Teoria Sistemelor
Laboratorul 3. Sisteme şi răspuns dinamic

1 Scopul laboratorului

Scopul laboratorului este studierea răspunsului dinamic (în domeniul timp) al sistemelor de convoluţie *Single-Input Single-Output* (SISO), invariante în timp având transformata Laplace a funcţiei pondere o raţională proprie. Un astfel de sistem se poate descrie întotdeauna complet prin intermediul funcţiei de transfer :

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{1}$$

unde $B(s)$ şi $A(s)$ sunt polinoame cu coeficienţi reali cu $\partial B(s) \leq \partial A(s)$. Uzual $B(s)$ şi $A(s)$ sunt presupuse coprime a.i. rădăcinile lor au semnificaţia de zerouri, respectiv de poli ai sistemului $H(s)$.

2 Moduri de reprezentare a unui sistem SISO

Un sistem (1) se poate descrie prin intermediul funcţiei de transfer în mai multe moduri:

1) Direct prin coeficienţii funcţiei raţionale:

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \cdots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots a_1 s + a_0} \tag{2}$$

unde $b_i, a_j \in \mathbb{R},\ i = 0 : m,\ j = 0 : n,\ m \leq n$;

2) In forma poli-zerouri:

(a) cu coeficienţi complecşi

$$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)} \tag{3}$$

unde $k \in \mathbb{R},\ z_i \in \mathbb{C},\ p_j \in \mathbb{C},\ i = 1 : m,\ j = 1 : n.$

(b) cu coeficienţi reali

$$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (s - z_i) \prod_{i=1}^{m_2} (s^2 + 2\zeta_{z_i}\omega_{z_i} + \omega_{z_i}^2)}{\prod_{j=1}^{n_1} (s - p_j) \prod_{i=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_{p_i}\omega_{p_i} + \omega_{p_i}^2)} \tag{4}$$

unde $k \in \mathbb{R},\ z_i, p_j \in \mathbb{R},\ -1 \leq \zeta_{z_i} \leq 1,\ -1 \leq \zeta_{p_i} \leq 1,\ \omega_{z_i}, \omega_{p_i} \in \mathbb{R}^+.$

In MATLAB un sistem este reprezentat astfel:

1) sub formă de funcţie de transfer folosind funcţia `tf`:

```
H=tf(num,den)
```

unde `num` şi `den` sunt vectori ce conţin coeficienţii numărătorului, respectiv ai numitorului funcţiei de transfer, aceştia fiind aşezaţi în ordinea descrescătoare a puterilor coeficienţilor polinomiali;

2) sub formă de funcţie de transfer în forma poli-zerouri folosind funcţia `zpk` :

```
H=zpk(z,p,k)
```

unde **z** şi **p** sunt vectori ce conţin zerourile, respectiv polii funcţiei de transfer, iar **k** este factorul de amplificare.

In ambele situaţii variabila H este un *obiect* de tip sistem. Se pot realiza conversii între cele două moduri de reprezentare a unui sistem cu ajutorul funcţiilor MATLAB `tf2zp` şi `zp2tf`, cu sintaxa:

```
[z,p,k]=tf2zp(num,den);
[num,den]=zp2tf(z,p,k).
```

Exemplul 1. Folosind comenzile Matlab prezentate mai sus, scrieţi următoarele funcţii de transfer:

$$H_1(s) = \frac{s+5}{s\,(s+1)\,(s+2)}; \quad H_2(s) = \frac{3}{s^2-16}.$$

Rezolvare:

```
H_1=tf([1 5],[1 3 2 0])
H_1=zpk([-5],[0 -1 -2],1)
H_2=tf(3,[1 -16 0])

%ca obiect
s=tf('s');
H_1=(s+5)/(s*(s+1)*(s+2))
H_2=3/(s^2-16)
```

Exemplul 2. Efectuaţi conversia `tf2zpk` pentru funcţia de transfer $H(s) = \frac{s+5}{s^2+3s+1}$.

3 Analiza răspunsului în timp al diverselor sisteme

Răspunsul în timp al unui sistem reprezintă dependenţa ieşirii sistemului de timp, considerată pentru un semnal de intrare specificat. Pentru clasele de sisteme studiate răspunsul în timp la un semnal precizat este unic.

In analiza şi sinteza (proiectarea) sistemelor automate un rol esenţial este jucat de anumite *criterii de performanţă.* In etapa de proiectare aceste criterii de performanţă sunt folosite pentru a ajusta *parametrii sistemului* în vederea obţinerii unei anumite comportări. Sistemele automate sunt inerent dinamice şi de aceea criteriile de performanţă sunt adesea exprimate în termenii *răspunsului în timp* al sistemului la anumite semnale test de intrare. Semnalele test standard (impuls, treaptă, rampă, armonic) sunt o submulţime relativ restrânsă de semnale de intrare la care trebuie să lucreze un anumit sistem. Cu toate acestea, răspunsul în timp al sistemului la semnale complexe poate fi bine evaluat pe baza răspunsului la aceste semnale test standard.

Pentru clasa de sisteme de care ne ocupăm (sisteme de convoluţie cu funcţie de transfer raţională), răspunsul în timp $y(t)$ la semnalul de intrare $u(t)$ se poate obţine în două feluri:

- Prin produsul de convoluţie :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau; \tag{5}$$

- Prin transformarea Laplace inversă :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\cdot U(s)\}(t) \tag{6}$$

In majoritatea covârşitoare a situaţiilor se preferă a doua metodă întrucât calculul relativ complicat al integralei din (5) este redus în (6) la o simplă înmulţire în calcul operaţional. Ca argument suplimentar adăugăm că sistemele sunt cel mai adesea modelate (descrise) prin intermediul funcţiei de transfer raţionale $H(s)$, iar răspunsul sistemelor se studiază la semnale test elementare $u(t)$ a căror transformată Laplace $U(s)$ este disponibilă în tabele; transformata Laplace inversă a lui $Y(s)$ se obţine prin descompunerea în fracţii simple şi folosirea formulelor de inversare standard.

Descompunerea in fractii simple si teorema dezvoltarii sunt prezentate pe larg in curs. Datorită liniarităţii sistemului, se poate observa că răspunsul general se obţine prin superpoziţia răspunsurilor în timp ale unor sisteme mai simple, de ordinul I sau II. Din aceasta cauză este esenţială studierea în detaliu a comportării unor astfel de sisteme elementare la anumite semnale de test de intrare, cum ar fi:

- Impulsul Dirac: $\delta(t)$
- Semnale de tip polinomial: $u(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}1(t)$, $n \geq 1$; uzual $n = 1$ (treaptă), $n = 2$ (rampă) , $n = 3$ (parabolă)
- Semnale armonice : $u(t) = e^{j\omega t}1(t)$, $\omega \geq 0$.

Tabel cu transformatele Laplace ale semnalelor test	
Semnalul $y(t)$	$\mathcal{L}\{y(t)\}$
$\delta(t)$	1
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}1(t)$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{j\omega t}1(t)$	$\frac{1}{s-j\omega}$

Având în vedere că orice specificaţie de proiectare asupra unui sistem automat nu se face decât după asigurarea stabilităţii sistemului vom fi interesaţi în majoritatea cazurilor de răspunsul în timp al sistemelor *stabile* I/O. Sistemele elementare de care ne vom ocupa sunt:

- Element de ordinul I: $H(s) = \frac{K}{1+Ts}$; $K,\ T > 0$;
- Element de ordinul II: $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$, $\omega_n > 0,\ 0 \leq \zeta \leq 1$;

- Element de ordinul II cu pol şi/sau zerou suplimentar:

$$H(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{z}(s+z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},\ \omega_n > 0,\ 0 \leq \zeta \leq 1;$$

In continuare vom pune în evidenţă unele particularităţi ale răspunsului forţat al sistemelor liniare la anumite semnale test. Dacă sistemul este (extern) *strict stabil*, adică polii raţionalei $\mathcal{P}[H(s)] \subset \mathbb{C}^-$, atunci în cazul intrărilor polinomiale sau al celor armonice, răspunsul forţat al sistemului se desface în două componente: una tranzitorie şi cealaltă permanentă de acelaşi tip cu intrarea:

$$y_f(t) = y_p(t) + y_t(t). \tag{7}$$

3.1 Sisteme de ordinul I

Forma generală este:

$$H(s) = \frac{K}{1+Ts} \tag{8}$$

cu $K,\ T \in \mathbb{R}$. Uzual se ia $K > 0$, răspunsul în timp pentru $K < 0$ reducându-se la acest caz printr-o simplă simetrizare în raport cu abscisa.

3.1.1 Răspunsul la impuls.

Fie sistemul descris de funcţia de transfer:

$$H(s) = \frac{1}{s+\sigma}. \tag{9}$$

Aplicând transformarea Laplace inversă rezultă următoarea expresie pentru funcţia pondere $h(t)$ a sistemului :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = e^{-\sigma t}1(t). \tag{10}$$

Dacă $\sigma > 0 \rightarrow$ *polul* $s = -\sigma < 0 \rightarrow$ sistemul e **stabil**;
Dacă $\sigma < 0 \rightarrow$ *polul* $s = -\sigma > 0 \rightarrow$ sistemul e **instabil**.

Exerciţiul 1. Trasaţi răspunsul la impuls pentru $H(s)$, considerând mai întâi valori $\sigma > 0$ şi apoi valori $\sigma < 0$.

Rezolvare: Codul Matlab corespunzator se gaseste in Anexa si in fisierul `L4_ex1.m`. Dacă $\sigma > 0$, cu cât σ creşte, cu atât funcţia pondere scade mai repede. Dacă $\sigma < 0$, cu cât σ creşte în modul, cu atât funcţia pondere creşte mai repede.

Exerciţiul 2. Trasaţi răspunsul la impuls,evidenţiind dependenţa acestuia de poziţia polului $s = -\frac{1}{T}$ (se fixează K, de exemplu $K = 4$ şi se trasează cu **mesh**).

Rezolvare: Codul Matlab corespunzator se gaseste in Anexa si in fisierul `L4_ex2.m`.

Exerciţiul 3. Rulaţi programul din fisierul `L4_ex3.m` reprezentând răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul I şi deduceţi funcţia de transfer a sistemului utilizând graficul obţinut (vezi figura 1).

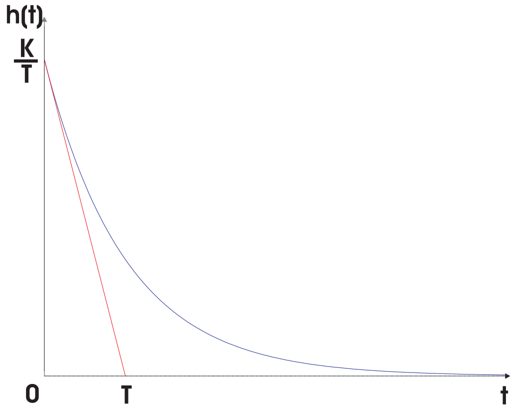


Figura 1: Răspunsul la impuls al unui sistem la ordinul I

Rezolvare: Cunoscând răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul I se pot obţine coeficienţii K şi T conform figurii 1. Să probăm acest lucru. Funcţia de răspuns cauzal la impuls este

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts+1}\right\} = \frac{K}{T}e^{-t/T}1(t).$$

Avem în mod trivial că $h(0) = \frac{K}{T}$. Dreapta de interes trece prin $h(0)$ şi are panta $h'(0)$. Aşadar:

$$x(t) = h'(0) \cdot t + h(0) = -\frac{K}{T^2}t + \frac{K}{T}.$$

Când $x(t) = 0$, $t = T$. Astfel, afirmaţia a fost verificată.

3.1.2 Răspunsul la treaptă unitară

Pentru un sistem de ordinul I în forma generală , raspunsul la treapta este:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{K}{s(1+Ts)}\} = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}),\ t \geq 0. \tag{11}$$

Se constată imediat că $y_p(t) = H(0) = K$, $t \geq 0$, este componenta permanentă , iar $y_t(t) = -Ke^{-\frac{t}{T}}$ este componenta tranzitorie.

Exerciţiul 4. Trasaţi răspunsul la treaptă pentru un sistem stabil parametrizat după $T > 0$. (Indicaţie: folosiţi `mesh`.)

Rezolvare: Fişierul corespunzător este `L3_ex4.m`. Cu cât T este mai mic, cu atât sistemul răspunde *mai rapid* la treaptă .

Exerciţiul 5. Din răspunsul la treaptă al unui sistem de ordinul I determinaţi coeficientii T şi K.

Rezolvare: Rulaţi fişierul `L3_ex5.m`. Cunoscând răspunsul la treaptă unitară al unui

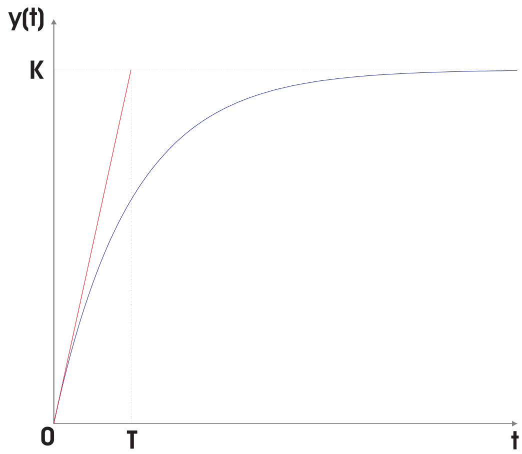


Figura 2: Răspunsul la treapta al unui sistem de ordinul I

sistem de ordinul I se pot obţine coeficienţii K şi T conform figurii 2. Din relaţia (11), avem că $y_f(\infty) = K$ (asimptotic). Dreapta de interes are ecuaţia

$$x(t) = y'(0) \cdot t = \frac{K}{T}t.$$

Când $x(t) = K$, $t = T$.

3.1.3 Răspunsul la rampă

Pentru un sistem de ordinul I în forma generală, raspunsul la treapta este:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^2(1+Ts)}\right\} = K\left(t - T + Te^{-\frac{t}{T}}\right),\ t \geq 0. \tag{12}$$

Cum $H(0) = K$ şi $H'(0) = -KT$ se constată direct că $y_p(t) = H(0)t + H'(0) = K(t-T)$ este componenta permanentă , iar $y_t(t) = KTe^{-\frac{t}{T}}$ este componenta tranzitorie. O altă cale pentru determinarea componentei permanente, respectiv tranzitorii este:

$$y_p(t) = y_f(\infty) = K(t-T),$$

$$y_t(t) = y_f(t) - y_p(t) = Ke^{-t/T}.$$

Exerciţiul 6. Trasaţi un răspuns la rampă în cazul stabil, punând în evidenţă răspunsul permanent şi tranzitoriu,respectiv valorile lui K şi T de pe grafic.

Rezolvare: Rulaţi fişierul `L3_ex6.m`. Cunoscând răspunsul la rampă al unui sistem de ordinul I se pot obţine coeficienţii K şi T conform figurii de mai jos.

3.1.4 Răspunsul la intrare armonică

Pentru un sistem de ordinul I în forma generală, raspunsul este:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s-j\omega)(1+Ts)}\right\} = \frac{K}{1+jT\omega}\left(e^{j\omega T} - e^{-\frac{t}{T}}\right),\ t \geq 0 \tag{13}$$

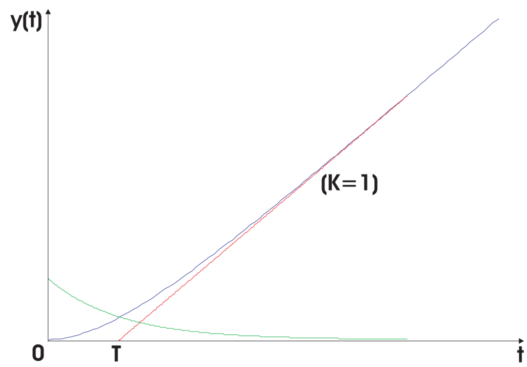


Figura 3: Răspunsul la rampa al unui sistem de ordinul I

Obţinem:

$$y_f(t) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \left[\cos(\omega t - \alpha) - e^{-\frac{t}{T}} \cos\alpha + j\left(\sin(\omega t - \alpha) - e^{-\frac{t}{T}} \sin\alpha\right)\right],\ t \geq 0, \tag{14}$$

unde $\tan\alpha = T\omega$. Partea reală $\mathrm{Re}(y_f(t))$ a răspunsului corespunde intrării $\cos(\omega t)\cdot 1(t)$, iar partea imaginară $\mathrm{Im}(y_f(t))$ corespunde intrării $\sin(\omega t)\cdot 1(t)$. Componenta permanentă "sinusoidală " este

$$y_p(t) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega t - \alpha) \tag{15}$$

evidenţiindu-se modificarea de amplitudine şi defazaj.

Exerciţiul 7. Trasaţi un răspuns la intrare armonică (cazul stabil), punând în evidenţă răspunsul permanent/tranzitoriu, respectiv valorile lui K şi T de pe grafic.

Rezolvare: Cunoscând răspunsul la intrare armonică al unui sistem de ordinul I se pot obţine coeficienţii K şi T conform figurii de mai jos.

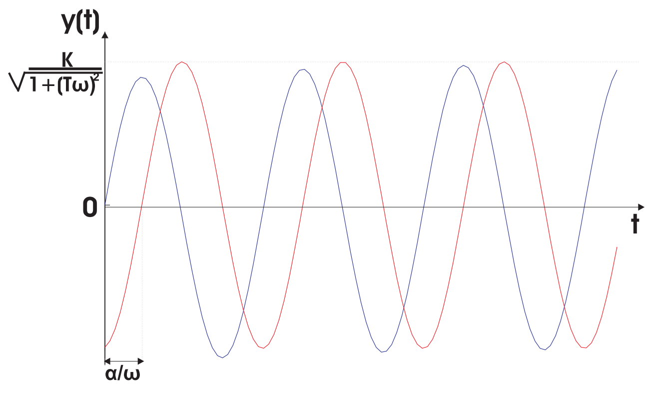


Figura 4: Răspunsul la intrare armonica al unui sistem de ordinul I

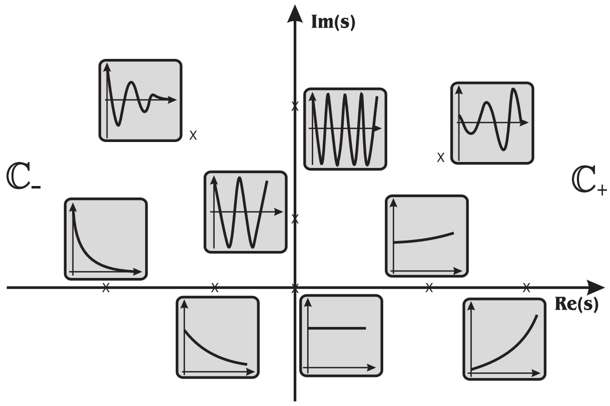


Figura 5: Răspunsul la impuls pentru diverse sisteme de ordin II

3.2 Sisteme de ordinul II cu poli reali

Forma generală este:

$$H(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \tag{16}$$

cu $K,\ T_1,\ T_2 \in \mathbb{R}$, ($T_1 \geq 0,\ T_2 \geq 0$ pentru sisteme stabile).

3.2.1 Răspunsul la impuls

Aplicând transformata Laplace inversă se obţine următoarea funcţie pondere:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = K\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\left(e^{-\frac{1}{T_1}t} - e^{-\frac{1}{T_2}t}\right),\ t \geq 0. \tag{17}$$

Exerciţiul 8. Trasaţi răspunsul la impuls $h(t)$, pentru exemplul de mai jos, considerând pentru p_1 şi p_2 valorile: $-10, -2, 0, 2, 10$:

$$H(s) = \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)}.$$

Rezolvare: Dacă sistemul este stabil (polii sunt negativi) funcţia pondere descreşte cu atât mai repede cu cât polii sunt plasaţi mai la stânga. Dacă sistemul este instabil (polii sunt pozitivi) funcţia pondere creşte exponenţial la infinit.

3.2.2 Răspunsul la treaptă unitară

Pentru un sistem de ordinul II cu poli reali raspunsul la treapta unitara este :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}\right\} = K\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{1}{T_1}t} - \frac{T_2}{T_2 - T_1}e^{-\frac{1}{T_2}t}\right),\ t \geq 0. \tag{18}$$

Exerciţiul 9. Se ia $K > 0$, $T_2 = \alpha T_1$ şi se studiază răspunsul în timp la impuls şi treaptă parametrizat după α . Se observă că este importantă poziţia relativă a polilor (pol dominant).

Exerciţiul 10. Se iau doi poli stabili a.i. $T_2 = 10T_1$ şi se trasează răspunsurile (pe acelaşi grafic) datorate lui T_1, lui T_2 şi ambilor poli, observându-se influenţa fiecăruia în parte. Se studiază răspunsurile la impuls şi la treaptă .

Rezolvare: Din răspunsul în timp al acestor sisteme se observă că polul $-\frac{1}{\alpha T_1}$ este pol dominant, adică răspunsul sistemului este puternic influenţat de prezenţa acestui pol. De asemenea se poate observa că $-\frac{1}{\alpha T_1}$ este un pol lent şi $-\frac{1}{T_1}$ este un pol rapid (acesta are un raspuns mult mai rapid). In practică pentru un α suficient de mare, prezenţa acestui pol se poate neglija.

3.3 Sisteme de ordinul II cu poli complecşi

Forma generală este:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})^2}, \quad \begin{array}{lcl} \sigma_d & := & \zeta\omega_n, \\ \omega_d & := & \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \\ \sin\theta & := & \zeta, \\ p_{1,2} & := & -\sigma_d \pm j\omega_d, \end{array} \tag{19}$$

unde:

$$\begin{array}{lcl} \omega_n & = & \text{pulsaţie naturală;} \\ \zeta & = & \text{coeficient de amortizare;} \\ \omega_d & = & \text{pulsaţie amortizată.} \end{array}$$

cu $0 \le \zeta \le 1$, $\omega_n > 0$. Polii acestui sistem sunt: $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma_d \pm j\omega_d$.

Răspunsul la impuls se obţine aplicând transformata Laplace inversă a funcţiei de transfer $H(s)$:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t) = \frac{\omega_n\, e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t)\, \mathbf{1}(t). \tag{20}$$

Răspunsul la treaptă unitară este dat de

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = 1 - e^{-\sigma_d t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\sigma_d}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \theta). \tag{21}$$

Observaţie. Dacă $\zeta = 0$ rezultă $\theta = 0$ şi $\omega_d = \omega_n$. In acest caz avem un *răspuns oscilant* de amplitudine constantă . Dacă $\zeta < 1$ apare un *răspuns amortizat* , iar dacă $\zeta = 1$ un *răspuns aperiodic.*

Observaţie. Deoarece $\theta = \arcsin\zeta$, este sugestivă vizualizarea polilor complex conjugaţi în plan pentru diverse valori ale lui ζ:

Observaţie. Se remarcă faptul că valoarea finală a răspunsului sistemului (adică valoarea de regim staţionar) coincide cu valoarea semnalului treaptă aplicat la intrare (Explicaţie: $H(0) = 1$).

Exerciţiul 11. Să se traseze răspunsul la impuls, treaptă unitară şi semnal armonic în funcţie de $\omega_n t$, şi nu în funcţie de t , parametrizate după factorul de amortizare ζ. Observaţi ce se în tâmplă în următoarele cazuri: $\zeta < 0$, $\zeta = 0$, $\zeta = 1$, $\zeta = 0.707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, , $\zeta > 1$. Consideraţi de asemenea şi cazul în care intrarea armonică are pulsaţia egală cu pulsaţia naturală a sistemului şi $\zeta = 0$.

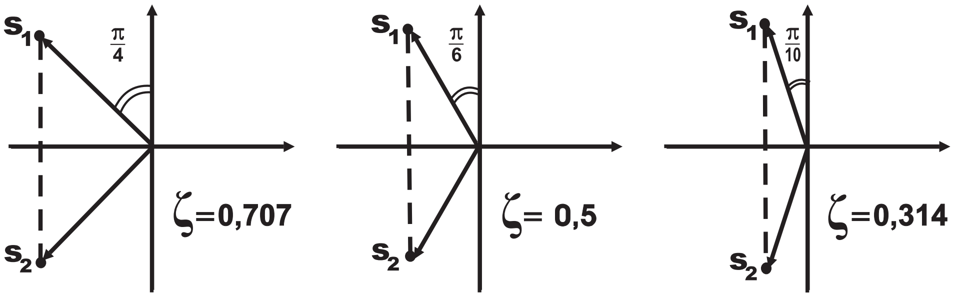


Figura 6: Poli complex conjugaţi

Exerciţiul 12. Se remarcă faptul că răspunsul elementului de ordinul II cu $\zeta = 0$, deci pur oscilant, pentru o intrare armonică de tipul $\cos \omega_n t$, de pulsaţie naturală identică cu cea a elementului, are punctele de extrem situate pe conul din figura 7.

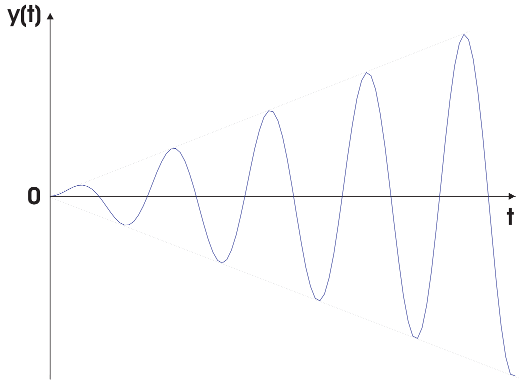


Figura 7: Conul

Exerciţiul 13. Să se traseze pe acelaşi grafic răspunsul la intrare treaptă unitară al unui sistem de ordinul II de forma: $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ pentru $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 1$ şi curba pe care se găsesc punctele de extrem.

4 Specificaţii de performanţă relative la regimul tranzitoriu

Pentru spesificarea performanţei unui sistem (automat) se utilizează de obicei semnalul treaptă unitara. Definirea acestor indicatori de performanţă se face folosind răspunsul tipic la treaptă unitară al unui sistem de ordinul II stabil ca în figura de mai jos:

Indici ce măsoară viteza de răspuns:
T_c, T_{c_1}: timpi de creştere (timpul în care ieşirea ajunge la 0-100%, respectiv 10%-90% din valoarea finală);
T_v: timp de vârf (timpul la care ieşirea ajunge la y_{max}).

Indici ce măsoară calitatea urmăririi treptei:
σ: suprareglaj;
m_v: subreglaj;

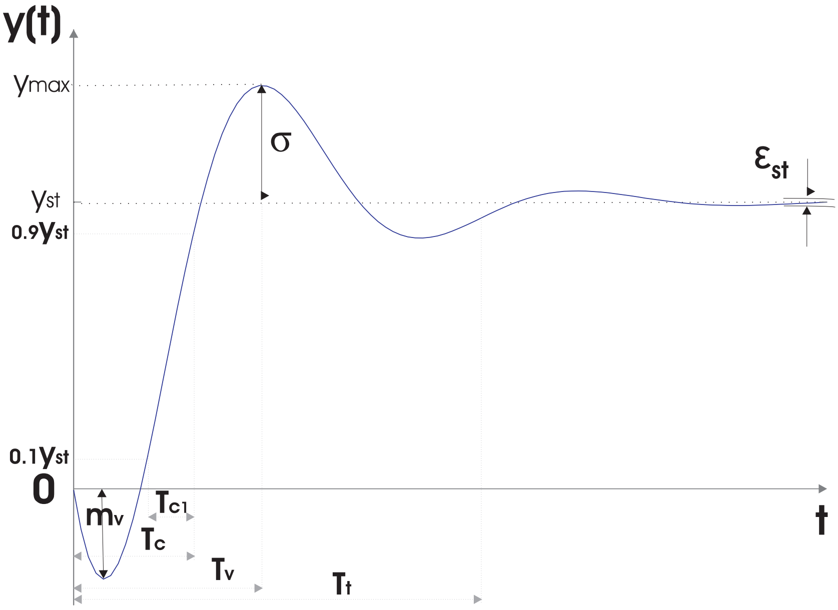


Figura 8: Parametrii de răspuns dinamic

T_t: timp tranzitoriu ($|y(t) - y_{st}(t)| < \delta \cdot y_{st}$, $pentru\, t > T_t$);
ϵ_{st}: eroarea staţionară .

Formulele acestea sunt valabile exclusiv pentru sistemele de ordinul II. Cu toate acestea ele se folosesc în general pentru o evaluare aproximativă în practică a oricăror sisteme în general.

Evaluări bazate pe sistemul de ordinul II. Se pot scrie următoarele expresii aproximative:

$$T_{c_1} \approx \frac{2.16\zeta + 16}{\omega_n} \approx \frac{1.8}{\omega_n} \;(pentru\, 0.3 \le \zeta \le 0.8). \tag{22}$$

Din calcule rezultă următoarele expresii exacte:

$$T_v = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}, \tag{23}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}},\ 0 \le \zeta < 1, \text{uzual}\ \sigma[\%] = \frac{y_{max} - y_{st}}{y_{st}} \cdot 100, \tag{24}$$

$$T_t = \frac{4.6}{\zeta\omega_n},\ \delta = 1\%, \qquad T_t = \frac{4}{\zeta\omega_n},\ \delta = 2\%. \tag{25}$$

Răspunsul unui sistem de urmărire la o intrare treaptă trebuie să satisfacă simultan cerinţele:

(i) să fie rapid (T_v, T_c, T_{c_1} mici) ;

(ii) să urmărească cât mai fidel semnalul treaptă (σ mic şi T_t mic).

Aceste cerinţe sunt însă contradictorii aşa cum ilustrează exerciţiile următoare.

Exerciţiul 14. Reprezentaţi pe acelaşi grafic funcţiile $\sigma(\zeta)$, $(\omega_n T_t)(\zeta)$, $(\omega_n T_{c_1})(\zeta)$ şi $(\omega_n T_v)(\zeta)$ (aceştia se numesc timpi normalizaţi).

Exerciţiul 15. Reprezentaţi pe acelaşi grafic dependenţa lui $\omega_n T_{c_1}$ de ζ şi aproximaţia liniară dată în relaţia (34). Evaluaţi intervalul pe care această aproximaţie este corectă .

Observaţie. Aproximaţia liniară este bună pe intervalul $0.3 \div 0.8$.

Exerciţiul 16. Trasaţi pentru ζ fixat (de exemplu 0.3) răspunsul în timp pentru diferite valori ale lui ω_n. Trageţi concluzii privind $\sigma(\omega_n)$, $T_{c_1}(\omega_n)$, $T_t(\omega_n)$, $T_v(\omega_n)$ şi apoi confirmaţi rezultatele obţinute reprezentând pe acelaşi grafic (în mai multe ferestre) aceste dependenţe.

Observaţie. Suprareglajul nu depinde de ω_n .

Utilizând formulele putem determina un sistem de ordinul II al cărui răspuns la treaptă are carecteristicile impuse de T_c, σ, T_t

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{T_{c_1}}, \tag{26}$$

$$\zeta \geq \zeta(\sigma), \tag{27}$$

$$\zeta\omega_n = \sigma_d \geq \frac{4}{T_t}. \tag{28}$$

Exerciţiul 17. Reprezentaţi în plan zona în care trebuie să fie plasaţi polii unui sistem pentru a îndeplini următoarele cerinţe :$T_{c_1} < 0.6s$, $\sigma < 10\%$, $T_t < 3s$.

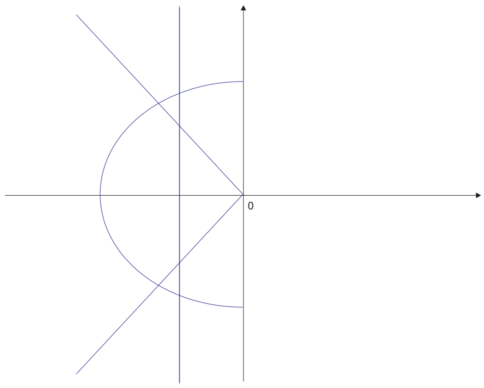
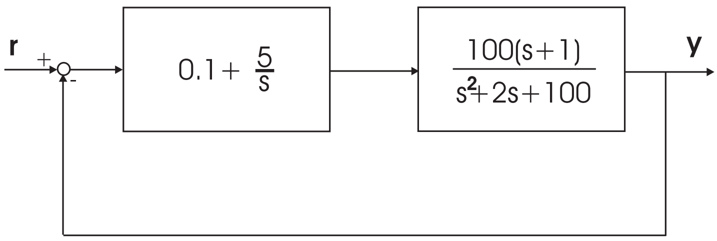


Figura 9: Zona de stabilitate

Observaţie. Matlab oferă informaţii despre timpul tranzitoriu, timpul de creştere, eroarea staţionară şi valoarea de vârf. Trebuie doar să apăsaţi pe butonul din dreapta al mouse-ului în figura care reprezintă răspunsul la treaptă dorit şi să selectaţi "Characteristics" şi apoi "Peak Response", "Settling Time", "Rise Time", "Steady State".

Exerciţiul 18. Se dă sistemul cu funcţia de transfer $G(s) = \frac{50}{s(s+5)}$ conectat în buclă închisă negativă . Determinaţi grafic σ, T_v, T_c, T_t.

Exerciţiul 19. Se dă schema din figura 18. Aproximaţi sistemul $H_{yr}(s)$ cu un sistem de ordinul II, estimaţi valorile T_t, T_v, σ şi comparaţi cu cele obţinute din graficul răspunsului la treaptă al sistemului original. Explicaţi diferenţele. Comparaţi grafic răspunsurile pentru sistemul original şi cel aproximat.



5 Efectul zerourilor şi polilor suplimentari asupra răspunsului sistemului de ordin 2

5.1 Efectul unui zerou

In această secţiune studiem comportarea răspunsului în timp al unui sistem având un zerou finit şi doi poli complex conjugaţi. Pentru a face clară dependenţa răspunsului de poziţia relativă a zeroului faţă de poli, parametrizăm sistemul în forma:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \frac{s}{\zeta\omega_n\alpha})}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{29}$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeroul suplimentar este $z = -\zeta\omega_n\alpha = -\alpha\sigma_d$. Răspunsul la treaptă unitară este dat de:

$$y(t) = 1 - \frac{\sqrt{\rho^2 - 2\zeta\rho + 1}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \theta),\ t \geq 0, \qquad \tan(\theta) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta - \rho}, \tag{30}$$

unde $\rho = \frac{1}{\zeta\alpha}$.

Exerciţiul 20. Trasaţi graficul răspunsului la impuls şi la treaptă pentru $\zeta = 0.5, \omega_n = 1$ parametrizat funcţie de α ($\alpha > 0$ şi respectiv $\alpha < 0$) şi cu timp normalizat. Verificaţi afirmaţiile din observaţia de mai jos.

Observaţie. Distingem 2 cazuri:

(i) Când $\alpha > 0$ (zerou stabil) suprareglajul creşte semnificativ dacă $\alpha \simeq 1 \div 4$. Dacă $\alpha \gg 1$ suprareglajul rămâne aproape neschimbat. Timpul tranzitoriu nu este influenţat semnificativ de zeroul suplimentar.

(ii) Când $\alpha < 0$ (zerou instabil) suprareglajul scade semnificativ dacă $|\alpha| \simeq 1 \div 4$. In acest caz observăm că

$$\frac{dy}{dt}(0) = \frac{\omega_n}{\zeta\alpha} < 0, \tag{31}$$

adică panta graficului este negativă şi astfel răspunsul în timp va scădea într-o primă fază şi apoi va creşte, ca în figura 10.

Se observă că în acest caz răspunsul la treaptă al sistemului taie axa absciselor de atâtea ori câte zerouri instabile are sistemul considerat, iar punctul de plecare este:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = H(\infty). \tag{32}$$

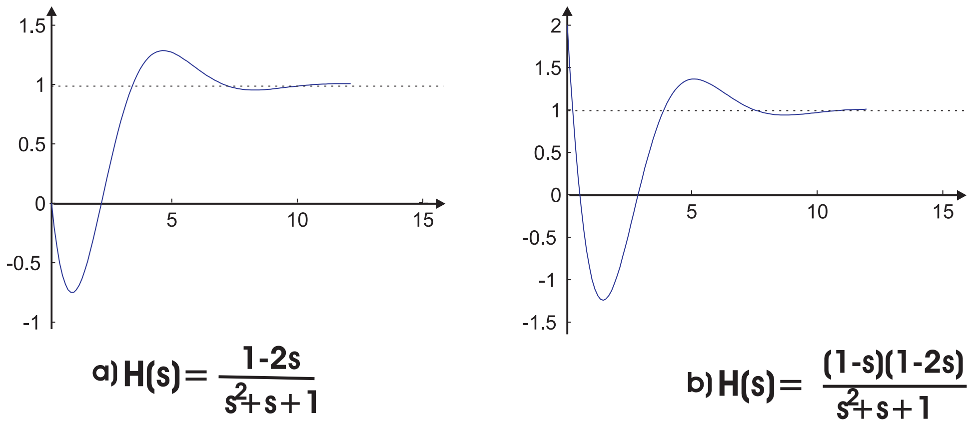


Figura 10: Graficul răspunsului la treaptă al unui sistem de ordinul II având: a. un zerou instabil; b. două zerouri instabile

5.2 Efectul unui pol suplimentar

In această secţiune vom studia comportarea răspunsului în timp al unui sistem stabil având doi poli complex conjugaţi şi un pol real. Pentru acest lucru vom parametriza sistemul în forma:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + \frac{s}{\zeta\omega_n\alpha})}. \tag{33}$$

Polul suplimentar este $p = -\zeta\omega_n\alpha = -\alpha\sigma_d$.

Exerciţiul 21. Trasaţi graficul răspunsului la impuls şi la treaptă pentru $\zeta = 0.5, \omega_n = 1$ parametrizat în funcţie de α ($\alpha > 0$) şi cu timp normalizat.

Observaţie. Suprareglajul este practic neschimbat pentru valori $\alpha \simeq 1 \div 4$, iar timpul tranzitoriu este puternic dependent de α. Suprareglajul scade cu cât α e mai mic (poate să şi dispară). In acest caz se poate observa că timpul de creştere scade o data cu creşterea lui α .

6 Exerciţii propuse

Exerciţiul 22. (1p) Reprezentaţi grafic răspunsul sistemelor de mai jos la intrările $u_1(t) = \mathbf{1}(t)$, $u_2(t) = t\,\mathbf{1}(t)$, şi respectiv $u_3(t) = \sin 2t\,\mathbf{1}(t)$:

a) $H_1(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$;

b) $H_2(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$;

c) $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+5}$;

d) $G_2(s) = \dfrac{1}{s(s^2-1)}$;

e) $G_3(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+2}$.

Exercițiul 23. (1p) Considerăm sistemul descris de ecuația diferențială

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 20y = 2\dot{u} - u.$$

a) Fie $u(t) = \mathbf{1}(t),\ y(0) = -1,\ \dot{y}(0) = -2$. Calculați $Y(s)$. Reprezentați grafic răspunsul sistemului $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. Determinați de asemenea componenta forțată și componenta liberă pentru soluția obținută. *Indicație.* Dacă $Y(s)$ este o rațională proprie oarecare, $y(t)$ se poate reprezenta grafic cu instrucțiunea `impulse(Y)`.

b) Calculați $H(s)$, în codiții inițiale nule. Reprezentați în planul complex polii și zerourile sistemului. Este acesta stabil? Reprezentați grafic răspunsul forțat al sistemului la intrările $u_1(t) = \mathbf{1}(t)$, $u_2(t) = t\,\mathbf{1}(t)$, și respectiv $u_3(t) = \cos 3t\,\mathbf{1}(t)$.

c) Care este regimul staționar (permanent) pentru $u(t) = \mathbf{1}(t)$? Dar regimul tranzitoriu? Folosiți pentru verificare teorema valorii finale.

Exercițiul 24. (1p) Fie $u(t)$ un semnal dreptunghiular periodic, vezi figura 11.

a) Se consideră circuitul RC serie, având ca ieșire tensiunea de pe condensator. Funcția de transfer a sistemului este

$$H(s) = \frac{1}{RC \cdot s + 1}.$$

Să se reprezinte grafic ieșirea sistemului pentru intrarea $u(t)$, considerând diverse valori pentru constanta de timp $\tau := R \cdot C$ a circuitului. Spre exemplu, alegeți $\tau \in \{0.05,\ 0.3,\ 1, 5, 10\}$. Ce se poate observa?

b) Se consideră circuitul RLC, având ca ieșire tensiunea de pe condensator. Funcția de transfer a sistemului este

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

Să se reprezinte grafic ieșirea sistemului pentru intrarea $u(t)$, cu $R = 0.5\ \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 10$ mF. Modificați valorile elementelor circuitului pentru obținerea diverselor răspunsuri dorite: un răspuns extrem (peak response) mai mic, timp de răspuns mai mare, blocare completă a semnalului de intrare, etc.

c) Considerăm acum tensiunea alternativă de la rețeaua electrică din România:

$$u_1(t) = U_{ef}\sqrt{2}\sin(2\pi f t),$$

unde $U_{ef} = 220$ V, iar $f = 50$ Hz. Reluați punctele a) și b) pentru `t = 0:1e-5:0.5`. Modificați valorile R, L, C astfel încât la ieșire să obțineți un curent continuu. Este realizabil fizic acest circuit?

d) Reluați punctul anterior pentru $u_2(t) = U_{ef}\sqrt{2}\ |\sin(2\pi f t)|$, i.e., `u2 = abs(u)`. Cum putem realiza fizic această nouă intrare?

Exercițiul 25. (1p) Ecuația mișcării în plan vertical a unei antene de satelit este

$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) = M(t),$$

unde $\theta(t)$ este unghiul de înălțare a antenei, $J = 6 \cdot 10^5$ kgm^2 este momentul de inerție al acesteia, $b = 2 \cdot 10^4\ N \cdot m \cdot sec$ coeficientul de frecare, iar $M(t)$ este cuplul motor. Se dorește aducerea antenei intr-o poziție unghiulară specificată θ_{ref} utilizând o schemă de reglare în reacție inversă cu un compensator de tip proporțional K (vezi figura 13), astfel încât suprareglajul să nu depășească 10%, iar timpul de creștere să nu fie mai mare de 80 sec. Fie $u \equiv M$ (comanda), $y \equiv \theta$ (ieșirea), $r \equiv \theta_{ref}$ (referința).

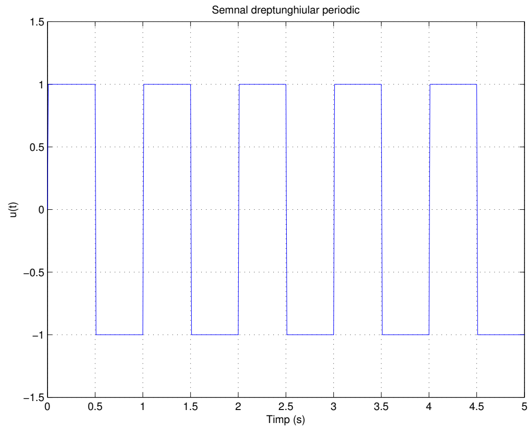


Figura 11: Semnal dreptunghiular periodic

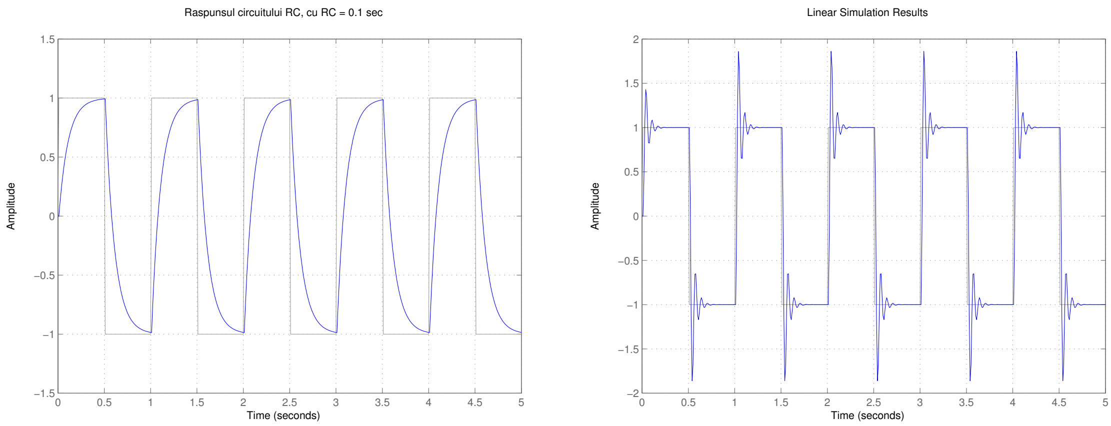


Figura 12: Răspunsul circuitului RC (stânga) şi răspunsul circuitului RLC (dreapta) la semnalul dreptunghiular periodic din figura 11

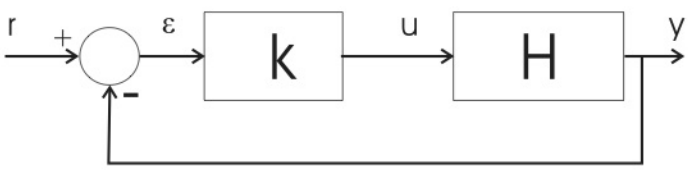


Figura 13: Sistem de reglare automată

a) Determinaţi funcţiile de transfer ale sistemului $H(s)$, respectiv ale sistemului în buclă închisă $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

b) Sistemul $G(s)$ este un sistem de ordinul II. Determinaţi ζ şi ω_n. Calculaţi şi reprezentaţi în planul complex polii sistemului $G(s)$. Pentru ce valori ale lui K este acesta stabil?

c) Ce implică prima cerinţă de performanţă, $\sigma \leq 10\%$? Dar $T_c \leq 80$ sec ? Figuraţi în planul complex aceste restricţii.

d) Alegeţi o valoare potrivită pentru parametrul K, i.e., care asigură stabilitatea şi cerinţele de performanţă. Reprezentaţi grafic răspunsul la treaptă. Verificaţi calitatea reglării. Care este răspunsul staţionar?

e) Determinaţi timpul tranzitoriu T_{t0} (grafic sau analitic). Cât de mult poate fi acesta redus? Figuraţi în planul complex toate cele trei restricţii şi determinaţi noua valoare K. Reprezentaţi grafic răspunsul la treaptă şi verificaţi rezultatele.

f) Reprezentaţi grafic răspunsul la treaptă pentru $K = 200,\ 400,\ 1000,\ 2000$. Estimaţi suprareglajul şi timpul de treştere examinând cele 4 grafice. Verificaţi acurateţea calculelor anterioare.

Exerciţiul 26. Se consideră sistemul în reacţie negativă unitară având funcţia de transfer pe calea directă

$$H(s) = \frac{K}{s(s+2)}, \quad K > 0.$$

a) Calculaţi funcţia de transfer în buclă închisă $G(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)}$. Cum trebuie să fie K pentru a asigura stabilitatea sistemului în buclă închisă?

b) Specificăm următoarele performanţe de regim tranzitoriu la intrare de tip treaptă: timp de vârf $t_v \leq 1.1$ sec, suprareglaj $\sigma \leq 5\%$. Figuraţi în planul complex aceste restricţii. Pentru ce valori ale lui K pot fi satisfăcute simultan cele 2 cerinţe de performanţă?

c) Alegeţi o valoare pentru K şi verificaţi în Matlab dacă specificaţiile sunt îndeplinite.

Exerciţiul 27. Considerăm sistemele

$$G_1(s) = \frac{2}{s+2}, \quad G_2(s) = \frac{2(1-s)}{(s+2)(s+1)}.$$

a) Reprezentaţi pe acelaşi grafic răspunsul la treaptă pentru cele două sisteme. Ce constataţi? Determinaţi răspunsul staţionar şi răspunsul tranzitoriu pentru ambele răspunsuri.

b) Reprezentaţi în planul complex polii şi zerourile celor două sisteme. Care este legatura între plasarea zerourilor şi răspunsul la treaptă? Verificaţi concluziile prin simulare (spre exemplu, mutaţi zeroul instabil).

Exerciţiul 28. Ne propunem aici să proiectăm un compensator $K(s)$ pentru un sistem de ordinul I (vezi figura 13). Sistemele sunt de forma

$$H(s) = \frac{\alpha}{Ts+1}, \ \alpha, T > 0, \quad K(s) = \frac{k_p s + k_i}{s}.$$

Ne propunem proiectarea unui comensator care asigură ca polii în buclă închisă să fie în interiorul cercurilor din figura 14.

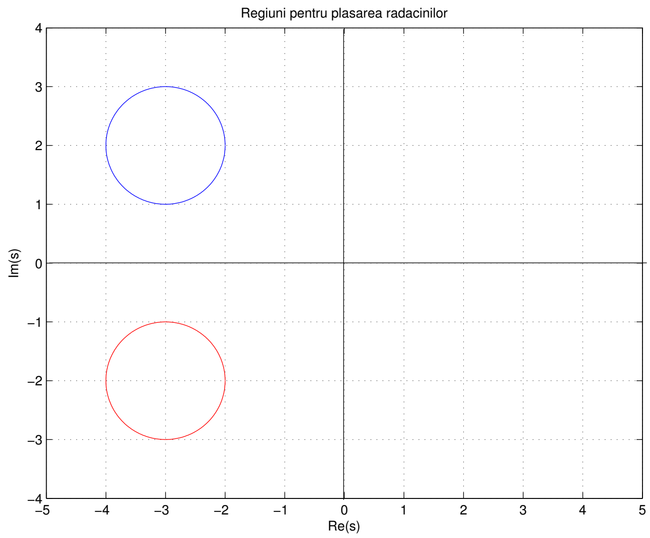


Figura 14: Plasarea polilor

a) Ce valori pentru ω_n, ζ corespund regiunilor indicate în figura 14? O simplă estimare din figură este suficientă.

b) Fie $\alpha = 1$, $T = 1/2$ sec. Calculaţi sistemul în buclă închisă $G(s)$.

c) Găsiţi valorile parametrilor k_p şi k_i pentru care polii sistemului în buclă închisă sunt în regiunile specificate.

d) Arătaţi că, indiferent de valorile parametrilor α, T, compensatorul poate plasa polii oriunde în planul complex.

Exerciţiul 29. Funcţia de transfer dintre elevator şi altitudine pentru aeronava Boeing-747 poate fi aproximată ca

$$H(s) = \frac{30(6-s)}{s(s^2+4s+13)}.$$

a) Reprezentaţi grafic răspunsul la impuls. Calculaţi $h(\infty)$ cu teorema valorii finale. Rezultă o valoare nenulă. Argumentaţi această observaţie.

b) Găsiţi ζ şi ω_n. Calculaţi utilizând formulele cunoscute t_c (timpul de creştere), t_t (timpul tranzitoriu) şi σ (suprareglajul).

c) Estimaţi pe graficul de la punctul a) t_c, t_t, σ. Comparaţi rezultatele obţinute cu cele de la punctul b).

Exerciţiul 30. Considerăm un sistem de ordinul II cu un pol suplimetar de forma

$$H(s) = \frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2).}$$

a) Arătaţi că răspunsul sistemului la intrare treaptă este

$$y(t) = 1 + Ae^{-pt} + Be^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cdot t - \theta\right),$$

unde $A = \dfrac{-\omega_n^2}{\omega_n^2 - 2\zeta\omega_n p + p^2}$, $B = \dfrac{p}{\sqrt{(\omega_n^2 - 2\zeta\omega_n p + p^2)(1-\zeta^2)}}$.

b) Care termen domină în expresia lui $y(t)$ când p devine mare?

c) Determinaţi valori aproximative pentru A, B pentru valori mici ale lui p ("mici" în raport cu ce?). Ce termen domină $y(t)$?

d) Fie $\omega_n = 1$ şi $\zeta = 0.7$. Reprezentaţi grafic în Matlab $y(t)$ pentru diferite valori ale lui p (de la valori foarte mici la volori foarte mari). În ce punct efectul polului suplimentar asupra răspunsului la treaptă devine neglijabil?