SERIES DE TIEMPO II

Duván Cataño

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Instituto de Matemáticas
2018-2

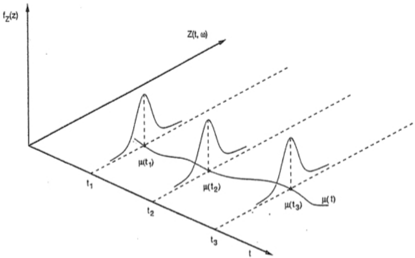
Contenido

Conceptos

Proceso Estocástico

- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $Z(\omega, t)$, donde ω pertenece al espacio muestral y t a un conjunto índice (generalmente $\mathbb{Z}$).
- Para ω fijo, $Z(\omega, t)$, como función de t, es una realización del proceso estocástico. Así una serie de tiempo es una realización de un cierto proceso estocástico.
- Para un conjunto finito de v.a. $\{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}\}$ de un proceso estocástico $\{Z(\omega, t) : t \in \mathbb{Z}\}$, se define la función de distribución $n-$dimensional como

$$F(z_{t_1}, \ldots, z_{t_n}) = \mathbb{P}[z(\omega, t_1) \leq z_{t_1}, \ldots, z(\omega, t_n) \leq z_{t_n}]$$



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos

Proceso Estacionario

- Un proceso se dice estacionario en distribución de $n-$ésimo orden si su función de distribución $n-$dimensional es

$$F(z_{t_1}, \ldots, z_{t_n}) = F(z_{t_1+k}, \ldots, z_{t_n+k}) \quad (1)$$

para cualquier $n-$tupla $(t_1, \ldots, t_n)$ y $k \in \mathbb{Z}$.

- Un proceso se dice **Estrictamente Estacionario** si (1) es cierto para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Además si (1) se cumple para $n = m$, entonces también se cumple para $n \leq m$.
- Un ejemplo inmediato de un proceso estocástico estrictamente estacionario lo constituye una sucesión de variables aleatorias i.i.d.
- Un proceso estrictamente estacionario puede no ser estacionario en covarianza, ya que puede no tener momentos de primer y segundo orden finitos.
- **Ejemplo:** el proceso formado por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Cauchy.

Conceptos

Funciones de media y varianza

- Generalmente se suprime la variable ω y se escribe $Z(\omega, t)$ simplemente como $Z(t)$ o Z_t. Además el proceso es llamado de valor real si este sólo toma valores reales.

- Para un proceso de valor real $Z_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ se define la función de medias del proceso como:

$$\mu_t = E(Z_t)$$

- La función de varianza

$$\sigma_t^2 = E(Z_t - \mu_t)^2$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos

Funciones de covarianza y correlación

- La función de covarianza entre Z_{t_1} y Z_{t_2}

$$\gamma(t_1, t_2) = E(Z_{t_1} - \mu_{t_1})(Z_{t_2} - \mu_{t_2})$$

- La función de correlación entre Z_{t_1} y Z_{t_2}

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}}$$

Conceptos

- Para un proceso estrictamente estacionario $\mu_t = \mu$, siempre que
  1. $E(|Z| < \infty)$
  2. $\sigma_t^2 = \sigma^2$, si $E(Z_t^2 < \infty)$,para todo t.

- Además dado que $F(z_{t_1}, z_{t_2}) = F(z_{t_1+k}, z_{t_2+k})$ para cualquier enteros t_1, t_2 y k,

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + k, t_2 + k),$$
$$\rho(t_1, t_2) = \rho(t_1 + k, t_2 + k)$$

Haciendo $t_1 = t - k$ y $t_2 = t$, se tiene que

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t - k, t) = \gamma(t, t + k) = \gamma_k$$

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(t - k, t) = \rho(t, t + k) = \rho_k$$

Así, para un proceso estrictamente estacionario con primeros dos momentos finitos, la función de covarianza y correlación entre Z_t y Z_{t+k} depende únicamente de la diferencia k entre los tiempos.

Conceptos

Proceso Débilmente Estacionario

- Un proceso es llamado débilmente estacionario de orden n, si todos sus momentos conjuntos hasta de orden n son finitos e invariantes en el tiempo.
- Un proceso débilmente estacionario de segundo orden tendrá media y varianza constantes y sus funciones de covarianza y correlación sólo dependerán del número de períodos que separan los términos del proceso.
- Esta clase de proceso es también llamado proceso estacionario en sentido amplio o proceso estacionario en covarianza o simplemente estacionario.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos

En la práctica, generalmente se trabaja con procesos estacionarios en covarianza. Este es un supuesto mucho menos restrictivo que la estacionaridad estricta y más fácil de probar en la práctica.

Ejemplo

Considere la serie

$$x_t = \sin(2\pi U t), \quad t = 1, 2, \ldots,$$

donde U tiene una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

1. Probar que x_t es débilmente estacionaria.
2. Probar que x_t no es estrictamente estacionaria. (Ejercicio)

Conceptos

Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Para un proceso estacionario $\{Z_t\}$ escribimos

$$\gamma_k = cov(Z_t, Z_{t+k}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)$$

y

$$\rho_k = \frac{cov(Zt, Zt + k)}{Var(Z_t)Var(Z_{t+k})} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

donde $\gamma_0 = Var(Z_t) = Var(Z_{t+k})$. Como función de k, γ_k se denomina la función de autocovarianza y ρ_k la función de autocorrelación (ACF).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos

Propiedades

1. $\gamma_0 = Var(Z_t)$; $\rho_0 = 1$
2. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$; $|\rho_k| \leq 1$
3. $\gamma_k = \gamma_{-k}$; $\rho_k = \rho_{-k}$, para todo k.
4. γ_k y ρ_k, son semidefinidas positivas en el sentido que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \gamma_{|t_i - t_j|} \geq 0 \tag{2}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \rho_{|t_i - t_j|} \geq 0 \tag{3}$$

para cualquier $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reales.

Demostración:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos

Función de autocorrelación parcial

- Se usa para medir el grado de correlación entre Z_t y Z_{t+k} luego de remover la dependencia lineal con las variables intermedias

$$Corr(Z_t, Z_{t+k}|Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1})$$

- Puede ser obtenida considerando el siguiente modelo de regresión para la variable Z_{t+k} de un proceso de media cero

$$Z_{t+k} = \phi_{k1}Z_{t+k-1} + \phi_{k2}Z_{t+k-2} + \ldots + \phi_{kk}Z_t + e_{t+k}$$

con e_{t+k} incorrelado con Z_{t+k-j} para $j \geq 1$.

- Multiplicando por Z_{t+k-j} y tomando esperanza se tiene

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \ldots + \phi_{kk}\gamma_{j-k}$$

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{j-k}$$

Conceptos

Función de autocorrelación parcial

- Para $j = 1, 2, \ldots, k$ se tiene el sistema

$$\rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \ldots + \phi_{kk}\rho_{k-1}$$

$$\rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \ldots + \phi_{kk}\rho_{k-2}$$

$$\vdots$$

$$\rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \ldots + \phi_{kk}\rho_0$$

- Usando la regla Cramer para $k = 1, 2, \ldots$ se tiene

$$\phi_{11} = \rho_1, \quad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Conceptos

Función de autocorrelación parcial

- En general

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

- Como una función de k, ϕ_{kk} es denominada función de autocorrelación parcial (PACF) entre Z_t y Z_{t+k}.

Conceptos

Proceso ruido blanco, RB

- Un proceso $\{a_t\}$ es llamado RB si este es una secuencia de v.a. incorreladas de una distribución fija con media constante $E(a_t) = \mu_a$, usualmente asumida como cero, varianza constante $Var(a_t) = \sigma_a^2$ y

$$\gamma_k = cov(a_t, a_{t+k}) = 0$$

para todo $k \neq 0$.

- De este modo, todo proceso RB es estacionario con función de autocovarianza

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos

Proceso ruido blanco, RB

- La función de autocorrelación

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

- La función de autocorrelación parcial

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

- Un proceso RB se dice Gausiano si su función de distribución conjunta es normal. En adelante se hace referencia solo a procesos ruido blanco Gausianos de media cero.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos

Estimación de la media, autocovarianzas y autocorrelaciones de un proceso estacionario

- Un proceso estacionario está caracterizado por su media μ , su varianza σ^2 , sus autocorrelaciones ρ_k , y sus autocorrelaciones parciales ϕ_{kk}.

- Dada una realización $Z_1, Z_2, \ldots, Z_T$, de un proceso estacionario se tienen los siguientes estiamadores:

  1. El estimador para la media $\mu_t = E[Z_t]$: $\bar{Z} = \frac{\sum_{t=1}^{T} Z_t}{T}$
  2. Estimador Función Autocovarianza: $\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{T}$
  3. Estimador Función Autocorrelación: $\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos

Distribución muestral de $\hat{\rho}_k$

- Para un proceso estacionario Gaussiano y para muestras grandes, bajo el supuesto de que $\rho_k = 0$ para $k > m$,

$$\hat{\rho}_k \sim^{aprox} \mathcal{N}(0, Var(\hat{\rho}_k)).$$

donde la varianza de $\hat{\rho}_k$ es:

$$Var(\hat{\rho}_k) \approx (1 + 2\hat{\rho}_1^2 + 2\hat{\rho}_2^2 + \ldots + 2\hat{\rho}_m^2)/T$$

- Bajo el supuesto de que $\rho_k = 0$ para $k > 0$ (el proceso no está autocorrelacionado),

$$\hat{\rho}_k \sim^{aprox} \mathcal{N}(0, 1/T).$$

-

Conceptos

Distribución muestral de ϕ_{kk}

- Para un proceso estacionario Gaussiano y para muestras grandes, bajo el supuesto de que $\rho_k = 0$ para todo k (proceso no está autocorrelacionado),

$$\phi_{kk} \sim^{aprox} \mathcal{N}(0, 1/T).$$

- Cuando k es grande con respecto a T, $\hat{\gamma}_k$, y por tanto $\hat{\rho}_k$, son estimados en forma muy imprecisa. Por esta razón se sugiere obtener sólo los primeros $T/4$ estimadores en el análisis de la serie de tiempo.

Propiedades de los estimadores

Conceptos

Representación de Medias Móviles (MA):

- Se puede expresar la serie de tiempo como

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \ldots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

  donde $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ y donde $\psi_0 = 1$. El proceso $\{a_t\}$ es un Ruido Blanco.

- Todo proceso estacionario puramente no determinístico puede ser escrito en la forma anterior (Teorema de Wold). Este proceso también es llamado proceso lineal.

- El modelo en forma MA puede ser escrito como:

$$Z_t = \mu + \Psi(B) a_t$$

  donde $\Psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$ con $\psi_0 = 1$

  Para que el proceso MA sea estacionario se requiere que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

Conceptos

Propiedades del proceso MA estacionario:

- $E(Z_t) = \mu$
- $\gamma_k = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}$
- $Var(Z_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$
- $\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}}{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2}$
- γ_k y ρ_k
  - sólo dependen de k
  - son finitas

Conceptos

Representación Autorregresiva (AR):

- Se puede expresar la serie de tiempo como

$$Z_t = \theta_0 + \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \ldots + a_t$$

o, equivalentemente, usando el operador de rezagos B,

$$\pi(B) Z_t = \theta_0 + a_t$$

donde $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \ldots$, con $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, y $\pi_0 = 1$.

- Para que un proceso MA estacionario tenga una representación AR, es necesario que las raíces del polinomio $\Psi(B) = 0$ caigan todas fuera del circulo unidad.

- No todo proceso invertible es necesariamente estacionario. Para que un proceso invertible tenga una representación MA, es necesario que las raíces del polinomio $\pi(B) = 0$ caigan todas fuera del círculo unidad.

Modelos

- Por tanto, para la modelación de un fenómeno se requiere usar un número finito de parámetros. De aquí surgen los modelos:

Autorregresivos de orden p, AR(p):

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

De Medias Móviles de orden q, MA(q):

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

Autorregresivos y de Medias Móviles, ARMA(p, q):

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

Identificación

Estimación

Pronóstico