



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Series de Tiempo II
Taller # 3

Profesor: Duván Cataño

1. Muestre que un proceso ARFIMA(0, d , 0), con $-0,5 < d < 0,5$ tiene representaciones de la forma $z_t = \psi(B)a_t$ y $\pi(B)z_t = a_t$, con pesos dados por

$$\psi_k = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!}, \quad \pi_k = \frac{(k-d-1)!}{k!(-d-1)!},$$

respectivamente, donde $a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$.

2. Demuestre que la densidad espectral de un proceso ARFIMA(1, d , 0) estacionario e invertible es dada por

$$f(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \frac{[2 \sin(0,5w)]^{-2d}}{(1 + \phi^2 - 2\phi \cos w)}, \quad 0 < w \leq \pi,$$

adicionalmente que

$$f(w) \approx \frac{\omega^{-2d}}{(1-\phi)^2}, \quad w \rightarrow 0$$

3. Simular $T = 1000$ observaciones $\{z_t\}$ de un proceso ARFIMA(1, d , 0), con $\phi = 0,6$ y $d = 0,45$.
- Haga un gráfico de los datos simulados y comente.
 - Calcule la ACF y PACF muestral y comente.
 - Estime los parámetros del modelo, probando las significancia de cada uno de ellos.
 - Ajuste un modelo ARMA a $x_t = (1 - B)z_t$.
 - Compare el ajuste de los modelos ARFIMA (ítem c) y ARMA (ítem d).
4. Considere a serie r_t de retornos diarios (cierre) del DJIA (archivo dow.xls). Sea la serie de retornos al cuadrado, $v_t = r_t^2$, que representa la serie de volatilidades.
- Calcule las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial muestral de la serie v_t y comente.
 - Identifique y estime un modelo de memoria larga para a serie v_t .
 - Utilice el modelo final para hacer pronóstico con horizonte $l = 6$. Haga un gráfico de la serie original y de los pronósticos obtenidos.
5. Muestre que un modelo GARCH(1,1) es equivalente a un modelo ARCH(∞), con pesos exponencialmente decrecientes.
6. Considere un modelo GARCH(m, n). Calcular la media incondicional de los retornos al cuadrado.
7. Weekly crude oil spot prices in dollars per barrel are in oil; see Problem Problem 2.10 and Appendix R for more details. Investigate whether the growth rate of the weekly oil price exhibits GARCH behavior. If so, fit an appropriate model to the growth rate.
8. The stats package of R contains the daily closing prices of four major European stock indices; type `help(EuStockMarkets)` for details. Fit a GARCH model to the returns of one of these series and discuss your findings. (Note: The data set contains actual values, and not returns. Hence, the data must be transformed prior to the model fitting.)