Stabilizare, estimare–compensatorul Kalman

Tudor C. Ionescu
Dept. de Automatică și Ingineria Sistemelor (ACSE),
Facultatea de Automatică și Calculatoare,
Universitatea Politehnica București

e-mail: tudor.ionescu@upb.ro

URL: http://acse.pub.ro/person/tudor-cornel-ionescu/

5 decembrie 2020

Problema naturală a sintezei

Sistem liniar:

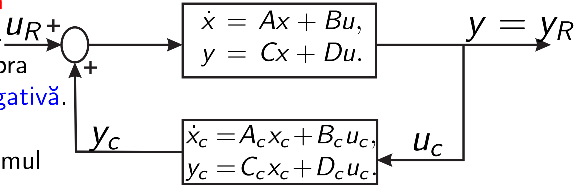
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), & x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad y(t) \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \tag{1}$$

Problema sintezei: Cum putem modifica dinamica acestui sistem astfel încât să satisfacă anumite cerințe? Cerințele elementare, vezi cazul sistemelor SISO: stabilitate & comportament al sistemului la diverse semnale–referință/perturbații.

Răspuns: Cerințele de proiectare se pot realiza prin cuplarea unui nou sistem dinamic, numit *compensator* (de preferință din aceeași clasă de modele) astfel încât sistemul rezultant să se comporte în modul dorit.

Compensator dinamic

Precum în cazul sistemelor SISO, conexiunile serie și paralel nu pot asigura nici măcar cerința minimală de stabilitate (internă). Prin urmare, ne concentrăm asupra conexiunii în buclă de reacție negativă. În conjuncție cu sistemul (1), considerăm sistemul dinamic pe spațiul stărilor–numit compensator dinamic/regulator –



$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u_c(t), & x_c(0) = x_{co}, \\ y_c(t) = C_c x_c(t) + D_c u_c(t), \end{cases} \tag{2}$$

unde $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$, $u_c(t) \in \mathbb{R}^p$, $y_c(t) \in \mathbb{R}^m$, cuplat în reacție inversă cu (1) a.î.

$$u \equiv y_c + u_R, \qquad y_R \equiv y \equiv u_c$$

unde u_R este intrarea (semnal extern) si y_R este ieșirea sistemului rezultant.

Sistemul în buclă închisă

Pentru simplificare presupunem, în conexiunea în reacție inversă, $S := I_p - DD_c = I$, $\widehat{S} = I_m - D_c D = I$ (de exemplu $D = 0$ sau $D_c = 0$) $\Rightarrow$ ecuațiile dinamice ale sistemului echivalent sunt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c + B_c DC_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B_c D \end{bmatrix} u_R, \\ y_R &= \begin{bmatrix} C & DC_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + Du_R. \end{aligned} \tag{3}$$

Notând

$$x_R := \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \; A_R := \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c + B_c DC_c \end{bmatrix}, \; B_R := \begin{bmatrix} B \\ B_c D \end{bmatrix},$$

$$C_R := \begin{bmatrix} C & DC_c \end{bmatrix}, \qquad D_R := D.$$

obținem echivalent

$$\begin{cases} \dot{x}_R(t) = A_R x_R(t) + B_R u_R(t), & x_R(0) = \begin{bmatrix} x_o \\ x_{co} \end{bmatrix}, \\ y_R(t) = C_R x_R(t) + D_R u_R(t). \end{cases} \tag{4}$$

Problemele naturale fundamentale

1. Problema stabilizării: Pentru sistemul original (A, B, C, D) găsiți un regulator (sau clasa tuturor!!!) (A_c, B_c, C_c, D_c) a.î. sistemul rezultant în buclă închisă să fie intern asimptotic stabil, i.e., $\boxed{\Lambda(A_R) \subset \mathbb{C}^-}$.

2. Problema alocării: Pentru sistemul original (A, B, C, D) găsiți un regulator (sau clasa tuturor!!!) (A_c, B_c, C_c, D_c) a.î. sistemul rezultant în buclă închisă sa aibă o dinamică impusă, i.e., valorile proprii ale sistemului în buclă închisă să coincidă cu mulțimea Λ_0 de $n + n_c$ valori complexe date, i.e., $\boxed{\Lambda(A_R) = \Lambda_0}$.

Observația 1

- Ambele probleme impun condiții numai asupra matricii A_R.
- În ambele probleme trebuie implicit determinat și n_c (dimensiunea compensatorului) fiind de dorit ca aceasta să fie cât mai mică. Problemele de stabilizare/alocare în care se impune condiția suplimentară de minimalitate a lui n_c sunt probleme structurale foarte dificile.
- Mulțimea Λ_0 se ia in general simetrică, i.e., dacă $s \in \Lambda_0 \Leftrightarrow \overline{s} \in \Lambda_0$, regulatorul rezultând cu coeficienți reali. Λ_0 se dă ca cerință de proiectare, asigurând automat o anumită viteză de răspuns, timp tranzitoriu, etc. Spre deosebire de problema alocării, problema stabilizării nu cere spectru fix, ci doar localizarea în $\mathbb{C}^-$.

Principiul separației

Un compensator dinamic poate fi calculat rezolvând independent 2 probleme.

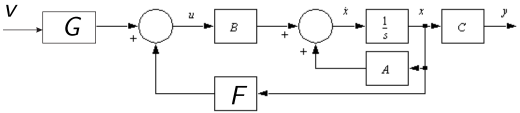
- Construcția unei legi de reacție după stare $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ care alocă sau stabilizează (face ca matricea $A + BF$ să aibă spectrul dorit, sau sa fie asimptotic stabilă);
- Construcția unui estimator de stare, i.e., prelucrează semnalele exogene – intrările u și ieșirile y – și generează o estimare a mărimii de stare x, care, în general, nu poate fi măsurată.

În final, regulatorul (de tip Kalman) se obține luând reacția F după starea estimată.

Problema de alocare (cu reacție dinamică după ieșire) are soluție dacă și numai dacă perechea (A, B) este controlabilă și perechea (C, A) este observabilă.

Problema de stabilizare (cu reacție dinamică după ieșire) are soluție dacă și numai dacă perechea (A, B) este *stabilizabilă* și perechea (C, A) este *detectabilă*.

Pereche stabilizabilă/detectabilă



Definiția 1

- Fie sistemul (A, B, C, D). Numim dependența

$$u = Fx + Gv \tag{5}$$

lege de comandă prin reacție după stare ($F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{m\times m}$), F matrice de reacție și v este noua mărime de intrare.

- Perechea (A, B), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se numește stabilizabilă dacă există o matrice de reacție după stare $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a.î. $\boxed{\Lambda(A + BF) \subset \mathbb{C}^-}$.
- Perechea (C, A), $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numește detectabilă dacă există o matrice de reacție după stare $K \in \mathbb{R}^{n\times p}$ a.î. $\boxed{\Lambda(A + KC) \subset \mathbb{C}^-}$.

Pereche alocabilă. Dualitate

Definiția 2

Perechea (A, B), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, se numește alocabilă dacă oricare ar fi mulțimea simetrică Λ_0 de n numere complexe (orice $s \in \Lambda_0 \Rightarrow \overline{s} \in \Lambda_0$), există o matrice de reacție după stare $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a.î.

$$\Lambda(A + BF) = \Lambda_0.$$

Proprietățile de stabilizabilitate și detectabilitate sunt duale.

Considerând sistemul dinamic

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{6}$$

legea de comandă după stare implică accesul (din punct de vedere tehnic) la stare, i.e., cunoașterea mărimii de stare! După implementarea comenzii (5) sistemul în buclă închisă devine

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BGv(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = (C + DF)x(t) + DGv(t), \end{cases} \tag{7}$$

având noua intrare v și ieșirea y.

Criteriul Hautus de stabilizabilitate/detectabilitate

Propoziția 1

- *Perechea* (A, B), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *este stabilizabilă dacă și numai dacă*

$$\text{rang}\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^0. \tag{8}$$

- *Perechea* (C, A), $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *este detectabilă dacă și numai dacă*

$$\text{rang}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^0. \tag{9}$$

Soluția problemei alocării

Teorema 1

Perechea (A, B), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *este alocabilă dacă și numai dacă este controlabilă.*

Demonstrația – în etape:

- se demonstrează suficiența pentru $m = 1$ (o intrare);
- se arată că problema cu $m > 1$ se poate reduce printr-o (pre)reacție după stare F la problema cu $m = 1$;
- se demonstrează teorema pentru m general.

Teorema 2 (Cazul m=1 – o intrare)

Perechea (A, b), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *este alocabilă dacă este controlabilă.*

Fie Λ_0 un set simetric de n numere $s_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\exists\ f \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ a.î.

$$\Lambda(A + bf^T) = \Lambda_0.$$

Q: Cum îl calculăm pe f^T?

A: **Procedura de alocare**! (de fapt demonstrația Teoremei 2).

Soluția problemei alocării - continuare

Observația 2

- Partea controlabilă a oricărei perechi (A, B) este alocabilă. Perechea (A, B) are și o parte nealocabilă, i.e., anumiți poli ficși dați de partea necontrolabilă. Acești poli sunt invarianți în raport cu orice reacție după stare.
- Proprietatea „benefică" fundamentală a unei perechi controlabile (A, B) este că dinamica sistemului (determinată de v.p. ale matricii de stare A) poate fi modificată în mod arbitrar printr–o reacție după stare.
- Demonstrațiile teoremelor de mai sus sunt, de obicei, constructive, conducând la proceduri de obținere a reacției care alocă. Aceaste metode au însă numeroase dezavantaje dpdv numeric și, de aceea, s-au dezvoltat alte proceduri numeric stabile de construcție a reacției F (algoritm de tip Schur, alocare cu normă minimă etc.)
- Alocabilitatea nu implică, în general, faptul că matricea $A + BF$ are orice elemente prescrise, ci doar orice spectru prescris!

Procedura de alocare: Cazul $m = 1$

Pas 0. Dându–se perechea controlabilă (A, b), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, și un set simetric de n valori proprii $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se construiește polinomul

$$\chi(s) = \Pi_{i=1}^{n}(s - s_i) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n,$$

cu $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Pas 1. Se construiește matricea de controlabilitate (pătrată și nesingulară)

$$R = \left[\, b \;\; Ab \;\; \ldots \;\; A^{n-1}b \,\right].$$

Pas 2. Se rezolvă ecuația (în necunoscuta $q \in \mathbb{R}^n$)

$$R^T q = e_n = \left[\, 0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 1 \,\right]^T.$$

Pas 3.

$$\boxed{f^T = -q^T \chi(A)}.$$

Procedura de alocare: cazul general $m > 1$

Pentru procedura în cazul multivariabil avem nevoie de un rezultat auxiliar.

Propoziția 2

Fie (A, B) controlabilă, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Controlabilitatea perechii $(A + BF, b)$ este generică in raport cu $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ și $b := Bg$, $0 \neq g \in \mathbb{R}^m$. Mai exact, alegând aleator perechea (F, g), perechea (A_F, b) este (generic) controlabilă.

Pas 0. Dându–se perechea controlabilă (A, B), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, și un set simetric de n valori proprii $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se construiește polinomul

$$\chi(s) = \Pi_{i=1}^{n}(s - s_i) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \ldots + \alpha_{n-1}s^{n-1} + s^n,$$

cu $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Pas 1. Se aleg $\widetilde{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ și $g \in \mathbb{R}^m$ aleator și se construiesc matricile

$$A_{\widetilde{F}} := A + B\widetilde{F}, \quad b = Bg.$$

Pas 2. Se aplică procedura de alocare pt $m = 1$ perechii $(A_{\widetilde{F}}, b)$ și polinomului $\chi(s) \Longrightarrow$ reacția $f \in \mathbb{R}^m$.

Pas 3. Reacția finală $\boxed{F = \widetilde{F} + gf^T}$.

Estimarea stării

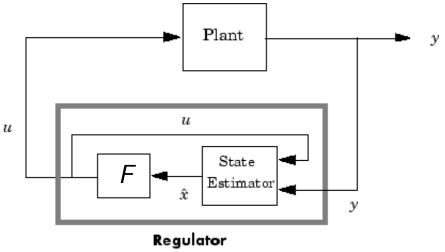


Figura 1: Lege de comandă prin reacție după starea estimată

Legea de comandă cu reacție după stare poate asigura cerințele fundamentale de stabilizare și de alocare cu condiția ca starea să fie **disponibilă pentru măsură** (să fie accesibilă dpdv tehnic). Acest lucru NU este în general posibil și atunci ne punem problema estimării cât mai exacte a stării unui sistem dinamic prin construcția unui nou sistem care să citească mărimile accesibile sau măsurabile (intrarea u și ieșirea y) și care să genereaze la ieșire o estimare a stării $\widehat{x} \Longrightarrow$ **estimator de stare** (vezi Figura 1.).

Problema estimării

Problemă: Dându–se un sistem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_o, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \tag{10}$$

dorim să construim un nou sistem

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Jw(t) + Hy(t) + Mu(t), \\ \widehat{x}(t) = Kw(t) + Ny(t) + Pu(t), \end{cases} \tag{11}$$

care are ca intrări intrarea u și ieșirea y, are ca ieșiri starea estimată $\widehat{x}$ și mărimea de stare w, care să îndeplinească simultan următoarele două condiții.

1. Să fie intern asimptotic stabil, i.e., matricea de stare J să satisfacă

$$\Lambda(J) \subset \mathbb{C}_-.$$

2. $\lim_{t\to\infty}(\widehat{x}(t) - x(t)) = 0$, i.e., ieșirea $\widehat{x}(t)$ (numită estimația stării) să aproximeze asimptotic starea sistemului original $x(t)$.

Problema estimării - soluție

Observația 3

- Ideal ar fi $x(t) = \widehat{x}(t)$, $\forall t$. Acest lucru nu este însă, în general, posibil și atunci această cerință se relaxează la cea asimptotică.
- Cerința de stabilitate internă este esențială pentru construcția estimatorului.

Soluție: punem în evidență „fidelitatea" cu care starea estimatorului (11) urmărește starea sistemului original, i.e., evaluăm

$$w - Vx,$$

unde V este o matrice care „adaptează" dimensiunile posibil diferite ale lui x și w. Folosind (10) și (11), avem succesiv

$$\begin{aligned}
\dot{w} - V\dot{x} &= Jw + Hy + Mu - VAx - VBu, \\
\overbrace{w - Vx}^{\cdot} &= J(w - Vx) + JVx + HCx + HDu - VAx + (M - VB)u, \\
\overbrace{w - Vx}^{\cdot} &= J(w - Vx) + (JV + HC - VA)x + (M - VB + HD)u.
\end{aligned} \tag{12}$$

Soluția problemei estimării–continuare

Calculăm

$$\begin{aligned}
&\widehat{x} - x = Kw + Ny + Pu - x = K(w - Vx) + KVx + NCx + NDu - x + Pu \\
&\Rightarrow \widehat{x} - x = K(w - Vx) + (KV + NC - I)x + (P + ND)u. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Combinând (12) cu (13) obținem

$$\begin{cases}
\dot{\overbrace{w - Vx}} = J(w - Vx) + (JV + HC - VA)x + (M - VB + HD)u, \\
\widehat{x} - x = K(w - Vx) + (KV + NC - I)x + (P + ND)u.
\end{cases}$$

Pentru ca starea estimatorului să urmarească asimptotic starea sistemului original (condiția 2) trebuie ca ieșirea sistemului dinamic de mai sus sa tindă asimptotic la zero (indiferent de inițializări și de semnalele de intrare x și u).

Q: Când este posibil ca ieșirea acestui sistem să tindă la zero?

Soluția problemei estimării–continuare

Acest lucru este posibil dacă satisfacem simultan următoarele condiții.

a) J asimptotic stabilă;

b) $JV + HC - VA = 0$;

c) $M - VB + HD = 0$;

d) $KV + NC - I = 0$;

e) $P + ND = 0$.

Dacă aceste condiții sunt simultan satisfăcute, obținem comportarea dinamică

$$\begin{cases} \dot{\overbrace{w - Vx}} &= J(w - Vx), \\ \widehat{x} - x &= K(w - Vx). \end{cases}$$

Așadar,

$$\lim_{t\to\infty}(w(t) - Vx(t)) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty}(\widehat{x}(t) - x(t)) = 0.$$

indiferent de inițializarea sistemului sau a estimatorului!

Soluția problemei estimării - continuare

Problema de construcție a estimatorului asimptotic stabil s-a redus la problema algebrică de satisfacere simultană a condițiilor a) – e): avem 5 condiții (4 ecuații algebrice și o localizare de spectru) și 7 necunoscute.

Evident c) și e) se pot satisface automat, alegând $M := VB - HD$ și $P := -ND$.

Rămân în continuare mai multe grade de libertate în satisfacerea celorlalte condiții

$$\begin{aligned} \Lambda(J) \quad &\subset \mathbb{C}_-, \\ JV + HC - VA &= 0, \\ KV + NC - I &= 0, \end{aligned}$$

în funcție de care se deosebesc multiple tipuri de estimatori.

Estimatori de tip 1: $N = 0$

Condiția este echivalentă cu a spune că estimatorul nu are transfer direct I/O, i.e., matricea sa "D" este zero. În acest caz obținem

$$\begin{aligned} JV + HC - VA &= 0, \\ KV &= I. \end{aligned}$$

Putem alege $K = I$, $V = I$. Prin urmare, rămâne de satisfăcut doar condiția

$$J = A - HC, \qquad \Lambda(J) \subset \mathbb{C}_-.$$

Această condiție se poate satisface automat dacă perechea (C, A) este detectabilă, caz în care alegem $-H$ egal cu reacția care stabilizeaza (problema de stabilizare pentru perechea (A^T, C^T)). Mai mult, dacă perechea (C, A) este observabilă, atunci spectrul matricii de stare J a estimatorului poate fi alocat arbitrar.
În concluzie, am obținut pentru un estimator de tipul 1 următoarea procedură de construcție.

Construcția estimatorului de tip 1. Estimator Luenberger

Pasul 1: Se folosește procedura de alocare pentru perechea (A^T, C^T) și se determină o matrice $\widetilde{F}$ a.i. $(A^T) + (C^T)\widetilde{F}$ să aibă spectrul dorit (impus, sau doar localizat în $\mathbb{C}^-$ în funcție de cerința de proiectare).
Pasul 2: Se calculează estimatorul cu parametrii

$$H = -\widetilde{F}^T, \quad J = A - HC, \quad K = V = I, \quad M = B - HD, \quad P = 0,$$

rezultând

$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= (A - HC)w(t) + Bu(t) - HDu(t) + Hy(t), \\ \widehat{x}(t) &= w(t), \end{cases} \tag{14}$$

sau, echivalent, în forma de estimator Luenberger (am notat $L := -H$)

$$\boxed{\dot{\widehat{x}} = (A + LC)\widehat{x} + (B + LD)u - Ly}. \tag{15}$$

Estimatorul Luenberger - continuare

Observația 4

- Pentru a construi un estimator Luenberger este necesar doar să specificăm spectrul estimatorului Λ_0 și să construim reacția L care alocă respectivii poli pentru estimator $\Lambda(A + LC) = \Lambda_0$. Pentru ca estimatorul să rezulte cu coeficienți reali, spectrul se alege întotdeauna simetric.
- Dacă perechea (C, A) este observabilă atunci spectrul matricii de stare a estimatorului poate fi alocat arbitrar și deci este posibil ca estimatorul să furnizeze o estimație cât de precisă a stării într-un timp oricât de scurt!
- Din (15) observăm că estimatorul „copiază" dinamica sistemului original + termen proporțional cu „inovația" $C\widehat{x} + Du - y$ care de fapt măsoară „calitatea" estimării! Pentru o estimare perfectă avem $\widehat{x}(t) = x(t)$ și deci inovația este zero deoarece

$$C\widehat{x} + Du - y = C\widehat{x} - Cx = 0.$$

- Dacă facem o transformare de similaritate asupra sistemului original, estimatorul Luenberger se modifică corespunzător.

Estimatorul Luenberger - continuare

Observația 5

- Pentru a construi estimatorul Luenberger, singura condiție pe care am impus-o sistemului intițial este cea de detectabilitate (sau respectiv de observabilitate) asupra perechii (C, A). Condiția este nu numai suficientă pentru construcția unui estimator Luenberger, ci și necesară.
- Estimatorul de tipul 1 (Luenberger) are dimensiunea n și de aceea se mai numește de ordin întreg. În anumite situații, se pot construi estimatori de ordin mai mic.

Teorema 3

Fie sistemul (A, B, C, D) descris de (10). Atunci există un estimator (11) dacă și numai dacă perechea (C, A) este detectabilă. Dacă (C, A) este detectabilă, atunci un estimator (de tip 1 sau Luenberger) este dat de ecuațiile

$$\begin{cases} \dot{w} &= (A + LC)w + Bu + LDu - Ly, \\ \widehat{x}(t) &= w(t), \end{cases} \tag{16}$$

unde L este orice matrice a.i. $\Lambda(A + LC) \subset \mathbb{C}_-$.

Problema compensatorului dinamic stabilizator

Un sistem poate fi stabilizat/alocat cu o reacție constantă după stare. Deoarece starea nu este, în general, cunoscută am construit un sistem (numit estimator) care estimează asimptotic starea sistemului pe baza informațiilor furnizate de semnalele de intrare u și de ieșire y.

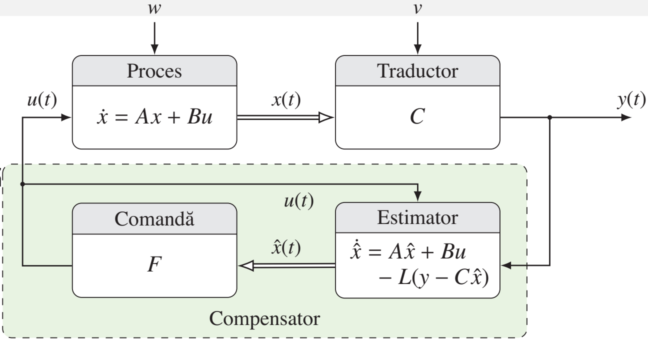


Figura 2: Compensatorul (dinamic) Kalman

Q: Întrebarea naturală este dacă putem stabiliza/aloca sistemul original prin implementarea reacției constante după starea estimată $\widehat{x}$ (în locul stării reale x care nu este accesibilă)?

A: Răspunsul este pozitiv $\Longrightarrow$ **compensatorul Kalman**, vezi Figura 2.

Compensatorul Kalman

Fie (A, B, C, D) un sistem dinamic și presupunem pentru problema de stabilizare cu reacție dinamică după ieșire că (A, B) este stabilizabilă și (C, A) este detectabilă, iar pentru problema cu alocare dinamică după ieșire că (A, B) este controlabilă și (C, A) este observabilă.

Considerăm un compensator cu reacție constantă F după starea estimată de către un estimator Luenberger descris de ecuațiile (16). Obținem, astfel, ecuațiile dinamice ale compensatorului – numit compensator Kalman –

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}} = (A + LC)\widehat{x} + Bu + LDu - Ly, \\ u = F\widehat{x}, \end{cases} \tag{17}$$

sau încă

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}} = (A + LC + BF + LDF)\widehat{x} - Ly, \\ u = F\widehat{x}, \end{cases} \tag{18}$$

având matricea de transfer

$$K(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A + LC + BF + LDF & -L \\ \hline F & O \end{array}\right], \quad U(s) = K(s)Y(s).$$

Matricile F si L se aleg a.î. $A + BF$ și $A + LC$ să fie asimptotic stabile (și, eventual, cu un spectru impus).

Sistemul automat cu compensator Kalman - analiză

Conectând compensatorul Kalman în reacție inversă cu sistemul original obținem pentru matricea de stare a sistemului rezultant în buclă închisă

$$A_R = \begin{bmatrix} A & BF \\ -LC & A+BF+LC \end{bmatrix}.$$

Aplicând transformarea de similaritate

$$T := \begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}$$

asupra lui A_R obținem

$$TA_RT^{-1} = \begin{bmatrix} A+BF & BF \\ O & A+LC \end{bmatrix},$$

ceea ce arată că dinamica (polii) sistemului în buclă închisă satisfac

$$\Lambda(A_R) = \Lambda(A+BF) \cup \Lambda(A+LC).$$

Prin urmare, sistemul în buclă închisă este intern asimptotic stabil (și, eventual, are dinamica prescrisă).

Sistemul automat cu compensator Kalman - observații

- Polii sistemului în buclă închisă sunt dați de reuniunea polilor alocați ai lui $A+BF$ prin reacția după stare F cu polii alocați de estimator $\Lambda(A+LC)$ prin reacția L. Cele două alocări se pot face independent, punându-se astfel în evidența celebrul principiu al separației.
- Un sistem este stabilizabil/alocabil prin reacție (dinamică) după ieșire dacă perechea (A, B) este stabilizabilă/controlabilă și perechea (C, A) este detectabilă/observabilă. Aceste condiții sunt nu numai suficiente, ci și necesare.

Teorema 4

Un sistem (A, B, C, D) este stabilizabil/alocabil prin reacție dinamică după ieșire dacă și numai dacă perechea (A, B) este stabilizabilă/controlabilă și perechea (C, A) este detectabilă/observabilă.

Discretizarea sistemelor în spațiul stărilor

Considerăm sistemul continuu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

și presupunem că $\widetilde{u}(t) = u_k$, $t \in [kT\ ,\ (k+1)T]$. Scriem soluția generală

$$\begin{aligned} \widetilde{x}((k+1)T) &= \mathrm{e}^{AT}\,\widetilde{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \mathrm{e}^{A((k+1)T-\tau)}\,\mathrm{d}\,\tau\, Bu_k \\ &= \mathrm{e}^{AT}\,\widetilde{x}(kT) + \int_0^T \mathrm{e}^{A\theta}\,\mathrm{d}\,\theta\, Bu_k. \end{aligned}$$

Cu notațiile $x_d(k) = \widetilde{x}(kT)$, $A_d = \mathrm{e}^{AT}$ și $B_d = \int_0^T \mathrm{e}^{A\theta}\,\mathrm{d}\,\theta\, B$ se obține de mai sus

$$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_k.$$

Această ecuație descrie dinamica sistemului discretizat.
Mai mult, $y_d(k) = y(kT) = C_d x_d(k) + D_d u_k$, adica $C_d = C$, $D_d = D$.

Considerațiuni finale

- În cazul sistemlor discrete, stabilitatea este singura chestiune de analiză de sistem care este complet diferită de cea din cazul neted, i.e., un sistem este **asimptotic stabil** dacă **spectrul** $\Lambda(A)$ este **inclus în discul unitate**.
- Proprietățile structurale sunt absolut identice, iar testarea lor, deasemenea.
- Stabilizabilitatea/alocabilitatea/detectabilitatea sunt similare cu cazul continuu. Atenție că spectrul impus în problema alocării conduce la stabilitate asimptotică în buclă închisă, dacă acesta este inclus în discul unitate. Idem la problema estimării stării discrete.

HET EINDE VAN DE SYSTEEMTHEORIECURSUS!
VEEL SUCCES MET DE EXAMENS![1]

[1] Nederlands...