# TRANSFORMATA Z

Transformata Z este analogul transformatei Laplace pentru funcții discrete (adică pentru șiruri de numere reale – funcții de forma $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, numite ***semnale în domeniul timp***).

- O funcție $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, s.n. **funcție original (sau semnal discret)** dacă are proprietățile:
  - $f(t)=0$ pentru $t<0$ (nu avem semnal);
  - există $M>0$ și $R>0$ astfel încât $|f(t)|\le M\cdot R^t$, pentru $t=0,1,2,\dots$ (cel mai mic $R$ cu această proprietate se notează cu $R_f$ și se numește raza de convergență a transformatei funcției $f$ ).

*<u>Notații echivalente ale semnalelor discrete</u>: notația ”clasică” a șirurilor: $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sau $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (variabila $t$ este înlocuită cu variabila $n$ );*

Cu semnale discrete (funcții original) se pot face operații de adunare, înmulțire cu scalari și produs de convoluție.

- **Transformata Z (sau funcția imagine, sau semnalul în domeniul frecvență)** a unei funcții original $f$ este, prin definiție, funcția cu valori complexe:

$$F(z)=Z[f(t)]=\sum_{t=0}^{\infty}f(t)z^{-t}$$

**<u>Observație</u>:** Seria $\sum_{t=0}^{\infty}f(t)z^{-t}$ este absolut convergentă pentru $|z|>R_f$ (în exteriorul discului de rază $R_f$ centrat în origine) și este uniform convergentă în orice regiune închisă cu $|z|\ge\tilde{R}>R_f$ .

**<u>Consecință</u>**: Funcția $F(z)=\sum_{t=0}^{\infty}f(t)z^{-t}$ este analitică pe domeniul $|z|>R_f$ . Singularitățile funcției $F(z)$ sunt în interiorul discului $|z|\le R_f$ (*există cel puțin un punct singular*, altfel funcția $F(z)$ ar fi o constantă – excepție fac transformatele funcțiilor de forma $a\cdot\delta(t)$, cu $a\in\mathbb{C}$ și $\delta(t)$ - echiv discret al fct. Dirac)

**Semnale discrete fundamentale și transformata lor Z:**

***a) Semnalul unitar (echiv. funcția treaptă unitate discretă (Heaviside)):***

$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$ Se mai notează $H(t)$ sau $H(n)$ (variabila $t$ este înlocuită cu variabila $n$ );

*Transformata Z este*: $F(z)=Z[u(t)]=\sum_{t=0}^{\infty}u(t)z^{-t}=\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{t}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}$, pentru $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, adică $|z|\geq 1$

***b) Funcția (șirul) semnal impuls la momentul k (echivalentul discret al funcției Dirac)***

Semnalul impuls la momentul $k=0$: $\delta_0(t)=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$

Semnalul impuls la momentul $k\neq 0$: $\delta_k(t)=\delta_0(t-k)=\begin{cases}1, & t=k\\ 0, & t\neq k\end{cases}$, unde $t,k\geq 0$ (naturale)

*Transformata Z este*: $F(z)=Z[\delta_k(t)]=\sum_{t=0}^{\infty}\delta_k(t)z^{-t}=\frac{1}{z^k}$, pentru $k\geq 0$ (natural)

***Observație:*** Pentru $k=0$ avem $Z[\delta_0(t)]=\sum_{t=0}^{\infty}\delta_0(t)z^{-t}=1$

***c) Funcția exponențială*** *$a^t$, cu $t\in\mathbb{N}^*$*

*Transformata Z este*: $F(z)=Z\left[a^t\right]=\sum_{t=0}^{\infty}a^t\cdot z^{-t}=\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{t}=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{z}{z-a}$, pentru $\left|\frac{a}{z}\right|<1$, adică $|z|\geq|a|$.

În particular, pentru $a=e^{\lambda}$, cu $\lambda\in\mathbb{C}$, avem: $Z\left[e^{\lambda t}\right]=\frac{z}{z-e^{\lambda}}$, pentru $|z|\geq e^{\operatorname{Re}\lambda}$.

***d) Funcții trigonometrice, cu*** *$t\in\mathbb{N}^*$*

*Exemplu:* $f(t)=\cos(at)$, *cu* $t\in\mathbb{N}^*$ *și* $a>0$

*Se folosește scrierea exponențială (complexă):* $f(t)=\cos(at)=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$ *și se obține:*

$$Z\left[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right]=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}\left(e^{iat}+e^{-iat}\right)z^{-t}=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}\left[\left(\frac{e^{ia}}{z}\right)^{t}+\left(\frac{e^{-ia}}{z}\right)^{t}\right]=(\ldots)=\frac{z(z-\cos a)}{z^2-2z\cos a+1},\ \text{pentru } |z|>1$$

Similar se obțin formule pentru $\sin(at)$, $\operatorname{sh}(at)$, $\operatorname{ch}(at)$.

**PROPRIETĂȚI:**

**1.** ***(liniaritatea)*** Dacă $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ și $f,g$ sunt două funcții original cu raze $R_f$ și respectiv $R_g$, atunci pentru $|z|>\max(R_f,R_g)$:

$$Z[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha Z[f(t)]+\beta Z[g(t)]$$

**2.** ***(asemănarea sau schimbarea de scală)*** Dacă $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ și $F(z)$ este transformata Z a funcției original $f(t)$ cu raza $R_f$, atunci pentru $|z| > |a| \cdot R_f$ :

$$Z\left[a^t \cdot f(t)\right] = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

**3.** ***(translație la dreapta – prima teoremă de întârziere)*** Dacă $F(z)$ este transformata Z a funcției original $f(t)$ cu raza $R_f$, atunci pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$Z\left[f(t-n)\right] = \frac{1}{z^n} F(z)$$

<u>***Observații***</u>*:* Ca și în cazul continuu (a se vedea Transformata Laplace), funcția $f(t-n) \cdot u(t-n)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ este $f(t)$ *translatată către dreapta cu "n" unități.*

Astfel, dacă $Z\left[f(t)\right] = F(z)$, atunci $Z\left[f(t-n) \cdot u(t-n)\right] = \frac{1}{z^n} F(z)$

În practică, se poate folosi (pentru ușurința calculelor): $Z\left[f(t) \cdot u(t-n)\right] = \frac{1}{z^n} Z\left[f(t+n)\right]$

**4.** ***(translație la stânga – a doua teoremă de întârziere)*** Dacă $F(z)$ este transformata Z a funcției original $f(t)$ cu raza $R_f$, atunci pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$Z\left[f(t+n)\right] = z^n \left( F(z) - \sum_{t=0}^{n-1} f(t) \cdot z^{-t} \right)$$

<u>*Exemple*</u> *– pentru $n=1$, $n=2$ și $n=3$:*

Primii termeni ai funcției original (șir) sunt cunoscuți și se notează în acest caz cu $f(0)$, $f(1)$ și $f(2)$:

Pentru $n=1$: $Z\left[f(t+1)\right] = z\left(F(z) - f(0)\right)$.

Pentru $n=2$: $Z\left[f(t+2)\right] = z^2 \left( F(z) - f(0) - \frac{1}{z} f(1) \right)$.

Pentru $n=3$: $Z\left[f(t+3)\right] = z^3 \left( F(z) - f(0) - \frac{1}{z} f(1) - \frac{1}{z^2} f(2) \right)$.

**5.** ***(derivarea imaginii)*** Dacă $F(z)$ este transformata Z a funcției original $f(t)$ cu raza $R_f$, atunci pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$Z\left[t \cdot f(t)\right] = -z \cdot F'(z)$$

**6.** ***(integrarea imaginii)*** Dacă $F(z)$ este transformata Z a funcției original $f(t)$ cu raza $R_f$ și $f(0)=0$ atunci:

$$Z\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_z^{\infty}\frac{F(u)}{u}du$$

**7.** ***(produsul de convoluție)*** Produsul de convoluție a două semnale discrete $f(t)$ și $g(t)$ cu raze $R_f$ și respectiv $R_g$ este semnalul discret definit prin:

$$f*g=h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \sum_{k=0}^{t}f(k)g(t-k), & t=0,1,2,...\end{cases}$$

Transformata Z aplicată produsului de convoluție, pentru $|z|>\max\left(R_f,R_g\right)$:

$$Z\left[\left(f*g\right)(t)\right]=F(z)\cdot G(z).$$

Transformata Z inversă echivalentă:

$$Z^{-1}(F(z)\cdot G(z))=f*g$$

***<u>Observație</u>:*** *Produsul de convoluție al unui semnal discret* $f(t)$ *cu semnalul impuls la momentul k are ca rezultat obținerea semnalului discret întâriat cu k momente:* $f(t)*\delta_k(t)=\sum_{x=0}^{t}f(t-x)\delta_k(x)=f(t-k)$

**8.** ***(funcția diferență)***

*Pentru funcțiile discrete, rolul derivatei este preluat de ”funcția diferență” (a se vedea ”ecuațiile cu diferențe finite”)*

- Pentru o funcție original $f(t)$ cu raza $R_f$ se definește <u>*funcția diferență de ordinul 1*</u> prin:

$$\Delta f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ f(t+1)-f(t), & t=0,1,2,...\end{cases}$$

Se poate defini funcția diferență de ordinul n prin recurență, adică $\Delta^n f(t)=\Delta\left(\Delta^{n-1}f(t)\right)$;

În exerciții sunt utile formulele:

$$\Delta^2 f(t)=f(t+2)-2f(t+1)+f(t)$$

$$\Delta^3 f(t)=f(t+3)-3f(t+2)+3f(t+1)-f(t)$$

.........................................................

$$\Delta^n f(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \cdot f(t+k)$$

Transformata Z a diferenței de ordinul 1 este : $Z\left[\Delta f(t)\right] = (z-1)F(z) - z\cdot f(0)$

Caz general (ordinul n): $Z\left[\Delta^n f(t)\right] = (z-1)^n F(z) - z\sum_{k=1}^{n-1}(z-1)^{n-k-1}\Delta^k f(0)$, unde $\Delta^0 f(t) = f(t)$.

**9.** ***(funcția sumă)***

*Funcția inversă diferenței și care joacă rolul integralei pentru funcțiile discrete este funcția sumă.*

- Pentru o funcție original $f(t)$ cu raza $R_f$ se definește <u>*funcția sumă*</u> prin:

$$S\,f(t) = \begin{cases} 0 \quad, & t \le 0 \\ \sum_{k=0}^{t-1} f(k), & t = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Fie $F(z)$ transformata Z a funcției original $f(t)$ cu raza $R_f$. Atunci transformata Z a *funcției sumă*, pentru $|z| > \max(R_f, 1)$, este :

$$Z\left[S\,f(t)\right] = \frac{F(z)}{z-1}$$

**10.** ***(inversarea transformatei Z)*** Dacă $F(z)$ este o funcție analitică pe domeniul $|z| > R$ și $\lim_{z\to\infty} F(z) = ct$, atunci funcția ei original există, este unică și este dată prin:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\substack{|z|=r \\ r>R}} F(z)\cdot z^{t-1}dz, & t = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Deoarece $F(z)$ este o funcție analitică pe domeniul $|z| > R$, punctele singulare ale funcției $F(z)$ (notate $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ) aparțin discului $|z| \le R$ (și în acest caz, $R = \max(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|)$)

Conform teoremei reziduurilor, $\oint\limits_{|z|=r} F(z)\cdot z^{t-1}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Rez}\left(F(z)\cdot z^{t-1}, z_k\right)$, deci funcția original se obține prin: $\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Rez}\left(F(z)\cdot z^{t-1}, z_k\right)}$, pentru $t = 0,1,2,\ldots$

**Tabel transformate Z uzuale**

| Funcția original $f(t)$ | Transformata Z $F(z)$ | Domeniul de convergență (pentru transformata Z) |
|---|---|---|
| $\delta_0(t)=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$ | $1$ | $z\in\mathbb{C}$ |
| $\delta_k(t)=\delta_0(t-k)=\begin{cases}1, & t=k\\ 0, & t\neq k\end{cases}$ | $\dfrac{1}{z^k}$ | $z\neq 0$ |
| $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$ (șirul $\{u_t\}=\{1,1,1\ldots\}$) | $\dfrac{z}{z-1}$ | $\|z\|>1$ |
| $t$ (șirul $\{0,1,2,\ldots\}$) | $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ | $\|z\|>1$ |
| $t^2$ (șirul $\{0,1,4,\ldots\}$) | $\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ | $\|z\|>1$ |
| $t^3$ (șirul $\{0,1,8,\ldots\}$) | $\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$ | $\|z\|>1$ |
| $a^t$ (șirul $\{1,a,a^2,\ldots\}$) | $\dfrac{z}{z-a}$ | $\|z\|>a$ |
| $t\cdot a^t$ (șirul $\{0,a,2a^2,\ldots\}$) | $\dfrac{az}{(z-a)^2}$ | $\|z\|>a$ |
| $t\cdot a^{t-1}$ (șirul $\{0,1,2a,3a^2,\ldots\}$) | $\dfrac{z}{(z-a)^2}$ | $\|z\|>a$ |
| $e^{iat}$ (șirul $\{1,e^{ia},e^{i2a},\ldots\}$) | $\dfrac{z}{z-e^{ia}}$ | $\|z\|>1$ |
| $\sin(at)$ (șirul $\{\sin a,\sin 2a,\sin 3a\ldots\}$) | $\dfrac{z\cdot\sin a}{z^2-2z\cdot\cos a+1}$ | $\|z\|>1$ |
| $\cos(at)$ (șirul $\{1,\cos a,\cos 2a,\ldots\}$) | $\dfrac{z\cdot(z-\cos a)}{z^2-2z\cdot\cos a+1}$ | $\|z\|>1$ |
| $\dfrac{1}{t!}$ (șirul $\left\{1,\dfrac{1}{1!},\dfrac{1}{2!},\dfrac{1}{3!},\ldots\right\}$) | $e^{\frac{1}{z}}$ | $z\neq 0$ |