Teoria Sistemelor
Laboratorul 1. Semnale

1 Scopul laboratorului

Laboratorul are ca scop familiarizrea studentului cu notiunea de semnal, atat in domeniul timp cat si in frecventa. Sunt studiate operatiile de baza cu semnale, translatia in timp si convolutia. Se acorda o atentie sporita impulsului Dirac, prin studierea unor aproximari, unor proprietati fundamentale, precum si a derivatelor de ordin 1,2 si 3 ale acestuia. Laboratorul trateaza si problema analizei si sintezei unui semnal, folosind serii si Transformate Fourier. Tranformata Laplace este de asemenea definita si aplicata cu MATLAB.

2 Breviar teoretic

Definiţia 1. Se numeşte semnal o funcţie $f : \mathcal{T} \to A$, unde A este o mulţime dată numită imaginea semnalului iar $\mathcal{T}$ este domeniul de definitie al semnalului (axa timpului). Dacă $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, atunci $f(t)$ este un semnal continual; dacă $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$, $f[n]$ este un semnal discret.

Cele mai des intalnite semnale din natura, numite si semnale standard, sunt:

a) Treapta unitara : $\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$;

b) Semnalul rampă : $ramp(t) = t\mathbb{1}(t)$;

c) Impuls discret : $\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$;

d) Impuls dreptunghiular : $rect(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq b \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$;

e) Impuls triunghiular : $trian(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$;

f) Semnale exponentiale : $u(t) = Ae^{at}, a \in \mathbb{R}^*$;

g) Semnale armonice : $u(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

Spatiile de semnale sunt *spatii vectoriale Banach* - spatii *normate* (se poate defini o norma) si complete (orice sir Cauchy converge in spatiul dat). Daca semnalul are energia finita, *i.e.* $||u||_2 < \infty$, se poate defini un produs scalar. In acest caz, vorbim de *spatii Hilbert*.

2.1 Operatii cu semnale

In continuare definim doua operatii importante: translaţia în timp şi convoluţia.

2.1.1 Translaţia în timp

Definiţia 2. Fie $\tau \in \mathbb{R}$ un parametru fixat si $u \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ un semnal continuu. Se numeste operator de translatie (shift) operatorul $\sigma^\tau : \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ definit de

$$\big(\sigma^\tau u\big)(t) = u(t - \tau), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Prin analogie se poate defini operatorul de ttranslatie in timp pentru semnale discrete $\sigma^k : \mathcal{S}^d_{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}^d_{\mathbb{R}}$, $\big(\sigma^k u\big)(t) = u[n-k], n \in \mathbb{Z}$.

2.1.2 Convoluţia

In teoria semnalelor si a sistemelor convolutiile joaca un rol important deoarece definesc (in domeniul timp) o clasa importanta de sisteme liniare. Convolutia (produsul de convolutie) stabileste o relatie intre semnalul de intrare si cel de iesire prin intermediul *functiei pondere*, care descrie sintetic sistemul dinamic respectiv. Pentru semnale discrete definitia convolutiei este

$$(h * u)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]u[k], \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

iar pentru semnalele cu timp continuu

$$(h * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

2.1.3 Calculul numeric al convolutiei

Calculul convolutiilor *discrete* se face retinand din suma seriei (2) numai un numar finit de termeni, sa zicem intre indicii de insumare $-M$ si M, rezultand urmatoarea formula de calcul

$$(h * u)[n] \simeq \sum_{k=-M}^{M} h[n-k]u[k], \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

Calculul convolutiei in cazul continuu se poate efectua in doua etape:

(i) Se aproximeaza integrala din (3) cu o integrala definita pe un interval marginit numit orizont de timp care se alege cu atat mai mare cu cat se doreste o precizie mai buna obtinandu-se formula de calcul

$$(h * u)(t) \simeq \int_{-M}^{M} h(t-\tau)u(\tau), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

(ii) Integrala definita (5) se aproximeaza printr-o suma finita. Pentru aceasta se aleg de exemplu $2n+1$ puncte in intervalul $[-M, M]$ notate $p_{-n}, p_{-n+1}, \ldots, p_{n-1}, p_n$. Uzual punctele se aleg echidistante, i.e. $l := |p_{k+1} - p_k| = \frac{2M}{2n+1}; \quad (k = -n : n-1)$, a.i. $p_{-n} = -M, p_n = M$ obtinandu-se urmatoarea formula de calcul, similara cu cea de la calculul convolutiei discrete (4)

$$(h * u)(n) \simeq \sum_{k=-n}^{n} ((h(t - p_k)u(p_k)) * l, \tag{6}$$

unde $l = \frac{2M}{2n+1}$ este lungimea intervalului de esantionare.

Observatie: La calculul efectiv al convolutiilor cu ajutorul calculatorului, pot aparea urmatoarele tipuri de erori:

- **Erori de trunchiere** (semnale continue/discrete) - Din punct de vedere al calculului numeric semnalele cu suport infinit trebuie cu necesitate trunchiate rezultand semnale cu suport finit (orizont finit de timp.) Convolutiile calculate pe baza semnalelor trunchiate sufera asadar automat de erori de trunchiere (deoarece suma seriei se calculeaza pe baza unui numar finit de termeni), valorile semnaleleor in afara orizontului de timp (intervalului de trunchiere) fiind considerate zero. Eroarea de trunchiere este rezonabil de mica daca semnalele iau valori "mici" in afara intervalului de trunchiere.

- **Erori de esantionare** (semnale continue) - Pentru a calcula numeric convolutia unor semnale continue acestea trebuie discretizate (esantionate), astfel incat integrala de convolutie sa poata fi inlocuita cu o suma de convolutie. Eroarea de esantionare apare datorita faptului ca se pierde total informatia despre evolutia functiei intre doua momente succesive de esantionare. Eroarea de esantionare este rezonabil de mica daca intervalul de esantionare este suficient de mic.

- **Erori de rotunjire** (semnale continue/discrete)- datorate erorilor inerente de calcul in format virgula mobila. Eroarea de rotunjire poate fi facuta rezonabil de mica daca se foloseste o precizie numerica suficient de mare.

2.2 Analiza de semnal. Transformata Fourier

Reprezentarea si analiza sistemelor LTI prin intermediul integralei (sumei) de convolutie se bazeaza pe scrierea semnalelor ca o combinatie liniara de impulsuri deplasate. Ne vom ocupa acum de o reprezentare alternativa pentru semnale si pentru sisteme LTI, anume scrierea semnalelor sub forma de combinatii liniare de exponentiale complexe (semnale armonice). Reprezentarile astfel rezultate sunt cunoscute sub numele de seria Fourier, respectiv transformata Fourier cu timp continuu si cu timp discret.

2.2.1 Reprezentarea in serie Fourier a semnalelor periodice continue

Un semnal $u(t)$ este periodic daca pentru un $T > 0$ avem ca $u(t+T) = u(t), \forall t$. Cea mai mica valoare strict pozitiva a lui T care satisface $u(t+T) = u(t)$ se numeste *perioada fundamentala*, iar $\omega_0 = 2\pi/T$ se numeste *pulsatie fundamentala*. Consideram semnalul periodic "de baza" $u(t) = e^{j\omega_0 t}$ si asociem cu acesta setul de exponentiale complexe relationate armonic $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T}t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Fiecare semnal $\Phi_k(t)$ are o pulsatie fundamentala care este multiplu de ω_0, prin urmare fiecare semnal este periodic, cu perioada T (desi pentru $|k| \geq 2$, perioada fundamentala este o fractie din T). Fie acum o combinatie liniara de exponentiale complexe relationate armonic

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}. \tag{7}$$

Acest semnal este periodic, cu perioada T. Reprezentarea unui semnal periodic in forma (7) se numeste reprezentarea in *serie Fourier*. De notat ca orice semnal periodic poate fi scris in forma (7).

Daca $u(t)$ este un semnal real atunci avem ca $u(t) = u^*(t)$. Va rezulta astfel ca $a_k^* = a_{-k}$, prin urmare, reprezentarea in serie Fourier a semnalului $u(t)$ real este

$$u(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k). \tag{8}$$

Alta forma a seriei Fourier se obtine scriind $a_k = B_k + jC_k$, unde B_k si C_k sunt reali

$$u(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \Big[B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)\Big]. \tag{9}$$

Ecuatiile (8) si (9) sunt cele mai intalnite forme ale reprezentarii in serie Fourier. Evident, este nevoie de o procedura de calcul a coeficientilor a_k. Se poate arata ca formula de calcul a acestora este

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T u(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T u(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \tag{10}$$

Ecuatia (7) se numeste ecuatia de *sinteza*, iar (10) se numeste ecuatia de *analiza*. Coeficientii a_k se mai numesc si *coeficienti spectrali* ai semnaului $u(t)$. Acesti coeficient complecsi masoara portiunea din semnalul $u(t)$ din fiecare armonica.

2.2.2 Extensia analizei Fourier la semnale neperiodice

O clasa destul de larga de semnale, care include si semnalele *de energie finita*, se pot reprezenta prin intermediul unei combinatii liniare de exponentiale complexe. In timp ce in cazul semnalelor periodice, exponentialele complexe care le constituie sunt relationate armonic, in cazul semnalelor neperiodice exponentialele complexe care le constituie sunt infinitesimal apropiate in frecventa, iar reprezentarea in termeni de combinatie liniara adopta forma unei integrale, in loc de o suma. Spectrul de coeficienti rezultat din aceasta reprezentare se numeste *Transformata Fourier*, iar integrala de sinteza, cea care foloseste acesti coeficienti pentru a reprezenta semnalul ca pe o combinatie liniara de exponentiale complexe, se numeste *transformata Fourier inversa*.

Un semnal neperiodic poate fi vazut ca un semnal periodic, cu perioada infinita. In reprezentarea Fourier a unui semnal periodic, pe masura ce creste perioada, frecventa fundamentala scade si componentele relationate armonic devin tot mai apropiate in frecventa. Daca perioada tinde la infinit, componentele frecventiale formeaza un spectru continuu si suma seriei Fourier devine o integrala.

2.2.3 Transformata Fourier continua

Fie un semnal $u(t)$ de durata limitata, i.e. pentru un anume T_1 avem ca $u(t) = 0$ pentru $|t| > T_1$. Din acest semnal neperiodic se construieste semnalul $\tilde{u}(t)$, periodic, pentru care $u(t)$ constituie o perioada. Scriem reprezentarea in serie Fourier a lui $\tilde{u}(t)$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\\ a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{u}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt.\end{aligned}$$

Daca tinem cont de faptul ca $\tilde{u}(t) = u(t)$ pentru $|t| < T/2$ si $u(t) = 0$ in afara acestui interval, putem rescrie ecuatiile de mai sus

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}U(jk\omega_0)$$

Inlocuim expresia coeficientilor a_k in ecuatia de analiza Fourier a semnalului $\tilde{u}(t)$ si obtinem

$$\tilde{u}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}U(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \tag{11}$$

Pe masura ce $T \to +\infty$ $\tilde{u}(t)$ se apropie de $u(t)$, prin urmare limita expresiei (11) devine o reprezentare a lui $u(t)$. Mai mult, pe masura ce $T \to +\infty$ avem ca $\omega_0 \to 0$, iar partea dreapta a relatiei (11) devine o integrala. Mai exact, fiecare termen al sumei din (11) este aria unui dreptunghi de inaltime $U(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$ si latime ω_0 (t este considerat fix). Obtinem astfel ecuatiile de analiza si de sinteza Fourier pentru semnalul neperiodic $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{12}$$

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{13}$$

Ecuatiile (12) se numesc *transformarile Fourier (inversa si directa).* $U(j\omega)$ se numeste *transformata Fourier* a semnalului $u(t)$.

2.3 Transformata Laplace

Un instrument extrem de util in studiul semnalelor si sistemelor liniare îl constituie *Transformata Laplace.* Aceasta transformata integrala are multe aplicatii in fizica si inginerie, avand o serie de avantaje procedurale care deriva din transferarea problemelor din domeniul calculului diferential in cel al calculului algebric.

Definiţia 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Transformata Laplace unilaterala la dreapta a functiei $f(t)$ in punctul $s = \sigma + j\omega$ este

$$F(s) = \mathcal{L}_+\big\{f(t)\big\} = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt.$$

Transformata Laplace este bine definita daca $f \in \mathcal{O}$, *i.e.* apartine clasei functiilor original. De remarcat proprietatea de convolutie a transformatei Laplace:

$$\mathcal{L}\big\{h * u\big\} = \mathcal{L}\big\{h\big\}\mathcal{L}\big\{u\big\}$$

3 Exerciţii rezolvate

3.1 Convoluţia si translatia in timp

Exerciţiul 1. Calculati si reprezentati grafic convolutiile urmatoarelor perechi de semnale. Identificati si evaluati *eroarea de trunchiere* alegand orizonturi de timp diferite. Pentru convolutiile in timp continuu identificati si evaluati *eroarea de esantionare* alegand diferite intervale de esantionare pentru un orizont de timp fixat.

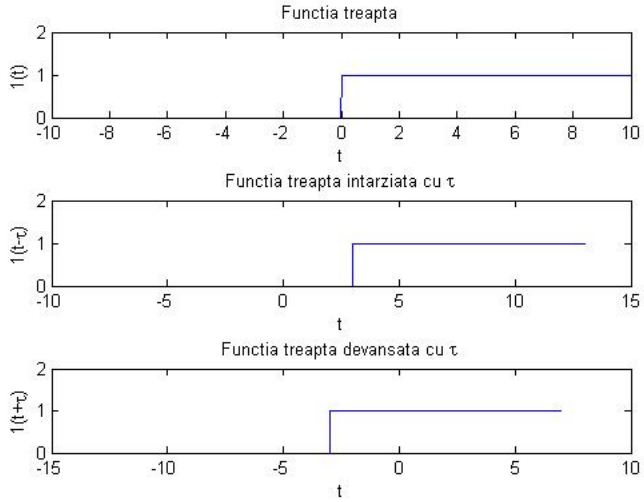


Figura 1: Exemplu de grafice pentru Exercitiul 2 ($\tau = 3$).

a. $h[n] = \mathbb{1}[n], n \in \mathbb{Z}, \quad u = h;$

b. $h[n] = a^{|n|}, u[n] = a^{|n|}, n \in \mathbb{Z}, a = 0.9;$

c. $h[n] = \delta[n], u[n] = a^{|n|}, n \in \mathbb{Z}, a = 0.9;$

d. $h(t) = rect(t), t \in \mathbb{R}, \quad u = h;$

e. $h(t) = e^{\alpha t}\mathbb{1}(t), u(t) = e^{\beta t}\mathbb{1}(t), t \in \mathbb{R}, \alpha = \beta = -1.$

Rezolvare. Funcţiile `cont_conv` şi `discr_conv` calculează produsul de convoluţie dintre u şi h, variabile simbolice. Codul aferent este dat în directorul Ex1, disponibil pe Moodle şi în Anexă.

De asemenea, putem rezolva problema utilizând funcţia `conv`, deja implementată în Matlab, care calculează numeric produsul de convoluţie dintre 2 vectori.

Exerciţiul 2. Consideram semnatul treapta $\mathbb{1}(t)$. Translatati aceasta functie la stanga si la dreapta.

Rezolvare. Translatarea functiei la dreapta reprezinta intarzierea functiei cu un anume timp, iar translatarea la stanga reprezinta devansarea acesteia, cu un timp anume. Presupunand ca translatarea se face cu un timp τ, avem functia intarziata data de $\mathbb{1}(t - \tau)$ si functia devansata data de $\mathbb{1}(t + \tau)$. Implementarea este disponibilă în fişierul `ex2.m` şi în Anexă.

3.2 Aproximaţii ale functiei δ

Exerciţiul 3. Semnalul $\delta(t)$ (impulsul Dirac) si derivatele sale nu sunt functii in sensul uzual al definitiei (i.e. nu sunt functii regulate si nici functii generalizate). Exemplele urmatoare ilustreaza diverse *posibilitati de aproximare* a lui δ prin intermediul unor functii regulate. Trasati graficul urmatoarelor aproximari pentru diverse valori $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $d_n(t) = \begin{cases} n, & \text{pentru } -\frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{2n}; \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases}$

b) $d_n(t) = n \cdot trian(nt), t \in \mathbb{R}$

c) $d_n(t) = n \cdot bell(nt), t \in \mathbb{R}$, unde $bell(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$, este clopotul lui Gauss.

Rezolvare. Sunt propuse două soluţii: `ex3.m` şi funcţiile din Anexă.

Exerciţiul 4. Vizualizati grafic aproximatiile derivatelor $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \delta^{(3)}$ obtinute prin derivarea sirului de functii de la punctul c) al exercitiului 3.

Rezolvare. Vezi Exerciţiul 4 din Anexă şi directorul Ex4, disponibil pe Moodle. Verificaţi calculul derivatelor şi propuneţi o altă metodă de rezolvare **(1 punct)**.

Exerciţiul 5. Pentru orice functie regulata $\Phi(t)$ continua in 0 avem relatia

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\Phi(t)dt \tag{14}$$

Scopul acestui exercitiu este sa verificati calitatea aproximatiilor functiei δ de la **Exercitiul 3** prin evaluarea erorii (reziduului) cu care este satisfacuta relatia (14) atunci $\delta(t)$ este inlocuit cu o aproximatie $d_n(t)$. Mai precis calculati eroarea

$$\varepsilon_\Phi(n) = \int_{-\infty}^{\infty} d_n(t)\Phi(t)dt - \Phi(0)$$

pentru aproximatiile lui δ de la **Exercitiul 3** si functia $\Phi(t)$ continua in 0

$$\Phi(t) = \begin{cases} 4(\frac{1}{4} - t^2), & \text{pentru } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \tag{15}$$

si aratati grafic ca $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_\Phi(n) = 0$.

Rezolvare. Vezi Exerciţiul 5 din Anexă şi directorul Ex5, disponibil pe Moodle.

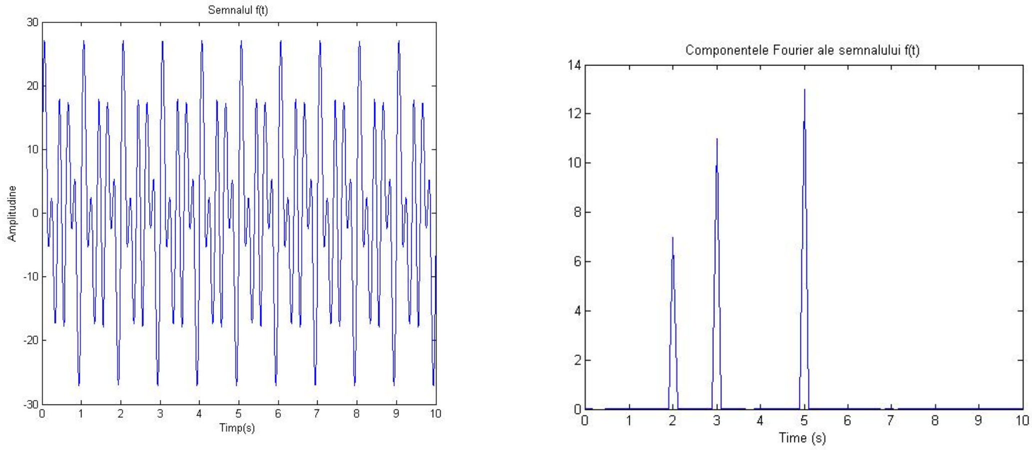
3.3 Transformari integrale

Exerciţiul 6. Fie semnalul $f(t) = 7\sin(2\pi \cdot 2t) + 11\sin(2\pi \cdot 3t) + 13\sin(2\pi \cdot 5t)$ (figura 2a). Folosind transformata Fourier, figurati grafic spectrul semnalului $f(t)$.

Rezolvare. Dupa cum se poate vedea (figura 2a) semnalul consta in 3 armonice de frecvente 2Hz, 3Hz si 5Hz, de amplitudini 7, 11 si, respectiv, 13. Daca luam transformata Fourier a acestui semnal (figura 2b), ar trebui sa aflam ce "cantitate" din fiecare frecventa compune semnalul. Codul este dat în `ex6.m`.

Exerciţiul 7. Consideram un semnal periodic dreptunghiular

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |t| < T_1 \\ 0, & \text{pentru } T_1 < |t| < T/2, \end{cases}$$



(a) Graficul semnalului $f(t)$ (b) Spectrul semnalului $f(t)$

Figura 2: Exercițiul 6

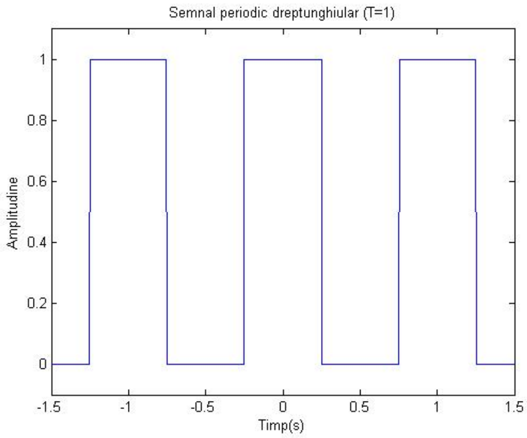


Figura 3: Semnal periodic dreptunghiular ($T = 1,\ T_1 = 1/4$)

unde, pentru exemplificare, luam $T = 1$ si $T_1 = 0.25$ (figura 3). Determinati si figurati in planul complex coeficientii Fourier ai semnalului dreptunghiular, pentru $T = 1$ si $T_1 = 1/4, 1/8, 1/16$. Reconstruiti apoi semnalul original folosind acesti coeficienti. Avand in vedere ca suma din relatia (7) nu se poate face de la $-\infty$ la $+\infty$, evaluati aceasta suma intre $-M$ si M, unde $M = 10, 20, 100$.

Rezolvare Coeficientii seriei Fourier pentru acest semnal se pot gasi cu relatia (10)

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}, \quad a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(2k\pi \frac{T_1}{T})}{k\pi}.$$

In figura 4 observam reprezentarea coeficientilor Fourier in planul complex. Prezentam in continuare figurile pentru semnalul reconstruit din coeficienti Fourier.

Exercițiul 8. Analiza petelor solare. Dorim sa analizam variatiile de activitate ale petelor solare din ultimii 300 de ani. Cunosteti probabil ca activitatea petelor solare este periodica, avand o perioada de 11 ani. Sa dovedim acest fapt.

Astronomii folosesc o functie, denumita numarul Wolfer, care se calculeaza folosind numarul si marimea petelor solare.

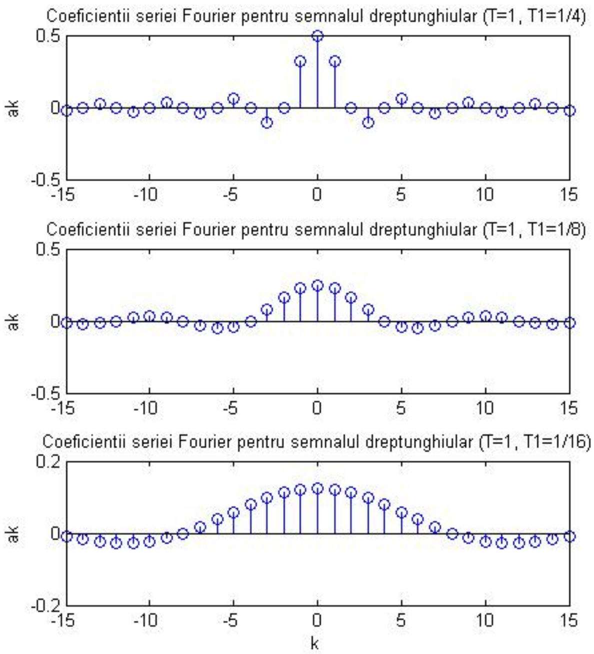
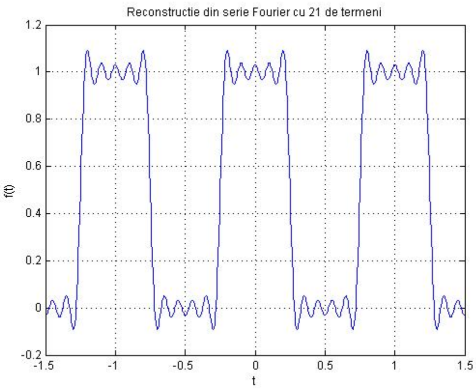
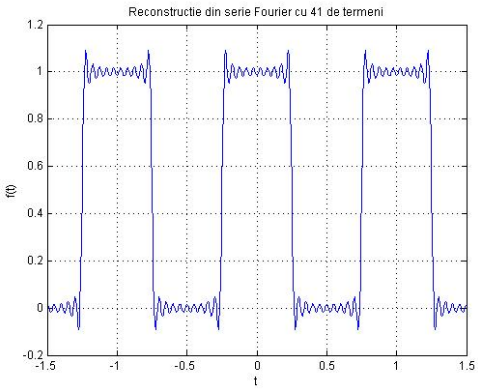


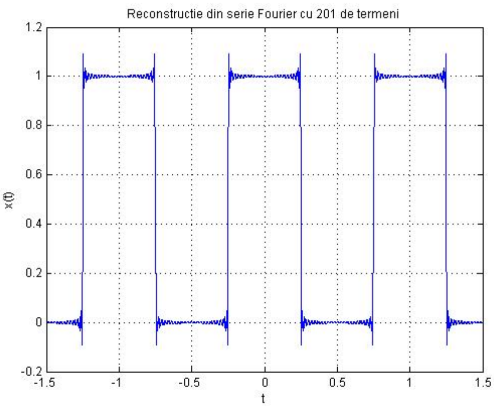
Figura 4: Coeficientii seriei Fourier pentru semnalul dreptunghiular



(a) 21 de termeni



(b) 41 de termeni



(c) 201 de termeni

Figura 5: Reconstructie a semnaului dreptunghiular

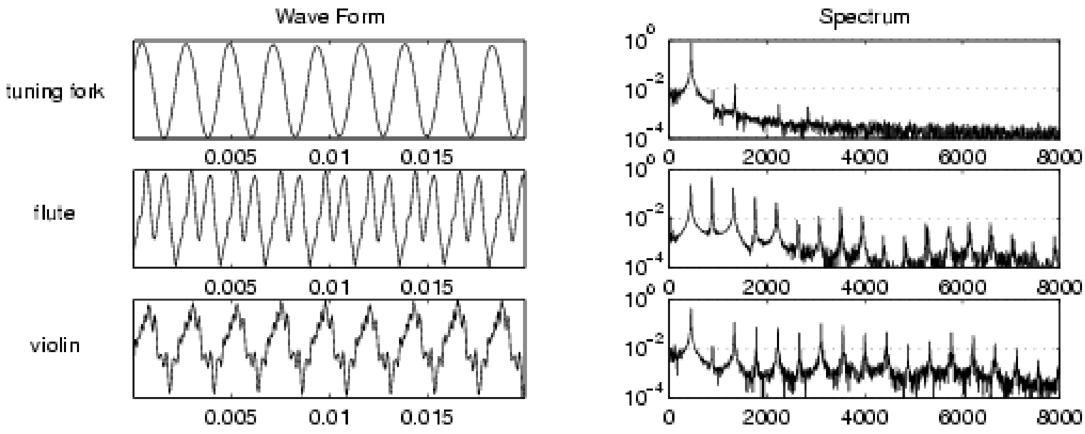


Figura 6: Analiza diverselor instrumente cu functia `analiza.m`

Pentru scopul nostru, este mai relevant sa reprezentam puterea in functie de perioada. Se observa pe grafic ca puterea are un maxim pentru $T \approx 11$ ani.

Exerciţiul 9. Analiza si Sinteza semnalelor audio in Matlab. Sursele sonore sunt medii elastice aduse in stare de oscilatie. Un exemplu standard este *ecuatia coardei vibrante cu conditii de margine Dirichlet*, analizata la cursul de Ecuatii cu Derivate Partiale. De la aceste surse, vibratiile se propaga prin mediul elastic (uzual prin aer) pana la receptor (urechea).

Un microfon va inregistra un semnal de forma

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos\left[2\pi f_n(t - \phi_n)\right],$$

unde semnificatia fizica a amplitudinilor p_n este energia asociata fiecarei frecvente. f_1 se numeste frecventa fundamentala, iar $f_2, f_3, \ldots$ armonicele sale, cu $f_n = nf_1$. Unghiul ϕ_n reprezintă defazajul. Spectrul de putere este distributia energiei pentru fiecare armonica, in cazul nostru vectorul $p = [p_1, p_2, p_3, \ldots]$.

a. **Analiza armonica.** Functia `analiza.m`, data in Anexa şi pe Moodle, utilizeaza functiile `wavread` si `fft` pentru calculul spectrului de putere a sunetului dintr-un fisier *.wav. Folosim aceasta functie pentru analiza fisierelor audio LA.wav, vioara_LA.wav, flaut_LA.wav. Figura 6 prezinta formele de unda si spectrele pentru diverse instrumente interpretand nota LA, $f_1 = 440$ Hz. Folositi functia data pentru analiza fisierelor date: apelaţi în linia de comandă, e.g., `analiza('LA.wav')`, etc.

Observaţia 1. Un ton pur de forma $x(t) = p_1 \cos(2\pi f_1 t)$ suna metalic si inexpresiv. Daca apar armonicele $f_n = nf_1$, sunetul capata expresivitate - asa se schimba *timbrul* instrumental (vioara, flaut).

b. **Sinteza semnalelor audio.** Asadar, pentru un instrument muzical particular, vectorul $[p_1, p_2, p_3, \ldots]$ este cheia sintezei sunetului sau. Plecand de la o frecventa fundamentala data si puterea p_n asociata armonicii f_n, unda sintetizata este

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(2\pi n f_1 t).$$

Functia `sinteza.m` (vezi Anexa, Moodle) creeaza o unda sonora plecand de la aceasta relatie si scrie semnalul obtinut intr-un fisier *.wav cu functia `wavwrite`. Folositi aceasta functie pentru sinteza unui semnal audio de 3 secunde, cu $f_1 = 440$ Hz si $p = [1, 0.8, 0.1, 0.04]$. Instructiunea Matlab este:

```
sinteza('test.wav', 440, 3, [1 .8 .1 .04])
```

c. Ne propunem sinteza cu ajutorul Matlab a vocalelor avand aceeasi tonalitate (frecventa fundamentala) si volum (putere). In 1859 fizicianul german von Helmholtz a prezentat urmatoarele spectre de putere pentru sinteza vocalelor:

Vocala	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_8	p_{16}
U	ff	mf	pp					
O	mf	f	mf	p				
A	p	p	p	mf	mf	p	p	
E	mf		mf			ff		
I	mf	p				p		mf

unde ff, f, mf, p au semnificatia *fortissimo, forte, mezzo forte, piano*.

4 Exercitii propuse

Exercițiul 10. (1p) Se considera semnalele discrete, i.e., $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} f_1[n] &= \mathrm{sinc}[n]\big\{\mathbb{1}[n+5] - \mathbb{1}[n-5]\big\} \\ f_2[n] &= 1 - rect[n] \\ f_3[n] &= \mathbb{1}[n] - \mathbb{1}[n-5] \end{aligned}$$

Scrieti un program MATLAB care sa verifice proprietatile de comutativitate, distributivitate si elementul neutru ale produsului de convolutie. Pentru calculul produsului de convolutie, utilizati functia MATLAB `conv`.

Observații.

1) $\mathrm{sinc}[n] := \frac{\sin(\pi n)}{\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}$;

2) Comutativitate: $(f_1 * f_2)[n] = (f_2 * f_1)[n]$;

3) Distributivitate: $f_1[n] * \big\{f_2[n] + f_3[n]\big\} = f_1[n] * f_2[n] + f_1[n] * f_3[n]$;

4) Element neutru: $(f_1 * \delta)[n] = (\delta * f_1)[n] = f_1[n]$.

Exercițiul 11. (2p) Folosind aproximatia c) verificati numeric ca

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t)\Phi(t)dt = (-1)^k \Phi^{(k)}(0)$$

pentru $k = 1, 2, 3$. Folositi functia $\Phi(t)$ data in (15) pentru a reprezenta grafic eroarea.
Indicatie:

$$\varepsilon_{\Phi}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t)\Phi(t)dt - (-1)^k \Phi^{(k)}(0), \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Puteţi folosi funcţiile Matlab `trapz` sau quad pentru calculul numeric al integralei. O altă posibilă rezolvare este inspirată de Exerciţiul 5.

Exerciţiul 12. (1p) Folosind aproximatia c) verificati numeric ca

$$\delta * \delta' = \delta'$$
$$\delta' * \delta' = \delta''$$

Exerciţiul 13. (1p) Reluati **Exerciţiul 5** pentru diverse functii $\Phi(t)$ construite de voi. $\Phi(t)$ trebuie sa fie regulata, continua in zero si derivabila in zero de cate ori este necesar.

Exerciţiul 14. (1p) Functia MATLAB `fft` (Fast Fourier Transform) este un instrument util si eficient pentru calculul Transformatei Fourier (TF). Apelul tipic al functiei este `fft(x,N)`, unde x este semnalul original, iar N este numarul de puncte al transformatei - apelati `help fft` pentru detalii. Exercitiul isi propune sa arate efectul pe care il produce modificarea lui N, respectiv numarul de repetitii ale perioadei fundamentale din x asupra TF.

Fie semnalul $x[n] = \cos \frac{2\pi n}{10}$, cu $n \in \overline{0, 29}$. Cerinte:

a. Reprezentati grafic modulul TF pentru 3 valori distincte ale lui N: 64, 128, 256.

b. Alegeti $N = 2048$ si variati numarul de repetitii ale perioadei fundamentale (construiti 3 semnale de lungimi diferite). Trasati grafic TF corespunzatoare.

Exerciţiul 15. Sunete în Matlab. (1p) Considerăm semnalul armonic

$$x(t) = \sin\left(2\pi \cdot 440t + \frac{\pi}{4}\right), \ \forall t \in [-1, 1],$$

pe care îl eşantionăm cu frecvenţa $F_s = 8$ kHz, adică `t = -1:1/Fs:1-1/Fs`. Se cere:

a) Care este frecvenţa F a semnalului, în Hertzi? Reprezentaţi grafic $x(t)$ pentru $t \in [-1, 1]$ şi pentru $t \in [0, 0.01]$, i.e., 1 msec. Ce se observă?

b) Ascultaţi semnalul $x(t)$ pentru $t \in [-1, 1]$ şi pentru $t \in [0, 0.01]$. Veţi folosi funcţia Matlab `sound(x,Fs)`. Ascultaţi de asemenea $5 * x(t)$, $x(t)/2$. Apelaţi `sound(x,Fs/2)` şi `sound(x,F2*s)`. Care sunt diferenţele? Argumentaţi.

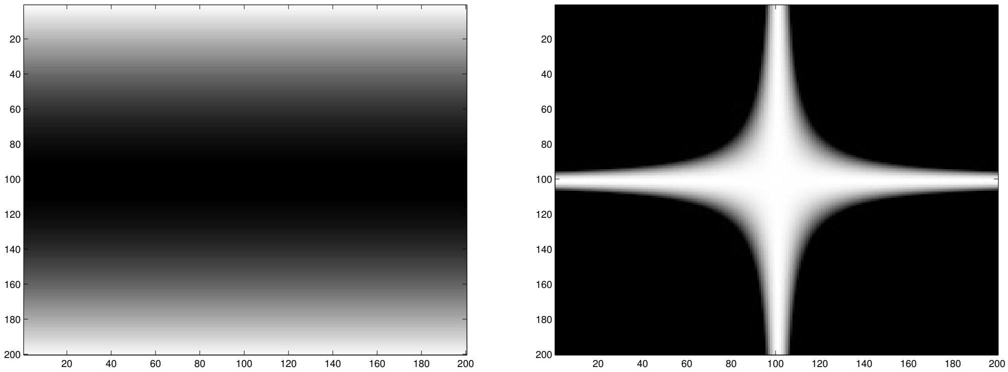
c) Reprezentaţi grafic şi ascultaţi semnalele

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & e^{-2t} x(t) \\ z(t) & = & \sin\left(2\pi \cdot 800t^2 - \frac{3\pi}{4}\right) \\ w(t) & = & 5x(t) + 4\sin(2\pi \cdot 880t) + z(t) \end{array} \quad , \ t \in [-1, 1], \ F_s = 8000 \text{ Hz}.$$

d) Figurati grafic spectrul semnalelor date, $x(t), y(t), z(t)$.

Exerciţiul 16. Zgomotul Alb. (1p) Functia Matlab `randn(1,n)` genereaza un semnal aleator de lungime n, cu distributie de probabilitate normala (Gaussiana) de medie nula si varianţă unitară. Cerinte:

a. Generati si reprezentati grafic un semnal aleator de lungime $n = 10^4$. Confirmati cele afirmate in enunt. Indicatie: Histograma se determina cu functia `hist`, iar varianţa unui semnal cu functia `var`.



(a) Variaţie sinusoidală (b) Produs de sinusoide

Figura 7

b. Calculati TF a zgomotului alb generat, precum si modulul transformatei (cu functiile `fft, abs`).

c. Reprezentati grafic modulul TF cu `plot` si `semilogy` (scala liniara si scala logaritmica). Ce observati? Justificati denumirea de *zgomot alb.*

Exerciţiul 17. Imagini în Matlab. (2p) Acestea se pot reprezenta ca o matrice, utilizând funcţia `image`. Spre exemplu, instrucţiunile

```
culori = gray(256);
colormap(culori);
image(1:256);
```

reprezintă o imagine alb-negru de 1 pixel pe 256 de pixeli (Matlab întinde imaginea a.î. să acopere dimensiunea standard a figurii). Aici, 1 reprezintă negru iar 256, alb. Cerinţe:

a) Examinaţi matricea `culori`, de dimensiune 256×3. Ce semnificaţie atribuiţi elementelor? Pentru a obtine o imagine color, apelaţi `colormap; image(1:64)`.

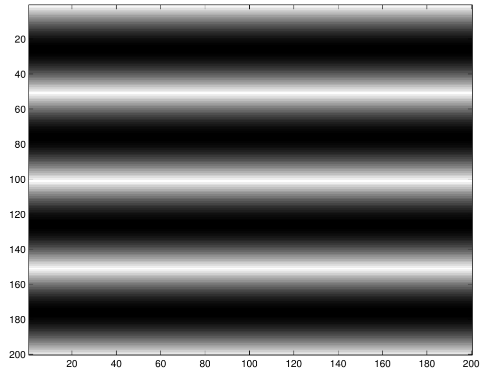
b) Creaţi o imagine de 200×200 pixeli, cu variaţie sinusoidală a intensităţii pe direcţie verticală, vezi Figura 7a. *Indicaţii.* Construiţi un semnal sinusoidal de perioadă 400. Mai departe, se vor lua primele 200 de eşantioane din semnalul unidimensional creat. Repetaţi de 200 de ori acest vector (obţinem o matrice de 200×200) folosind funcţia `repmat` (sau orice alta metoda).

c) Afişaţi acum transpusa matricii de la punctul b). Ce se obţine? Afişaţi apoi produsul celor doua matrici (element cu element) pentru a obţine Figura 7b.

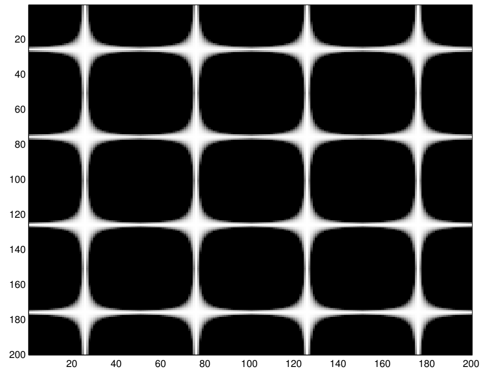
d) Modificaţi perioada semnalului armonic, pentru a obţine Figura 8. Se va folosi modulul funcţiei sinus, i.e., `abs(sin())`.

Exerciţiul 18. (1p) MATLAB are câteva functii interesante pentru calculul simbolic al Transformatei Laplace: `laplace`, `ilaplace`. Pentru un rezultat "lizibil", folositi functiile `simplify` si `pretty`.

a. Calculati TL pentru funcţia $f(t) = -1.25 + 3.5te^{-2t} + 1.25e^{-2t}$. Verificati rezultatul dat de MATLAB, in doua moduri: prin calcul direct si prin TL inversa.



(a) Variaţie sinusoidală



(b) Produs de sinusoide

Figura 8

b. Calculati TL inversa pentru $F(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^2+4s+5)}$. Verificati rezultatul.

c. O alta functie utila, care nu foloseste insa variabile simbolice, este `residue`. Functia realizeaza descompunerea in fractii simple. Reluati punctul **b.** folosind `residue`.

Observatie. Rezultatul obtinut poate contine termenii $\sinh(x)$ si $\cosh(x)$. Se definesc:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$