Teoria sistemelor
Laboratorul 2. Sisteme

1 Scopul laboratorului

Laboratorul propune studiul sistemelor dinamice, liniare si invariante in timp. Pentru început, se studiază grafic proprietăţile sistemelor. În continuare, laboratorul prezintă exemple reale de sisteme (circuitul RC, masă-resort cu amortizare), care sunt ulterior analizate din punct de vedere dinamic.

2 Breviar teoretic

Definiţia 1. Intelegem prin sistem o aplicatie definita pe spatiul semnalelor de intrare $\mathcal{U}$ cu valori in spatiul semnalelor de iesire $\mathcal{Y}$, $\mathbb{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$, $y = \mathbb{T}\big(u\big)$.

Ne vom concentra atentia asupra *sistemelor liniare, invariante in timp* si *cauzale*, care spre deosebire de cazul general (sisteme neliniare, variabile in timp si posibil necauzale) au proprietati interesante si sunt mai simple.

Un sistem este liniar daca $\mathbb{T}$ este un **operator liniar**, adica satisface principiul superpozitiei. Un sistem este *invariant in timp* daca o translatie in timp a intrarii produce aceeasi translatie in iesire. Mai exact, daca $u(t)$ produce iesirea $y(t)$, atunci intrarea shiftata $u(t-\tau), \forall \tau \in \mathbb{R}$ produce $y(t-\tau)$. Numim un sistem *cauzal* daca iesirea depinde doar de intrarile curente sau din trecut. Un sistem cauzal se mai numeste sistem fizic sau nonanticipativ.

Formal, aceste proprietati se scriu:

(i) Liniaritate: $\mathbb{T}\big(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\big) = \alpha_1 \mathbb{T}\big(u_1\big) + \alpha_2 \mathbb{T}\big(u_2\big), \quad \forall u_{1,2} \in \mathcal{U},\ \forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{C}$;

(ii) Invarianţă in timp: $\sigma^\tau\big(\mathbb{T}(u)\big) = \sigma^\tau(y) = y(t-\tau) = \mathbb{T}\big(u(t-\tau)\big) = \mathbb{T}\big(\sigma^\tau u(t)\big), \forall \tau \in \mathbb{R}$;

(iii) Cauzalitate: dacă $u_1(t) = u_2(t), \forall t \leq \tau \implies y_1(t) = y_2(t), \forall t \leq \tau$.

2.1 Sisteme de convoluţie

Definiţia 2. Un sistem $y = \mathbb{T}(u)$ se numeste sistem de convolutie daca $\exists h(t)$ astfel incat $y = h * u$. Functia $h(t)$ se numeste *functia pondere* a sistemului de convolutie.

Propoziţia 1. *Un sistem de convolutie este liniar si invariant in timp. Mai mult, sistemul este si cauzal daca si numai daca* $h(t) = 0,\ \forall t < 0$.

De notat ca proprietatile si definitiile prezentate sunt valabile atat pentru sisteme continuale, cat si pentru sisteme discrete. In continuare, analizam raspunsul sistemelor de convolutie la impuls si la intrari de tip armonic.

2.1.1 Răspunsul la impuls

Tratam cazul sistemelor discrete, pentru ca e mai intuitiv. Astfel, fie $y[n] = (h * u)[n]$ un sistem de convolutie. Daca $u[k] = \delta[k]$, vom avea:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\delta[k] = h[n].$$

Asadar: **Functia podere a unui sistem de convolutie este raspunsul la impuls al sistemului respectiv.**

2.1.2 Răspunsul la intrari armonice

Fie un sistem de convolutie continuu, iar $u(t) = e^{j\omega t}$. Atunci:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$y(t) = H(j\omega)u(t), \quad \text{unde } H(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \tag{1}$$

Functia $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}(j\omega)$ se numeste *raspunsul in frecventa* al sistemului de convolutie caracterizat prin functia pondere h. Mai mult, se observa ca raspunsul unui sistem de convolutie la o intrare armonica este tot o armonica, avand aceeasi frecventa ω dar de *amplitudine si fază diferite*. Rezultatul este valabil si pentru sistemele cu timp discret.

2.1.3 Funcţia de transfer

Sa generalizam rezultatul anterior in domeniul operational. Fie sistemul de convolutie $y = h * u$. Atunci raspunsul sistemului la intrarea $u(t) = e^{st}$, cu $s \in \mathbb{C}$, este:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = H(s)u(t).$$

Functia $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s)$ este **functia de transfer** a sistemului de convolutie. Mai mult, daca sistemul este cauzal, *i.e.* $h(t) = 0, \forall t < 0$, atunci

$$H(s) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \mathcal{L}_{+}\{h\}(s)$$

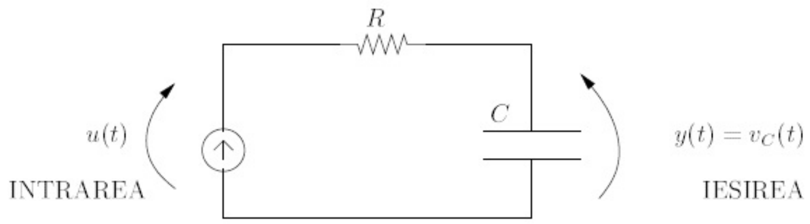
este transformata Laplace unilaterala la dreapta. De remarcat relatia

$$Y(s) = H(s)U(s) \Leftrightarrow y(t) = (h * u)(t).$$

2.2 Circuitul RC

Prezentam in cele ce urmeaza un exemplu simplu de sistem liniar, invariant in timp si cauzal, circuitul RC. Acesta se asimileaza cu un sistem dinamic a carui intrare (comanda) este tensiunea $u(t)$ si a carui iesire (marime masurata) $y(t)$ este tensiunea pe condensator. Circuitul este descris de urmatoarea ecuatie diferentiala

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}u(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$



Solutia acestei ecuatii in conditii initiale nule $u(0) = 0, y(0) = 0$ este

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}} u(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

care se mai poate scrie sub forma unui produs de convolutie $y = h * u$, unde

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbb{1}(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

este *functia pondere* a sistemului (cu intrarea u si iesirea y). Conform relatiilor de mai sus, *raspunsul in frecventa* al circuitului RC este $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h\}(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}.$$

Pentru intrarea armonica

$$u(t) = \alpha_u \cos(\omega t + \Phi_u), \tag{5}$$

unde $\alpha_u \geq 0, \Phi_u \in \mathbb{R}$ si, respectiv, $t \in \mathbb{R}$ rezulta iesirea:

$$y(t) = \alpha_y \cos(\omega t + \Phi_y), \tag{6}$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_y =& |H(j\omega)| \alpha_u, \text{ respectiv} \\ \Phi_y =& \Phi_u + \arg(H(j\omega)) \end{aligned} \tag{7}$$

2.3 Ecuatii diferenţiale forţate

In general, orice sistem fizic este caracterizat de legi fizico-matematice, care se exprima uzual prin ecuatii diferentiale (posibil cu derivate partiale, coeficienti variabili in timp, neliniare). Ca un caz particular al acestor sisteme, sistemele LTI sunt caracterizate de ecuatii diferentiale *ordinare, liniare, cu coeficienti constanti.*

Asadar, sa consideram forma generala a unei ecuatii diferentiale fortate de ordin $n \in \mathbb{N}$, care exprima comportamentul intrare-iesire al unui sistemul LTI:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \tag{8}$$

Se aplica Transformata Laplace ecuatiei (8), cu conditii initiale nule. Utilizând proprietatea derivarii functiei original a TL, cu conditii initiale nule $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s)$, (8) devine:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

De remarcat ca functia de transfer a sistemului, definita in Sectiunea 2.1.3, se poate obtine direct din ecuatiile de mai sus:

$$H(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots a_1 s + a_0}. \tag{9}$$

In concluzie, functia de transfer a unui sistem de convolutie este o **functie rationala complexă**, *i.e.* este un raport de doua functii polinomiale, de forma $H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$.

2.4 Reprezentarea unei funcţii de transfer în Matlab

În Matlab, o funcţie de transfer de forma (9) se poate reprezenta cu funcţia *transfer function*, i.e., `tf(num, den)` sau ca obiect. Spre exemplu, fie

$$H(s) = \frac{3s^2 - 5s + 7}{-s^3 + 2s}.$$

În Matlab vom scrie:

```
num = [3 -5 7]; % coeficientii polinomului de la numitor
den = [-1 0 2 0];
H = tf(num,den);

% ca obiect
s = tf('s');
H = (3*s^2-5*s+7)/(-s^3+2*s);
```

Putem desena extrem de simplu răspunsul în timp al unui sistem dat prin $H(s)$. Spre exemplu, răspunsul la impuls se determină apelând

```
>> impulse(H);
```

Alte funcţii Matlab utile sunt `step(H), initial(ss(H),x0), lsim(H,u,t).` Apelaţi help pentru detalii.

3 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1. Fie sistemele de mai jos, cu intrarea u si iesirea y.

a)

$$\Sigma_1 : y[n] = u[-n], n \in \mathbb{Z}, \qquad \Sigma_2 : y(t) = u(t)cos(t+1), t \in \mathbb{R}.$$

Reprezentati grafic iesirile celor 2 sisteme la intrarile $u_1(k) = e^{-k}, u_2(k) = 2\sin(\pi t)$, unde $k \in \mathbb{Z}$ pentru Σ_1 si $k \in \mathbb{R}$ pentru Σ_2. Studiati *cauzalitatea* sistemelor.

b)

$$\Sigma_1 : y(t) = u(2t), t \in \mathbb{R}, \qquad \Sigma_2 : y[n] = nu[n], n \in \mathbb{Z}.$$

Studiati daca sistemele sunt *invariante in timp.*

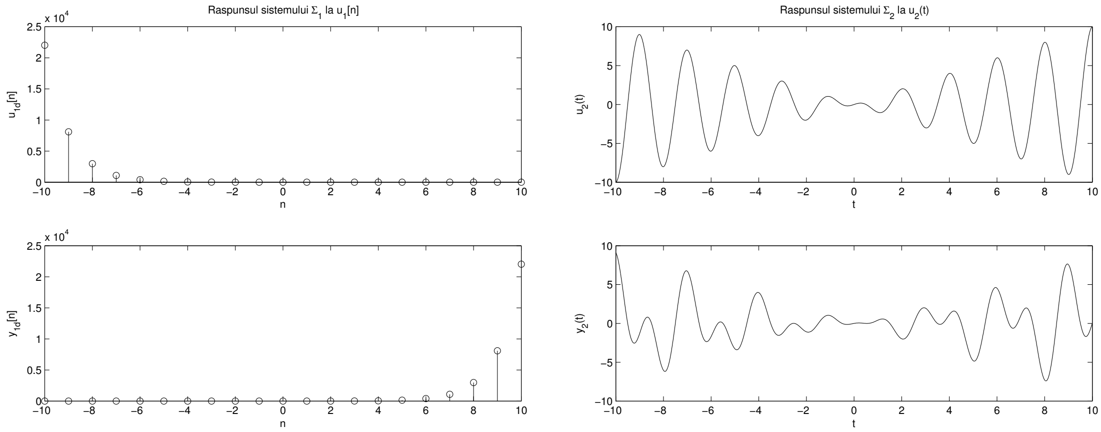


Figura 1: Exercitiul 1a.

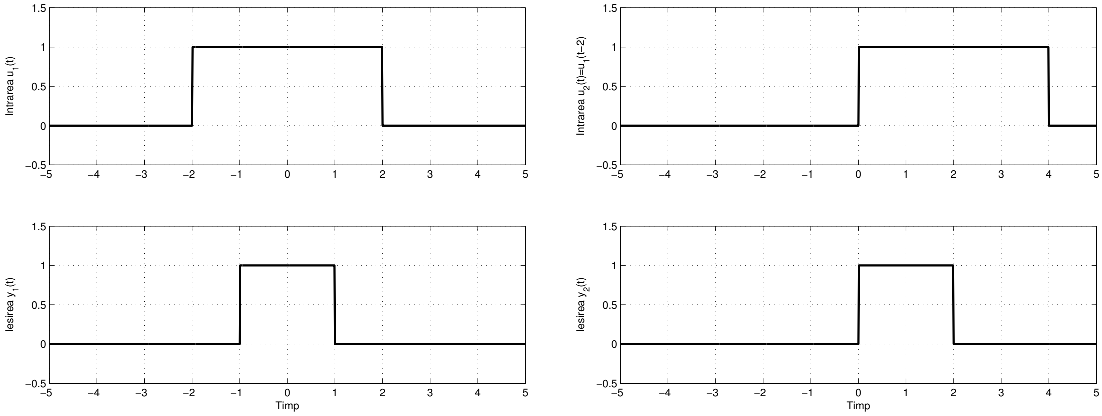


Figura 2: Exercitiul 1b.

c)

$$\Sigma_1 : y(t) = t^2 u(t), t \in \mathbb{R}, \qquad \Sigma_2 : y(t) = u^2(t), t \in \mathbb{R}$$

Sunt sistemele liniare? Verificati in Matlab.

Solutie:
a) Codul Matlab este dat in fisierul `L3_ex1a.m` si in Anexa. Figura 1 prezintă răspunsul lui Σ_1 la $u_1(t)$ şi răspunsul lui Σ_2 la $u_2(t)$. Daca $n < 0$, spre exemplu $n = -3$, atunci $y[-3] = u[3]$. Sistemul Σ_1 nu este cauzal, pentru ca semnalul de iesire depinde de valori viitoare ale intrării. Acest lucru poate fi vizualizat direct din grafic, vezi figura 1. Sistemul Σ_2 este cauzal, pentru ca iesirea depinde doar de valori actuale ale intrarii. Astfel de sisteme se numesc **sisteme fără memorie**.

b) Se verifică uşor ca sistemul Σ_1 este invariant în timp. Să probăm acest lucru folosind Matlab. Asadar, pentru Σ_1, alegem ca intrare semnalul dreptunghiular

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & -2 \le t \le 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Se observa din figura 2 ca $y_2(t) = y_1(t-2)$, unde $y_2(t)$ este raspunsul sistemului la $u_2(t) = u_1(t-2)$.

O metoda alternativa pentru a demonstra ca un sistem este variant la deplasari temporale constă în căutarea unui contraexemplu, i.e., un semnal particular pentru care invarianta in timp este violata. Aşadar, pentru Σ_2, fie $u_1[n] = \delta[n]$, pentru care iesirea este $y_1[n] = n\delta[n] = 0$. Daca $u_2[n] = u_1[n-N] = \delta[n-N]$,unde $N \in \mathbb{Z}$ este fixat, atunci $y_2[n] = n\delta[n-N] = N\delta[n-N]$. Asadar, sistemul Σ_2 nu este invariant in timp.

c) Sistemul 1 este liniar, dar sistemul 2, nu. Pentru a testa acest aspect, alegem ca semnale de stimul

$$u_1(t) = e^{-\frac{t}{10}} \sin(2\pi\ 5t), \quad u_2(t) = \operatorname{sinc}(t) := \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}.$$

Implementarea Matlab se gaseste in fisierul `L3_ex1c` si in Anexa.

Exerciţiul 2. Să considerăm sistemul masă–resort cu amortizare, caracterizat prin ecuaţia diferenţială de ordinul II

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = F(t), \tag{10}$$

unde $y(t)$ este coordonata mobilului, iar $F(t)$ este forta exterioara. Considerăm intrarea sistemului $u(t) = F(t)$, iar iesirea coordonata mobilului.

a) Studiaţi liniaritatea si invarianţa în timp pentru sistemul dat.

b) Uzual, un sistem de ordin II se scrie sub forma

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = K \cdot \omega_n^2 u(t), \tag{11}$$

unde $\omega_n > 0$ se numeşte pulsaţie naturală, iar ζ este factorul de amortizare. Găsiţi expresiile pentru ζ şi ω_n în funcţie de parametrii fizici ai sistemului (m, k, b).

c) Determinaţi funcţia de transfer a sistemului $H(s)$, considerând $y(0_+) = \dot{y}(0_+) = 0$. Calculaţi rădăcinile polinomului caracteristic. Când este sistemul stabil? Discuţie după ζ.

d) Folosind funcţia Matlab `impulse`, reprezentaţi grafic răspunsul la impuls al sistemului dat. Se dă $\zeta = 2$, $\omega_n = 1$, $K = 1$. Daţi alte valori parametrului ζ, spre exemplu $\zeta \in \{1,\ 0.9,\ 0.5,\ 0.1,\ 0,\ -0.5\}$. Ce se observă?

Rezolvare:

a) Ecuaţia diferenţială care caracterizează sistemul este liniară (apar doar combinaţii liniare de variabile dependente) şi invariantă în timp: coeficienţii m, b, k nu depind de timp. Aşadar, sistemul este liniar şi invariant în timp. Mai mult, acesta este şi cauzal.

b) Împărţim ecuaţia (10) prin m şi obţinem

$$\ddot{y}(t) + \frac{b}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}u(t). \tag{12}$$

Prin egalarea coeficienţilor cu (11), obţinem $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$, $K = \frac{1}{k}$.

c) $H(s) = K \cdot \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$. Polinomul caracteristic este $\chi(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$, iar rădăcinile lui sunt

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Sistemul este stabil numai şi numai dacă $\mathrm{Re}\{p_{1,2}\} < 0$ (demonstraţi acest fapt), ceea ce este echivalent cu $\zeta > 0$.

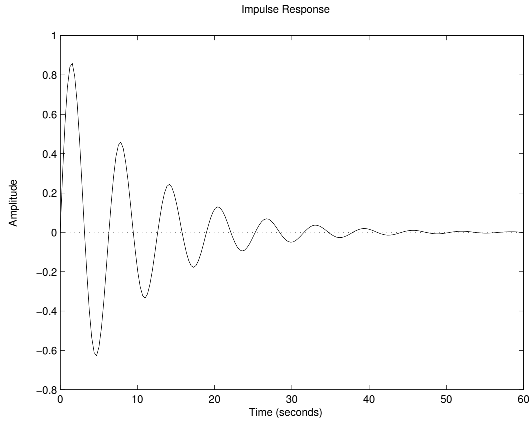


Figura 3: Exercitiul 2d.

d) Codul Matlab pentru $\zeta = 0.1$ este dat în continuare. Daţi voi valorile specificate pentru parametrul ζ.

```
wn = 1;
zeta = 0.1;
H = tf(wn^2,[1 2*zeta*wn wn^2]);
impulse(H);
```

Se obţine graficul din figura 3. Se observă că pentru $\zeta > 1$, răspunsul sistemului la impuls este *aperiodic*. În plus, rădăcinile lui $\chi(s)$ sunt reale. Pentru $\zeta = 1$, răspunsul la impuls este *aperiodic critic*, iar $\chi(s)$ are o rădăcină reală dublă. Dacă $0 < \zeta < 1$, răspunsul sistemului este o oscilaţie amortizată. Rădăcinile lui $\chi(s)$ sunt complex conjugate, $p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, $p_2 = p_1^*$. Când $\zeta = 0$, amortizarea este 0, iar sistemul oscilează liber. Care este legătura dintre rădăcinile lui $\chi(s)$ şi răspunsul la impuls al sistemului?

Exerciţiul 3. Fie sistemul masă-resort cu amortizare vâscoasă, având funcţia de transfer

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}.$$

Se dau $m = 1$ kg, $b = 0.5$ Ns/m, $k = 4$ N/m. Considerăm aici semnale de stimul armonice, e.g., $u(t) = \sin(\omega_0 \cdot t)$, unde $\omega_0 > 0$ este fixat. Cerinţe:

a) Calculaţi pulsaţia naturală ω_n.

b) Reprezentaţi grafic răspunsul forţat al sistemului (condiţii iniţiale nule) la semnalul $u(t) = \sin(t)$ ($\omega_0 = 1$), pentru $t \in [0, 30]$ sec. Folosiţi funcţia Matlab `lsim`. Determinaţi din grafic amplitudinea, frecvenţa şi defazajul semnalului de ieşire

$$y(t) = A_y \sin(\omega_y t + \Delta\phi).$$

c) Calculaţi răspunsul în frecvenţă al sistemului, $H(j\omega)$. Calculaţi de asemenea $|H(j \cdot \omega_0)|$ şi $\arg H(j \cdot \omega_0)$, pentru $\omega_0 = 1$ rad/sec. Ce observaţi?

d) Reluaţi punctul b) pentru $\omega_0 = 1 : 0.2 : 3$. Cum se modifică amplitudinea semnalului de ieşire A_y? La ce frecvenţă A_y îşi atinge maximul?

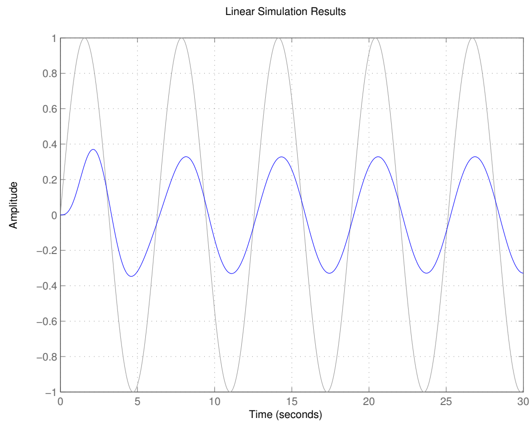


Figura 4: Exercitiul 3b.

Rezolvare:

a) $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/sec.

b) Codul Matlab este dat în continuare.

```
m = 1;
k = 4;
b = 0.5;
H = tf(1,[m b k]);

t = 0:0.01:30; w0 = 1;
u = sin(w0*t);
figure; lsim(H,u,t); grid
```

Obţinem figura 4. Observăm că semnalul de ieşire are aceeaşi pulsaţie ca semnalul de intrare, i.e., $\omega_y = \omega_0 = 1$ rad/sec. În plus, de pe grafic avem că $A_y(\omega_0) \approx 0.329$. Defazajul nu se poate citi clar de pe grafic, însă se vede că $\Delta\phi \approx 0$.

c)
$$H(j\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + jb\omega + k} = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega/2 + 4}.$$

Când $\omega = \omega_0 = 1$, $H(j\omega_0) = \dfrac{2}{6+j}$. Aşadar,

$$|H(j\omega_0)| = \frac{2}{\sqrt{37}} = 0.3288, \ \arg H(j\omega_0) = -\arctan(1/6) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(6) = -0.165 \text{ rad.}$$

Se observă că $A_y = |H(j\omega_0)|$, $\Delta\phi = \arg H(j\omega_0)$. Am verificat astfel cele afirmate în breviarul teoretic, Secţiunea 2.1.2.

d) Codul Matlab rămâne acelaşi ca la punctul b (evident, se modifică corespunzător valoarea pulsaţiei ω_0). Observăm ca maximul $A_{y,\max}$ se atinge pentru $\omega_0 = \omega_n$. Demonstraţi analitic acest lucru. Fenomenul este cunoscut sub numele de *rezonanţă*.

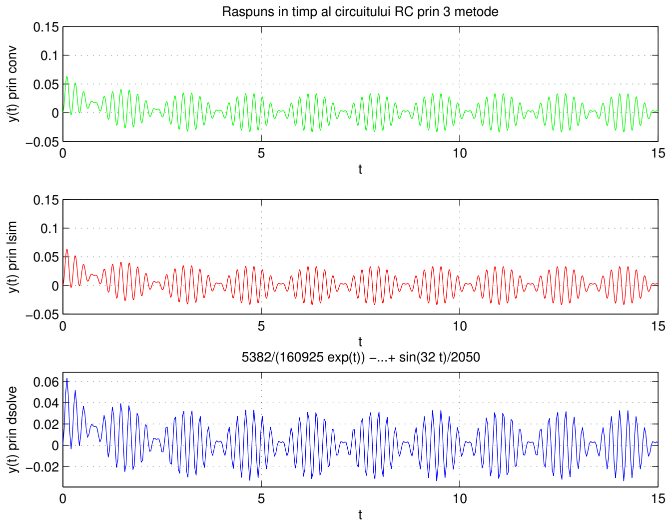


Figura 5: Exercitiul 4

Exerciţiul 4. Se consideră circuitul RC, prezentat în secţiunea 2.2, cu $R \cdot C = 1$ sec. Circuitul primeşte la intrare semnalul $u(t) = \cos(2t) \cdot \sin(30t)$, $t \in [0, 15]$ sec. Să se determine cu ajutorul Matlab tensiunea de pe condensator în funcţie de timp prin cel puţin 3 metode. Pentru verificare, reprezentaţi grafic cele 3 semnale obţinute.

Rezolvare: Propunem 3 trei metode pentru determinarea răspunsului la intrarea dată: calculul numeric al convoluţei cu funcţia `conv(h,u)`, rezolvarea ecuaţiei diferenţiale în condiţii iniţiale nule cu funcţia `dslove`, şi utilizarea funcţiei `lsim(H,u,t)`.

Codul Matlab este dat în Anexă şi în fişierul `L3_ex4.m`. Rezultatul este prezentat in figura 5. Se observă că cele trei semnale sunt identice. Câteva observaţii: apelul

```
>> y3 = dsolve('Dy+y=cos(2*t)*sin(30*t)','y(0)=0');
```

returnează o variabilă simbolică, care se poate reprezenta grafic folosind rutina `ezplot`. Pentru scalarea corespunzătoare a convoluţiei se apelează

```
>> y1=conv(h,t)/Fs;
```

i.e., se imparte rezultatul prin F_s, frecvenţa de eşantionare a semnalelor continue. Am ales aici $F_s = 1000$ Hz.

4 Exerciţii propuse

Exerciţiul 5. (1p) Se considera circuitul RC, prezentat in Sectiunea 2.2, cu $RC = 1$. Cerinţe:

a) Demonstrati ecuatia (3). Pentru aceasta, se va folosi un factor de integrare $v(t)$, al carui scop este sa reduca partea stanga a expresiei (2) la derivata produsului $v(t)y(t)$, *i.e.*,

$$v(t)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC}v(t)y(t) = \frac{d}{dt}\Big[v(t)y(t)\Big].$$

Indicatie. Se determina factorul de integrare $v(t)$ din ecuatia de mai sus. Apoi, se inmulteste ecuatia (2) cu $v(t)$ si se integraza.

b) Determinati si trasati graficul lui $y(t)$ (tensiunea pe condensator) calculand convolutia lui $u(t)$ cu $h(t)$, unde

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } 1 \leq t < 2; \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases} \tag{13}$$

c) Determinati si trasati grafic raspunsul tensiunii $z(t)$ pe rezistenta, la intrarea (13), folosind faptul ca $z = g * u$, unde $g(t)$ este functia pondere a sistemului cu intrarea u si iesirea z:

$$g(t) = \left[1 - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\right] \mathbb{1}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Verificati numeric ca $y(t) + z(t) = u(t), t \in \mathbb{R}$ si explicati discrepanţele.

d) Calculati si reprezentati grafic raspunsul sistemului de convolutie definit de h la intrari de tip treapta, respectiv, de tip rampa.

e) Stiind ca $RC = 1$ calculati raspunsul circuitului la intrarea armonica $u(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, unde $\omega_0 := 2\pi f_0 t$, iar $t \in \mathbb{R}$ pentru $2\pi RC = \frac{1}{f_0}$. Figurati grafic u si y.

Indicatie. Se folosesc relatiile (6) si (7).

f) Calculati raspunsul circuitului la intrarea

$$u(t) = \cos(2\pi f t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi \tilde{f} t), t \in \mathbb{R}$$

cu $2\pi f RC = 1$ si $2\pi \tilde{f} RC = 3$. Figurati grafic u si y.

Indicatie. Se foloseste proprietatea de liniaritate a sistemelor de convolutie.

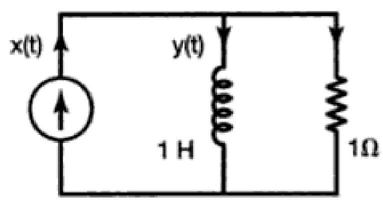


Figura 6: Circuit RL paralel

Exerciţiul 6. (1p) Consideram circuitul RL paralel din figura 6 in care sursa de curent produce intrarea $x(t)$, iar iesirea este $y(t)$ curentul prin bobina.

a) Gasiti ecuatia diferentiala care leaga pe $x(t)$ cu $y(t)$.

b) Determinaţi funcţia de transfer a sistemului şi răspunsul la impuls.

c) Determinati functia de raspuns in frecventa a sistemului, considerand raspunsul la intrari de tipul $x(t) = e^{j\omega t}$.

d) Determinati raspunsul la intrarea $x(t) = \cos(t)$.

e) Determinati raspunsul la intrarea $x(t) = \sum_{k=1}^{N} k \cos(2k\pi t)$, cu N ales de voi.

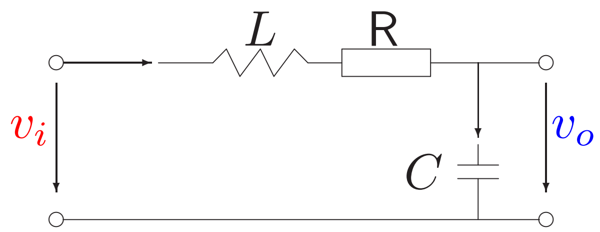


Figura 7: Circuit RLC serie

Exercițiul 7. (1p) Considerăm circuitul RLC prezentat în figura 7, cu $R = 0.5\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 1$ F. Cerințe:

a) Verificați că ecuația dinamică a circuitului este

$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L}\dot{y}(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t),$$

unde $y \equiv v_0$ este ieșirea, iar $u \equiv v_i$ este intrarea. Determinați pulsația naturală ω_n și factorul de amortizare ζ.

b) Studiem aici *răspunsul liber* $y_\ell(t)$, i.e., $u(t) = 0, \forall t$. Fie $y(0) = a$ și $\dot{y}(0) = b$, unde $a, b \in \{-3, -1, 0, 1, 2\}$. Găsiți răspunsul liber al circuitului RLC pentru diverse combinații ale condițiilor inițiale. Se va folosi rutina `dsolve`.

c) Reluați punctul anterior pentru $R = 0\ \Omega$. Ce se observă?

d) Studiem aici *răspunsul forțat* $y_f(t)$, având $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Determinați funcția de transfer $H(s)$. Reprezentați grafic răspunsul sistemului la impuls, treaptă unitară, și rampă. Funcții recomandate: `impulse, step, lsim`.

e) Reprezentați grafic răspunsul total $y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$, pentru $u(t) = \mathbb{1}(t)$ și $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = -3$. *Observație.* Ca alternativă, putem determina $y(t)$ apelând

```
>> lsim(ss(H),u,t,[-3 2]);
```

Verificați acest lucru. Apelați de asemenea `help ss`.

Exercițiul 8. (1p) Considerăm circuitul RC, cu $R \cdot C = 0.01$ sec. Se cere:

a) Găsiți funcția de transfer a sistemului, precum și constanta de timp T. Reprezentați grafic răspunsul la treaptă unitară. Cât este timpul tranzitoriu? Dar timpul de creștere? *Indicație.* În general, un sistem de ordinul I este de forma

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1},$$

unde K este amplificarea în regim staționar (justificați această denumire), iar T este constanta de timp. Pentru diverse caracteristici ale răspunsului la treaptă, dați click dreapta pe figură și selectați din Characteristics mărimile de interes.

b) Studiem în continuare răspunsul în frecvență. Fie $\omega_0 := \frac{1}{RC} = 100$. Cum se comportă sistemul la intrări armonice de forma $u(t) = \cos(\omega t)$, pentru frecvențe $\omega < \omega_0$? Dar pentru $\omega > \omega_0$? Cât este defazajul dintre semnalul de intrare si cel de ieșire pentru $\omega = \omega_0$? Veți folosi `lsim` și o scalare corespunzătoare a axei timpului.

c) Folosim o sursă de tensiune continuă, $u(t) = 12$ V, $\forall t > 0$. Cât este curentul $i(t)$ prin circuit, după un timp suficient de mare? Dar tensiunea de pe condensator? Determinaţi analitic şi grafic răspunsul permanent şi răspunsul tranzitoriu al sistemului la intrare treaptă.

Exerciţiul 9. (1p) Considerăm un sistem mecanic format dintr-o locomotivă de masă m_1 şi un vagon de masă m_2, care întâmpină din partea aerului o rezistenţă proporţională cu viteza, de constantă b. Modelăm cuplajul dintre cele două corpuri printr-un resort de constantă de elasticitate k. Notăm poziţia corpurilor la momentul t cu $x_1(t)$, respectiv $x_2(t)$. Locomotiva dezvoltă o forţă de tracţiune $F(t)$. Se cere:

a) Scrieţi ecuaţiile dinamice pentru cele două corpuri. Aplicaţi transformata Laplace, în condiţii iniţiale nule.

b) Sistemul dat are o intrare $F(s)$ şi două ieşiri, $X_1(s)$ şi $X_2(s)$. Scrieţi cele două ecuaţii de la punctul anterior sub forma

$$A(s) \cdot \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F(s),$$

unde $A(s)$ este o matrice de dimensiune 2×2 care depinde de variabila $s \in \mathbb{C}$.

c) Precum este evident, funcţia de transfer pentru sistemul dat este o matrice de 2×1:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = H(s)F(s), \quad H(s) = \begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix},$$

unde $H_i(s) = \frac{X_i(s)}{F(s)}, i \in \{1, 2\}$. Calculaţi $H(s)$, prelucrând relaţia de la punctul anterior. Când este inversabilă matricea $A(s)$?

d) Fie $m_1 = m_2 = 1$ kg, $b = 0.2$ J/m, $k = 4$ N/m. Reprezentaţi $H(s)$ în Matlab ca obiect (vezi Secţiunea 2.4). Determinaţi răspunsul la impuls. Este sistemul stabil? Argumentaţi riguros.

e) Determinaţi răspunsul sistemului la intrări armonice de diferite frecvenţe $\omega > \omega_n$ sau $\omega < \omega_n$. Observaţi că frecvenţa de rezonanţă este $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 2$ rad/sec.

Exerciţiul 10. (1p) Fie circuitul RLC, cu $R = 2\Omega, L = 1\text{H}, C = 0.5\text{F}$, având funcţia de transfer

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

a) Determinaţi răspunsul la treaptă unitară, în două moduri: analitic, i.e., calculaţi $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, şi în Matlab, cu funcţia `step`. Verificaţi rezultatele obţinute.

b) Reluaţi punctul anterior pentru $u(t) = t \cdot 1(t)$.

c) Calculaţi ω_n. Reprezentaţi grafic în Matlab răspunsul sistemului la intrări armonice $u_i(t) = \sin(\omega_i t)$, $i = 1, 2, 3$, pentru $\omega_1 < \omega_n$, $\omega_2 = \omega_n$, respectiv pentru $\omega_3 > \omega_n$. Calculaţi de asemenea $|H(j\omega_i)|$, $i = 1, 2, 3$ şi verificaţi grafic rezultatele.

d) Fie `w = logspace(-2, 2, 100)`. Reprezentaţi grafic în Matlab $f(\omega) = |H(j\omega)|$ şi $g(\omega) = \arg H(j\omega)$. Verificaţi rezultatele de la punctul anterior. *Indicaţie.* Veţi folosi funcţiile `abs(H)`, `angle(H)`, unde `H` este un vector de numere complexe. Pentru reprezentarea grafică, apelaţi `semilogx(w,H)`.

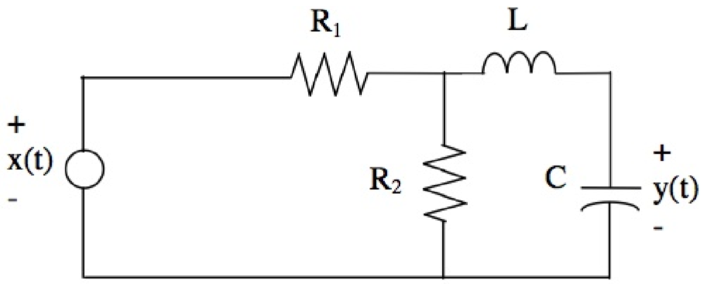


Figura 8: Circuitul de la Exerciţiul 11

Exerciţiul 11. (1p) Considerăm circuitul din figura 8, cu $R_1 = R_2 = 2\ k\Omega$, $C = 100\mu\text{F}$, $L = 10$ mH. Cerinţe:

a) Scrieţi ecuaţiile diferenţiale pentru sistemul dat şi determinaţi funcţia de transfer $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ în termenii $R_1,\ R_2,\ C,\ L$.

b) Reprezentaţi polii şi zerourile sistemului în planul complex. Este acesta stabil?

c) Reprezentaţi grafic răspunsul la impuls, respectiv la treaptă unitară. Calculaţi şi reprezenaţi grafic $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.

d) Fie `w = logspace(-2, 2, 100)`. Reprezentaţi grafic în Matlab $f(\omega) = |H(j\omega)|$. *Indicaţie.* Veţi folosi funcţia `abs(H)`, unde `H` este un vector de numere complexe. Pentru reprezentarea grafică, apelaţi `semilogx(w,H)`.

e) Reprezentaţi grafic în Matlab răspunsul sistemului la intrare armonică $x(t) = \sin(\omega t)$ pentru un ω ales de voi. Se verifică rezultatele de la punctul anterior?

Programe Matlab

Exercitiul 1

a)

```
clear; clc; close all;

n = -10:10;
t = -10:.01:10;

u1d = exp(-n); u2d = n.*cos(pi*n);

y1d = fliplr(u1d); y2d = fliplr(u2d);

u1 = exp(-t); u2 = t.*cos(pi*t);

y1 = u1.*cos(t+1); y2 = u2.*cos(t+1);

figure; subplot(211); stem(n,u1d);
                      xlabel('n');
                      ylabel('u_{1d}[n]')
        title('Raspunsul sistemului \Sigma_1 la u_1[n]')
        subplot(212); stem(n,y1d,'r');
                      xlabel('n');
                      ylabel('y_{1d}[n]')

figure; subplot(211); stem(n,u2d);
                      xlabel('n');
                      ylabel('u_{2d}[n]')
        title('Raspunsul sistemului \Sigma_1 la u_2[n]')
        subplot(212); stem(n,y2d,'r');
                      xlabel('n');
                      ylabel('y_{2d}[n]')

figure; subplot(211); plot(t,u1);
                      xlabel('t');
                      ylabel('u_{1}(t)')
        title('Raspunsul sistemului \Sigma_2 la u_1(t)')
        subplot(212); plot(t,y1,'r');
                      xlabel('t');
                      ylabel('y_{1}(t)')

figure; subplot(211); plot(t,u2);
                      xlabel('t');
                      ylabel('u_{2}(t)')
        title('Raspunsul sistemului \Sigma_2 la u_2(t)')
        subplot(212); plot(t,y2,'r');
                      xlabel('t');
                      ylabel('y_{2}(t)')
```

c)

```
a = 10;
t = linspace(-a,a,2000*a);

% Sistemul 1
u1 = exp(-t/10).*sin(6*t);
u2 = sinc(t);
u  = u1+u2;

y1 = (t.^2).*u1;
y2 = (t.^2).*u2;
y  = (t.^2).*u;
yp = y1+y2;

figure(1);
plot(t,y,t,yp,'--r'); grid;
title('Sistemul 1');
legend('y(t)=t^2u(t)','y(t)=y_1(t)+y_2(t)');

% Sistemul 2
y1 = u1.^2;
y2 = u2.^2;
y  = u.^2;
yp = u1+u2;

figure(2)
plot(t,y,t,yp,'-r'); grid
title('Sistemul 2');
legend('y(t)=u^2(t)','y(t)=y_1(t)+y_2(t)');
```

Exerciţiul 4

```
clear; close all

Fs = 1000;
t = 0:1/Fs:15;
u = cos(2*t).*sin(30*t);
h = exp(-t);
H = tf(1,[1 1]);

y1 = conv(h,u)/Fs;
y2 = lsim(H,u,t);
y3 = dsolve('Dy+y=cos(2*t)*sin(30*t)','y(0)=0');

subplot(311);
plot(t,y1(1:length(y2)),'g'); grid
xlabel('t'); ylabel('y(t) prin conv')
```

```
title('Raspuns in timp al circuitului RC prin 3 metode')

subplot(312);
plot(t,y2,'r'); grid
xlabel('t'); ylabel('y(t) prin lsim')

subplot(313);
ezplot(y3,[0 15]); grid
xlabel('t'); ylabel('y(t) prin dsolve')
```