

# Descomposición de Ondaletas, Análisis de Volatilidad y Correlación para Índices Financieros

*Fabián Pino Correa*

*13 de noviembre de 2018*

## RESUMEN

El mercado financiero es objetivo de estudio a nivel mundial dadas las relaciones y correlaciones de los diferentes mercados internacionales. Por esto, en este artículo se desarrollará un análisis de varianza y correlación para índices financieros, como por ejemplo el Dow Jones Industrial, el índice Bovespa y el Euro Stoxx 50 a través de la descomposición de estas series en Ondaletas. Usando entonces esta descomposición se obtendrán las frecuencias más relevantes de cada una de estas series, y luego se hará un estudio de estructura de correlaciones y varianzas que permitirá evidenciar fenómenos particulares de cada frecuencia, los cuales no se detectan cuando las frecuencias se encuentran de forma agregada en la serie.

## PALABRAS CLAVE

Ondaletas, series financieras, análisis de volatilidad y correlación, descomposición de ondaletas

## INTRODUCCIÓN

En las finanzas internacionales, es de amplio interés estudiar el movimiento conjunto o co-movimiento entre índices financieros, o en otras palabras su correlación. Estos estudios muestran el nivel de riesgo que se toma al invertir, además de que tan factible es la diversificación del portafolio para el inversionista.

Los retornos de las series financieras han sido objetivo de varios estudios en los últimos tiempos, pues la correlación entre estos es relevante a la hora de la estructuración de portafolios. Entre estos, la mayoría ha abordado estudiar el comportamiento de la correlación de los retornos, dentro del período de tiempo bajo análisis.

Pero en estos casos, dado que se estudian los retornos de las series originales, se pierde información generada por las diferentes frecuencias que componen la series de tiempo, pues esta se alimenta de inversiones altas y bajas, de corto y largo plazo. Claramente, el grado de correlación de mercados distintos debe variar entre frecuencias distintas. Este mismo fenómeno se presenta cuando se estudia la volatilidad, pues esta es influida por inversiones a corto y largo plazo, lo cual indica que si no se hace la descomposición de las frecuencias se generará una imprecisión de los análisis realizados para la volatilidad.

Este artículo entonces propone un análisis de correlación entre algunos índices financieros, Dow Jones Industrial (USA), Euro Stoxx 50 (Europa) e índice Bovespa (Brasil) para 5 años en específico (2004-2009), estudiando la estructura de correlación entre estas series, así como procediendo a un análisis de volatilidad por medio de la metodología de ondaletas. Dentro del marco teórico se ahondará en los conceptos de la descomposición de ondaletas, en la metodología se mencionarán los pasos a seguir para el análisis práctico y en la aplicación se abordarán las bases de datos y los análisis respectivos.

## OBJETIVOS

Usar la descomposición de ondaletas para realizar un análisis de correlación y volatilidad de las series de tiempo de los índices financieros Dow Jones Industrial, el índice Bovespa y el Euro Stoxx 50.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Descomponer una señal a través de ondaletas.
- Entender cómo una particular media ponderada de un conjunto de funciones varía entre períodos.
- Descomponer las series financieras en ondaletas y analizar los resultados.
- Analizar la volatilidad y correlación de ondaletas de las series financieras.

## MARCO TEÓRICO

### El método de Ondaletas

Las ondaletas son funciones. Una señal, o serie de tiempo, puede ser vista como un elemento de un espacio de Hilbert, o  $L_2$ , o espacio de funciones cuadráticas sumables sobre los reales. Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal, en términos de los cuales sus elementos pueden ser escritos. En el caso de  $L_2$ , es posible obtener una base de ondaletas.

Se puede obtener información acerca de una serie a través del estudio de los coeficientes de la señal en términos de una base ortonormal. La idea es entender cómo una particular media ponderada de un conjunto de funciones varía entre períodos, o en otras palabras, hablando de series de tiempo, es entender cómo los componentes de una señal varían en diferentes frecuencias temporales.

De esta manera se define:

Sea  $\varphi : R \rightarrow R$  tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = 0 \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(u) du = 1$$

Entonces,  $\varphi : R \rightarrow R$  es llamada ondaleta. La transformada de Fourier de  $\varphi$

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \exp(-i2\pi f(u)) du$$

tal que  $C_\Phi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi^2(f)|}{f} df$ , satisface  $0 < C_\Phi < \infty$ , entonces  $\varphi$  es una ondaleta admisible.

En una familia dada de ondaletas, se pueden mencionar dos tipos de funciones, las ondaletas *padre* y las ondaletas *madre*. Las primeras son, de manera general, empleadas en las componentes de más alta frecuencia, mientras que las ondaletas *madre* son empleadas en las componentes de frecuencia más baja. De forma alternativa, se puede decir que las ondaletas *padre* abordan componentes de tendencia de la serie de tiempo, en cuanto a las ondaletas *madre* se encargan de las componentes responsables por desvíos con relación a la tendencia.

Así, dada una ondaleta *padre*  $\phi$ , una ondaleta *madre*  $\varphi$ , y un entero positivo  $J$ , se puede obtener una familia:

$$\{\phi_{j,k}, \varphi_{j,k}, j = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots\}$$

cuyos elementos son:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{1}{2}} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right)$$

y

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right)$$

De esta forma, dado un elemento  $f \in L_2(R)$ , se construyen las proyecciones ortogonales:

$$\nu_{j,k} = \int f(t)\phi_{j,k}(t)dt$$

y

$$\omega_{j,k} = \int f(t)\varphi_{j,k}(t)dt$$

Entonces,  $f(t)$  puede ser escrito como:

$$f(t) = \sum_k \nu_{j,k}\phi_{j,k}(t) + \sum_{j=1}^J -1 \sum_k \omega_{j,k}\varphi_{j,k}(t)$$

La expresión anterior es la representación de la función  $f$  en una base de ondaletas. Es clara la semejanza entre esta representación y la representación de una función de  $L_2(0, 2\pi)$ , dada en términos de coeficientes de Fourier y de funciones trigonométricas.

Dada la definición formal de una ondaleta, se procede ahora a discutir la transformada discreta de ondaletas (TDO) y la transformada discreta de ondaletas de máxima sobreposición (TDOMS). Se aborda primero el caso TDO.

Considere una serie de tiempo de tamaño  $N = 2^J$  dada por  $X$ . Entonces, el vector de transformada discreta de ondaletas,  $\omega$ , de tamaño  $N$  es dado por:

$$\omega = WX$$

donde  $W$  es la matriz de  $R^{N \times N}$  que define a TDO de  $X$ . La matriz puede ser escrita de la forma:

$$\omega = [\omega_1, \dots, \omega_J, \nu_J]$$

donde cada  $\omega_i$  es un vector de tamaño  $N/2^i$  asociado a cambios de escala  $\sigma_i = 2^i - 1$ , en cuanto a  $\nu_J$  es un vector de tamaño  $N/2^J$  y está asociado a los coeficientes referentes a los promedios de escala  $2^J$ . La matriz ortonormal  $W$  consiste en los filtros - y las ondaletas - utilizados en la descomposición de la señal.

Para la transformada discreta de ondaletas de máxima sobreposición, TDOMS, al contrario del caso anterior,  $X$  no necesita ser un vector de tamaño  $2^N$ , de modo que se toma  $X$  como un vector de observaciones para un serie de tiempo dada de tamaño  $N$ . Entonces, el vector  $\tilde{W}$  de tamaño  $(J+1)N$  de los coeficientes de TDOMS es dado por:

$$\tilde{\omega} = \tilde{W}X$$

donde  $\tilde{W}$  es una matriz de  $R^{(J+1)N \times N}$  que define a la TDOMS, y es construida de forma análoga a la descrita para el caso TDO. De este modo, el uso de las matrices  $W$  y  $\tilde{W}$  es crucial en el análisis de la composición de la señal en cada una de las distintas escalas en cada instante del tiempo.

## METODOLOGÍA

### Estructuras de correlación y varianzas

Dentro del objetivo principal, se tiene estimar una estructura de volatilidad y correlación para índices financieros descritos recientemente en las diversas escalas permitidas por el análisis de ondaletas. Para ello, se presenta la metodología empleada.

Considere la serie de tiempo  $X$  y sea:

$$\{\tilde{h}_{j,l} : l = 0, \dots, L_j - 1\}$$

es el filtro de ondaletas para la  $j$ -ésima escala de la TDOMS, donde:

$$L_j = (2^j - 1)(L - 1)$$

es el tamaño del filtro y  $L$  es el tamaño del filtro  $\tilde{h}_l$ . Entonces, se puede definir el proceso estocástico:

$$\tilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} X_{t-l}$$

obtenido por el filtrado de  $X$  por los coeficientes de ondaletas de la TDOMS.

Así, se tiene a:

Definición - Si existe, y es finita, la varianza de ondaletas tiempo-dependiente para la escala  $\sigma_j$ , de la señal  $X$ , es dada por:

$$V_{X,t}^2(\sigma_j) = \text{var}\{\tilde{W}_{j,t}\}$$

Si esta magnitud es independiente de  $t$  entonces,  $V_{X,t}^2(\sigma_j) = V_X^2(\sigma_j)$  se llama varianza de ondaletas tiempo-independientes para la escala  $\sigma_j$ .

Definición - Considere dos señales  $X$  y  $Y$  de mismo tamaño. Entonces la covarianza de ondaletas para la escala  $\sigma_j$  de estas series se da por:

$$V_{X,Y}(\sigma_j) = \text{cov}\{\tilde{W}_{X,j,t}, \tilde{W}_{Y,j,t}\}$$

Como es usual, esta medida puede ser normalizada para un coeficiente de correlación a través de:

$$\rho_{X,Y}(\sigma_j) = \frac{\text{cov}\{\tilde{W}_{X,j,t}, \tilde{W}_{Y,j,t}\}}{(\text{var}\{\tilde{W}_{X,j,t}\}\text{var}\{\tilde{W}_{Y,j,t}\})^{1/2}} = \frac{V_{X,Y}(\sigma_j)}{V_X(\sigma_j)V_Y(\sigma_j)}$$

A pesar de la posibilidad de proceder a un análisis de varianza con base en los coeficientes de la TDO, este procedimiento considera sólo la transformada discreta de ondaletas de máxima superposición. Esto se debe al hecho de que el estimador de varianza basado en los coeficientes de la TDOMS es asintóticamente más eficiente que aquel basado en los coeficientes de la TDO.

## APLICACIÓN

Los datos utilizados en este trabajo son los retornos financieros de las series financieras Bovespa, Euro Stoxx 50 y Dow Jones Industrial, en el período de 10/11/2004 hasta el 5/06/2009. Por tratarse de informaciones diarias, los datos fueron compatibilizados de modo que hubiera 1024 observaciones para cada serie y, más aún, que todas esas observaciones fueran referentes a la misma fecha para cada serie. Así, la compatibilidad tuvo en cuenta las diferencias entre los días de funcionamiento de los mercados financieros en Europa, Estados Unidos y Brasil.

La elección por estos índices se basó en la capacidad de éstos de evaluar o representar el desempeño de cada uno de los mercados bajo análisis, lo que parece razonable dada la relevancia de cada uno de ellos. El Euro Stoxx 50 congrega cincuenta activos de empresas consideradas líderes en sectores clave para la economía de la zona del euro, repartidas en doce países de la Unión Europea. El Bovespa y el Dow Jones son índices típicamente tomados en consideración cuando el análisis financiero en los ambientes brasileño y americano.

El uso de 1024 observaciones se debe a la metodología de ondaletas empleada, debido al requerimiento de un tamaño de muestra específico para el desarrollo del método.

### Análisis exploratorio de datos

Con el fin de discutir el comportamiento de las series de retornos para los índices financieros considerados aquí, se realizará un análisis exploratorio de los datos, abordando incluso las transformaciones de ondaletas TDO y TDOMS. En cierto modo, por tratarse de un análisis exploratorio, no se realizan en este momento pruebas de hipótesis sobre las estadísticas obtenidas.

Se comienza con la serie de Bovespa observando la serie de los retornos de la misma en la Figura 1. La Figura 2 es su histograma y la Figura 3 muestra el gráfico quantil-quantil, o también llamado Q-Q plot para ver si estos siguen una distribución normal.

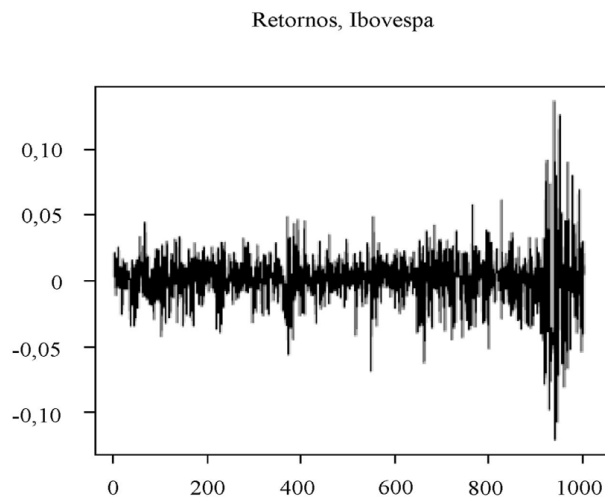


Figure 1: Serie de retornos de Bovespa

Histograma, Ibovespa

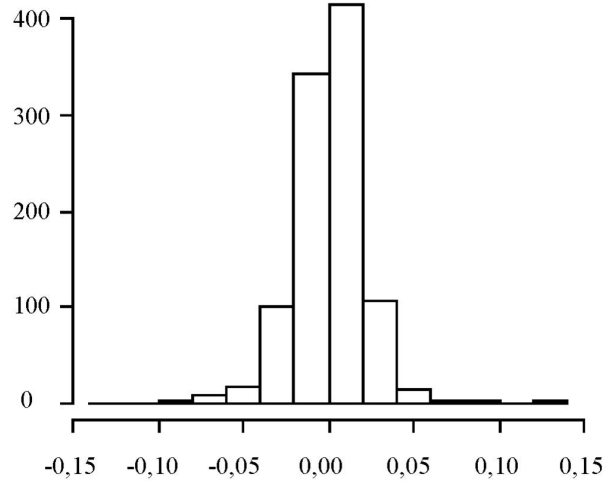


Figure 2: Histograma, Retornos, Bovespa

Normal,  $Q \times Q$ , Ibovespa

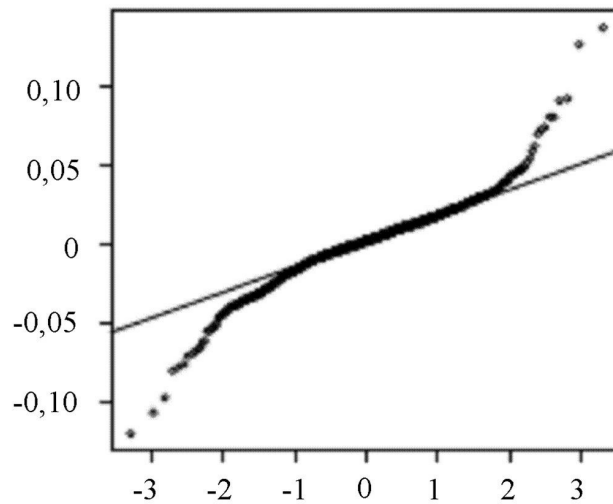


Figure 3: Gráfico  $Q \times Q$ , Bovespa

El análisis de la Figura 3 sugiere que los retornos del índice Bovespa no presentan una distribución normal, además de presentar mayor volatilidad en la última tercera parte del período analizado. La observación del histograma, Figura 2, sugiere la presencia de colas más pesadas que la de una distribución Normal estándar. Se procede ahora al mismo análisis para los retornos de la serie del Dow Jones Industrial:

Retornos, Dow Jones

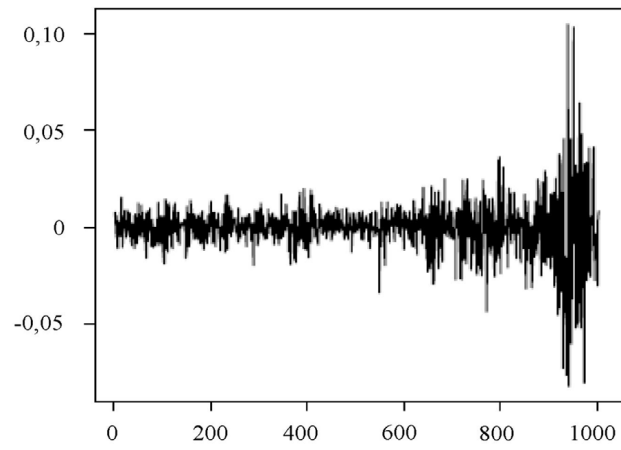


Figure 4: Serie de retornos de Dow Jones

Histograma, Dow Jones

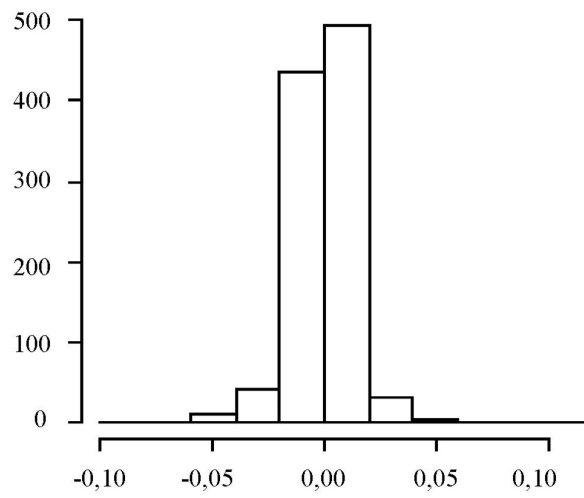


Figure 5: Histograma, Retornos, Dow Jones

### Normal, Q×Q, Dow Jones

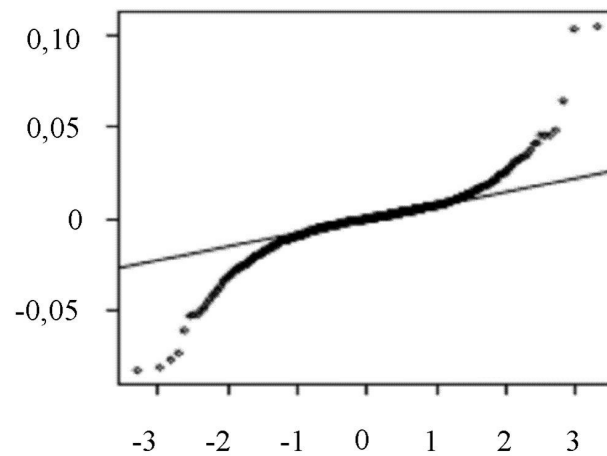


Figure 6: Gráfico QxQ, Dow Jones

De nuevo, se observa una serie de retornos con elevada oscilación en el último tercio del período analizado. Sin embargo, esta oscilación parece más acentuada que en el caso del índice Bovespa, indicando una volatilidad mayor en el período para los retornos del índice Dow Jones Industrial. Una vez más se obtienen fuertes evidencias de que la distribución de estos retornos no sigue una Normal estándar, ya que las colas de la distribución sugieren un comportamiento leptocúrtico. En el caso de los retornos para el Euro Stoxx se puede ver un fenómeno parecido:

### Retornos, Euro Stoxx 50

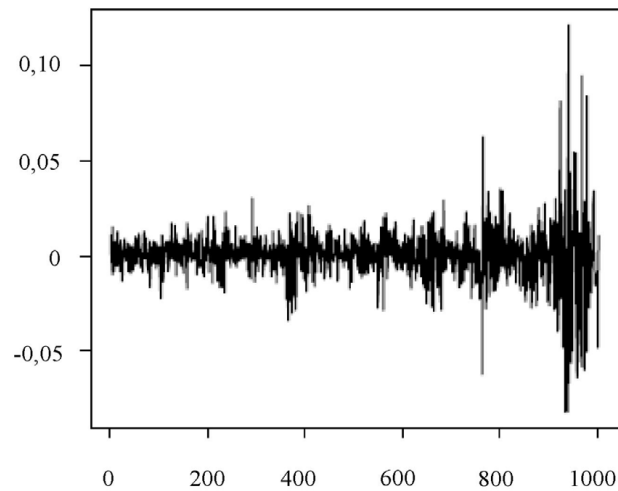


Figure 7: Serie de retornos de Euro Stoxx 50



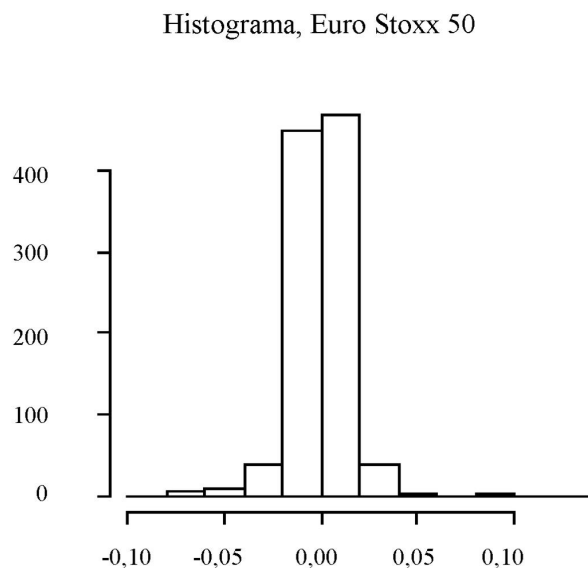


Figure 8: Histograma, Retornos, Euro Stoxx 50

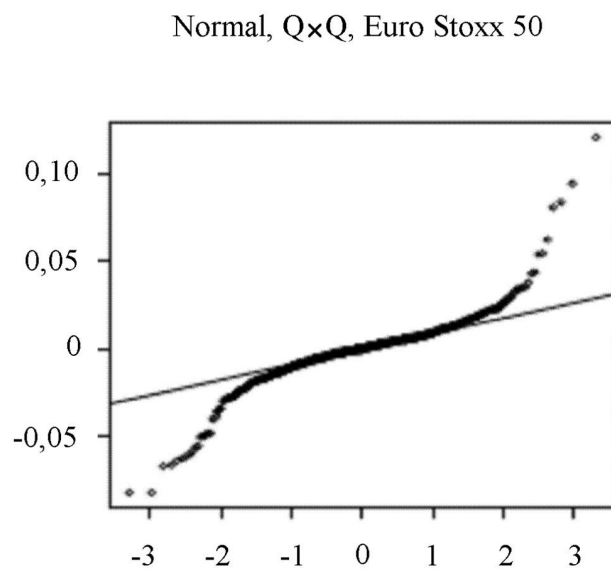


Figure 9: Gráfico QxQ, Euro Stoxx 50

No es sorprendente que los retornos del Euro Stoxx 50 también presenten un comportamiento bastante errático con elevación de volatilidad al final del período de análisis. Al alinear su comportamiento a aquellos sugeridos por los gráficos anteriores, esta serie también ofrece evidencias de una distribución con colas más pesadas que las realizadas por una Normal. En general, el análisis exploratorio sugiere que las tres series presentan comportamientos similares a lo largo del período analizado. Sin embargo, como se observó anteriormente, no es posible aún diferenciar los niveles de asociación entre las diversas escalas o frecuencias de cada señal. Esta asociación se analizará a continuación:

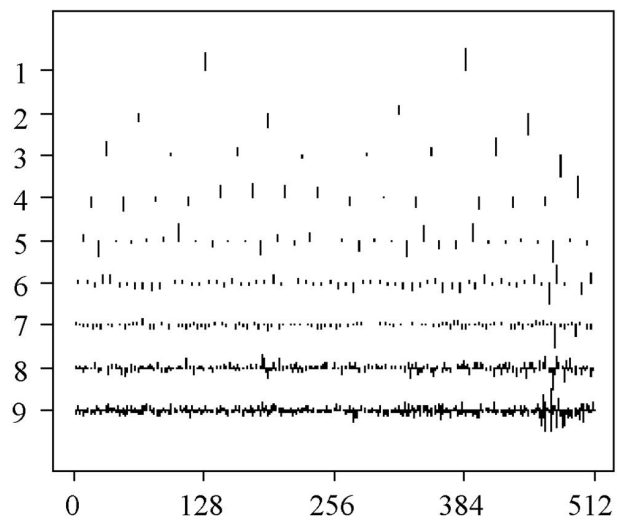


Figure 10: TDO, Retornos, Bovespa

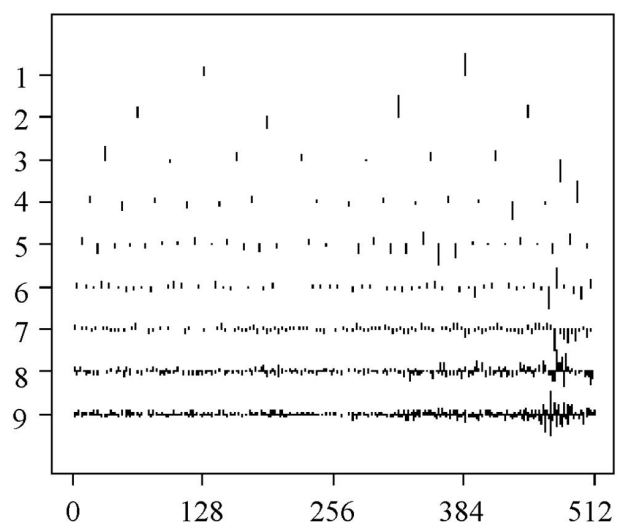


Figure 11: TDO, Retornos, Dow Jones

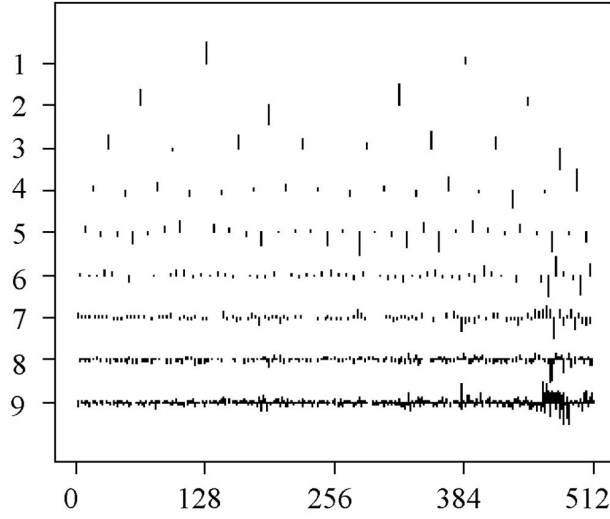


Figure 12: TDO, Retornos, Euro Stoxx 50

Se procede ahora al análisis de los coeficientes de ondaletas obtenidos por la TDO. Para las tres series los coeficientes referentes al movimiento de inversiones a largo plazo presentan una magnitud superior a la de los coeficientes relativos a la inversión a corto plazo, es decir, existe mayor riesgo en las inversiones a corto plazo que en las de largo plazo. En el período correspondiente a los coeficientes entre 450 y 500, las tres primeras escalas presentan magnitudes significativas, pues esto se observa en el incremento o cambio de la frecuencia en las tres series, lo que indica una perturbación considerable de las inversiones a corto plazo, o en otras palabras, mayor riesgo.

Ahora, se hará el análisis de multiresolución de los tres índices:

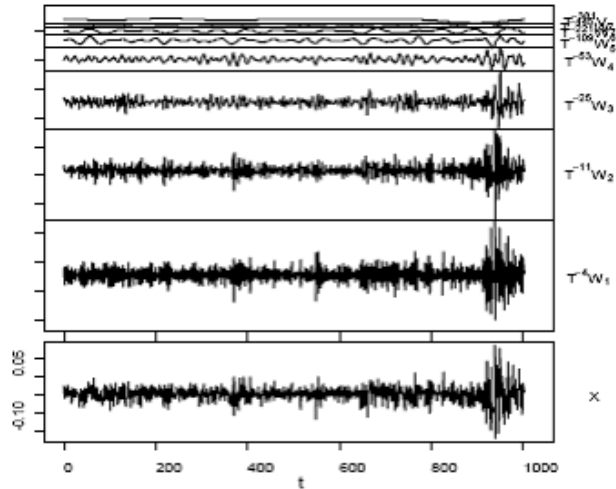


Figure 13: Análisis de Multiresolución, Retornos, Bovespa

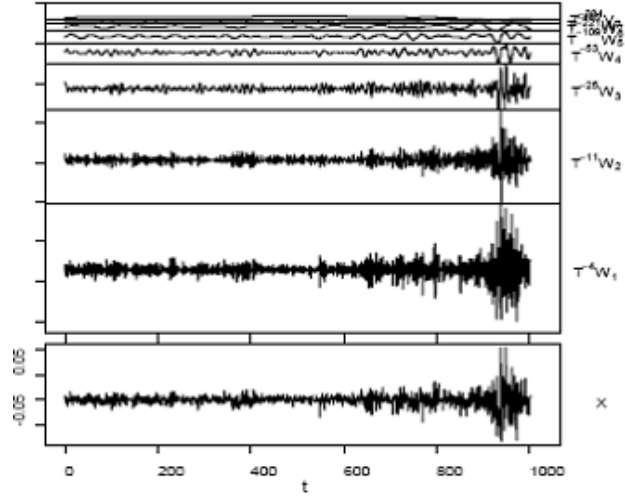


Figure 14: Análisis de Multiresolución, Retornos, Dow Jones

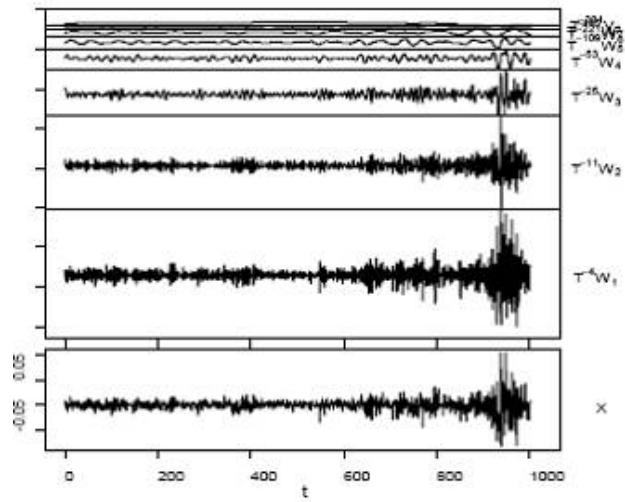


Figure 15: Análisis de Multiresolución, Retornos, Euro Stoxx 50

De la misma forma, al abordar el análisis de multiresolución con base en la TDOMS para las tres series, se puede notar que las frecuencias que más contribuyen con la energía de cada señal son las tres frecuencias más altas, es decir, que las frecuencias más significativas que componen la serie son las más altas, mientras que las frecuencias más bajas tienen menos significancia en los tres casos. De esta forma, se sugiere la interpretación que para los tres índices, las inversiones a corto plazo son preponderantes en su composición y movimiento, esto quiere decir que hay mayor volatilidad en las inversiones a corto plazo que en las de largo plazo y esto implica un mayor riesgo al invertir a corto plazo.

Una vez más, se observa una fluctuación ampliamente más acentuada en el período que coincide con la crisis que hubo en esos tiempos de los mercados financieros en estas mismas frecuencias, lo que ofrece coherencia a la conclusión de que las inversiones cuya volatilidad es más acentuada en el contexto de la crisis financiera son las de corto plazo, lo que indica que durante la crisis existe un mayor riesgo en las inversiones de corto plazo ya que la volatilidad es más marcada.

Para el caso de escalas más altas - inversión a largo plazo - se puede decir que estas contribuyen de forma

limitada a la composición del signo, no hay ninguna oscilación que merezca destaque en todo el período de análisis, es decir, que existe menor riesgo o volatilidad en las inversiones a largo plazo y la significancia de estas componentes es mucho menor.

## Resultados y discusión

En esta sección se presentarán las matrices de varianza de cada serie de retornos, seguidas de las matrices de correlación, y se discutirán sus resultados, ofreciendo su interpretación económica. Todos los valores reportados se concluyen usando un nivel de significancia de 0.05, como usualmente, y, para el análisis de correlación, las tres últimas escalas no se presentarán resultados estadísticamente significativos. En cada tabla,  $d_j$  representa la  $j$ -ésima escala de ondaleta, donde  $j = 1, \dots, 7$ . Cuanto más bajo sea  $j$ , más alta es la frecuencia de análisis.

**Tabla 1 – Retornos Bovespa**

Análisis de Volatilidad			
$d_1$	$2,332 \times 10^{-4}$	$d_6$	$3,539 \times 10^{-6}$
$d_2$	$1,375 \times 10^{-4}$	$d_7$	$8,534 \times 10^{-7}$
$d_3$	$6,653 \times 10^{-5}$	$d_8$	$\sim 10^{-10}$
$d_4$	$2,071 \times 10^{-5}$	$d_9$	$\sim 10^{-10}$
$d_5$	$6,096 \times 10^{-6}$	$d_{10}$	$\sim 10^{-10}$

**Tabla 2 – Retornos Euro Stoxx**

Análisis de Volatilidad			
$d_1$	$1,220 \times 10^{-4}$	$d_6$	$1,434 \times 10^{-6}$
$d_2$	$5,870 \times 10^{-5}$	$d_7$	$2,738 \times 10^{-7}$
$d_3$	$2,435 \times 10^{-5}$	$d_8$	$\sim 10^{-10}$
$d_4$	$8,925 \times 10^{-6}$	$d_9$	$\sim 10^{-10}$
$d_5$	$2,481 \times 10^{-6}$	$d_{10}$	$\sim 10^{-10}$

**Tabla 3 – Retornos Dow Jones Industrial**

Análisis de Volatilidad			
$d_1$	$1,143 \times 10^{-4}$	$d_6$	$7,160 \times 10^{-7}$
$d_2$	$4,202 \times 10^{-5}$	$d_7$	$3,337 \times 10^{-7}$
$d_3$	$1,834 \times 10^{-5}$	$d_8$	$\sim 10^{-10}$
$d_4$	$6,242 \times 10^{-6}$	$d_9$	$\sim 10^{-10}$
$d_5$	$1,681 \times 10^{-6}$	$d_{10}$	$\sim 10^{-10}$

Para todas las series de retornos analizados, la volatilidad decrece conforme la escala aumenta, o sea, los componentes de más alta frecuencia de los índices analizados presentan mayor volatilidad, resultado que es coherente con los gráficos vistos anteriormente, donde se concluyó que las frecuencias más altas tienen mayor significancia que las frecuencias más bajas. Este resultado satisface las expectativas económicas que atribuyen a la inversión de más alta frecuencia un grado de riesgo más elevado, debido a la alta volatilidad de estas.

Sin embargo, es más interesante el hecho de que en cada escala, los retornos del índice Bovespa presentaron la más alta volatilidad, lo que quiere decir que las inversiones en esta presentan mayor riesgo con respecto a las demás, seguida de los retornos del Euro y, por último, el retorno menos volátil el Dow Jones Industrial, en el cual las inversiones son de menos riesgo con respecto a las otras dos.

Este hecho corrobora, por así decir, la noción de una volatilidad más baja en el mercado americano tan llamado libre de riesgo, seguida del mercado europeo y de un grado de incertidumbre más elevado en el mercado brasileño, mostrando el mercado americano como el de menor volatilidad y así, menor riesgo.

En general, los resultados indican mayores niveles de estabilidad en los mercados americano y europeo, en lo que se refiere a las inversiones a corto plazo, mientras que las inversiones a largo plazo tienen grados de volatilidad similares.

Se procede ahora al análisis de correlación de ondaletas para estas mismas series de retornos, en las mismas diez escalas temporales distintas.

**Tabla 4 – Correlación de Ondaletas**

$d_1$	Bovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Bovespa	1,000	0,444	0,603
Euro Stoxx	0,444	1	0,302
Dow Jones	0,603	0,302	1,000
$d_2$	Bovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Bovespa	1,000	0,623	0,688
Euro Stoxx	0,623	1	0,582
Dow Jones	0,688	0,582	1,000
$d_3$	Bovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Bovespa	1,000	0,689	0,744
Euro Stoxx	0,689	1	0,781
Dow Jones	0,744	0,781	1,000
$d_4$	Bovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Bovespa	1,000	0,737	0,670
Euro Stoxx	0,737	1	0,810
Dow Jones	0,670	0,810	1,000
$d_5$	Bovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Bovespa	1,000	0,731	0,700
Euro Stoxx	0,731	1	0,764
Dow Jones	0,700	0,764	1,000
$d_6$	Bovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Bovespa	1,000	0,591	0,557
Euro Stoxx	0,591	1	0,809
Dow Jones	0,557	0,809	1,000
$d_7$	Bovespa	Euro Stoxx	Dow Jones
Bovespa	1,000	0,704	0,864
Euro Stoxx	0,704	1	0,937
Dow Jones	0,864	0,937	1,000

El análisis de la Tabla 4 anterior indica que, para todas las escalas temporales, la correlación entre los retornos

del Bovespa, el Euro Stoxx y el Dow Jones Industrial, de dos a dos, es positiva. Tomando el Bovespa y el Dow Jones Industrial, se puede ver que para las tres primeras escalas -de las frecuencias altas- estos mercados parecen bastante correlacionados y de forma creciente en estas mismas escalas. Esto puede sugerir que los movimientos en los retornos están altamente correlacionados en ambos mercados, debido al comportamiento de inversiones de baja frecuencia que ya se identificaron con la micro y pequeña inversión. Esto quiere decir que hay alta correlación entre ellas en las altas frecuencias, o en otras palabras, en las inversiones a corto plazo, lo que es un resultado inesperado debido a la alta volatilidad de las series en las altas frecuencias, pues se esperaría que a mayor volatilidad menor la correlación, pero los resultados indican que si hay alta correlación en estas frecuencias altas. En las escalas más altas -de las frecuencias bajas-, ambos índices vuelven a presentar correlaciones crecientes, indicando la posibilidad de una adherencia mayor entre los mercados en lo que se refiere a la inversión a largo plazo.

Los mercados europeos y estadounidenses presentan una baja correlación en la primera escala, que corresponde a la frecuencia más alta. Sin embargo, esta crece rápidamente y alcanza niveles muy próximos a 1 en la séptima escala. Este hecho da soporte a la idea de que, a pesar de que las inversiones de altísima frecuencia presentan algún grado de desprendimiento en ambos mercados, a medida que esta misma frecuencia disminuye, estos mercados presentan comportamientos muy similares. Todo esto indica que las inversiones a largo plazo en ambos mercados presentan mayor correlación, mientras que las de corto plazo tienen menor correlación. Estos resultados tienen más coherencia con lo que se esperaría, pues en las frecuencias altas que son las de mayor volatilidad se presenta menor correlación entre las series, y en las frecuencias bajas de menor volatilidad se presenta mayor correlación.

## CONCLUSIONES

En este artículo se implementa un análisis de ondaletas para indicadores financieros representativos de los mercados americano, brasileño y europeo en dos niveles, en el período de los años 2004-2009. En principio, analizando patrones particulares de cada serie y posteriormente, procediendo a un análisis de volatilidad y correlación basado en la descomposición de ondaletas.

En un primer nivel, se pudo constatar que las inversiones a corto plazo, o de frecuencia más alta, fueron los que más contribuyeron con la formación de cada signo, así como presentaron mayor fluctuación en el período reciente al año 2009. Este grupo de inversiones representa mayoritariamente la inversión especulativa, es decir, que las frecuencias altas o inversiones de corto plazo presentan mayor riesgo. Las inversiones a largo plazo, o de frecuencia más baja, además de sufrir menores oscilaciones, aún ejercieron menor contribución - energía - a la formación de los índices. Este grupo de inversiones está representado principalmente por el ahorro de los individuos, micro y pequeños inversores, así como de depósitos a largo plazo. Esto último es debido a la menor volatilidad de las frecuencias bajas, es decir, existe menor riesgo en las inversiones de largo plazo.

En lo que se refiere al análisis de volatilidad, el mercado brasileño fue el que presentó los más altos niveles de inestabilidad, desde las más bajas hasta las más altas frecuencias, resultados observados en las Tablas 1-4. Sin embargo, esta volatilidad es decreciente en las escalas: las inversiones a largo plazo son menos volátiles que las de corto plazo, y también se concluye que existe menor riesgo en las inversiones de largo plazo que en las de corto plazo. A continuación, en un nivel intermedio de volatilidad aparece el mercado europeo. En este caso, observamos el mismo comportamiento decreciente en las escalas. Sin embargo, en el caso del mercado europeo, la caída en la volatilidad es más acentuada que en el caso brasileño; con respecto a las tres primeras escalas, la caída de volatilidad en el mercado europeo es cerca del 10% superior a la verificada en el caso brasileño. El mercado americano tiene los niveles más bajos de volatilidad, que son decrecientes en la medida en que la frecuencia de las inversiones disminuye, es decir en las frecuencias más bajas, resultados que tienen coherencia y verifican los razonamientos generales que se conocen acerca de este mercado.

En comparación con el mercado europeo, los niveles de volatilidad de los Estados Unidos cae un 12% más rápido al cambiar de la primera a la segunda escala. En cuanto al mercado brasileño, este número salta al 22%. En general, los índices de volatilidad del mercado brasileño son más elevados y caen más despacio que aquellos para el mercado europeo. Situación similar se observa al comparar el mercado europeo y americano, siendo que, en este caso, el que presenta niveles más bajos de volatilidad con caídas más acentuadas es el americano.

El análisis de correlaciones apuntó un grado positivo para todos los mercados, en todas las escalas. Sin embargo, en lo que se refiere a inversiones a largo plazo, esta correlación es más alta que la verificada para inversiones a corto plazo, pues las frecuencias más bajas que son las de menor volatilidad presentan las más altas correlaciones.

De esta manera, se encuentran evidencias de que los tres mercados presentan algún grado de interdependencia; sin embargo, se observa que esta interrelación es más marcada en el caso de los mercados de inversión a largo plazo. Este hecho sugiere que el grado de inestabilidad encontrado por el micro y pequeño inversor es muy similar entre los diversos mercados, pues se tiene mucho menor riesgo en las inversiones de largo plazo.

Por otro lado, las correlaciones más bajas encontradas en las inversiones de corto plazo, pueden ser debidas a factores económicos internos de cada mercado, pues en las inversiones de largo plazo se tiene mayor correlación y menor volatilidad, esto es mayormente debido al movimiento financiero de la economía mundial, más no del panorama interno de cada mercado.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Pimentel, Edgard Almeida, & Silva, Juliana Fernandes da. (2011). Decomposição de ondaletas, análise de volatilidade e correlação para índices financeiros. *Estudos Econômicos* (São Paulo), 41(2), 441-462. <https://dx.doi.org/10.1590/S0101-41612011000200009>