Reglare automată–compensatorul PID. Discretizare

Tudor C. Ionescu, Monica Pătrașcu

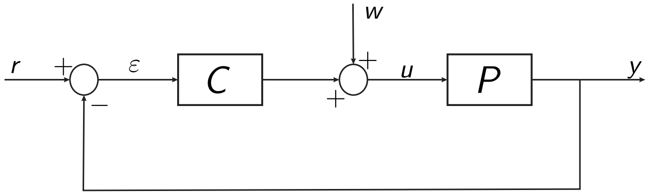
Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnică din București

e-mail: `tudor.ionescu@upb.ro`

URL: `http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/`

16 noiembrie 2020

Introducere



Control în buclă închisă pentru

1. stabilizare;
2. performanțe în regim staționar = urmărirea referinței $r+$ rejecția peturbației w la o referință constantă (treaptă), ieșirea sistemului în b.î. converge către valoarea dorită (amplificată cu DC gain) indiferent de perturbațiile/sarcina care afectează sistemul (e.g., sarcină = încărcarea pe motorul de c.c.);
3. performanțe de regim tranzitoriu: suprareglaj, timp tranzitoriu[1] etc. bune.

[1] Definite în Cap. 3.

Introducere–reformulare sistemică

Funcțiile de transfer ale bucle închise sunt[2]

$$r \longrightarrow \boxed{T = \frac{L}{1+L}} \longrightarrow y \qquad w \longrightarrow \boxed{PS = \frac{P}{1+L}} \longrightarrow y$$

$$r \longrightarrow \boxed{S = \frac{1}{1+L}} \longrightarrow \varepsilon \qquad w \longrightarrow \boxed{-PS = -\frac{P}{1+L}} \longrightarrow \varepsilon$$

unde

$$L(s) = P(s)C(s).$$

Calculăm $C(s)$ a.î.

i) să asigurăm stabilitatea internă a buclei $\Rightarrow$ $T(s)$ stabilă și $S(s)$ stabilă.

ii) performanțe în regim staționar $= y_p \approx T(0)r, \forall w$ dintr-o clasă de semnale (de obicei aceeași din care face parte și r). Echivalent $\varepsilon_p = 0, \ \forall w$;

iii) performanțe de regim tranzitoriu: suprareglaj, timp tranzitoriu bune.

[2] TEMĂ: Calculați-le folosind conexiunile sistemelor, Cap. 2.

Introducere: întrebări naturale despre sistemul în b. î.

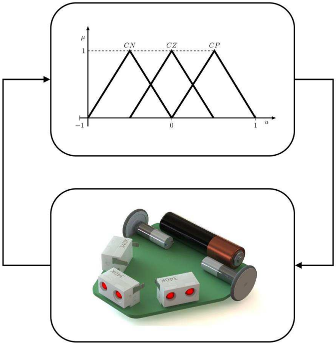
- Este suficient un simplu compenator $C = K > 0$? Nu, deoarece nu poate elimina neapărat erorile sau face față unor perturbații/sarcini mai serioase.

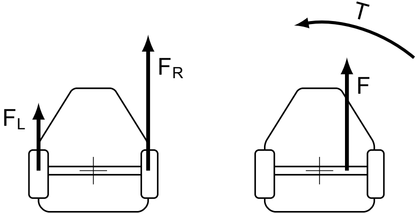
- Care este varianta simplă și la îndemână? Varianta utilizată cu precădere în industrie, pentru procese de ordin I și II (clasă largă) este varianta PID și derivatele sale.

- Este cea mai bună? Nu, dar este foarte răspândită și implementată. Are limitări, nu e robust. Există algoritmi avansați de reglare,
  - bazați pe concepte de tip analiză (a răspunsului) în frecvență (al lui $L(s)$);
  - bazați pe analiza *matriceală* a sistemelor dinamice pe spațiul stărilor $\leftarrow$ Cap. 8 – compensatorul Kalman.

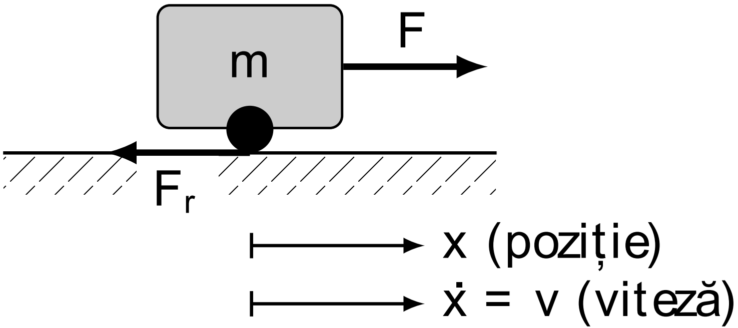
- Noi ce studiem? Bazele reglării, unde PID este relevant atât dpdv didactic, cât și practic $\leftarrow$ aplicație directă a cap 3 $\leftarrow$ studiu de caz!

Roboțel–neliniar (no formulae)





Roboțel–model liniarizat



Roboțelul: funcția de transfer

$$\boxed{Y(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} U(s) + \frac{K_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} W(s)}$$ [3],

unde $\tau_{1,2}$ sunt constante de timp și $K_{1,2}$ sunt amplificări care depind de parametrii electromecanici ai robotului.

Observația 1

În general, dacă $\tau_1 \gg \tau_2$, acestea pot avea și semnificații specifice, respectiv, τ_1 constanta de timp mecanică, iar τ_2 constantă de timp electrică.

Sistemul este stabil $\Rightarrow$ răspunsul în timp are regim permanent și regim tranzitoriu.

Pentru u și w constante $\Longrightarrow$ în regim staționar

$$y_p = K_1 u + K_2 w.$$

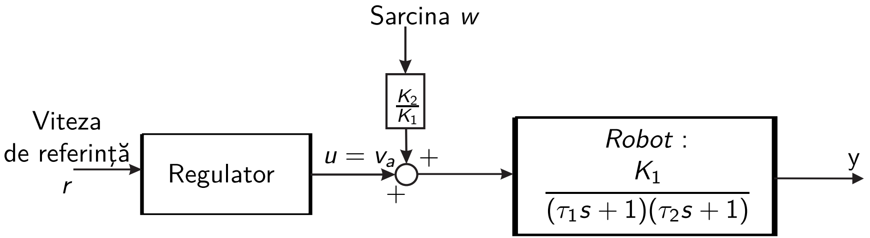
[3] M. Pătrașcu, T. C. Ionescu și F. Stoican, *Sisteme de conducere pentru roboți mobili*, Politehnica Press, 2018.

1. Introducere
   - Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
   - Schema de control în buclă deschisă

2. Control în buclă închisă – PID
   - Schema de control în buclă închisă
   - Stabilitatea internă a buclei de reacție
   - Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
   - Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
   - Acordarea regulatoarelor

3. Discretizarea sistemelor cu timp continuu
   - Eșantionare, discretizare
   - Discretizarea PID

Reglare în buclă deschisă (open-loop control)



- Regulator $C(s) = K > 0 \Rightarrow u = Kr \leftarrow$ comanda.
- K este determinat de regimul staționar $y_p = K_1 u + K_2 w$, atunci când sarcina nu este prezentă $\Rightarrow K = \dfrac{1}{K_1}$.

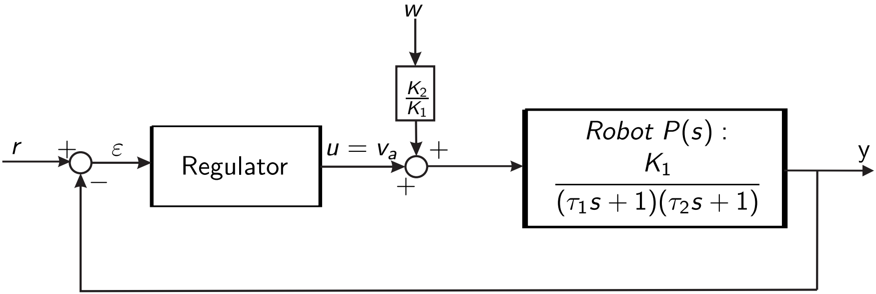
Concluzie: Când nu există sarcină, în regim staționar, obținem performanța $y_p = K_1 u = K_1 \frac{1}{K_1} r = r$.

Q: Dacă punem o sarcină constantă w? Atunci $y_p - r = \epsilon_p = K_2 w \neq 0$, i.e., sensibilitatea sistemului la perturbații este foarte mare, i.e., la orice perturbație eroarea devine nenulă.

Q: Cum descreștem această sensibilitate? altfel spus, cum rejectăm perturbația?

În buclă închisă!

Control în buclă închisă – closed-loop. Ce dorim?



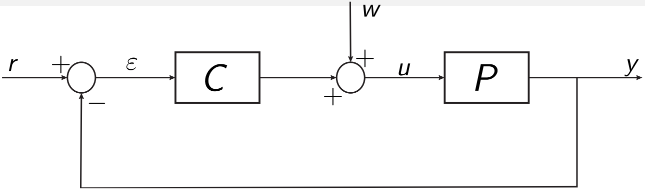
- Stabilitate în buclă închisă.
- Urmărirea referinței $r \leftarrow$ de obicei constantă, e.g., treaptă unitară.
- Rejecția perturbației $w \leftarrow$ semnale uzuale sau semnale din alte clase.
- Performanțe de regim tranzitoriu, i.e., limitarea suprareglajului, timp tranzitoriu etc. (vezi și Cap. 3).
- Implementabilitate fizică, i.e., regulatorul e o funcție de transfer (strict) proprie.
- Implementarea pe o mașină de calcul, i.e., discretizarea $\leftarrow$ fără afectarea performanțelor.

1. Introducere
   - Studiu de caz: Controlul vitezei de translație și al poziției unui roboțel mobil
   - Schema de control în buclă deschisă

2. Control în buclă închisă – PID
   - Schema de control în buclă închisă
   - Stabilitatea internă a buclei de reacție
   - Performanțele de regim staționar - Principiul modelului intern
   - Regulatorul proporțional-integrator-derivativ PID
   - Acordarea regulatoarelor

3. Discretizarea sistemelor cu timp continuu
   - Eșantionare, discretizare
   - Discretizarea PID

Stabilitate internă



Definiția 2

Un sistem în buclă de reacție (negativă) este intern stabil dacă și numai dacă toate funcțiile de transfer care apar în bucla de reacție sunt stabile.

Pentru configurața din figură, bucla este intern stabilă $\Leftrightarrow T_{yr} = T = \dfrac{PC}{1+PC}$ e stabilă, $T_{\varepsilon r} = S = 1 - T = \dfrac{1}{1+PC}$ e stabilă, $T_{yd} = PS = \dfrac{P}{1+PC}$ e stabilă și $T_{ur} = CS = \dfrac{C}{1+PC}$ e stabilă.

Motivația inginerească: Trebuie asigurat că transferul de la orice semnal (perturbație) injectat (apărută) în buclă la orice semnal din buclă nu destabilizează sistemul.

Principiul modelului intern (PMI)

Pentru a satisface condițiile de performanță în regim staționar, trebuie ca modelul exogenului să se regăsească într-o formă explicită pe calea directă în modelul procesului sau al compensatorului.

Teorema 3 (Principiul Modelului Intern)

Fie $T = L/(1+L)$ o funcție de transfer în b.î., unde $L = PC$, $R = r_r/p_r$ funcția de transfer a referinței r și $W = r_w/p_w$ funcția de transfer a perturbației w, cu $r_r,\ r_w$ și $p_r,\ p_w$ polinoame. Presupunem că R și W sunt instabile, i.e., r și w sunt semnale persistente *(vezi Cap. 3). În ipoteza că C este un compensator stabilizator, i.e., T este stabilă $\Leftrightarrow S = 1 - T$ este stabilă, atunci*

1. *Referința r este urmărită $\Leftrightarrow \varepsilon_p = y_p - r = 0 \Leftrightarrow L = \widetilde{L} \cdot \dfrac{1}{p_r} \Leftrightarrow$ polii lui R* sunt *printre polii lui L $\Leftrightarrow$ polii lui R* sunt *printre zerourile lui S;*
2. *Perturbația w este rejectată $\Leftrightarrow y_p|_{r=0} = 0, \forall w \neq 0 \Leftrightarrow$ polii lui W* sunt *printre zerourile lui $PS = \dfrac{P}{1+PC} \Leftrightarrow$ polii lui W* sunt *printre zerourile lui P sau polii lui C.*

Regulatoare de tip PID

Majoritatea sistemelor de reglare automată din industrie funcționează cu regulatoare PID.

- Structură simplă, ușor de implementat.
- Implică acordarea a trei parametrii: $\{K, T_i, T_d\}$, sau $\{K, K_i, K_d\}$.
  - Legea de comandă: $\boxed{u(t) = K\left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau + T_d\dot{\varepsilon}\right)}$, sau

$$\boxed{u(t) = \underbrace{K\varepsilon(t)}_{\text{proporțional}} + \underbrace{K_i\int \varepsilon(t)\mathrm{d}t}_{\text{integral}} + \underbrace{K_d\dot{\varepsilon}}_{\text{diferențial}}}.$$

  - Regulator: $C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$, sau $C(s) = K + \frac{K_i}{s} + K_d s$.
  - Implementabilitate: introducem un filtru foarte rapid pe componenta D: $\frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1}$, unde $\alpha \ll 1$, a.î. constanta de timp a filtrului să fie (neglijabilă) cu mult mai mică decât $K \leftarrow$ răspuns aproape instantaneu al filtrului.

Regulatoare PID - avantaje vs. limitări

Componentă	Avantaje	Limitări
K	Cu cât crește, ε_p scade.	Foarte mare, destabilizează sistemul.
K_i, T_i	$\varepsilon_p = 0$ la treaptă, ε_p ct. la rampă.	Reduce rezerva de stabilitate. Răspuns dinamic lent.
K_d, T_d	Anticipează evoluția erorii. Corectează oscilațiile, îmbunătățind performanțele de regim tranzitoriu. Nu are efect asupra regimului staționar.	Sensibilă la zgomote.

Roboțelul: plasarea polilor b.î. Polii lui $T(s)$ sunt soluțiile ecuației

$$\tau_1\tau_2 T_i s^3 + T_i(\tau_1 + \tau_2 + K_1 K T_d)s^2 + T_i(1 + K_1 K)s + K_1 K = 0.$$

Analiză: Avem trei grade de libertate pentru a încerca plasarea cât mai bună a polilor $\leftarrow$ criterii de acordare a PID.

Aplicație a PMI: performanța staționară cu regulator PI

Știm că $R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow s = 0$ este pol al lui R.

$L(s) = P(s)\left(K + \frac{K_i}{s}\right) = P(s)\frac{sK + K_i}{s} \Rightarrow s = 0$ este pol al lui L.

Astfel,

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + P(s)\frac{sK+K_i}{s}} = \frac{s}{s + P(s)(sK + K_i)}.$$

Prin urmare $s = 0$ este zerou al lui $S(s) \Leftrightarrow S(0) = 0$. Presupunând că K și K_i sunt aleși astfel încât S este stabilă, conform PMI, $\varepsilon_p = 0$.

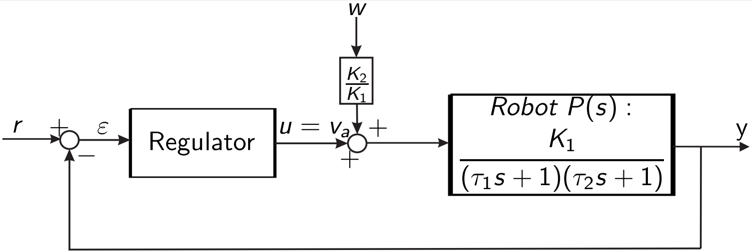
Demonstrație: Deoarece sistemul în b.î. este stabil, aplicăm TVF $\Rightarrow$

$$\varepsilon_p = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \overset{\text{TVF}}{=} \lim_{s\to 0} s \cdot \underbrace{S(s) \cdot R(s)}_{\varepsilon(s)} = \lim_{s\to 0} s \cdot S(s) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} S(s).$$

Deoarece S este stabilă, nu are poli în origine $\Rightarrow S$ este continuă în zero. În concluzie,

$$\varepsilon_p = S(0) = 0.$$

Aplicație: reglarea vitezei roboțelului



Roboțel (proces):

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)} = \frac{r(s)}{p(s)},$$

cu constantele de timp $\tau_1 = 0.5$ și $\tau_2 = 0.125$ și amplificarea $K_1 = 0.0625$.

Se cer următoarele performanțe ale SRA:

1. Eroare staționară *zero* la referință treaptă.
2. Suprareglaj mai mic de 5%.
3. Timp tranzitoriu mai mic de 1.5 sec.
4. Eroare staționară mai mică de 25% la referință de tip rampă.

Alegerea regulatorului: de tip PI

- Regulatorul:

$$C(s) = K + \frac{K_i}{s} = \frac{Ks + K_i}{s} = \frac{r_c(s)}{s}, \quad \text{cu} \quad r_c(s) = Ks + K_i.$$

- În regim staționar, deoarece avem PI $\Rightarrow \varepsilon_{st,\text{treaptă}} = 0$ datorită integratorului.
- Despre performanța staționară la sarcină rampă.

Demonstrație.

$$\varepsilon(s) = T_{\varepsilon r}(s)R(s) = S(s)R(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}R(s) = \frac{s}{s + P(s)r_c(s)}R(s),$$

unde $R(s) = 1/s$, sau $R(s) = 1/s^2$, iar cerințele de regim staționar sunt cuantificate (TVF) în forma[4]

$$(a) : \varepsilon_{st,\text{treaptă}}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,S(s)\,\frac{1}{s} = S(0) = \left.\frac{s}{s + P(s)r_c(s)}\right|_{s=0} = 0,$$

$$(d) : \varepsilon_{p,\text{rampă}}(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,S(s)\,\frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s + P(s)r_c(s)} = \frac{1}{P(0)r_c(0)} = \frac{16}{K_i} < \frac{1}{4}.$$

[4] Recall aplicarea PMI la regulatorul PI.

Performanțe de regim staționar

Stabilitate. Polinomul caracteristic în buclă închisă este

$$\chi(s) = r(s)r_c(s) + p(s)p_c(s) = s^3 + 10s^2 + (16 + K)s + K_i.$$

Aplicând criteriul Hurwitz (polinom de gradul 3), rezultă că stabilitatea este asigurată de inegalitățile

$$K_i > 0, \;\; 10(K + 16) - K_i > 0 \iff K_i > 0, \;\; K > \frac{K_i}{10} - 16.$$

Erori staționare. Cerința (a) este automat în deplinită prin prezența componentei integrale, iar cerința (d) $\Rightarrow$

$$\frac{16}{K_i} < \frac{1}{4} \iff K_i > 64 > 0.$$

Performanțe de regim tranzitoriu

Acestea se vor impune celor doi **poli dominanți** ai sistemului în buclă închisă. Utilizăm deci evaluările indicatorilor de performanță deduse pentru sistemele de ordin 2.

Pe de o parte, din $t_t \leq 1.5$ rezultă $\zeta\omega_n > \dfrac{4}{1.5} = 2.6$, adică $\operatorname{Re} p < -2.6$. Pe de altă parte, $\sigma < 5\%$ implică $\zeta \geq 0.7$ - vezi tabelul din Cap. 3.

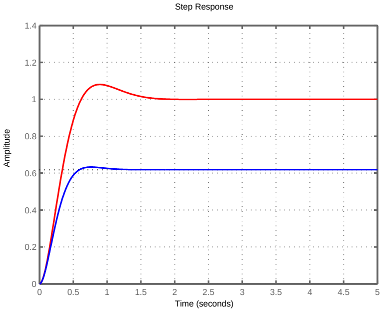
Polii trebuie așadar plasați în semiplanul stâng, în intersecția dintre semiplanul deschis $\operatorname{Re} s < -2.6$ și interiorul unghiului centrat în origine cu valoarea $2\arccos(0.7)$ - vezi Cap. 3.

Prima condiție este satisfăcută dacă $\dfrac{K_i}{K} < 4.7$ iar cea de-a doua dacă $K < 30$ (fixând în prealabil $\frac{K_i}{K} = 2.5 < 4.7$).

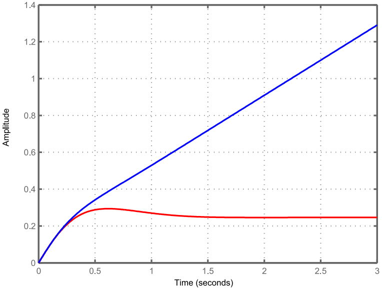
O alegere posibilă pentru regulator este, de exemplu,

$$C(s) = 26 + \frac{65}{s}.$$

Răspunsurile la referință treaptă, respectiv, rampă



(c) y_p la treaptă, P (albastru), PI (roșu)



(d) ε_p la rampă, P (albastru), PI (roșu)

Acordarea regulatorului

- Determinarea valorilor parametrilor K, $T_i(K_i)$, $T_d(K_d)$ care asigură pentru un proces dat comportarea dorită a SRA în raport cu referința și perturbațiile care acționează asupra procesului.

- Acordare pentru procese rapide și pentru procese lente.

- Procese rapide $\leftarrow$ au constante de timp $T_k < 10s$ (constante dominante) și constante parazite (în general cu cel puțin un ordin de mărime mai mic decât constantele dominante)

Reglare numerică

Compensatorul (regulatorul) poate fi realizat *fizic* cu ajutorul unui dispozitiv (circuit electric, valvă comandata automat etc.)

Q: Dar dacă este înlocuit cu un calculator?

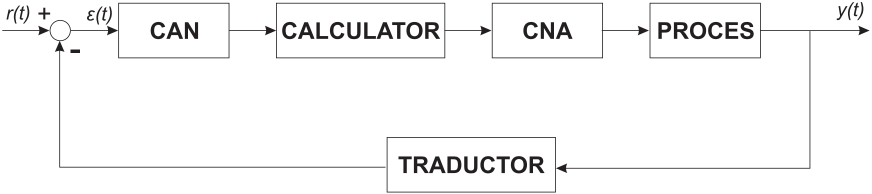


Figura 1: Reglare numerică

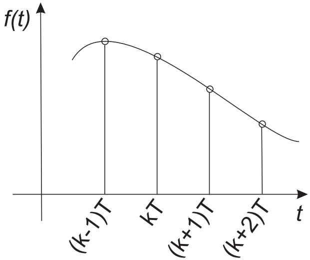
Regulator = calculator de proces

Eșantionare (conversie analogic-numeric)

Eșantionarea transformă un semnal continual într-un semnal (cu timp) discret:

$$f_d(k) := f(kT_s),$$

unde $T_s > 0$ se numește perioadă (sau pas) de eșantionare (discretizare).



Numim frecvență
(sau rată) de eșantionare inversul lui T_s,

$$\nu_s = \frac{1}{T_s}.$$

Q: Reconstrucția unui semnal din eșantioane: cum alegem T ca să nu se piardă din „informație" și să putem reconstrui semnalul?
A: Th. lui Shannon: $\nu_s > 2\nu$, unde ν cea mai înaltă frecvență a unei componente de amplitudine semnificativă. Frecvența de eșantionare se alege astfel incât spectrul semnalului continual sa fie nul deasupra frecvenței Nyquist $\nu_N = \nu_s/2$.

Extrapolare (conversie numeric-analogic)

Două metode de a reconstrui un semnal continual din eșantioanele $f_d(k) = f(kT_s)$.

Extrapolator de ordin 0: $f(t) \approx f(kT_s), \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s$.

Extrapolator de ordin 1: $f(t) \approx f(kT_s) + \frac{f((k+1)T_s) - f(kT_s)}{T_s}(t - kT_s)$, $kT_s \leq t < (k+1)T_s$.

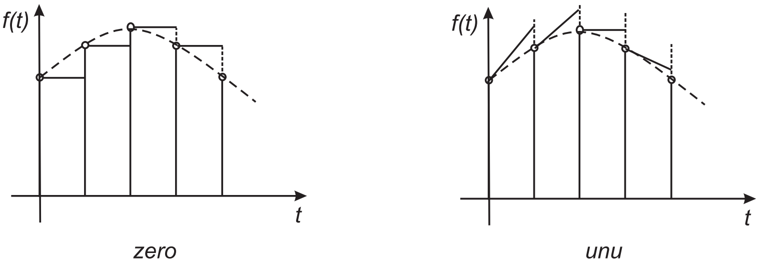


Figura 2: Extrapolator de ordin 0 și de ordin 1

Discretizarea sistemelor continue

Considerăm sistemul $H(s)$. Ne propunem să obținem expresia discretizatului acestuia, $H_d(z)$ cunoscând pasul T și faptul că utilizăm un extrapolator de ordin zero (CNA) și un eșantionator ideal (CAN).

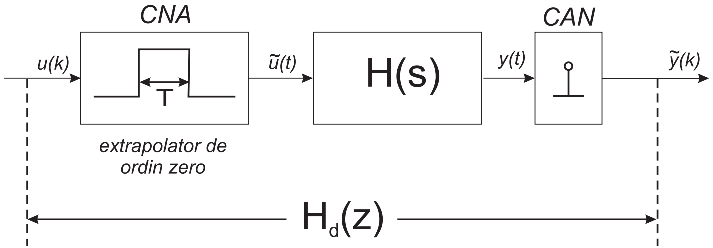


Figura 3: Discretizarea sistemelor continue

Vom calcula transformata $\mathcal{Z}$ a funcției pondere $h_d(k)$. Aceasta este răspunsul sistemului *discret* la intrare impuls discret, $\delta(k)$. Deducem că

$$\tilde{u}(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T).$$

Discretizarea sistemelor continue

Deoarece H este liniar și invariant in timp, $y(t) = y_{tr}(t) - y_{tr}(t-T)$, unde y_{tr} este răspunsul la treaptă al lui H. În consecință, răspunsul lui H_d la **impuls discret** este

$$\tilde{y}(k) = y(kT) = y_{tr}(kT) - y_{tr}(k(T-1)) = \tilde{y}_{tr}(k) - \tilde{y}_{tr}(k-1).$$

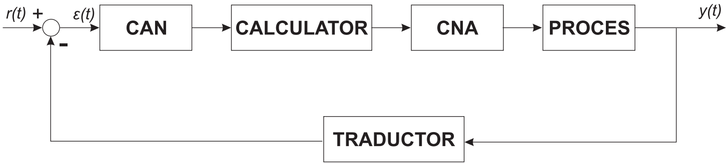
Rezultă că

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \mathcal{Z}\left\{\tilde{y}(k)\right\}(z) = \mathcal{Z}\left\{\tilde{y}_{tr}(k) - \tilde{y}_{tr}(k-1)\right\}(z) \overset{\text{formal!}}{=} (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{y_{tr}(s)\right\}(z) \\ &= (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\}(z) = \frac{z-1}{z}\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{H(s)}{s}\frac{z}{z-e^{sT}}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sunt polii raționalei $\frac{H(s)}{s}$, atunci

$$H_d(z) = (z-1)\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Rez}\left(\frac{H(s)}{s}\frac{1}{z-e^{sT}}; p_i\right).$$

Metode de discretizare



Met. I. Pentru procesul $P(s)$, folosim transformarea $\mathcal{Z}$ a CNA și P:

$$P_d(z) = (z-1)\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Rez}\left(\frac{P(s)}{s}\frac{1}{z-e^{sT}}; p_i\right).$$

Matlab: `c2d` cu parametrul `'zoh'` .

Met II. Aproximări (pentru $C(s)$)

- Euler (dreptunghiular): $H_d(z) = H(s)$ în $s = \dfrac{T}{1-z^{-1}}$, $z = e^{sT}$. Nu este implementată în Matlab;
- Metoda trapezelor: $H_d(z) = H(s)$ în $s = \dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, $z = e^{sT}$. Implementată în Matlab: `c2d` cu parametrul `'tustin'`.

Metode de sinteză - pe scurt

I. Se proiectează un compensator continuu C și se discretizează: cu metoda Euler sau cu metoda trapezelor.

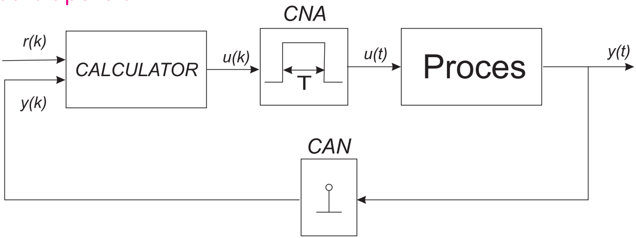


Figura 4: Regulator discret

Avantaje

- se analizează comportamentul în circuit inchis și, dacă este cazul, se reiterează procedura modificând T_s.
- echivalentul discret al lui C se implementează direct în calculator pentru formele standard (de exemplu PID).
- alegerea lui T_s: se alege (euristic) astfel încât să împartă exact toate constantele de timp pentru a nu pierde informație.

Metode de sinteză - pe scurt

Dezavantaje

- important: $t_{calcul} \leq 0.1 T_s$;
- există întârziere în comandă (aprox. $\frac{T_s}{2}$).

II. Se discretizează procesul și se proiectează un compensator discret C_d pentru P_d.

- alegerea ratei de eșantionare: în practică, ω_s trebuie ales mult mai mare decât frecvența la care apare zgomotul de măsură.
  Prefiltrare cu un filtru de tip trece-jos.
- ω_s mare: micșorează întârzierea între o comandă și răspunsul sistemului la comandă.
- Proiectare: metode clasice; fie intrare-ieșire (clasa tuturor compensatoarelor stabilizatoare + condiții de interpolare), fie pe stare (compensator Kalman + principiul modelului intern).

Implementarea comenzii PID

Datorită procesoarelor existente, destul de puternice (inclusiv pe plăci gen `Arduino`), alegând $T_s < 50ms$, legile PID se pot implementa într-o formă aproape continuă (frecvența foarte mare a procesoarelor emulează un comportament cvasi-continuu).

Exemplu: Comandă PD: $u_k = K\varepsilon_k + K_d \dfrac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{T_s}$. Necesită apoi acordarea parametrilor pentru perfomanțe tranzitorii dorite.

Comandă PI: $u_k = K\varepsilon_k + K_i \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_{k-i}$.

Observația 4

Pot apărea saturații ale elementelor de execuție datorită sumei care acumulează erorile $\leftarrow$ fenomen de windup: din cauză că L are un pol în zero care poate genera instabilitate pe calea directă. Pot apărea suprareglaje foarte mari care distrug instalația. *Soluție:* o buclă rapidă de stabilizare cu o amplificare K_a pe reacție la componenta integratoare.