



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Series de Tiempo I

Profesor: Duván Cataño

1. For a moving average process of the form

$$x_t = w_{t-1} + 2w_t + w_{t+1},$$

where w_t are independent with zero means and variance σ_w^2 , determine the autocovariance and autocorrelation functions as a function of lag $h = s - t$ and plot the ACF as a function of h .

2. For an $MA(1)$, $x_t = w_t + \theta w_{t-1}$, show that $|\rho_x(1)| \leq 1/2$. for any number θ . For which values of θ does $\rho_x(1)$ attain its maximum and minimum?
3. A real-valued function $g(t)$, defined on the integers, is non-negative definite if and only if

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i g(t_i - t_j) a_j \geq 0,$$

for all positive integers n and for all vectors $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ and $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)'$. For the matrix $G = \{g(t_i - t_j); i, j = 1, 2, \dots, n\}$, this implies that $a'Ga \geq 0$ for all vectors a .

- a. Prove that $\gamma(h)$, the autocovariance function of a stationary process, is a non-negative definite function.
 - b. Verify that the sample autocovariance $\hat{\gamma}(h)$, is a non-negative definite function.
4. Identify the following models as $ARMA(p, q)$ models (watch out for parameter redundancy), and determine whether they are causal and/or invertible:
 - a. $x_t = 0,80x_{t-1} - 0,15x_{t-2} + w_t - 0,30w_{t-1}$.
 - b. $x_t = x_{t-1} - 0,50x_{t-2} + w_t - w_{t-1}$.
 5. Suponga que los residuos \hat{a}_t del modelo $(1 - B)x_t = (1 + 0,6B)a_t$, ajustado de una serie de 80 observaciones, proporcionan las siguientes autocorrelaciones:

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\rho}_a(h)$	0.39	0.20	0.09	0,04	0,09	-0.08	-0.05	0.06	0.07	-0.02

Analice la adecuación del modelo ajustado y si existe alguna indicación de falta de ajustamiento del modelo. Si esto ocurre, sugiera un modelo modificado.

6. Considere las siguientes ACF y PACF muestrales (estimadas) obtenidas a partir de una realización de tamaño $n = 100$ de una serie de tiempo.

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\rho}(h)$	-0.43	0.04	0.01	-0.03	0.02	0.02	0.00	-0.01	-0.02	0.01
$\hat{\phi}(h)$	-0.43	-0.33	-0.25	-0.18	-0.13	-0.08	-0.04	-0.04	-0.02	-0.01

- a. Obtenga los correlogramas.
 - b. ¿Qué tipo de proceso parece ser el que genera los datos de la serie? Explique.
 - c. Escriba el modelo. Con excepción de la constante, cuáles serían unos estimadores preliminares para los parámetros del modelo?
 - d. Obtenga la forma dual de este modelo, usando los estimadores preliminares del punto c).
7. Considere el modelo $x_t + \beta x_{t-1} = w_t$.
- a) Obtenga una condición de estacionaridad para x_t .
 - b) Encuentre la representación MA(∞).
 - c) Obtenga la ACF de x_t y gráfiquela.
8. Sea $y_t = a_t + ca_{t-1} + ca_{t-2} + \dots + ca_1$, para $t > 0$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$.
- a. Calcular la media y autocovarianza de y_t . ¿Es estacionaria?
 - b. Demostrar que la serie $z_t = (1 - B)y_t$ es estacionaria.