

MODELOS GARCH MULTIVARIADO

JOAN DAVID MEJÍA MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PREGRADO DE ESTADÍSTICA

JOAND.MEJIA@UDEA.EDU.CO

NOVEMBER 7, 2018

RESUMEN

En el análisis de información que se genera día a día, en particular sobre datos asociados a series de tiempo, generalmente en economía, se consideran series temporales de rentabilidades de activos financieros observadas frecuentemente, pues es entonces cuando resulta habitual observar volatilidades cambiantes en el tiempo. En el caso más sencillo, considere que la rentabilidad obedece a un proceso estocástico. Una característica de los mercados financieros es que suelen observarse intervalos concretos de tiempo en los que sistemáticamente se produce cada día una alta volatilidad, seguidos de períodos de reducida volatilidad. Esto se manifiesta en que el cuadrado de las rentabilidades diarias tenga generalmente una alta autocorrelación; tal fenómeno es motivo de estudio de los modelos GARCH, que con el propósito de conocer y poder predecir este comportamiento, se proponen diversas extensiones que permitan además ajustarse a la realidad.

Palabras clave: Volatilidad, EWMA, VEC, BEKK.

1 INTRODUCCIÓN

En este artículo se extiende los modelos GARCH univariados al contexto multivariado y se muestra cómo se pueden utilizar los modelos GARCH multivariados para

modelar la heteroscedasticidad condicional en series de tiempo multivariadas. En particular, se centrará en modelar y predecir la volatilidad variable en el tiempo.

Para motivar a los modelos GARCH multivariados, primero introduce una estimación de covarianza ponderada exponencialmente y muestra cómo estimar el peso óptimo utilizando la función EWMAvol. Seguidamente se modifica las estimaciones de covarianza ponderadas exponencialmente para obtener el popular modelo VEC diagonal (DVEC) que más adelante se modificara para asegurar una matriz definida positiva.

Posteriormente se dan unas breves condiciones sobre el modelo VEC para así tener un modelo donde la matriz sea definida positiva, como resultado se obtiene el modelo BKK, el cual es más robusto sobre la estimación de la varianza; a su vez se muestra cómo aplicar este modelo por medio del comando BEKK11.

2 OBJETIVO

El objetivo general de este artículo es presentar algunos modelos de volatilidad multivariable que son aplicables en la práctica, y además relativamente fáciles de entender en teoría.

Los objetivos específicos son:

- manifestar las desventajas de utilizar una varianza que otorga a todas las observaciones disponibles la misma ponderación.
- explicar intuitivamente la idea de modelar la varianza dándole más peso a la observaciones mas recientes.
- mostrar aplicaciones prácticas sobre los modelos planteados en el artículo.

3 DESVENTAJAS DE ESTIMAR LA MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS, POR LA VARIANZA MUESTRAL

Sea Y_t un vector $k * 1$ de series de tiempo multivariadas, para $t = 1, 2, \dots, T$

$$Y_t = c + E_t \quad (1)$$

Donde C es el vector medio $k * 1$, y E_t es un vector $k * 1$ ruido blanco con media cero. La matriz de covarianza de la muestra está dada por:

$$\Sigma = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_t - \bar{Y})' \quad (2)$$

Esta expresión tiene algunas desventajas como:

- no es claro cómo debe elegirse el número de días T . Este número suele denominarse amplitud de la ventana de datos. Un número reducido tiende a generar una serie temporal de volatilidad muy errática, mientras que un número elevado de días genera una serie de volatilidad que puede considerarse excesivamente suave. La elección de la amplitud de ventana debe depender de la utilización que quiera hacerse de la previsión de volatilidad resultante.
- la serie de volatilidades reacciona al alza sólo después de que se haya observado en el mercado una rentabilidad diaria elevada. En este sentido, su naturaleza no es tanto la de anticipar el comportamiento futuro de la volatilidad, como el de reflejar el comportamiento reciente de la misma.
- precisamente por esta razón, es un indicador que va reaccionando a incrementos de volatilidad con cierto retraso, pues se trata de un promedio de los niveles de volatilidad en los últimos T días de mercado.
- pondera por igual, cada uno de los T días utilizados en su cálculo. Ello hace que la presencia de un día de alta volatilidad pueda elevar la previsión de volatilidad la primera ocasión en que dicha rentabilidad se utilice en el cálculo, y tender a mantener la volatilidad elevada durante T días, reduciéndose nuevamente de manera drástica.

4 EL MODELO DE ALISADO EXPONENCIAL (EWMA)

Al igual que cualquier otro momento de una distribución, la varianza otorga a todas las observaciones disponibles la misma ponderación. Por tanto, las desviaciones respecto del nivel de referencia tienen la misma importancia tanto si se produjeron recientemente como si se produjeron hace ya algún tiempo. Esto puede no ser totalmente deseable en el análisis de mercados financieros. En ocasiones, es conveniente abandonar este supuesto, dando pie a esquemas con ponderaciones decrecientes exponencialmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= \lambda E_{t-1} E'_{t-1} + \lambda^2 E_{t-2} E'_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i E_{t-i} E'_{t-i}\end{aligned}\tag{3}$$

Donde $0 < \lambda < 1$ para que se coloquen ponderaciones más pequeñas en las observaciones posteriores al historial. Ya que

$$\lambda + \lambda^2 + \dots = \frac{\lambda}{1 - \lambda}\tag{4}$$

Los pesos generalmente se escalan de manera que suman uno:

$$\Sigma_t = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} E_{t-i} E'_{t-i} \quad (5)$$

La ecuación anterior se puede reescribir fácilmente para obtener la siguiente forma recursiva para la matriz de covarianza ponderada exponencialmente:

$$\Sigma_t = (1 - \lambda) E_{t-1} E'_{t-1} + \lambda \Sigma_{t-1} \quad (6)$$

Que se conocerá como el modelo EWMA de covarianza variable en el tiempo. A partir de la ecuación anterior, dada λ y una estimación inicial Σ_t , variando el tiempo las matrices de covarianza ponderadas exponencialmente se puede calcular fácilmente.

En la práctica, el modelo EWMA es el utilizado por RiskMetrics que calcula la volatilidad del próximo día, mediante un promedio ponderado del nivel de volatilidad que calculamos previamente para hoy, y el cuadrado de la rentabilidad del mercado hoy. RiskMetrics utiliza sistemáticamente un valor numérico $\lambda = 0.94$; por considerar que las estimaciones no difieren mucho entre diferentes activos. El parámetro también puede estimarse por máxima verosimilitud, bajo un determinado supuesto acerca de la distribución de probabilidad de rentabilidades. Por ejemplo, si estamos dispuestos a suponer que siguen una distribución Normal y que son independientes, tendremos la función de verosimilitud

$$\log L = -\frac{kT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T |\Sigma_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (Y_t - c)' \Sigma_t^{-1} (Y_t - c) \quad (7)$$

Dado que Σ_t se puede calcular recursivamente como en (6), la función de verosimilitud también se puede evaluar fácilmente. Por lo tanto, el vector c y λ se pueden tratar como parámetros desconocidos del modelo y se pueden estimar utilizando la estimación de probabilidad máxima (MLE), dado el valor inicial Σ_t .

5 MODELO VEC DIAGONAL

En el contexto univariado, el modelo EWMA introducido en la sección anterior se reduce a:

$$\Sigma_t = (1 - \lambda) E_{t-1}^2 + \lambda \Sigma_{t-1} \quad (8)$$

Que es simplemente un modelo $GARCH(1,1)$ con $a_1 = 1 - \lambda$, $b_1 = \lambda$ y por lo tanto $a_1 + b_1 = 1$. Dado que $a_1 + b_1$ corresponde al coeficiente $AR(1)$ en la representación ARMA de los modelos GARCH, la condición $a_1 + b_1 = 1$ implica que el modelo GARCH no es estacionario en el sentido débil. Engle y Bollerslev (1986) denominaron a este modelo el modelo GARCH (IGARCH) integrado en el contexto

univariado. Dada la no estacionariedad de los modelos IGARCH y EWMA, a veces no se los favorece para la volatilidad del modelado.

Para preservar la intuición detrás de los modelos EWMA mientras se permite un modelo flexible y estacionario para covarianza variable en el tiempo, generalice el modelo EWMA de la siguiente manera:

$$\Sigma_t = A_0 + \sum_{i=1}^p A_i \otimes (E_{t-i} E'_{t-i}) + \sum_{j=1}^q B_j \otimes \Sigma_{t-1} \quad (9)$$

Donde el símbolo \otimes representa el producto de Hadamard, es decir, la multiplicación elemento por elemento, y todas las matrices de coeficientes tienen una dimensión kk . Este modelo fue propuesto por primera vez por Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988), y lo llamaron el modelo VEC diagonal o DVEC (p, q).

Para apreciar la intuición detrás del modelo DVEC, considere el modelo bivariado DVEC (1, 1):

$$\begin{bmatrix} \Sigma_t^{(11)} & \\ \Sigma_t^{(21)} & \Sigma_t^{(22)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{(11)} & \\ A_0^{(21)} & A_0^{(22)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1^{(11)} & \\ A_1^{(21)} & A_1^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{t-1}^{(1)} E_{t-1}^{(1)} & \\ E_{t-1}^{(2)} E_{t-1}^{(1)} & E_{t-1}^{(2)} E_{t-1}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^{(11)} & \\ B_1^{(21)} & B_1^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{t-1}^{(11)} & \\ \Sigma_{t-1}^{(21)} & \Sigma_{t-1}^{(22)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Donde solo se considera la parte triangular inferior del sistema, con $X^{(ij)}$ que denota el elemento (i, j) -th de la matriz X , y $E^{(i)}$ el elemento i -th del vector. La notación matricial anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{(11)} &= A_0^{(11)} + A_1^{(11)} E_{t-1}^{(1)} E_{t-1}^{(1)} + B_1^{(11)} \Sigma_{t-1}^{(11)} \\ \Sigma_t^{(21)} &= A_0^{(21)} + A_1^{(21)} E_{t-1}^{(2)} E_{t-1}^{(1)} + B_1^{(21)} \Sigma_{t-1}^{(21)} \\ \Sigma_t^{(22)} &= A_0^{(22)} + A_1^{(22)} E_{t-1}^{(2)} E_{t-1}^{(2)} + B_1^{(22)} \Sigma_{t-1}^{(22)} \end{aligned} \quad (11)$$

Por lo tanto, el elemento (i, j) -th de la matriz de covarianza variable en el tiempo solo depende de su propio elemento retrasado y el producto cruzado correspondiente de los errores. Como resultado, la volatilidad de cada serie sigue un proceso GARCH, mientras que el proceso de covarianza también puede tratarse como un modelo GARCH en términos del momento cruzado de los errores.

Dado que una matriz de covarianza debe ser simétrica, en la práctica basta con tratar el Σ_t como simétrico y solo considerar la parte triangular inferior del sistema. Una matriz de covarianza también debe ser positiva semi-definida (PSD). Sin embargo, no se puede garantizar que Σ_t en el modelo DVEC sea PSD, lo que se considera una debilidad del modelo DVEC. Más adelante se presentará otras formulaciones de modelos GARCH multivariados que garantizan que la matriz de covarianza variable en el tiempo sea PSD.

6 MODELOS DE MATRIZ-DIAGONAL

Aunque el modelo DVEC proporciona un buen ajuste de modelo para la serie temporal bivariable, no se garantiza que las matrices de covarianza variables en el tiempo sean PSD dada la formulación como en (9). Tenga en cuenta que una condición suficiente para que Σ_t sea PSD es que A_0 , A_i ($para i = 1, \dots, p$) y B_j ($para j = 1, \dots, q$) son todos PSD. Basándose en esta observación, Ding (1994) y Bollerslev, Engle y Nelson (1994) propusieron estimar los factores de Cholesky de las matrices de coeficientes:

$$\Sigma_t = A_0 A_0' + \sum_{i=1}^p (A_i A_i') \otimes (E_{t-i} E_{t-i}') + \sum_{j=1}^q (B_j B_j') \otimes \Sigma_{t-1} \quad (12)$$

Donde A_0 , A_i ($para i = 1, \dots, p$) y B_j ($para j = 1, \dots, q$) son todas matrices triangulares inferiores. Este modelo será referido como el modelo de matriz diagonal.

Los modelos de matriz diagonal pueden simplificarse aún más restringiendo A_i y B_j para que sean un vector, lo que resulta en:

$$\Sigma_t = A_0 A_0' + \sum_{i=1}^p (a_i a_i') \otimes (E_{t-i} E_{t-i}') + \sum_{j=1}^q (b_j b_j') \otimes \Sigma_{t-1} \quad (13)$$

Donde a_i y b_j son $k \times 1$ vectores. Aún más simple, usa la siguiente formulación:

$$\Sigma_t = A_0 A_0' + \sum_{i=1}^p a_i \otimes (E_{t-i} E_{t-i}') + \sum_{j=1}^q b_j \otimes \Sigma_{t-1} \quad (14)$$

Donde a_i y b_j son escalares positivos. Es fácil demostrar que todas las formulaciones dadas en (12), (13) y (14) garantizan que la matriz de covarianza variable en el tiempo Σ_t es PSD. Sin embargo, cuanto más simple es el modelo, más estrictas son las restricciones que se aplican a la dinámica del modelo.

7 MODELOS BEKK

Si bien el modelo DVEC se puede modificar de varias maneras para garantizar que las matrices de covarianza que varían en el tiempo son PSD, las dinámicas permitidas en la matriz de covarianza condicional todavía están algo restringidas. En particular, la varianza condicional y la covarianza solo dependen de su propio elemento rezagado y del producto cruzado correspondiente de shocks o términos de error.

El modelo BEKK, formalizado por Engle y Kroner (1995), proporciona una formulación alternativa de la ecuación de varianza condicional:

$$\Sigma_t = A_0 A_0' + \sum_{i=1}^p A_i (E_{t-i} E_{t-i}') A_i' + \sum_{j=1}^q B_j \Sigma_{t-1} B_j' \quad (15)$$

Donde A_0 es una matriz triangular inferior, pero A_i ($i = 1, \dots, p$) y B_j ($j = 1, \dots, q$) son matrices cuadradas no restringidas. Es fácil demostrar que se garantiza que Σ_t es simétrico y PSD en la formulación anterior. Además, la dinámica permitida en el modelo BEKK es más rica que el modelo DVEC, que puede ilustrarse considerando el elemento (2, 2) de Σ_t en el modelo BEKK (1, 1):

$$\Sigma_t^{(22)} = A_0^{(22)} A_0^{(22)} + [A_1^{(21)} E_{t-1}^{(1)} + A_1^{(22)} E_{t-1}^{(2)}]^2 + B_1^{(21)} B_1^{(21)} \Sigma_{t-1}^{(11)} + 2B_1^{(21)} B_1^{(21)} \Sigma_{t-1}^{(21)} + B_1^{(22)} B_1^{(22)} \Sigma_{t-1}^{(22)} \quad (16)$$

Donde tanto $E_{t-1}^{(1)}$ como $E_{t-1}^{(2)}$ ingresan a la ecuación. Además, $\Sigma_{t-1}^{(11)}$, la volatilidad de la primera serie, también tiene impactos directos en $\Sigma_t^{(22)}$, la volatilidad de la segunda serie. Sin embargo, para el modelo bivariado BEKK (1, 1), la flexibilidad se logra al costo de dos parámetros adicionales, es decir, $A_1^{(12)}$ y $B_1^{(12)}$, que no son necesarios para el DVEC (1, 1) modelo. En general, un modelo BEKK (p, q) requiere $k(k-1)(p+q)/2$ más parámetros que un modelo DVEC del mismo orden.

8 APLICACIÓN

8.1 EWMA

Considere los log-retornos de los deciles 1, 2 y 5 de CRSP desde enero de 1961 hasta septiembre de 2011. En la siguiente tabla se muestra a modo de resumen los datos

Table 1: Datos

date	dec1	dec2	dec5	dec9	dec10
19610131	0.058011	0.067392	0.081767	0.096754	0.087207
19610228	0.029241	0.042784	0.055524	0.056564	0.060245
19610330	0.025896	0.025474	0.041304	0.060563	0.071875
19610428	0.005667	0.001365	0.000780	0.011911	0.023328
19610531	0.019208	0.036852	0.049590	0.046248	0.050362
19610630	-0.024670	-0.025225	-0.040046	-0.050651	-0.051434

Un análisis preliminar indica que existen algunas correlaciones seriales menores en la serie de retornos, de modo que se usa un modelo VAR (1) para la ecuación de la media. En otras palabras, denotando los log-retornos mensuales por z_t , empleamos $\mu_t = \phi_0 + \phi_1 z_{t-1}$.

```
> library(MTS)
> rtn=log(da[,2:4]+1)
> m1=VAR(rtn,1) ## ajuste un modelo VAR(1) que remueve la correlación serial
```

Constant term:

```
Estimates: 0.006376978 0.007034631 0.007342962
Std.Error: 0.001759562 0.001950008 0.002237004
```

AR coefficient matrix

AR(1)-matrix

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,] -0.194 0.224 0.00836
[2,] -0.232 0.366 -0.04186
[3,] -0.313 0.452 0.00238
```

standard error

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.108 0.160 0.101
[2,] 0.120 0.177 0.111
[3,] 0.138 0.204 0.128
```

Residuals cov-mtx:

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.001814678 0.001859113 0.001962277
[2,] 0.001859113 0.002228760 0.002420858
[3,] 0.001962277 0.002420858 0.002933081
```

det(SSE) = 1.712927e-10

AIC = -22.45809

BIC = -22.39289

HQ = -22.43273

La ecuación media ajustada es

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 0.0064 \\ 0.0070 \\ 0.0073 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.194 & 0.224 & 0.008 \\ -0.232 & 0.366 & -0.042 \\ -0.313 & 0.452 & 0.003 \end{bmatrix} z_{t-1} \quad (17)$$

A continuación se realiza una prueba de heterocedasticidad condicional sobre los residuales del modelo ajustado

```
> at=m1$residuals ## ARCH test
```

```
> MarchTest(at)
```

Q(m) of squared series(LM test):

Test statistic: 244.7878 p-value: 0

Rank-based Test:

Test statistic: 215.215 p-value: 0

Q_k(m) of squared series:

Test statistic: 176.9811 p-value: 1.252294e-07

Robust Test(5%) : 155.2633 p-value: 2.347499e-05

Todos los valores p de las cuatro estadísticas de prueba utilizadas están cerca de 0. Dado los resultados anteriores se rechaza la hipótesis nula y se concluye que hay heterocedasticidad condicional; de esta manera se propone ajustar un modelo

EWMA a la serie residual $\hat{a} = z_t - \hat{\mu}_t$, para modelar la volatilidad variante en el tiempo.

```
> m2=EWMAvol(at,lambda=-0.1) ### Estimacion de la tasa decayendo
```

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
lambda	0.96427	0.00549	175.6	<2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

La estimación de máxima verosimilitud de λ es $\hat{\lambda} = 0.96427$. Seguidamente se aplica la prueba de heterocedasticidad condicional sobre los residuales estandarizados del modelo EWMA

```
> Sigma.t=m2$Sigma.t ### Volatility matrices
> m3=MCHdiag(at,Sigma.t)
```

Test results:

Q(m) of et:

Test and p-value: 59.5436 4.421175e-09

Rank-based test:

Test and p-value: 125.0929 0

Qk(m) of epsilon_t:

Test and p-value: 189.5403 4.518401e-09

Robust Qk(m):

Test and p-value: 228.234 5.57332e-14

La prueba indica que aún hay heterocedasticidad condicional, todos los p valores están cerca a cero. La Figura que sigue muestra los gráficos de las variaciones condicionales ajustadas y las covarianzas de z_t a través del método EWMA. Las altas correlaciones entre las carteras son comprensibles

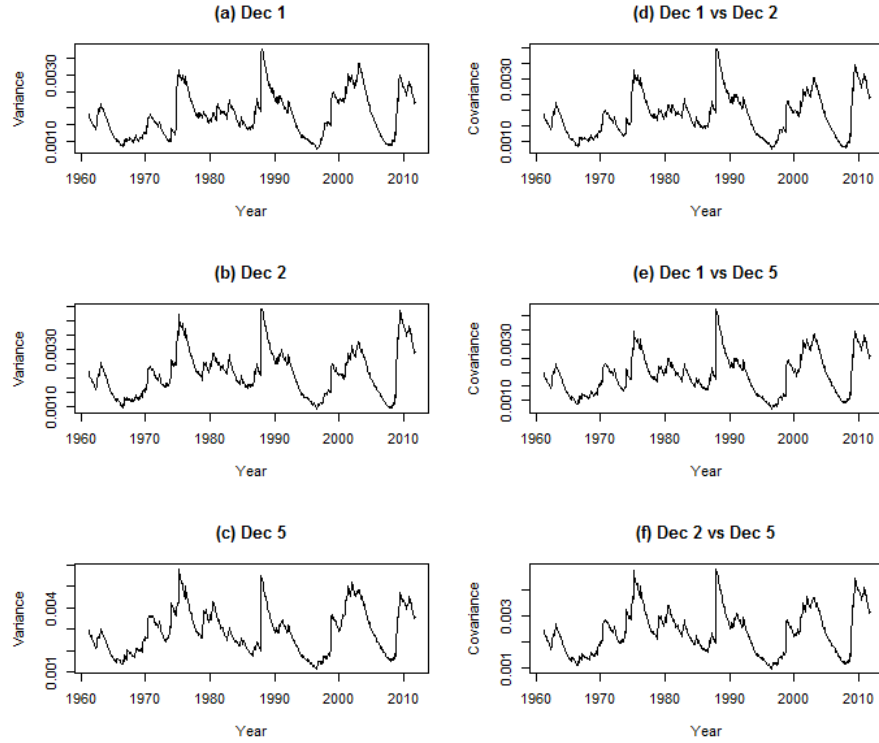


Figure 1: Las gráficas de tiempo de los elementos de la matriz de volatilidad $\hat{\Sigma}_t$ para los log-retornos mensuales de los portafolios CRSP 1, 2 y 5, a través del método EWMA con $\hat{\lambda} = 0.964$.

Observación: El comando para la estimación de EWMA en el paquete MTS es EWMAvol. El comando tiene dos opciones para especificar el parámetro de suavizado λ . Un λ positivo denota un valor preespecificado y, por lo tanto, no se realiza ninguna estimación. Un λ negativo denota estimación.

8.2 BEKK

Considere los log-retornos mensuales de las acciones de IBM y el índice compuesto de S&P desde enero de 1961 hasta diciembre de 2011 para 612 observaciones. Los datos se muestran en siguiente la Figura y tabla, y se obtienen del CRSP.

Table 2: Datos

date	ibm	sp
19610131	0.072513	0.063156
19610228	0.062500	0.026870
19610330	0.029630	0.025536
19610428	0.027338	0.003843
19610531	0.027521	0.019139
19610630	-0.026612	-0.028846

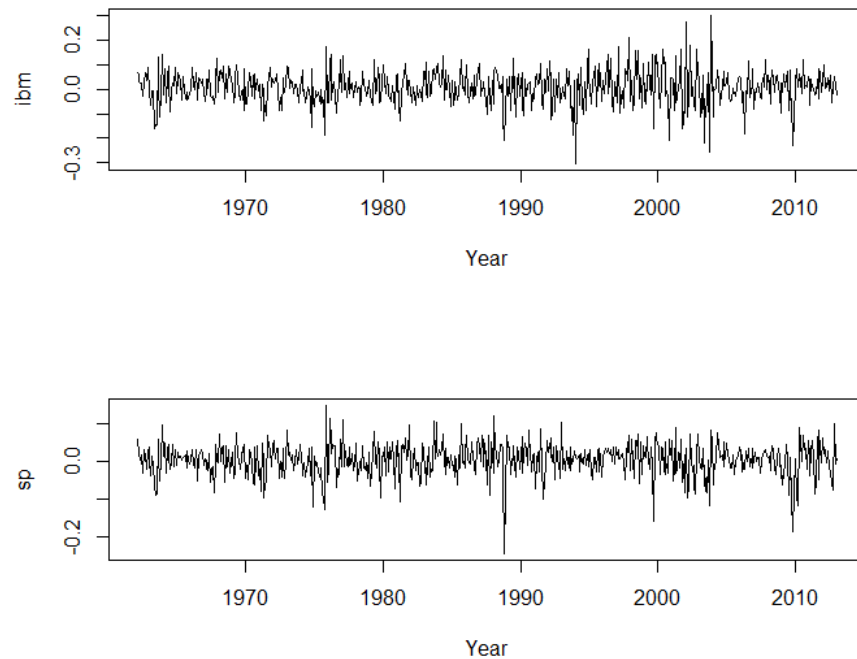


Figure 2: Gráficos de tiempo de los log-retornos mensuales de las acciones de IBM y el índice compuesto de S&P desde enero de 1961 hasta diciembre de 2011.

Deje que z_t denote la serie de log-retorno mensual. A continuación se muestran los resultados de la prueba de heterocedasticidad condicional.

```
> rtn=log(da[,2:3]+1)
> at=scale(rtn,scale=F)  ## Remove sample means
> MarchTest(at)

Q(m) of squared series(LM test):
Test statistic: 38.06663 p-value: 3.695138e-05
Rank-based Test:
Test statistic: 108.3798 p-value: 0
Q_k(m) of squared series:
Test statistic: 109.4194 p-value: 2.276873e-08
Robust Test(5%) : 118.7134 p-value: 9.894441e-10
```

Se rechaza H_0 y se concluye que hay problemas de heterocedasticidad condicional. Por lo tanto, utilizamos $\mu_t = \mu$ y aplicamos el modelo BEKK (1,1). El estimador de máxima verosimilitud de la ecuación media es $\hat{\mu} = (0.00776, 0.00565)'$. Los estimadores de máxima verosimilitud y sus errores estándar de la ecuación de volatilidad se muestran a continuación.

```
> m1a=BEKK11(rtn)
```

```
Initial estimates:  0.00772774 0.005023909 0.06977651 0.02639684 0.03502962 0.1 0
Lower limits:    -0.0772774 -0.05023909 0.0139553 0.005279367 0.007005923 1e-06 -0.
Upper limits:    0.0772774 0.05023909 0.07675416 0.02903652 0.03853258 0.999999 0.5
```

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
mu1.ibm	0.00789095	0.00253669	3.11073	0.00186624	**
mu2.sp	0.00567893	0.00153984	3.68799	0.00022603	***
A011	0.01518163	0.00560672	2.70776	0.00677397	**
A021	0.00795040	0.00248962	3.19341	0.00140601	**
A022	0.00700592	0.00181710	3.85556	0.00011547	***
A11	0.21441955	0.08624171	2.48626	0.01290926	*
A21	-0.04015353	0.03603860	-1.11418	0.26520154	
A12	0.18733858	0.09823933	1.90696	0.05652564	.
A22	0.39728417	0.05811344	6.83636	8.1233e-12	***
B11	0.95774527	0.04085222	23.44414	< 2.22e-16	***
B21	0.00792584	0.01530166	0.51797	0.60447757	
B12	-0.07375007	0.03809419	-1.93599	0.05286860	.
B22	0.89960512	0.02318223	38.80581	< 2.22e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Todas las estimaciones, excepto dos, son estadísticamente significativas al nivel convencional del 5%. Las estimaciones insignificantes son el elemento (2,1) de las matrices \hat{A}_1 y \hat{B}_1 .

Para verificar la adecuación del modelo BEKK (1,1) ajustado, empleamos la siguiente prueba

```
> Sigma.t=m1a$Sigma.t
> at=cbind(rtn[,1]-0.00776,rtn[,2]-0.00565) #REMOVE CONDITIONAL MEANS
> MCHdiag(at,Sigma.t)
```

Test results:

Q(m) of et:

Test and p-value: 4.926192 0.8960536

Rank-based test:

Test and p-value: 16.22883 0.09326658

Qk(m) of epsilon_t:

Test and p-value: 31.11312 0.8419195

Robust Qk(m):

Test and p-value: 49.23295 0.1502474

Al aplicar la prueba para verificar las correlaciones en serie en e_t , no rechazan la hipótesis nula de no correlaciones seriales. En resumen, el modelo BEKK (1,1) ajustado parece adecuado. La Figura a continuación muestra los gráficos de tiempo

de la serie de volatilidad ajustada y la covarianza condicional entre los log-retornos de las acciones de IBM y el compuesto S&P índice.

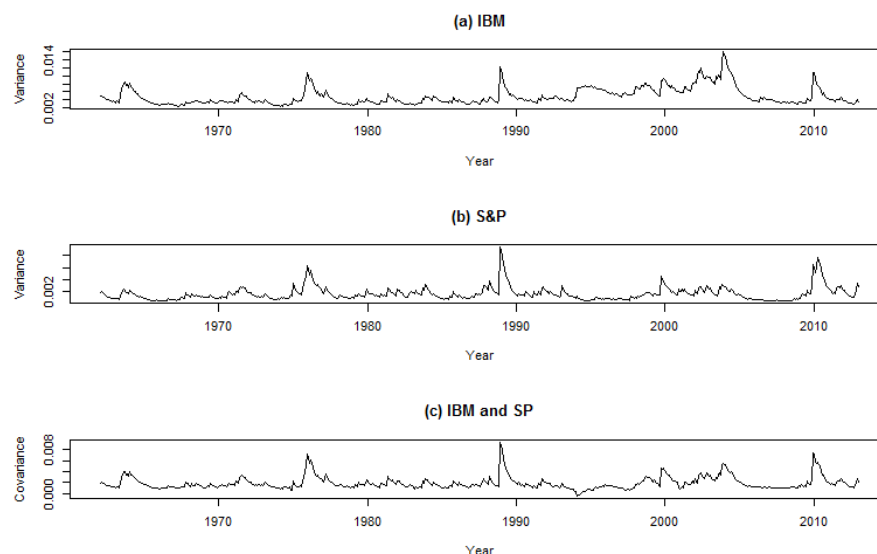


Figure 3: Gráficos de tiempo de volatilidades y covarianza condicional de los log-retornos mensuales de (a) acciones de IBM, (b) índice compuesto de S&P, e índices de IBM y SP de enero de 1961 a diciembre de 2011, basados en un modelo BEKK (1,1).

Observación: La estimación de los modelos BEKK (1,1) para $k = 2$ o 3 en el paquete MTS se realiza mediante el comando BEKK11. No hay modelos de orden superior disponibles.

9 CONCLUSIONES

El resultado la aplicación de los modelos utilizados en este artículo podemos decir lo siguiente:

- El modelo EWMA es no estacionario
- no se puede garantizar que Σ_t en el modelo DVEC sea PSD, lo que se considera una debilidad del modelo DVEC.
- Los modelos BEKK proporcionan un marco general para el uso de la familia GARCH de modelos de volatilidad multivariados. El modelo también produce matrices de volatilidad definidas positivas. Sin embargo, el modelo encuentra algunas dificultades en aplicaciones reales cuando k es moderado o grande. Primero, el modelo BEKK, incluso con (1,1), contiene demasiados parámetros. Para $k = 3$, la ecuación de volatilidad de un modelo BEKK (1,1) ya tiene 24 parámetros. En consecuencia, es difícil estimar un modelo BEKK (1,1) cuando $k > 3$.

- Se observa que algunas de las estimaciones de parámetros de un modelo BEKK (1,1) son estadísticamente insignificantes en el nivel tradicional del 5%. Además, actualmente no hay funciones disponibles en `r` para estimar un modelo BEKK de orden superior a 3 . Parece que un modelo BEKK (1,1) solo es aplicable en la práctica cuando k es pequeño.

References

- [1] Tsay, Ruey S. Multivariate time series analysis. With R and financial applications. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2014. xviii+492 pp. ISBN: 978-1-118-61790-8
- [2] Zivot, Eric ; Wang, Jiahui . Modeling financial time series with S-Plus®. Springer-Verlag, New York, 2003. xx+632 pp. ISBN: 0-387-95549-6
- [3] Tsay, Ruey S. Analysis of financial time series. Third edition. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010. xxiv+677 pp. ISBN: 978-0-470-41435-4