Răspunsul sistemelor de convoluție în timp

Tudor C. Ionescu

Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: `tudor.ionescu@upb.ro`

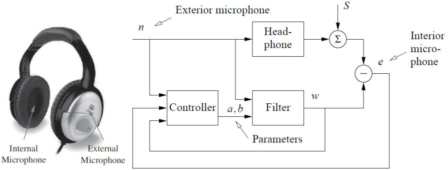
URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

28 octombrie 2020

Filatrarea zgomotului în căști

– Filtrarea zgomotului: anularea efectelor zgomotelor și ale vibrațiilor = generarea de semnale opuse cu un filtru, care să contracareze zgomotele.

– Căștile au 2 microfoane: *exterior* care preia zgomotul $n(t)$; *interior* care preia semnalul $e(t) = z(t) - n(t)$, $z(t)$ semnalul dorit.



– Modelul propagării zgomotului: $\dot{z} = -a_0 z + b_0 n$, a_0, b_0 necunoscuți!!

– Filtrul: $\dot{w} = -aw + bn$; trebuie proiectat ca să se adapteze propagării zgomotului ← doar cu reacție negativă care să stabilizeze modelarea!

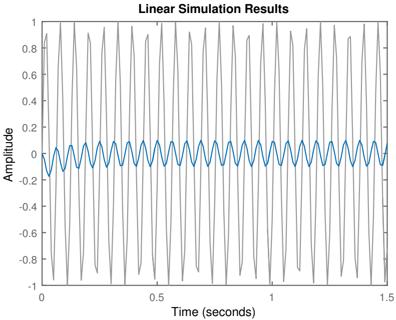
– Funcția de transfer a propagării + filtru: $\dfrac{E(s)}{N(s)} = \dfrac{b_0}{s + a_0} - \dfrac{b}{s + a}$, unde $E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}(s)$, $N(s) = \mathcal{L}\{n(t)\}(s)$.

Zgomotul în căști: „sunetul" filtrat cu parametri oarecare

Răspunsul în timp la $n(t) = \sin(\omega t)$, ω „mare".

Q: Cum proiectăm filtrul ca să filtreze cât mai bine zgomotul?

Răspuns:
Sintetizând un regulator („controller") care prin reacție negativă să determine automat parametrii filtrului de zgomot a.î. $e(t) = 0$ (rapid).



Dar, mai întâi, să analizăm răspunsul sistemului la informațiile/stimulii/datele din extern (semnale exogene):

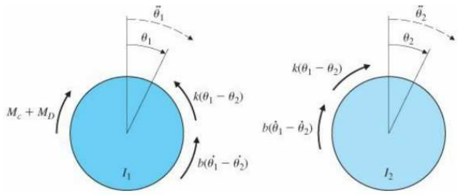
- în domeniul timp: la intrare treaptă/impuls/armonică cu pulsație fixată;
- în domeniul frecvență: la *toate* armonicele de pulsații reale←ce filtrează?

HDD–model

HDD–schemă, ecuații fizice

$$
\begin{aligned}
I_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) &= M_c + M_D, \\
I_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) &= 0,
\end{aligned}
$$

unde i_1, I_2 sunt momentele de inerție, b coeficientul de frecare, k coeficientul de elasticitate.



Alegem

- ieșirea $=$ mărimea măsurată, de interes θ_2, i.e., poziția acului pe disc;
- intrarea $= M_c$;
- perturbația $= M_D$.

Ne interesează evoluția forțată de M_C a poziției acului de scriere θ_2.

Q: Cum calculăm funcția de transfer?

A: Aplicând $\mathcal{L}$.

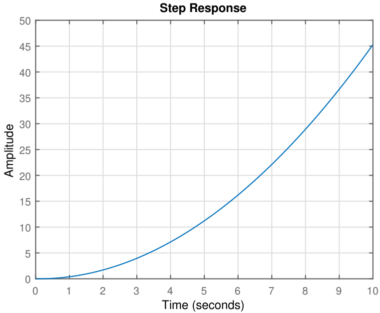
HDD–funcții de transfer

Aplicând $\mathcal{L}$ modelului fizic complet $\Rightarrow$ funcția de transfer

$$G(s) = \frac{bs+k}{s^2 I_1 I_2 \left[s^2 + b\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}\right)s + k\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}\right)\right]}.$$

Caracteristici:

- ordinul 4 - mare;
- are 4 poli,
  dintre care doi în origine. Ce înseamnă asta?
- e stabil?
- cum arată răspunsul în timp, la o treaptă?



Un model
mai simplu, echivalent cu aceleași caracteristici,
i.e., răspunsul la treaptă e ca în figură:

$$G(s) = \frac{K_m/b \cdot R}{s(\tau_L s+1)(\tau s+1)},$$

cu $\tau_L = J/b = 50ms$, $\tau = L/R = 1ms$ mult mai mic decât τ_L, deci neglijabil. Prin urmare, scrierea HDD poate fi modelată

$$G(s) = \frac{0.25}{s(0.05s+1)} = \frac{5}{s(s+20)}.$$

Filtru discret–Filtrul de medie alunecătoare: calculul cursului valutar

$$y[n] = \frac{1}{3}(u[n+1] + u[n] + u[n-1]).$$

Analiză:

- sistem de convoluție cu $h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1])$;
- funcția de transfer $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}(z) = \frac{1}{3}(z + 1 + z^{-1}) = \dfrac{z^2 + z + 1}{3z}$.

Q's:

- E stabil? Da, se observă ușor, dar se determină pe $H(z)$.
- Cum răspunde la diverse semnale de intrare? Se poate calcula din convoluție, dar se calculează din $Y(z) = H(z)U(z)$.
- Cum filtrează? Se calculează numai investigând $H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\}(e^{j\omega})$.

În continuare, răspundem pe îndelete la aceste întrebări în cazul continuu și apoi, în cazul discret.

Preambul: Funcții raționale

O funcție rațională

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

se numește:

- (strict) proprie, dacă $(m < n)$ $m \leq n$;
- biproprie, dacă $m = n$;
- improprie, dacă $m > n$.

Presupunem că $H(s)$ este o rațională *ireductibilă*. Atunci

- Zerourile finite ale lui $H(s)$ = rădăcinile numărătorului $B(s)$.
- Polii finiți ai lui $H(s)$ = rădăcinile numitorului $A(s)$.
- Zerourile/polii la infinit ai lui $H(s)$ = zerourile/polii în 0 ai lui $H(1/s)$.

Observația 1

Considerăm că o astfel de rațională are un numar egal de poli și zerouri (numărând multiplicitățile și zerourile/polii de la infinit).

Funcții raționale

Exemplu: Raționala $H(s) = \dfrac{2s-1}{s^3+1}$

- este strict proprie $\Leftrightarrow$ gradul numitorului $= 3 >$ gradul numărătorului $= 1$.
- are 3 poli finiți (gradul numitorului este 3), un zerou finit (gradul numărătorului este 1) și două zerouri infinite $\Leftrightarrow H\left(\dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{(2-s)s^2}{1+s^3}$ are două zerouri în 0.

Atenție: O rațională strict proprie are n poli finiți, m zerouri finite și $n-m$ zerouri la infinit!

Raționalele *biproprii* au toți polii și toate zerourile *finite*, în timp ce raționalele improprii au n poli finiți, $m-n$ poli la infinit și m zerouri finite.

Considerăm în cele ce urmează **sisteme de convoluție cauzale care admit funcții de transfer raționale, proprii, având coeficienți reali**.

Sisteme SISO (**S**ingle **I**nput/**S**ingle **O**utput), i.e., sisteme cu o intrare și o ieșire.

Capitolul 3: **ANALIZA** în timp a sistemelor SISO, cu timp continuu și discret.

Recuperarea semnalului $y(\cdot)$ din $Y(\cdot)$

Continuu: SISTEM $\equiv H(s)$ - rațională proprie cu coeficienți reali $\Rightarrow Y(s) = H(s)U(s) \leftarrow$ răspunsul în domeniul s. Cât este $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}(t) = (h * u)(t)$?

Discret: SISTEM (FILTRU) $\equiv H(z)$ $(H(z^{-1}))$ - rațională proprie cu coeficienți reali $\Rightarrow Y(z) = H(z)U(z)$. Cât este $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)U(z)\}(t) = (h * u)(n)$?

Se dau h și u - $H(s)$ și $U(s)$. Se cere $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t)$, unde $Y(s)$ este o funcție *rațională* strict proprie cu coeficienți reali. Cum recuperăm originalul $y(t)$?

Problemă. Se dă o rațională *strict* proprie cu coeficienți reali

$$Y(s) = \frac{\beta_m s^m + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{r(s)}{p(s)}.$$

Se cere

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)\, e^{st}\, \mathrm{d}s, \;\; t \geq 0.$$

Q: Cazul discret?

A: Similar... schimbând un pic terminologia.

Calculul $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$, o procedură

Pasul 0. Calculăm polii sistemului.

Analiză: Dacă polii sunt în semiplanul complex stâng $\mathbb{C}^-$, atunci sistemul este stabil (vezi secțiunea STABILITATE) $\Rightarrow y(t) = y_p(t) + y_t(t)$, unde $\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0$. Dacă polii sunt a.î. sistemul este instabil, atunci $y(t)$ nu este mărginit la $u(t)$ mărginit.

Pasul 1. Despărțim în fracții simple, în factori de tipul $\dfrac{A}{(s+p)^k}$, $p \in \mathbb{R}$ pol de multiplicitate m, $k = 1 : m$ și în factori de tipul $\dfrac{Bs+C}{(s^2+\alpha s+\beta)^l}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\alpha^2 - 4\beta < 0$. Aceștia din urmă sunt poli complex conjugați de multiplicitate q, $l = 1 : q$. Alternativ, factorii $\dfrac{Bs+C}{(s^2+\alpha s+\beta)^l}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\alpha^2 - 4\beta < 0$ se pot decompune în continuare în $\dfrac{E}{s-\sigma+\omega j} + \dfrac{F}{s-\sigma-\omega j}$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$.

Calculul $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$, o procedură – continuare

Pasul 2. Calculul coeficienților.

Metoda I. Aducem la același numitor. Din egalitatea de polinoame rezultă un sistem algebric liniar, determinat, cu soluție unică în necunoscutele $A, B, \ldots$.

Metoda a II-a. Aplicarea formulei reziduurilor pentru un pol de multiplicitate m.

Metoda a III-a. Folosind proprietățile sistemului și ale transformatei Laplace, e.g., zerouri ale funției de transfer la infinit și TVI/TVF, după caz.

Metoda a IV-a. Combinarea celor trei metode de mai sus.

Pasul 3. Recuperarea semnalelor original corespunzătoare factorilor elementari de la Pasul 1 (cu tabelul) și aplicarea Principiului superpoziției.

Observația 2

Deoarece funția de transfer are coeficinții reali și deoarece semnalele cu care excităm sistemul la intrare sunt semnale de timp reale, $y(t)$ este tot un semnal real.

Analiză calitativă – legat de stabilitate (we'll see!)

Fiecare pol al lui $Y(s)$ contribuie cu unul sau mai mulți termeni la $y(t)$. Astfel

- un pol în $s = a$ $\Rightarrow$ termen de tipul e^{at}.
  Dacă $a > 0$, $e^{at} \overset{t\to\infty}{\rightarrow} \infty$ iar dacă $a < 0$, $e^{at} \overset{t\to\infty}{\rightarrow} 0$;
- o pereche de poli complex conjugați în $s = \sigma \pm j\omega$ $\Rightarrow$ termen de tipul $e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$. Oscilație cu amplitudine crescătoare ($\sigma > 0$), cu amplitudine constantă ($\sigma = 0$) sau amortizată ($\sigma < 0$);
- un pol de ordin m în origine $s^m = 0$ $\Rightarrow$ termen de tipul t^{m-1};
- un pol de ordin m în $s = a$ $\Rightarrow$ termen de tipul $t^{m-1}e^{at}$.
  Dacă $a > 0$, $t^{m-1}e^{at} \overset{t\to\infty}{\rightarrow} \infty$ iar dacă $a < 0$, $t^{m-1}e^{at} \overset{t\to\infty}{\rightarrow} 0$;
- o pereche de poli complex conjugați de ordin m în $s = \sigma \pm j\omega$ $\Rightarrow$ termen de tipul $e^{\sigma t}t^{m-1}e^{j\omega t}$. Oscilație cu amplitudine crescătoare ($\sigma \geq 0$) sau amortizată ($\sigma < 0$).

Strict propriu v. propriu

Ce se întâmplă când $Y(s)$ **nu** este *strict* proprie ?

Trebuie extrasă mai întâi partea polinomială, prin împărțirea lui $r(s)$ la $p(s)$: $r = pq + \tilde{r}$.

Avem

$$Y(s) = q(s) + \tilde{Y}(s) = q(s) + \frac{\tilde{r}(s)}{p(s)}, \quad \text{cu } \tilde{Y}(s) \text{ strict proprie.}$$

Deoarece $Y(s)$ este (în situațiile care ne interesează) o rațională *proprie*, rezultă

$$q(s) = \beta_m/\alpha_n = Y(\infty) = \text{const.}$$

În concluzie, în cazul $m = n$, avem

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) = Y(\infty)\delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{Y}(s)\}(t).$$

Exemplu de calcul: H proprie

Să se calculeze funcția pondere a sistemului cu funcția de transfer

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 3}{2s^2 + 6s + 4}.$$

Trebuie să determinăm $\mathcal{L}^{-1}(H(s))$. Se observă că

$$H(s) = 0.5 + \frac{1}{2s^2 + 6s + 4} = 0.5 + \frac{0.5}{s+1} - \frac{0.5}{s+2},$$

de unde

$$h(t) = 0.5\delta(t) + 0.5\,\mathrm{e}^{-t} - 0.5\,\mathrm{e}^{-2t}.$$

Exemple de răspuns: HDD și unul cu o pereche de poli complecși, conjugați

1. $$G(s) = \frac{5}{s(s+20)},\ u(t) = \mathbf{1}(t);$$

2. $$H(s) = \frac{2s+3}{s^2+2s+3},\ u(t) = t\mathbf{1}(t)...$$

... și Setul al treilea de Probleme!

Funcție de transfer (recap)

Ca în cazul continuu (i.e., ecuații diferențiale), o ecuație cu diferențe definește un sistem discret în accepțiunea I/O. Acesta este reprezentat prin funcția de transfer asociată. Considerăm ecuația generală

$$a_n\, y(k) + \ldots + a_0\, y(k-n) = b_n\, u(k) + \ldots + b_0\, u(k-n), \;\; a_n \neq 0, \qquad (1)$$

și aplicăm transformarea $\mathcal{Z}$ ambilor membri $\Rightarrow$

$$a_n\, Y(z) + a_{n-1} z^{-1}\, Y(z) + \ldots + a_0 z^{-n}\, Y(z) = b_n\, U(z) + b_{n-1} z^{-1}\, U(z) + \ldots + b_0 z^{-n}\, U(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = H(z)U(z),$$

unde

$$H(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

este funcția de transfer a sistemului definit de ecuația (1).

Q: Cum calculăm răspunsul în timp al sistemelor discrete care admit funcție de transfer rațională?

Calculul răspunsului $y(k)$ - recuperarea funcției original

Problema. Fie $Y(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ o funcție **rațională** în z, având coeficienți reali.
Cum calculăm transformata $\mathcal{Z}$ inversă $y(k)$ a lui $Y(z)$?
I. Dezvoltare în serii de puteri: împărțind polinomul $b(z)$ la polinomul $a(z)$

$$b(z)/a(z) = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \ldots = \sum_{k=0} y(k)z^{-k} \Rightarrow y(k)!$$

II. Calculul direct al lui $x(k)$, utilizând Teorema Reziduurilor: Fie Γ un contur închis în jurul originii, situat în D și care conține toți polii *finiți* $\{p_1, p_2, \ldots, p_L\}$ ai lui $F(z) = z^{k-1}\, Y(z)$. Atunci

$$y(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} Y(z) \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{L} \mathrm{Rez}\left[F(z); p_i\right].$$

Deoarece $F(z)$ este funcție rațională în z, avem

$$\mathrm{Rez}\left[F(z); p\right] = \frac{1}{(\mu-1)!} \left[(z-p)^{\mu} F(z)\right]^{(\mu-1)} \Big|_{z=p},$$

unde μ este multiplicitatea polului p. În cazul în care $F(z)$ are toți polii simpli, se obține $y(k) = \sum_{i=1}^{L} (z-p_i)\, F(z)\big|_{z=p_i}$.

Calculul răspunsului $y(n)$ ($y(k)$). Exemple

III. Descompunere în fracții simple: Pentru claritate: poli reali, simpli. Cazul polilor multipli/complex conjugați este similar cu cazul continuu. Astfel,

$$\frac{1}{z}Y(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{z-a_i} \Leftrightarrow Y(z) = \sum_{i=1}^{N} A_i \frac{z}{z-a_i} \overset{\mathcal{Z}^{-1}}{\Leftrightarrow} y(k) = \sum_{i=1}^{N} A_i a_i^k \mathbf{1}(k).$$

Exemplul 1. Calculați răspunsul sistemului $H(z) = 1/(z-2)$ la intrare $\mathbf{1}(n)$.

Soluție: Scriem $Y(z) = H(z)U(z) = \dfrac{1}{z-2} \cdot \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{z}{z^2-3z+2}$.

I. $z/(z^2-3z+2) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \ldots =$
$(2-1)z^{-1} + (2^2-1)z^{-2} + (2^3-1)z^{-3} + (2^4-1)z^{-4} + \ldots \Rightarrow y(n) = (2^n-1)\mathbf{1}(n)$.

II. $Y(z)$ are doi poli simpli, $p_1 = 1$ și $p_2 = 2$. Deducem că $y(n) =$

$$(z-1)\, z^{n-1} Y(z)|_{z=1} + (z-2)\, z^{n-1} Y(z)|_{z=2} = \left.\frac{z^n}{z-2}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^n}{z-1}\right|_{z=2} = (-1+2^n)\,\mathbf{1}(n).$$

III. Avem $\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$ de unde rezultă că $Y(z) = \dfrac{z}{z-2} - \dfrac{z}{z-1}$.
Așadar $y(n) = 2^n\mathbf{1}(n) - \mathbf{1}(n)$.

Răspunsul la treaptă al filtrului de medie alunecătoare

Exemplul 2. $H(z) = \dfrac{z^2 + z + 2}{3z}$, $u(k) = \mathbf{1}(k)$.

Soluție:

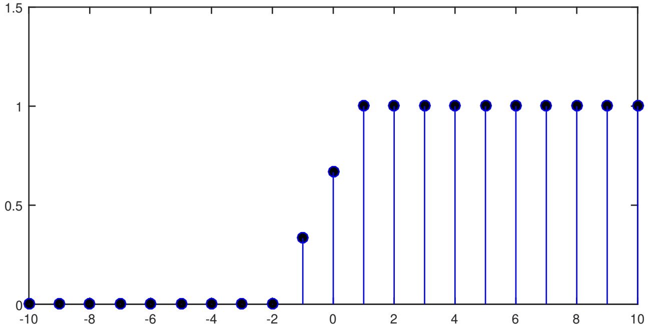


Figura 1: Răspunsul filtrului de medie alunecătoare la o intrare $\mathbf{1}(k)$

Ideea fundamentală: stabilitatea înainte de orice!

Ideea: un sistem este *stabil* dacă răspunde *în mod adecvat* unui stimul extern.

STABILITATE: cerință **fundamentală** în proiectarea SRA!!!

- SRA: ieșirea y „reproduce” referința r; forma de variație a lui $y \approx$ forma de variație a lui r.
- Trebuie menținut controlul variației mărimilor de ieșire; în plus, mărimile fizice care intervin nu pot fi *oricât* de mari, pentru că s-ar putea distruge instalația.
- Cerințele de proiectare impun realizarea unui regim staționar (permanent). Acest regim este realizat de către sistemele stabile.

Stabilitate $\Longleftrightarrow$ regim staționar.

Stabilitatea sistemelor cu funcții de transfer raționale

Q: Dacă $y = h * u$ este un sistem de convoluție, cum caracterizăm stabilitatea (în sens strict sau nestrict) în termenii *funcției de transfer* asociate?

Fie $H(s)$ o rațională proprie, ireductibilă, cu coeficienți reali, cu polii p_i, $i = 1 : k$.

Q': În ce condiții $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i(t)\, e^{p_i t} + H(\infty)\delta(t)$ este absolut integrabilă sau mărginită pe $\mathbb{R}$?

Teorema 1 (Stabilitatea sistemelor cu $H(s)$ rațională (strict) proprie)

Fie Σ un sistem având funcția de transfer $H(s)$ ireductibilă. *Atunci*

i) *sistemul Σ este stabil BIBO în sens* **strict** *dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer $H(s)$ au partea reală strict negativă, adică*

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad \forall\, i = 1, k.$$

ii) *sistemul Σ este stabil BIBO în sens* **nestrict** *dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer $H(s)$ au partea reală negativă, adică*

$$\operatorname{Re} p_i \leq 0, \quad \forall\, i = 1, k$$

iar acei poli cu $\operatorname{Re} p_i = 0$ sunt poli simpli.

Exemple

1. Fie $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+s+1}$. Polii: $p_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re} p_{1,2} < 0 \Leftrightarrow$ sistemul este stabil (în sens strict).

2. Fie $H(s) = \dfrac{2s-1}{(s^2+1)(s+1)}$. Polii: $p_{1,2} = \pm j$ și $p_3 = -1 \Rightarrow \operatorname{Re} p_i \leq 0$, și $-j$, j sunt poli simpli $\Leftrightarrow$ sistemul este stabil (în sens nestrict).

Terminologie: prin stabil **înțelegem** stabil în sens strict!

Q: Cum testăm stabilitatea unui sistem oarecare? În exemplele de mai sus am *calculat* ușor polii sistemului, dar în cazul general acest lucru nu mai este posibil!

A: Condiții asupra coeficienților $\text{den}[H(s)] = p(s)$.

Criteriul de stabilitate Hurwitz

Problemă. Fie $p(s)$ un polinom cu coeficienți reali, în ce condiții are (coeficienții) polinomul *toate* rădăcinile în $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < 0\}$?

Teorema 2 (Criteriul Hurwitz)

Fie polinomul $p(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$, *cu* $a_n > 0$. *Atunci* $p(s)$ *are toate rădăcinile în* $\mathbb{C}^-$ *dacă și numai dacă toți minorii principali ai matricii Hurwitz (2) sunt strict pozitivi, adică*

$$\mathbf{H}^{[i]} > 0 \ \ \forall i = 1:n, \quad \textit{unde} \ \ \mathbf{H} := \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & \ldots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{2}$$

Observații. Exemplu: polinom de gradul 3

Observația 3

1. Un polinom cu *toate* rădăcinile în $\mathbb{C}^-$ se numește Hurwitzian (polinom Hurwitz).
2. Ipoteza $a_n > 0$ nu restrânge generalitatea. Dacă $a_n < 0$ se utilizează criteriul pentru $-p(s)$ (cu aceleași rădăcini ca și p).
3. Dacă există un coeficient nul $a_k = 0$ sau 2 coeficienți de semne contrare, $a_i a_j < 0$, atunci $p(s)$ NU este Hurwitzian.
4. Criteriul Hurwitz este calitativ. Nu furnizează nici o informație cu privire la plasarea polilor în $\mathbb{C}$.

Exemplul 1. Fie $p(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$, $a_3 > 0$. Avem $n = 3$ și

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

(1) $\mathbf{H}^{[1]} = a_2 > 0$.
(2) $\mathbf{H}^{[2]} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$. Cu (1) și (3) rezultă $a_1 > 0$.
(3) $\mathbf{H}^{[3]} = a_0(a_1 a_2 - a_3 a_0) > 0$. Cu (2) rezultă $a_0 > 0$.

Stabilitatea sistemelor discrete cu fcț. de transfer raționale

Recall: Stabilitate: $\forall\ |u(k)|$ mărginită $\Longrightarrow |y(k)|$ mărginită.

Condiții necesare și suficiente de stabilitate BIBO (strictă) pt. sistemul

$$y = h * u: \ \|h\|_1 < \infty \Leftrightarrow \sum_k |h(k)| < \infty.$$

Sistem stabil BIBO în sens *nestrict*: $\|h\|_\infty < \infty \Leftrightarrow \sup_k |h(k)| < \infty.$

Fie un sistem discret de convoluție $y = h * u$ cu funcția de transfer *rațională*: transformata $\mathcal{Z}$ a funcției pondere h, $H(z) = \mathcal{Z}\{h(k)\}(z) = b(z)/a(z)$, ireductibilă și fie p_i, $i = 1, 2, \ldots n$, polii lui $H(z)$.

Teorema 3 (Stabilitatea sistemelor discrete cu $H(z)$ rațională)

i) *Un sistem discret este stabil BIBO (în sens **strict**) dacă toți polii sistemului sunt de modul strict subunitar*

$$|p_i| < 1, \text{ adică toți polii se găsesc în } \textbf{discul unitate}.$$

ii) *Un sistem discret este stabil BIBO (in sens nestrict) dacă toți polii sistemului sunt de modul subunitar, iar cei de modul 1 sunt simpli.*

Testarea stabilității discrete. Există criteriu Hurwitz?

Q: Cum testăm stabilitatea? Trebuie să decidem dacă polii, adică rădăcinile polinomului $p(z) = \mathrm{den}[H(z)]$ se găsesc în discul unitate.

A: DA. Dar putem folosi indirect chiar Criteriul Hurwitz studiat în cazul continuu.

Q: Cum aplicăm indirect criteriul Hurwitz?

Soluție: Aplicăm transformarea omografică

$$z = \frac{1+s}{1-s} = f(s),$$

care duce *semiplanul stâng* ($\mathbb{C}^- : \mathrm{Re}\, s < 0$) în *discul unitate* ($|z| < 1$) al planului complex. Inversa lui f este dată de $s = \dfrac{z-1}{z+1}$.
Aplicăm criteriul Hurwitz polinomului

$$q(s) = (1-s)^n\, p\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = a_n(1+s)^n + a_{n-1}(1+s)^{n-1}(1-s) + \ldots + a_0(1-s)^n.$$

Exemple

1. Filtrul de medie alunecătoare:

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z}.$$

   Se observă ușor că are un pol în origine $p = 0$.

2. $H(z) = \dfrac{z - 1}{z^3 - 3z^2 + 2z}$.

Regimul de funcționare al unui SRA

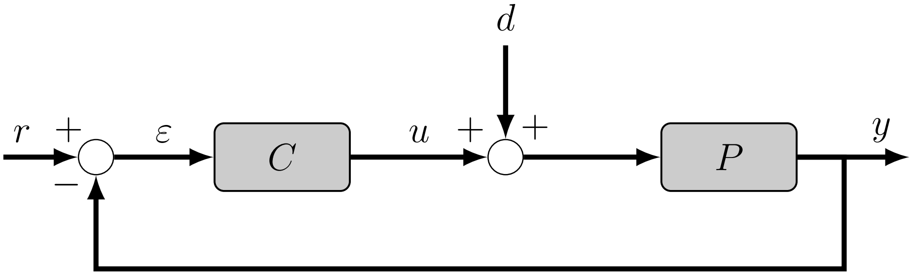


Figura 2: Sistem de reglare automată (SRA)

Obiectivul reglării: impunerea unor *variabile alese* (y) ale unui sistem să urmeze evoluții impuse (r), în prezența perturbațiilor (d). Altfel spus, ieșirea y trebuie să urmărească referința r. Trebuie „controlate" variațiile mărimii de ieșire (y).
Forma de variație a lui y permite aprecierea regimului de funcționare a SRA, direct influențată de

a) cauze externe (semnale exogene: referințe, perturbații)

b) cauze interne (transformarea unor energii acumulate în sistem – ține de elementele constructive ale acestuia).

Sistemul de focalizare al telescopului Hubble

Telescopul Hubble - lansat în 1990, la o altitudine de aprox. 600 de km. Oglindă de 2.4 m diametru, având o suprafață foarte netedă.

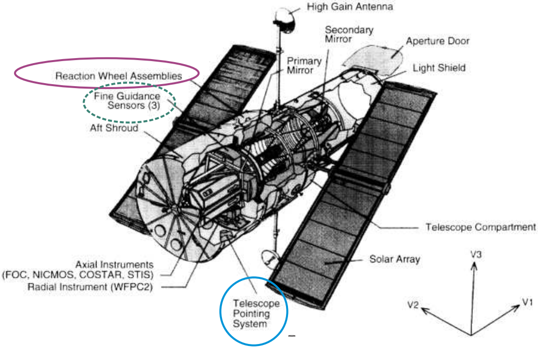


Figura 3: Telescopul Hubble

Este necesar să își îndrepte poziția în funcție de obiectiv, cu o precizie extraordinară - sutimi de secundă de arc (1 arcsec = 1/3600 dintr-un grad).

Model matematic (simplificat) al PCS

Figura 2, cu procesul „P”: $G(s) = \dfrac{1}{s(s+K_1)}$. Obiectivele reglării $\Longleftrightarrow$ calculăm regulatorul/compensatorul $C = K = \mathrm{const.}$ a.î.

a) Suprareglaj mai mic de 10%, la referință treaptă: $r(t) = A\,\mathbf{1}(t)$, $A > 0$.

b) Eroare staționară minimă la referințe de tip rampă: $r(t) = B\,t\,\mathbf{1}(t)$, $B > 0$.

c) Rejecția perturbațiilor de tip treaptă: $d(t) = C\,\mathbf{1}(t)$, $C > 0$.

Q: Cum se pot realiza aceste obiective?

Scriem funcțiile de transfer din buclă

$$Y(s) = \underbrace{\frac{K\,G(s)}{1+K\,G(s)}}_{T_{yr}(s)} R(s) + \underbrace{\frac{G(s)}{1+K\,G(s)}}_{T_{yd}(s)} D(s) \;\&\; E(s) = \underbrace{\frac{1}{1+K\,G(s)}}_{T_{\varepsilon r}(s)} R(s) - \underbrace{\frac{G(s)}{1+K\,G(s)}}_{T_{\varepsilon d}(s)} D(s). \tag{3}$$

Fiecare din obiectivele a), b) și c) impune condiții asupra funcțiilor de transfer $T_{yr}(s)$, $T_{\varepsilon r}(s)$ și respectiv $T_{yd}(s)$, care depind de K!

Studiem $Y(s)$ și $E(s)$, a.î. $y(t)$ și $\epsilon(t)$ au un comportament dorit!!!

Concepte fundamentale în sistemele de comandă automată

Regim forțat: forma de variație a lui y reproduce forma de variație a lui r (sau a lui d).
Regimul forțat poate avea un caracter *permanent* sau *staționar* dacă mărimile exogene își păstrează forma de variație suficient de mult timp, caz în care el se va numi regim permanent sau staționar.

Semnale cu caracter permanent sunt, de exemplu, semnalul de tip treaptă sau semnalul armonic.

Atunci când o mărime exogenă (referință sau perturbație) își modifică forma de variație în timp (de exemplu, un semnal de tip treaptă este înlocuit cu un semnal armonic), atunci sistemul poate trece din regimul staționar de tip treaptă într-un regim staționar de tip armonic.

Regim tranzitoriu: regimul de funcționare al unui SRA aflat în trecerea de la un regim permanent la alt regim permanent.

Stabilitate înainte de toate!

Sistemul nu poate urmări imediat schimbarea formei de variație în timp a mărimilor exogene: inerție datorată energiei acumulate în *interiorul* sistemului. Regimul liber: cauze interne (detalii complete - Partea a doua: Sisteme dinamice liniare, pe spațiul stărilor).

Pentru atingerea obiectivelor reglării trebuie realizat un regim permanent. Sistemele în care se poate realiza un astfel de regim sunt cele stabile.

În această situație, componentele liberă, respectiv tranzitorie (datorate unor cauze interne) se „sting" după suficient de mult timp.
Instabilitatea face ca o parte din mărimile fizice care intervin în sistem să „o ia razna" sau să scape de sub control.

O durată prea mare a regimului instabil poate conduce chiar la distrugerea instalației/procesului.

Morala: Stabilitatea – cerința fundamentală în proiectarea SRA. Altfel spus când proiectăm un SRA, pași principali sunt după cum urmează:

1. stabilizăm sistemul (în buclă închisă);
2. studiem regimurile permanent și tranzitoriu ale răspunsului sistemului în buclă închisă a.î. să obținem comportamentul dorit.

Semnale cu caracter permanent/persistent

Spunem că un semnal $u(t)$ are caracter permanent (este persistent) dacă $\lim_{t\to\infty} u(t) \neq 0$ sau dacă $\lim_{t\to\infty} u(t)$ nu există.

Semnale (standard) cu caracter permanent (sau persistente) de interes:

$$u(t) = \mathbf{1}(t), \quad u(t) = \frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}, \quad u(t) = A\, e^{j\omega t}.$$

Observația 4

Polii transformatelor Laplace ale unor astfel de semnale sunt în $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s \geq 0\}$.

Exemplu. $u(t) = t\,\mathbf{1}(t)$ este un semnal persistent $\left(\lim_{t\to\infty} u(t) = +\infty\right)$, cu $\mathcal{L}\{u(t)\}(s) = \dfrac{1}{s^2}$, pe când $v(t) = e^{-t}\,\mathbf{1}(t)$ satisface $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$, cu $\mathcal{L}\{v(t)\}(s) = \dfrac{1}{s+1}$, și nu are caracter permanent (se „stinge" după suficient de mult timp).

Răspuns permanent și răspuns tranzitoriu

Fie sistemul **STABIL**

$$H(s) = \frac{r(s)}{p(s)},$$

cu polii p_i cu $\operatorname{Re} p_i < 0$, $i = 1 : k$.
Considerăm semnalul exogen (intrare/referință/ perturbație) $e(t)$ a cărui transformată Laplace este $H_e(s) = \frac{r_e(s)}{p_e(s)}$. Pp. că $e(t)$ este persistent, i.e., polii lui $H_e(s)$, p_{ej}, verifică $\operatorname{Re} p_{ej} \geq 0$, $j = 1 : n$.
Rezultă

$$Y(s) = H(s)\, \mathcal{L}\left\{e(t)\right\}(s) = H(s)\, H_e(s) = \frac{r(s)\, r_e(s)}{p(s)\, p_e(s)}.$$

Cum p și p_e nu au rădăcini *comune*, $Y(s)$ se descompune în fracții simple astfel[1]:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s - p_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ej}}{s - p_{ej}}$$

[1]Pt. a fixa ideile, am presupus că atât $H(s)$ cât și $H_e(s)$ au numai poli *simpli*. După cum se știe, dacă există multiplicități, în locul coeficienților A_i, A_{ej} apar în expresia (4) polinoamele $\pi_i(t)$, $\pi_{ej}(t)$.

Răspuns permanent și tranzitoriu - continuare

Deducem că

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A_i \ e^{p_i t}}_{y_t(t)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} A_{ej} \ e^{p_{ej} t}}_{y_p(t)} \tag{4}$$

Componenta y_t a răspunsului se numește răspuns (regim) tranzitoriu iar componenta y_p a răspunsului se numește răspuns (regim) permanent.

Se observă imediat că $\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0$ și că $y_p(t)$ reproduce forma de variație a semnalului exogen $e(t)$, având un caracter permanent (explicați de ce).

Răspunsuri la intrări standard

1. Intrare de tip treaptă: $u(t) = \mathbf{1}(t)$; $\quad H_e(s) = \dfrac{1}{s}$.

$$Y(s) = H(s)\frac{1}{s} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s - p_i} + \frac{A_0}{s}, \quad A_0 = sY(s)|_{s=0} = H(0).$$

Rezultă

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A_i \; e^{p_i t}}_{y_t(t)} + \underbrace{H(0)\,\mathbf{1}(t)}_{y_p(t)}. \tag{5}$$

Răspunsul la un semnal de intrare de tip treaptă se mai numește și *răspuns indicial*. Observăm că ($H(s)$ stabilă și strict proprie)

$$y(\infty) \overset{TVF}{=} \lim_{s\to 0} sY(s) = H(0), \quad y(0) \overset{TVI}{=} \lim_{s\to\infty} sY(s) = H(\infty) = 0.$$

Răspunsuri la intrări standard

2. Intrare de tip polinomial: $u(t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{1}(t); \quad H_e(s) = \dfrac{1}{s^n}.$

$$Y(s) = H(s)\frac{1}{s^n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s-p_i} + \frac{A_{0n}}{s^n} + \frac{A_{0n-1}}{s^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{01}}{s},$$

unde

$$A_{0l} = \frac{1}{(n-l)!}\,\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}s^{n-l}}\,[s^n Y(s)]|_{s=0} = \frac{H^{(n-l)}(0)}{(n-l)!}.$$

Rezultă

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A_i\ \mathrm{e}^{p_i t}}_{y_t(t)} + \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \frac{H^{(n-l)}(0)}{(n-l)!}\,\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}}_{y_p(t)}. \tag{6}$$

Răspunsuri la intrări standard

3. Intrare de tip armonic: $u(t) = e^{j\omega t}\ \mathbf{1}(t)$; $\quad H_e(s) = \dfrac{1}{s - j\omega}$.

$$Y(s) = H(s)\frac{1}{s - j\omega} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{s - p_i} + \frac{A_0}{s - j\omega}, \quad A_0 = (s - j\omega)Y(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) \in \mathbb{C}.$$

Rezultă

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} A_i\ e^{p_i t}}_{y_t(t)} + \underbrace{H(j\omega)\ e^{j\omega t}}_{y_p(t)}. \tag{7}$$

Așadar, răspunsul permanent sau staționar al unui sistem stabil la o intrare de tip armonic este un semnal armonic de *aceeași* frecvență cu semnalul de intrare, având însă amplitudinea și faza modificate.

Reamintim că $H(j\omega) = |H(j\omega)|\ e^{j\arg[H(j\omega)]}$ este răspunsul în frecvență al sistemului.

Mai multe detalii: răspunsul sistemelor elementare la intrări standard.

Performanțe de regim permanent și tranzitoriu

Revenim la schema standard de reglare din figura 2.

1. Cerințe relative la regimul permanent sau staționar.

• Regim permanent la semnal de tip treaptă unitară.
IDEAL: eroare staționară ZERO, $\varepsilon(\infty) = 0$. În acest caz, $y(\infty) = r(\infty) = 1$.
În practică, se va impune o eroare staționară foarte mică. În acest caz, $y(\infty) \approx r(\infty) = 1$.

• Regim permanent la semnal de tip rampă.
Eroare staționară $\varepsilon(\infty) = r(\infty) - y(\infty)$ suficient de mică.

• Regim permanent la semnal de tip armonic.
Amplificarea/atenuarea $|H(j\omega)|$ și defazajul $\arg[H(j\omega)]$ nu trebuie să depășească anumite valori impuse, în intervale de frecvență specificate $[\omega_- , \omega_+]$.

Performanțele de regim staționar sunt specificate pt. cele 3 tipuri (uzuale) de semnale standard. Performanțele de regim tranzitoriu vor fi specificate doar pt. răspunsul la intrare de tip treaptă unitară.

Performanțele regimului tranzitoriu

2. Cerințe relative la regimul tranzitoriu. În figura 4 este reprezentat grafic răspunsul la treaptă $y_{\mathbf{1}}(t)$ al unui sistem stabil $H(s)$. Reamintim că $y_{\mathbf{1}} = y_t + y_p$, unde $y_p(t) = H(0)\,\mathbf{1}(t)$.

• *timp de răspuns suficient de scurt*

- timp de creștere t_c: timpul în care $y_{\mathbf{1}}(t)$ crește de la 0.1 $H(0)$ la 0.9 $H(0)$ (timpul necesar ajungerii în vecinătatea unui nou regim staționar).
- timp de vârf t_v: timpul necesar pt. ca $y_{\mathbf{1}}(t)$ să atingă valoarea maximă.

• *calitatea urmăririi treptei*

- timp tranzitoriu t_t: timpul necesar încadrării răspunsului $y_{\mathbf{1}}(t)$ în intervalul $[0.98\,H(0)\,,\,1.02\,H(0)]$ (timpul necesar componentei tranzitorii să devină aproape zero) - marchează terminarea regimului tranzitoriu.

Așadar $|y_t(t)| \leq 0.02\,H(0)$, pentru $t \geq t_t$.

- suprareglajul σ: $\sigma = \dfrac{y_{\mathbf{1},\max} - y_p(t)}{y_p(t)} = \dfrac{y_{\mathbf{1},\max} - H(0)}{H(0)}\%$.
- valoarea de vârf: $y_{\mathbf{1},\max}$.

Studiu și calcul detaliat: sisteme de ordinul II.

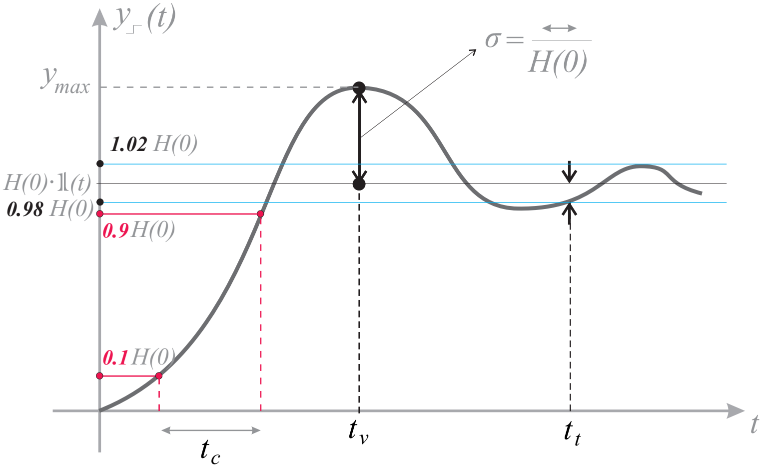


Figura 4: Regim tranzitoriu la intrare treaptă unitară

Răspunsul sistemelor de ordinul întai

Considerăm sisteme de ordinul I, respectiv de ordinul II.

a) Răspunsurile sistemului de ordinul I la intrare de tip treaptă, rampă și de tip armonic. Fie

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1},$$

unde $K, T > 0$ sunt *factorul de amplificare*, respectiv *constanta de timp* a sistemului.

Răspuns la intrare treaptă: $Y(s) = \dfrac{K}{s(Ts+1)} = \dfrac{H(0)}{s} - \dfrac{K}{s+\frac{1}{T}}$.

Rezultă

$$y_1(t) = \left(K - K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right)\,\mathbf{1}(t).$$

Răspunsul sistemelor de ordinul întai

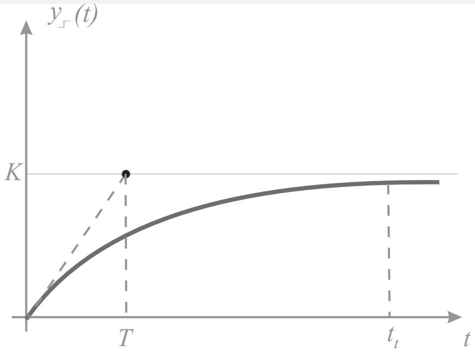


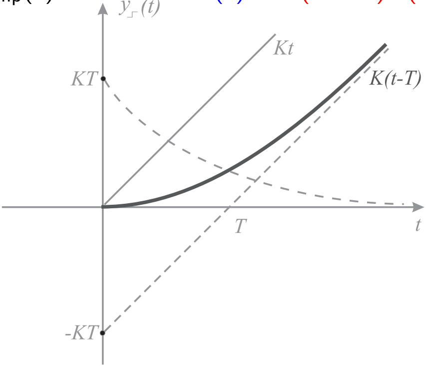
Figura 5: Răspunsul sistemului de ordin I la treaptă

- Regim staționar: identic cu intrarea (pt. $K = 1$).
- Suprareglaj: $\sigma = 0$.
- Timp tranzitoriu: $t_t \approx 4T \quad (|-K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}| < 0.02K,\ \forall t \geq 4T)$.

Răspunsul sistemelor de ordinul întai

Răspuns la intrare rampă: $Y(s) = \dfrac{K}{s^2(Ts+1)} = \dfrac{KT}{s+\frac{1}{T}} + \dfrac{H(0)}{s^2} + \dfrac{H'(0)}{s}$.

$$y_{\mathrm{ramp}}(t) = KT\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\ \mathbf{1}(t) + K(t-T)\ \mathbf{1}(t).$$



Regim staționar: NU este identic cu intrarea (pt. $K=1$); are doar aceeași formă de variație.

Răspunsul sistemului de ordinul întâi

Răspuns la intrare de tip armonic:

$$Y(s) = \frac{K}{(Ts+1)(s-j\omega)} = H(j\omega)\frac{1}{s-j\omega} - H(j\omega)\frac{1}{s+\frac{1}{T}}.$$

$$y_{\sim}(t) = -\frac{K}{1+j\omega T}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} + \frac{K}{1+j\omega T}\ \mathrm{e}^{j\omega t}, t \geq 0.$$

Regim staționar:

$$y_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\ \mathrm{e}^{j(\omega t + \arctan(\omega T))}.$$

Semnal de aceeași frecvență, cu amplitudine și fază modificate.

Regim tranzitoriu:

$$y_t(t) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\ \mathrm{e}^{j\arctan(\omega T)}.$$

$\mathrm{Re}\, y_{\sim}(t)$ - răspunsul la intrare $\cos\omega t\, \mathbf{1}(t)$;

$\mathrm{Im}\, y_{\sim}(t)$ - răspunsul la intrare $\sin\omega t\, \mathbf{1}(t)$.

Răspunsul sistemelor de ordinul al doilea...

b) ... la intrare de tip treaptă. Fie

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

unde $\omega_n > 0$ și $0 \leq \zeta \leq 1$ sunt *pulsația naturală*, respectiv *factorul de amortizare*. Polii sistemului $H(s)$ sunt complex conjugați:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \overset{\text{not.}}{=} \sigma_d \pm j\,\omega_d.$$

- Răspuns la intrare treaptă $u(t) = \mathbf{1}(t)$:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{H(0)}{s} - \frac{s-\sigma_d}{(s-\sigma_d)^2 + \omega_d^2} - \frac{\omega_d}{(s-\sigma_d)^2 + \omega_d^2}\,\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y_1(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \varphi), \quad t \geq 0,$$

unde $\cos\varphi = \zeta$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\zeta^2}$.

Răspunsul sistemelor de ordinul al doilea

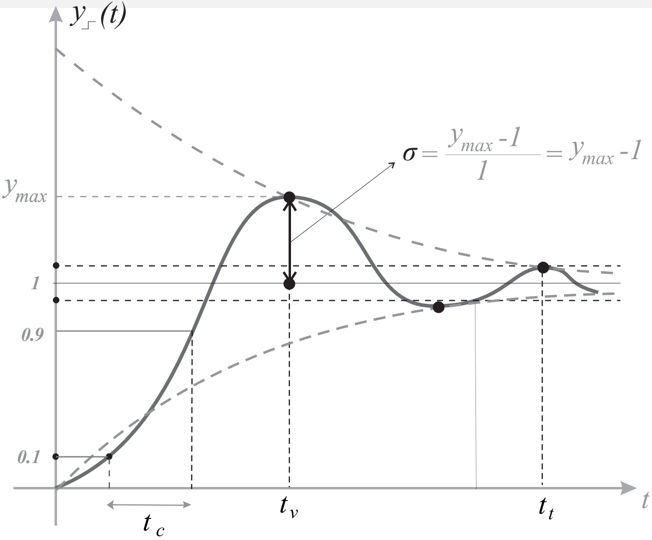


Figura 6: Răspunsul sistemului de ordinul al doilea la intrare treaptă unitară

Regimuri de funcționare a răspunsului indicial al sistemelor de ordinul al doilea

$\zeta = 0$: $y_{\mathbf{1}}(t) = 1 - \cos\omega_n t$ - regim oscilant.

$\zeta = 1$: $y_{\mathbf{1}}(t) = 1 - \omega_n t\, e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t}$ - regim critic.

$\zeta > 1$: regim supracritic - sistemul are 2 poli reali simpli.

$\zeta < 1$: regim subcritic - cazul care ne interesează; apar oscilațiile amortizate.

Performanțe de regim staționar ale sistemelor de ordinul II

Determinăm punctele critice ale funcției $y_1(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t)\ \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t} = 0.$$

Rezultă $t_k = \dfrac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, de unde

$$y(t_k) = 1 - (-1)^k\, \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t_k} = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t_k}, & k = \text{par}, \quad \text{minime locale,} \\ 1 + \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t_k}, & k = \text{impar}, \quad \text{maxime locale.} \end{cases}$$

Se observă că $y_{\max} = y(t_1) = 1 + \mathrm{e}^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, deci suprareglajul este dat de

$$\sigma = \mathrm{e}^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}. \tag{8}$$

Performanțe de regim staționar ale sist. de ordinul al doilea

Suprareglajul depinde *doar* de factorul de amortizare.

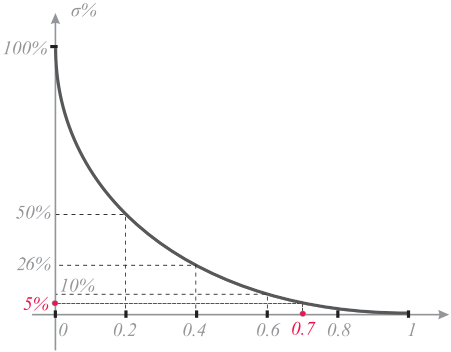


Figura 7: Dependența suprareglajului de factorul de amortizare

Tabel cu valori estimative:

ζ	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7
σ	50%	26%	16%	10%	5%

Alte estimări - timp tranzitoriu, timp de vârf

Estimarea timpului tranzitoriu t_t.
Dacă pt. un extrem local $|y_t(t_k)| < 0.02$, atunci $|y_t(t)| < 0.02$ pentru orice $t \geq t_k$. Se verifică (la fel ca la estimarea t_t la sistemele de ordin I) inegalitatea $|y_t(t_k)| < 0.02$ pentru orice $t_k \geq \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$. Rezultă

$$|y_t(t)| < 0.02, \ \ \forall t \geq \frac{4}{\zeta\omega_n} \approx t_t.$$

Pentru $0.3 < \zeta < 0.8$, timpul de creștere poate fi apreciat cu ajutorul formulei

$$t_c \approx \frac{1.8}{\omega_n}.$$

Timpul de vârf, t_v, este chiar $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$.

Plasarea polilor sistemului de ordin II v. performanțe

Problema: Se cere determinarea zonei din $\mathbb{C}$ în care trebuie plasați polii unui sistem de ordin II, $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, astfel încât regimul tranzitoriu să în deplinescă anumite cerințe de performanță impuse: $\sigma \leq \sigma_0$, $t_t \leq t_{t0}$, $t_c \leq t_{c0}$.

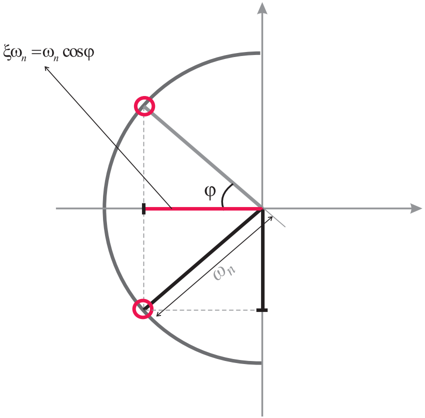
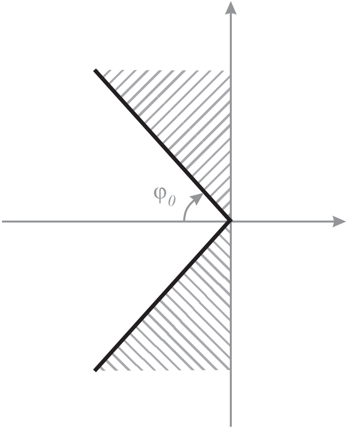


Figura 8: Plasarea polilor sistemului de ordin II

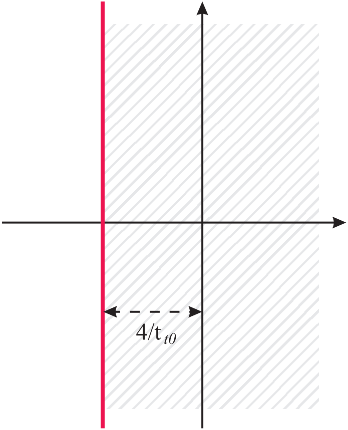
Poli pentru suprareglaj dorit

Inegalitatea $\sigma \leq \sigma_0$ implică $\zeta \geq \zeta_0$ (vezi figura 7); cum $\zeta = \cos\varphi$ $(0 \leq \phi \leq \pi/2)$, rezultă $\varphi < \varphi_0$, $\varphi_0 = \arccos\zeta_0$.



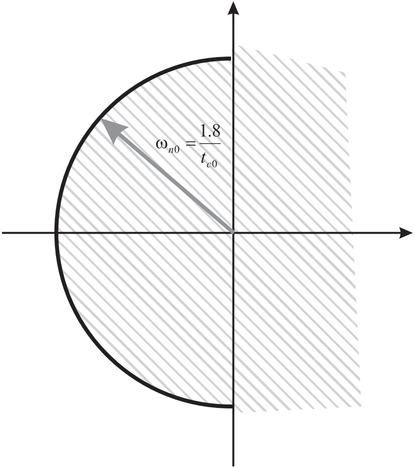
Poli pt. timp tranzitoriu dorit

Avem $t_t = \dfrac{4}{\zeta\omega_n} \leq t_{t0}$, de unde $\zeta\omega_n \geq \dfrac{4}{t_{t0}}$.

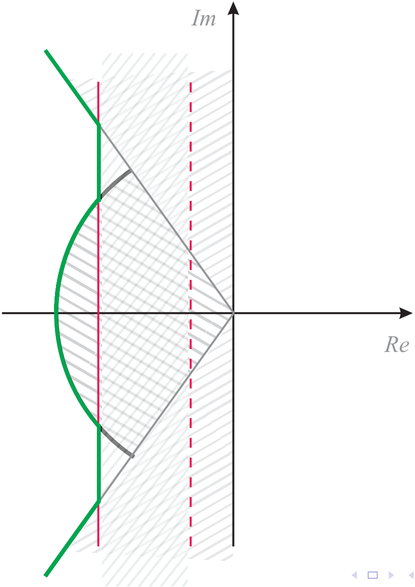


Poli pentru timp de creștere dorit

La fel ca mai sus, se deduce că $\omega_n \geq \dfrac{1.8}{t_{c0}}$.



Polii care verifică toate constrângerile



Sistemul automat de focalizare al telescopului Hubble: SOLUȚII

Scriem $T_{yr}(s)$, $T_{\varepsilon r}(s)$ și $T_{yd}(s)$ în funcție de K și K_1. Toate funcțiile de transfer sunt stabile pentru valori pozitive ale lui K și K_1.

a) Avem

$$T_{yr}(s) = \frac{K}{s^2 + K_1 s + K} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2},$$

unde $\omega = \sqrt{K}$, $0 < \zeta = \dfrac{K_1}{2\sqrt{K}} < 1$. Deoarece $\sigma \leq 10\%$, rezultă $\zeta = 0.6$ (vezi tabelul de variație al lui σ în funcție de ζ), deci $K_1 = 1.2\sqrt{K}$.

b) Cum

$$E(s) = T_{\varepsilon r}(s)R(s) = \frac{s^2 + K_1 s}{s^2 + K_1 s + K}\,\frac{B}{s^2},$$

rezultă $\varepsilon_{R,ramp}(\infty) \overset{TVF}{=} \lim\limits_{s\to 0} sE(s) = B\dfrac{K_1}{K}$. **Eroarea staționară este minimizată de un raport K_1/K cât mai mic.**

Valori pentru K și K_1

Similar punctului b),

$$E(s) = T_{\varepsilon d}(s)D(s) = -\frac{1}{s^2 + K_1 s + K}\,\frac{C}{s}$$

și $\varepsilon_{D,step}(\infty) \overset{TVF}{=} \lim_{s\to 0} sD(s) = -C\frac{1}{K}$, de unde necesitatea unei **amplificări** K **cât mai mari**.

Valori numerice posibile: $K = 100$, $K_1 = 12$; $K = 25$, $K_1 = 6$; $K = 200$, $K_1 = 16.92$.

Deși amplificarea poate fi în acest caz oricât de mare, pentru că nu se pierde stabilitatea buclei pentru nici o valoare pozitivă a lui K, în practică există limitări de natură tehnologică a valorii maxime a amplificării.

Răspuns permanent și tranzitoriu în discret - treaptă

Aceleași noțiuni ca în cazul sistemelor cu timp continuu. Ne concentrăm asupra răspunsului permanent și tranzitoriu la intrare de tip treaptă $u(k) = \mathbf{1}(k)$, și de tip armonic, $u(k) = e^{j\omega k}$.

I. Răspunsul la treaptă: Fie sistemul stabil $H(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$. Presupunem (pt. simplitatea expunerii) că H are poli reali, simpli, p_i. Deoarece $Y(z) = H(z)U(z) = H(z)\dfrac{z}{z-1}$, obținem

$$\frac{Y(z)}{z} = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{1}{z-p_i} + A_0 \frac{1}{z-1}, \quad A_0 = (z-1)\left.\frac{Y(z)}{z}\right|_{z=1} = H(1).$$

Rezultă automat că $y(k) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i\, p_i^k}_{y_t(k)} + \underbrace{A_0\, \mathbf{1}(k)}_{y_p(k)}$,

unde $y_t(k)$ si $y_p(k) = H(1)\,\mathbf{1}(k)$ sunt răspunsurile tranzitoriu și respectiv permanent ale sistemului $H(z)$ la intrare treaptă.

Exemple - răspuns la treaptă în discret

Exemplul 1. Calculați răspunsul sistemului $H(z) = \dfrac{1}{z-2}$ la intrare treaptă unitară.

Soluție: $Y(z) = H(z)U(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{z}{z^2-3z+2}$.

I. $z/(z^2-3z+2) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \ldots = \sum_0^\infty (2^k-1)z^{-k}$. Cât este $y(k)$?

II. $Y(z)$ are doi poli simpli, $p_1 = 1$ și $p_2 = 2$. Deducem că $y(k) =$

$$(z-1)\,z^{k-1}Y(z)|_{z=1} + (z-2)\,z^{k-1}Y(z)|_{z=2} = \left.\frac{z^k}{z-2}\right|_{z=1} + \left.\frac{z^k}{z-1}\right|_{z=2} = (-1+2^k)\,\mathbf{1}(k).$$

III. Avem $\dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1} \Rightarrow Y(z) = \dfrac{z}{z-2} - \dfrac{z}{z-1}$. Așadar, $y(k) = 2^k\mathbf{1}(k) - \mathbf{1}(k)$.

Răspuns permanent și tranzitoriu în discret - armonică

b. Răspunsul la armonică: Pentru $u(k) = e^{j\omega k} \overset{\mathcal{Z}}{\Longleftrightarrow} U(z) = \dfrac{z}{z - e^{j\omega}}$, scriem

$$\frac{Y(z)}{z} = \sum_{i=1}^{n} A_i \, \frac{1}{z - p_i} + A_0 \, \frac{1}{z - e^{j\omega}},$$

cu

$$A_0 = (z - e^{j\omega}) \left. \frac{Y(z)}{z} \right|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{j\omega n} = \mathcal{F}\{h(n)\}(e^{j\omega}).$$

Astfel

$$y(k) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_i \, p_i^k}_{y_t(k)} + \underbrace{A_0 \, e^{j\omega k}}_{y_p(k)},$$

unde $y_t(k)$ și $y_p(k) = H(e^{j\omega}) \, e^{j\omega k}$ sunt răspunsurile tranzitoriu și, respectiv, permanent ale sistemului $H(z)$ la intrare de tip armonic.

Observația 5 (Explicați de ce)

În ambele situații $\lim_{k \to \infty} y_t(k) = 0$.

Exemple

1. $H(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + 1}$, $u(n) = \mathbf{1}(n)$;
2. $H(z) = \dfrac{1}{z + 0.2}$, $u(k) = e^{j\omega k}\mathbf{1}(k)$. Determinați $y_p(k)$ și $y_t(k)$. Aceeași întrebare pentru $u(k) = \sin \omega k$.