subspațiul controlabil al perechii (A, B) și $\mathcal{N}$ subspațiul neobservabil al perechii (C, A) și

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{R} \cap \mathcal{N}. \qquad (11)$$

Introducem subspațiile $\mathcal{X}_2$ și $\mathcal{X}_3$ ca fiind complemenții lui $\mathcal{X}_1$ in $\mathcal{R}$ și al lui $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{R} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2, \quad \mathcal{N} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3.$$

Fie deasemenea $\mathcal{X}_4$ complementul lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{N}$ în $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\mathbb{R}^n = (\mathcal{R} \cup \mathcal{N}) \oplus \mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \qquad (12)$$

Subspațiile $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ si $\mathcal{X}_4$ nu sunt unic definite. Deoarece

$$A\mathcal{R} \subset \mathcal{R}, \quad \operatorname{Im} B \subset \mathcal{R} \quad \text{și} \quad A\mathcal{N} \subset \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \subset \operatorname{Ker} C$$

rezultă că

$$A\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_1, \qquad \mathcal{X}_1 \subset \operatorname{Ker} C. \qquad (13)$$

TDS

Fie X_i matrici bază pentru subspațiile $\mathcal{X}_i$ (i=1...4), $\mathcal{X}_i =< X_i >$ și

$$T := \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{bmatrix}^{-1}. \tag{14}$$

Atunci sistemul echivalent pe stare față de transformarea (13) are forma

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ O & A_{22} & O & A_{24} \\ O & O & A_{33} & A_{34} \\ O & O & O & A_{44} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ O \\ O \end{bmatrix} \tag{15}$$
$$\widehat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} O & C_2 & O & C_4 \end{bmatrix},$$

structură ce rezultă din ecuațile (11)-(14). Din teorema de descompunere controlabilă rezultă că perechea

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) \tag{16}$$

este controlabilă, iar din teorema de descompunere observabilă rezultă că perechea

$$\left(\begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ O & A_{44} \end{bmatrix} \right) \tag{17}$$

este observabilă.

TDS

Aplicând criteriul PBH pentru perechea (16) rezultă

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ O & sI - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = \dim \mathcal{X}_1 + \dim \mathcal{X}_2, \qquad \forall s \in \mathbb{C},$$

de unde rezultă automat că

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} sI - A_2 & B_2 \end{bmatrix} = \dim \mathcal{X}_2, \qquad \forall s \in \mathbb{C},$$

deci perechea (A_{22}, B_2) este controlabilă. Aplicând criteriul PBH dual perechii (17) rezultă similar că perechea (C_2, A_{22}) este observabilă. În consecință, rezultă că (sub)sistemul (A_{22}, B_2, C_2, D) este controlabil și observabil (se mai numește partea controlabilă și observabilă a sistemului inițial) și încă

$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \hline \widehat{C} & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{22} & B_2 \\ \hline C_2 & D \end{array}\right].$$

Teorema 11 (Teorema de descompunere structurală)

Orice sistem arbitrar (A, B, C, D) *este echivalent pe stare cu un sistem* $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, D)$ *cu structura (15), (unde unele blocuri pot avea dimensiune nulă!) și echivalent intrare–ieșire cu sistemul controlabil și observabil* (A_{22}, B_2, C_2, D).

Realizabilitatea unei funcții de transfer

Recap: orice sistem dinamic descris de ecuații de tipul

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_o) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{18}$$

este automat invariant în timp, liniar, cauzal, finit dimensional. În particular, sistemul dinamic este un sistem de convoluție cu matricea de transfer

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Matricea de transfer descrie comportarea intrare–ieșire în condiții inițiale nule și este o matrice cu elementele funcții raționale (strict) proprii.

Problema naturală: Știind că matricea de transfer a unui sistem (MIMO) este rațională și proprie există o descriere dinamică a sistemului de tipul (18)? Mai precis, știind că $T(s)$ este o matrice rațională proprie de dimensiune $p \times m$ există întotdeauna patru matrici (A, B, C, D), unde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ a.î. sistemul dinamic corespunzător (18) să aibă matricea de transfer

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D?$$

Atunci când există, cvadruplul (A, B, C, D) formează **o realizare** a raționalei $T(s)$ (sau a sistemului având drept matrice de transfer pe $T(s)$).

Întrebări naturale

Dată o funcție de transfer $T(s)$

- există întotdeauna o realizare și dacă da, cum se poate obține? DA !
- este realizarea unică? NU!
- există o realizare de dimensiune minimă (maximă)? DA (NU)!
- cum se pot caracteriza realizările minimale? Controlabile + observabile!
- cum se pot obține realizările minimale? **TDS**!
- sunt realizările minimale unice? NU!
- ce relație există între două realizări minimale? Sunt echivalente pe stare!

Problema existenței

Fie $T(s)$ o $p \times m$ matrice raționala proprie,

$$T(s) = \left[\frac{r_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad \mathrm{grad}(p_{ij}) \geq \mathrm{grad}(r_{ij}), \quad \forall i, j,$$

în care rapoartele sunt considerate ireductibile. Deoarece raționala este proprie, $D := T(\infty) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (finit). Problema realizabilității raționalei proprii $T(s)$ se reduce atunci la problema realizabilității raționalei strict proprii $\widetilde{T}(s) = T(s) - D$, i.e., trebuie să găsim trei matrici (A, B, C) a.î.

$$\widetilde{T}(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Deoarece $\widetilde{T}(s)$ este strict proprie avem

$$\widetilde{T}(s) = \frac{K_0 + K_1 s + \ldots + K_{k-1}s^{k-1}}{\gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_{k-1}s^{k-1} + s^k}, \tag{19}$$

unde $\gamma(s) := \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_{k-1}s^{k-1} + s^k$ este cel mai mic multiplu comun (cmmmc) (monic) al numitorilor tuturor elementelor raționalei $\widetilde{T}(s)$ iar K_i, $i = 0, \ldots, k-1$, sunt $p \times m$ matrici constante.

Realizări canonice

O realizare a lui $\widetilde{T}(s)$ este dată de

$$A = \begin{bmatrix} O_m & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \\ -\gamma_0 I_m & -\gamma_1 I_m & \dots & -\gamma_{k-1} I_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O_m \\ \vdots \\ O_m \\ I_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{k-1} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Într-adevăr, cu

$$\Theta(s) := \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \\ \vdots \\ s^{k-1} I_m \end{bmatrix}$$

se verifică direct că

$$(sI - A)\Theta(s) = B\gamma(s) \frac{\Theta(s)}{\gamma(s)} = (sI - A)^{-1}B. \tag{21}$$

Cum

$$C\Theta(s) = K_0 + K_1 s + \ldots + K_{k-1}s^{k-1},$$

înmulțind (21) la stânga cu C și ținând cont de (19) obținem $\widetilde{T}(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Realizarea standard controlabilă/observabilă (RSC/O)

Realizarea (A, B, C, D) astfel obținută este controlabilă și de aceea se mai numește realizarea standard controlabilă a lui $T(s)$.
Controlabilitatea perechii (A, B) se poate testa imediat cu criteriul PBH. În general, realizarea obținută NU este însa NEAPĂRAT observabilă (poate fi!). O realizare standard observabilă este dată de

$$A = \begin{bmatrix} O_m & & & -\gamma_0 I_p \\ I_p & & & -\gamma_1 I_p \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_p & -\gamma_{k-1} I_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{k-1} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} O_p & O_p & \dots & I_p \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Această realizare NU este, NEAPĂRAT, controlabilă.

Observația 7

Pentru matrici de transfer raționale de dimensiuni arbitrare nu există, în general, posibilitatea de a scrie direct o realizare care să fie, simultan, controlabilă și observabilă.

REALIZĂRI MINIMALE

Definiția 3

O realizare (A, B, C, D) a raționalei proprii $T(s)$ se numește minimală dacă orice altă realizare are dimensiunea spațiului stărilor mai mare sau egală cu aceasta.

Teorema 12 (Caracterizarea unei realizări minimale)

O realizare este ***minimală*** *dacă și numai dacă este* ***controlabilă și observabilă****.*

Teorema 13

Oricare două realizări minimale ale unei matrici de transfer proprii $T(s)$ sunt echivalente pe stare.

Procedura de calcul al unei realizări minimale pentru o matrice rațională proprie

$$T(s) = \left[\frac{r_{ij}(s)}{p_{ij}(s)}\right]_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le m}}, \quad \mathrm{grad}(p_{ij}) \ge \mathrm{grad}(r_{ij}), \quad \forall i, j.$$

Pasul 0: Scriem $D := T(\infty)$ și aducem matricea rațională (strict proprie) $\widetilde{T}(s) := T(s) - D$ la forma

$$\widetilde{T}(s) = \frac{K_0 + K_1 s + \ldots + K_{k-1}s^{k-1}}{\gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_{k-1}s^{k-1} + s^k}, \tag{23}$$

unde $\gamma(s) := \gamma_0 + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_{k-1}s^{k-1} + s^k$ este cmmmc (monic) al numitorilor tuturor elementelor raționalei $\widetilde{T}(s)$ iar K_i, $i = 0, \ldots, k-1$, sunt $p \times m$ matrici constante.

Calculul unei realizări minimale

Pasul 1: Scriem RSC

$$A = \begin{bmatrix} O_m & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \\ -\gamma_0 I_m & -\gamma_1 I_m & \dots & -\gamma_{k-1} I_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O_m \\ \vdots \\ O_m \\ I_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{k-1} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

în care perechea (A, B) este *automat* controlabilă.

Pasul 2: Aplicăm TDO perechii (C, A),

$$\widehat{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ O & A_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-\mu \\ \}\mu \end{matrix} \\ \underbrace{\qquad}_{n-\mu}\underbrace{\qquad}_{\mu} \end{array},$$

$$\widehat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}n-\mu \\ \}\mu \end{matrix}, \qquad \widehat{C} = CT^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} O & C_2 \end{bmatrix}, \\ \underbrace{\qquad}_{n-\mu}\underbrace{\qquad}_{\mu} \end{array}$$

în care perechea (C_2, A_2) este observabilă.

Calculul unei realizări minimale (continuare)

Pasul 3: Cum (A, B) este controlabilă, perechile $(\widehat{A}, \widehat{B})$ și (A_2, B_2) sunt controlabile. Deci (A_2, B_2, C_2, D) (care este echivalent I/O cu (A, B, C, D)) este controlabil, observabil și deci **minimal**. Prin urmare, (A_2, B_2, C_2, D) este minimală și

$$T(s) = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D.$$

Observația 8

1. Din punct de vedere procedural, algoritmul de calcul al realizării minimale urmează exact pașii de mai sus cu observația că transformarea T de la pasul 2 se alege întotdeauna ortogonală $T^{-1} = T^T$.
2. Pentru obținerea unei realizări minimale se poate proceda dual, calculând la **Pasul 1** o realizare standard observabilă (22) și aplicând la **Pasul 2** o descompunere controlabilă (4)–(5).

Conexiunea paralel

Fie două sisteme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t), \\ y_1(t) &= C_1 x_1(t) + D_1 u_1(t), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t), \\ y_2(t) &= C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t), \end{aligned} \tag{26}$$

cu matricile de transfer

$$T_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right], \quad T_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right], \tag{27}$$

respectiv. Dacă cele două sisteme au același număr de intrări și de ieșiri ($m_1 = m_2$, $p_1 = p_2$), atunci definim conexiunea paralel a lui T_1 cu T_2 ca sistemul care are intrarea u obtinută punând $u_1 \equiv u_2 = u$ și ieșirea $y := y_1 + y_2$. Conexiunea paralel este întotdeauna bine definită, matricea de transfer este

$$T(s) := T_1(s) + T_2(s), \tag{28}$$

având o realizare dată de

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & O & B_1 \\ O & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array}\right]. \tag{29}$$

Conexiunea serie

Fie două sisteme (25) si (26), având matricile de transfer date în (27). Dacă numărul de iesịri ale sistemului T_1 este egal cu numărul de intrări ale sistemului T_2 atunci definim conexiunea serie a lui T_1 cu T_2 (în această ordine) ca fiind sistemul cu intrarea $u := u_1$ si ieșirea $y := y_2$, obținut punând $u_2 \equiv y_1$. Conexiunea serie este întotdeauna bine definită, matricea de transfer a sistemului rezultant este

$$T(s) := T_2(s)T_1(s), \tag{30}$$

(observați ordinea!) iar o realizare pentru sistemul rezultant este dată de

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & B_2C_1 & B_2D_1 \\ O & A_1 & B_1 \\ \hline C_2 & D_2C_1 & D_2D_1 \end{array}\right]. \tag{31}$$

Conexiunea în reacție inversă

Fie sistemele (25) și (26), cu matricile de transfer din (27). Dacă numărul de ieșiri ale sistemului T_1 este egal cu numărul de intrări ale sistemului T_2 și numărul de ieșiri ale sistemului T_2 este egal cu numărul de intrări ale sistemului T_1 ($p_1 = m_2$, $p_2 = m_1$) definim conexiunea în reacție inversă a lui T_1 cu T_2 (în această ordine) ca fiind sistemul cu intrarea u și ieșirea $y := y_1$, unde $u_1 \equiv u + y_2$ si $u_2 \equiv y_1$. Conexiunea în reacție inversă este bine definită dacă și numai dacă

$$\begin{bmatrix} I & D_1 \\ D_2 & I \end{bmatrix} \tag{32}$$

este nesingulară. Funcția de transfer și o realizare a sistemului rezultant sunt

$$T(s) := T_1(s)(I - T_2(s)T_1(s))^{-1}, \tag{33}$$

$$T(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 + B_1 D_2 \widehat{S}^{-1} C_1 & B_1 S^{-1} C_2 & B_1 S^{-1} \\ B_2 \widehat{S}^{-1} C_1 & A_2 + B_2 D_1 S^{-1} C_2 & B_2 D_1 S^{-1} \\ \hline \widehat{S}^{-1} C_1 & \widehat{S}^{-1} D_1 C_2 & D_1 S^{-1} \end{array}\right], \tag{34}$$

unde $\widehat{S} := I - D_1 D_2$ si $S := I - D_2 D_1$, care sunt ambele inversabile din ipoteza de nesingularitate a matricii (32).

Proprietățile structurale ale sistemelor. Minimalitate

Exercițiu: Ce se poate spune despre controlabilitatea/observabilitatea/minimalitatea sistemului echivalent paralel/serie/reacție inversă dacă știm că sistemele componente sunt controlabile/observabile/minimale?

Observația 9

Pentru conexiunile paralel/serie/reacție inversă nu este necesar ca spațiul stărilor sistemelor componente să fie de dimensiune egală.