Modelos de funciones de transferencia

Mariana González Castrillón

23 de octubre de 2018

Resumen

Las funciones de transferencia son una técnica muy útil para conocer la relación entre dos o más series de tiempo. Una de las metodologías utilizadas para relacionar dos o más series temporales son las funciones de transferencia, las cuales permiten encontrar predicciones de los valores que puede tomar una serie de tiempo en función de una o más señales. El presente trabajo expone los conceptos teóricos que reúnen los modelos de funciones de transferencia aplicados a las series de tiempo, expone el procedimiento secuencial para la construcción de este tipo de modelos y dos ejemplos de aplicación desarrollados en el programa Rstudio.

Palabras claves: Serie temporal, Modelo de regresión rezagada, Función de transferencia, Función de autocorrelación cruzada.

1. Introducción

Una de las necesidades que surge en el área de las series de tiempo es relacionar dos ó más series temporales, de tal forma que se logre información relevante de una serie específica (llamada comúnmente serie de salida o output) a partir de otra u otras con las que esté asociada (denominadas series de entrada o inputs). Para ello, se emplean los modelos de funciones de transferencia ó modelos de regresión dinámica como también suelen denominarse, puesto que permiten que la relación entre variables no sea únicamente contemporánea como se presenta en los modelos de regresión lineal, sino que también se incluye la relación teniendo en cuenta los valores pasados de las series en estudio. Estos modelos son utilizados a menudo en muchos campos científicos para evaluar y predecir respuestas en el comportamiento de una señal según las condiciones que se asignen sobre las variables de entrada.

En el desarrollo de este trabajo que tiene como objetivo principal, reconocer la importancia de esta técnica y la utilidad a la hora de extraer información de una serie de tiempo en términos de otra, se presenta la teoría que sustenta los modelos basados en este tipo de funciones y además la metodología a seguir para su construcción basada en la identificación de la función de transferencia, el uso de la función de autocorrelación cruzada y, en general, el ajuste de estos modelos. Por otra parte, los métodos descritos son lustrados en los dos ejemplos de aplicación al final del documento.

2. Objetivos

2.1 Objetivo general

Identificar la necesidad de relacionar series de tiempo a través de modelos que permitan conocer información y predecir comportamientos de una serie de salida a partir de las series de entrada.

2.2 Objetivos específicos

1. Reconocer la utilidad de las funciones de transferencia para modelar asociaciones entre series de tiempo estacionarias.

2. Analizar la estructura de un modelo de función de transferencia en términos de modelos de series de tiempo conocidos como modelos autorregresivos y de medias móviles.

3. Comparar las funciones de autocovarianza y autocorrelación con las funciones de covarianza y correlación cruzada para determinar su relación con la función de transferencia.

4. Enunciar la metodología usual para estimar un modelo de función de transferencia a partir de los conceptos teóricos expuestos.

5. Mostrar dos ejemplos de aplicación desarrollados en el programa Rstudio para implementar la metodología que se explica.

3. Marco Teórico

3.1 Modelo de función de transferencia

Inicialmente, consideremos la siguiente expresión como un modelo de regresión rezagada,

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x_{t-j} = \alpha(B)x_t + \eta_t \tag{1}$$

donde $\sum_j |\alpha_j| < \infty$ representa el cambio total en la serie de salida cuando la serie de entrada aumenta en una unidad permitiendo que el sistema sea estable. La serie x_t se asume como un proceso de entrada o input estacionaria y η_t es un proceso de ruido también estacionario y mutuamente independiente de la serie de entrada x_t.

Esta expresión corresponde a un modelo de función de transferencia con una sola serie de salida y una única serie de entrada relacionadas a partir de un sistema o filtro lineal y donde la componente $\alpha(B) = \alpha_0 + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + ...$ representa una función de transferencia del filtro de Box y Jenkins en el que los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, ...$ describen los pesos asignados a los valores pasados de x_t utilizados para predecir y_t. También puede ser descrita de la forma:

$$\alpha(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j B^j \tag{2}$$

Debido a que el modelo para y_t está compuesto por infinitos parámetros, Box y Jenkins propusieron que la función de transferencia $\alpha(B)$ puede expresarse como un cociente de polinomios racionales compuestos por un número finito de coeficientes acompañados de un rezago específico d, el cual representa el tiempo que se demora la variable de entrada o input en producir un efecto en la variable de salida, como sigue:

$$\alpha(B) = \frac{\delta(B)B^d}{\omega(B)} \tag{3}$$

donde $\omega(B) = 1 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - ... - \omega_r B^r$ y $\delta(B) = \delta_0 + \delta_1 B + \delta_2 B^2 ... + \delta_s B^s$ son los operadores indicados del tal forma que las raíces de $\omega(B) = 0$ caen por fuera del círculo unitario.

Sustituyendo (3) en (1) se tiene que el modelo completo de función de transferencia:

$$y_t = \frac{\delta(B)B^d}{\omega(B)} x_t + \eta_t \tag{4}$$

Este modelo también se puede postular de tal forma que los componentes se tengan de manera separada por lo que (4) se puede reescribir como $\omega(B)y_t = \delta(B)B^d x_t + \omega(B)\eta_t$, ó en la forma de regresión:

$$y_t = \sum_{k=1}^{r} \omega_k y_{t-k} + \sum_{k=0}^{s} \delta_k x_{t-d-k} + u_t \tag{5}$$

donde $u_t = \omega(B)\eta_t$.

Para ajustar un modelo de esta forma se requiere que las series de entrada, las series de salida y el proceso del ruido sean estacionarias. Además el proceso de ruido no necesariamente es ruido blanco, por lo que teniendo en cuenta el caso de modelado ARMA(p,q), las series x_t y η_t en la notación de polinomios de rezagos, tendrían la representación

$$\phi(B)x_t = \theta(B)w_t \tag{6}$$

y

$$\phi_\eta(B)\eta_t = \theta_\eta(B)z_t \tag{7}$$

donde los polinomios autorregresivos y de medias móviles de los procesos ARMA cumplen las condiciones de estacionariedad e invertibilidad, y las componentes w_t y z_t son procesos ruido blanco independientes con varianzas σ_w^2 y σ_z^2 respectivamente.

Además, de la expresión en (6) se puede despejar w_t de la siguiente manera:

$$w_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} x_t \tag{8}$$

Así, w_t se denomina serie preblanqueada de la serie de entrada x_t, ya que se convierte en un proceso de ruido blanco al suponer que la serie x_t sigue un proceso ARMA.

Aplicando este misma técnica de preblanqueo a la serie de salida y_t se obtiene la siguiente transformación

$$\tilde{y} = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} y_t \tag{9}$$

Con lo anterior, si se aplica el operador $\frac{\phi(B)}{\theta(B)}$ a ambos lados del modelo en (1) se obtiene un nuevo modelo que contiene una serie de salida transformada $\tilde{y}_t$, una serie input preblanqueada w_t que a su vez es independiente del ruido transformado $\tilde{\eta}_t$. Este modelo es escrito como:

$$\tilde{y} = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} y_t = \alpha(B) \frac{\phi(B)}{\theta(B)} x_t + \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \eta_t = \alpha(B) w_t + \tilde{\eta}_t \tag{10}$$

3.2 Función de correlación cruzada

La función de correlación cruzada es una medida muy usada para conocer la relación entre dos variables aleatorias, y es tambien una medida de similitud entre dos señales, usada frecuentemente para encontrar características importantes de una serie a través de la comparación con otra serie conocida.

Consideremos la función de covarianza cruzada entre los procesos x_t y y_t que se define como:

$$\gamma_{xy}(h) = cov(x_{t+h}, y_t) = E[(x_{t+h} - \mu_x)(y_t - \mu_y)] \tag{11}$$

para $h = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, la cual es función solo del rezago h y donde $\mu_x = E(x_t)$ y $\mu_y = E(y_t)$. Luego, por medio de la estandarización, la función de correlación cruzada (CCF) es definida así:

$$\rho_{xy}(h) = \frac{\gamma_{xy}(h)}{\sigma_x \sigma_y} \tag{12}$$

para $h = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ donde σ_x y σ_y son las desviaciones estándar de x_t y y_t. Estas dos funciones se consideran generalizaciones de las funciones de autocovarianza y autocorrelación puesto que $\gamma_{xx}(h) = \gamma_x(h)$ y $\rho_{xx}(h) = \rho_x(h)$. La función de correlación cruzada no es simétrica puesto que $\rho_{xy}(h) \neq \rho_{xy}(-h)$. Sin embargo, se cumple que $\rho_{xy}(h) = \rho_{yx}(-h)$.

La CCF mide tanto la fuerza de la relación entre las series como la dirección de esta, y por tal motivo es necesario observar el comportamiento tanto de los valores positivos de h como los negativos. Para valores negativos de h, la CCF describe la influencia lineal de los valores pasados de y_t sobre x_t, mientras que para valores positivos de h, la CCF muestra la influencia lineal de los valores pasados de x_t sobre y_t. El gráfico de la CCF contra los valores de h es llamado correlograma cruzado.

3.3 Relación entre la función de correlación cruzada y la función de transferencia

Para un tiempo $t+h$, el modelo de función de transferencia descrito en la ecuación (1) puede denotarse como:

$$y_{t+h} = \alpha_0 x_{t+h} + \alpha_1 x_{t+h-1} + \alpha_2 x_{t+h-2} + ... + \eta_{t+h}$$

Se puede asumir que $\mu_x = \mu_y = 0$. Luego, multiplicando a ambos lados de la igualdad por x_t y tomando esperanza, se tiene lo siguiente:

$$E(y_{t+h}x_t) = \alpha_0 E(x_{t+h}x_t) + \alpha_1 E(x_{t+h-1}x_t) + \alpha_2 E(x_{t+h-2}x_t) + ... + E(\eta_{t+h}x_t)$$

$$\gamma_{yx}(h) = \alpha_0 \gamma_{xx}(h) + \alpha_1 \gamma_{xx}(h-1) + \alpha_2 \gamma_{xx}(h-2) + ...$$

puesto que $E(\eta_{t+h}x_t) = \gamma_{\eta x}(h) = 0$. Ahora, dividiendo a ambos lados para obtener la función de correlación cruzada, se obtiene:

$$\rho_{yx}(h) = \frac{\gamma_{yx}(h)}{\sigma_y \sigma_x} = \alpha_0 \frac{\gamma_{xx}(h)}{\sigma_y \sigma_x} + \alpha_1 \frac{\gamma_{xx}(h-1)}{\sigma_y \sigma_x} + \alpha_2 \frac{\gamma_{xx}(h-2)}{\sigma_y \sigma_x} + ...$$

$$\rho_{yx}(h) = \alpha_0 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho_{xx}(h) + \alpha_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho_{xx}(h-1) + \alpha_2 \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho_{xx}(h-2) + ...$$

Teniendo en cuenta que los términos de las covarianzas cruzadas $\rho_{xx}(h) = \rho_x(h)$:

$$\rho_{yx}(h) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(\alpha_0 \rho_x(h) + \alpha_1 \rho_x(h-1) + \alpha_2 \rho_x(h-2) + ... + \alpha_h \rho_x(h-h) + \alpha_{h+1}\rho_x(h-h+1))$$

$$\rho_{yx}(h) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(\alpha_0 \rho_x(h) + \alpha_1 \rho_x(h-1) + \alpha_2 \rho_x(h-2) + ... + \alpha_h + \alpha_{h+1}\rho_x(1))$$

De esta manera, se muestra la expresión que relaciona la función de correlación cruzada y los coeficientes de la función de transferencia, la cual conforma un sistema de ecuaciones para resolver los α_j en función de $\rho_{yx}(h)$ y $\rho_x(h)$ pero cuya solución es bastante compleja. No obstante, si la serie de entrada o input x_t es un proceso de ruido blanco, es decir, si se cumple que $\rho_x(h) = 0$ para $h \neq 0$, entonces la ecuación anterior puede simplicarse así

$$\rho_{yx}(h) = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(\alpha_h)$$

de forma que:

$$\alpha_h = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho_{yx}(h) \tag{13}$$

En este caso, los coeficientes de la función de transferencia son directamente proporcionales a la función de correlación cruzada $\rho_{yx}(h)$. Por tal razón, al considerar un modelo transformado como el presentado en la ecuación (10), se observa que este contiene una serie input preblanqueada y una serie de salida transformada con las cuales se pueden encontrar los pesos α_j a partir de la relación encontrada con la función de covarianza y correlación cruzada.

Si nos enfocamos en encontrar una expresión para la función de covarianza cruzada entre la serie de salida transformada y la serie preblanqueada, se llega a la expresión

$$\gamma_{\tilde{y}w(h)} = E(\tilde{y}_{t+h}w_t) = E\left[\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j w_{t+h-j}w_t\right] = \sigma_w^2\alpha_h \tag{14}$$

ya que la función de autocovarianza del ruido blanco se anula, excepto cuando $j = h$. Además w_t y η_t son independientes.

Siendo así,

$$\gamma_{\tilde{y}w(h)}\frac{\sigma_{\tilde{y}}\sigma_w}{\sigma_{\tilde{y}}\sigma_w} = \sigma_w^2\alpha_h$$

$$\rho_{\tilde{y}w}(h) = \frac{\sigma_w^2\alpha_h}{\sigma_{\tilde{y}}\sigma_w} = \frac{\sigma_w}{\sigma_{\tilde{y}}}\alpha_h$$

Así mismo, se llega a una forma cerrada para los coeficientes de la transferencia α_j como se obtuvo en la expresión (13) y se puede afirmar que a partir del cálculo de la correlación cruzada entre la serie de entrada preblanqueada y la serie de salida transformada se debe obtener una estimación aproximada del comportamiento de la función $\alpha(B)$.

$$\alpha_h = \rho_{\tilde{y}w}(h)\frac{\sigma_{\tilde{y}}}{\sigma_w} \tag{15}$$

Hasta ahora hemos considerado los principales conceptos teóricos que se abordarán en la metodología del trabajo, así como las condiciones y los supuestos requeridos para ello.

4. Metodología

Para alcanzar los objetivos propuestos y siguiendo los conceptos mencionados en el marco teórico expuesto en la sección 3, se especificará el procedimiento de Box y Jenkins a seguir para la construcción y ajuste de un modelo de función de transferencia aplicado a una serie de tiempo estacionaria en términos de otra serie igualmente estacionaria.

Los pasos a seguir constituyen la determinación de un modelo parsimonioso compuesto de una forma sencilla para la función $\alpha(B)$ y para la estimación de todos los parámetros del modelo (4). En primer lugar, se especifican los pasos para la identificación de la función de transferencia y una vez completados se continúa con la identificación del modelo del ruido.

1. Como paso inicial, se desea encontrar un modelo ARMA(p,q) que describa el comportamiento de la serie de entrada x_t y que permita obtener una estimación de los parámetros $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_q, \sigma_w^2$ dados en la especificación (6).

2. Seguidamente, se procede a encontrar la serie input preblanqueada w_t y se aplica la transformación descrita en (9) para obtener la serie de salida transformada $\tilde{y}_t$, es decir,

$$\hat{\phi}(B)y_t = \hat{\theta}(B)\tilde{y}_t$$

3. Teniendo esto, se usa la función de correlación cruzada entre $\tilde{y}_t$ y w_t para sugerir una forma para los componentes del polinomio y el rezago estimado d.

$$\alpha(B) = \frac{\delta(B)B^d}{\omega(B)}$$

Partiendo del hecho de que la forma mostrada en la ecuación (5) sugiere hacer una regresión en los tiempos pasados de las series de entrada y salida x_t y y_t para obtener $\hat{\beta}$ como el vector de regresión $(r + s + 1) \times 1$ estimado de $\beta = (\omega_1, ..., \omega_r, \delta_0, \delta_1, ..., \delta_s)'$.

Además, considerando que los residuos de la regresión son denotados como $\hat{u}_t = y_t - \hat{\beta}' z_t$, donde $z_t = (y_{t-1}, ..., y_{t-r}, x_{t-d}, ..., x_{t-d-s})'$ denota el vector de variables independientes que podría usarse para aproximar el mejor modelo ARMA para el proceso de ruido η_t.

Se puede entonces calcular un estimador para este proceso a partir del término $u_t = \omega(B)\eta_t$, es decir, usando $\hat{u}_t$ y $\hat{\omega}(B)$ y aplicando el operador de medias móviles obtener η_t.

4. Teniendo presente este hecho, se obtiene el vector $\hat{\beta} = (\hat{\omega}_1, ..., \hat{\omega}_r, \hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1, ..., \hat{\delta}_s)$ ajustando una regresión lineal de la forma en (5).

5. Por último se aplica la transformación de medias móviles a los residuales $\hat{u}_t$ para encontrar la serie de ruido $\hat{\eta}_t$ y se ajusta un modelo ARMA al ruido obteniendo los coeficientes estimados en $\hat{\phi}_\eta(B)$ y $\hat{\theta}_\eta(B)$ para completar la especificación.

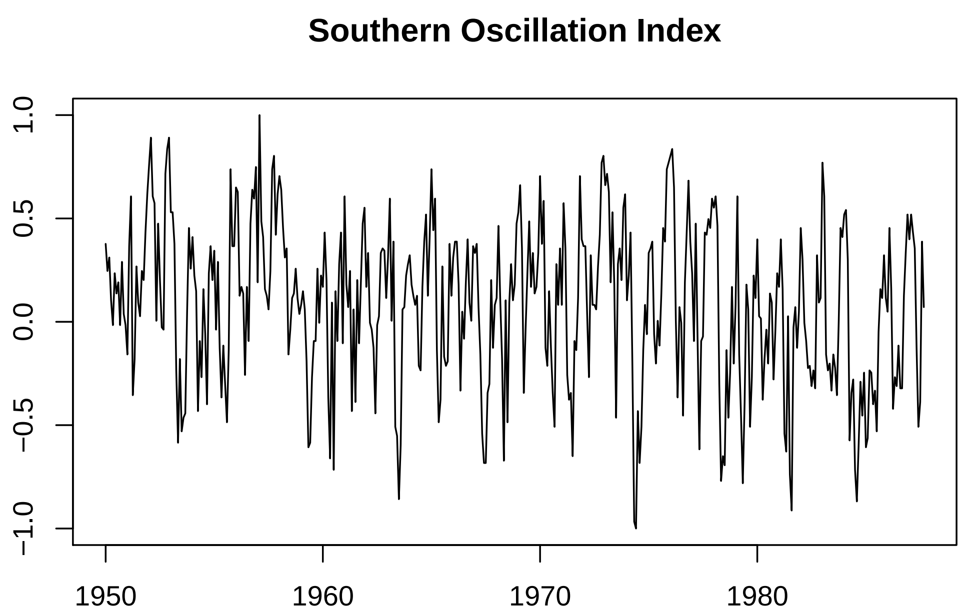
5. Aplicación

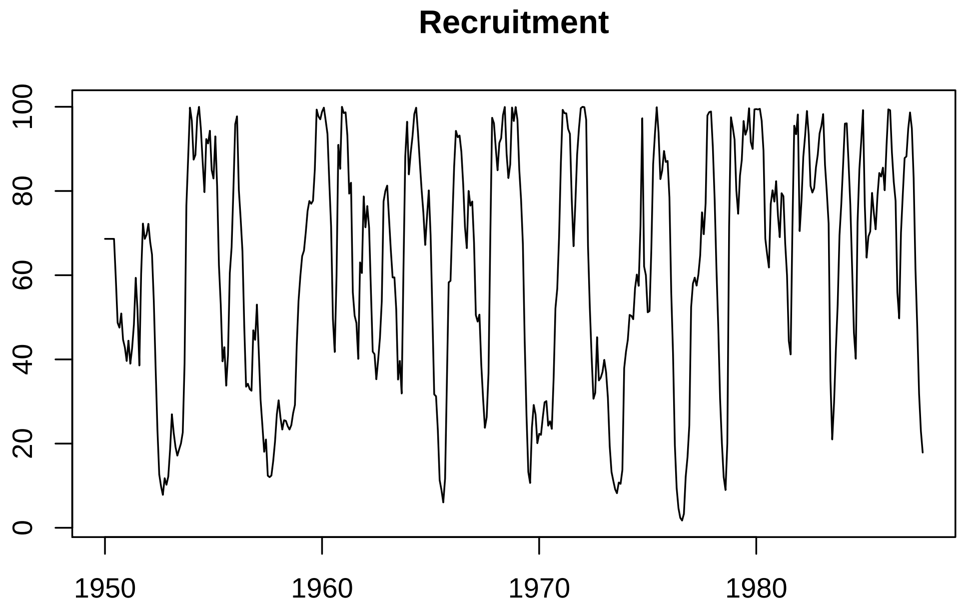
Para la aplicación se muestran a continuación dos ejemplos que ilustran los conceptos mencionados y los resultados obtenidos. Ambas ilustraciones comprenden los mismos datos y se pretende abordar el proceso metodológico en un solo problema visto de manera secuencial.

Ejemplo 1: Se quiere relacionar dos series de tiempo a partir de la metodología de identificación de la función de transferencia.

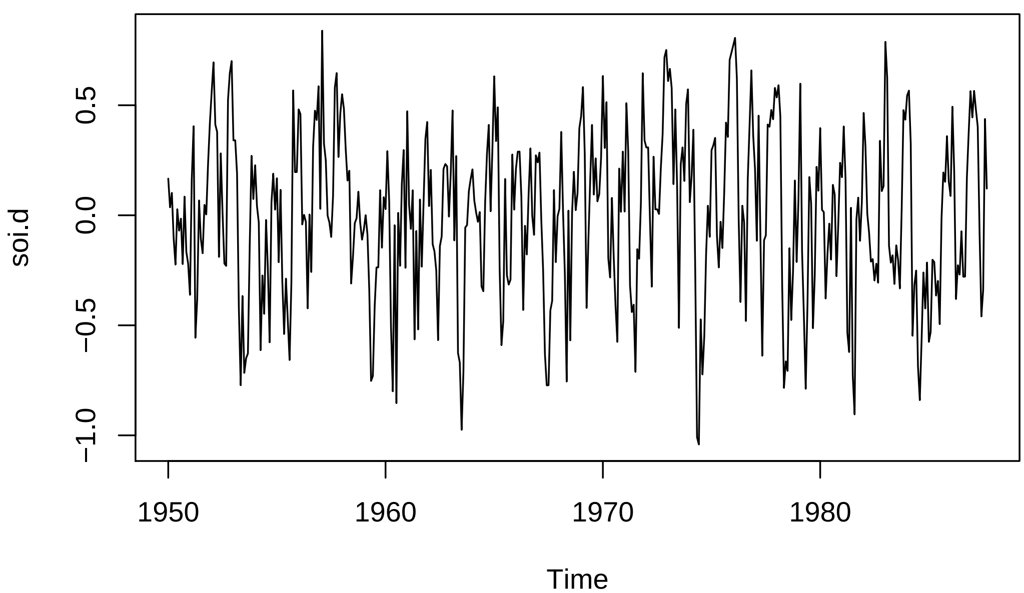
La serie de entrada o input x_t es considerada por la serie SOI (Southern Oscillation Index Data) Índice de Oscilación del Sur la cual contiene la diferencia en la presión barométrica al nivel de mar entre Tahití y Darwin. Se dan datos mensuales por un período de 453 meses que abarca los años 1950-1987. La serie de salida o output y_t comprende los datos de Reclutamiento (número de peces nuevos) por un período de 453 meses que abarca los años 1950-1987.

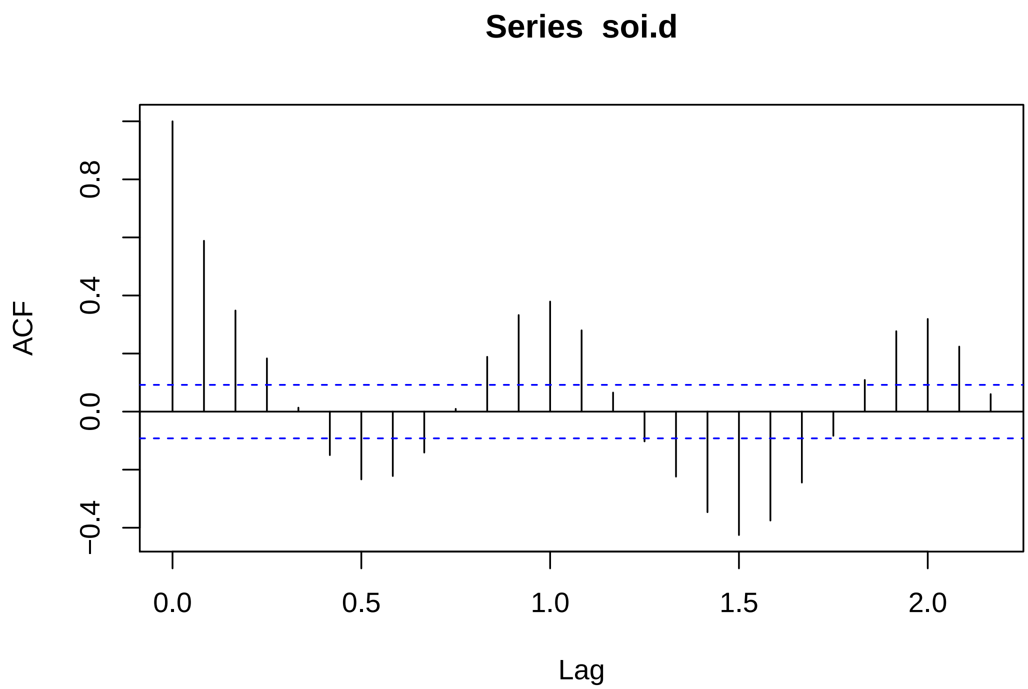
Los siguientes gráficos muestran las series de entrada y de salida para este ejemplo. En ellos se observa que el comportamiento de la serie de entrada SOI muestra una leve tendencia que no debe presentarse en los datos, puesto que para relacionar ambas series se necesita cumplir el supuesto de estacionariedad sobre ellas. Sin embargo, la serie de salida presenta un comportamiento sin tendencias y se puede trabajar con ella directamente.

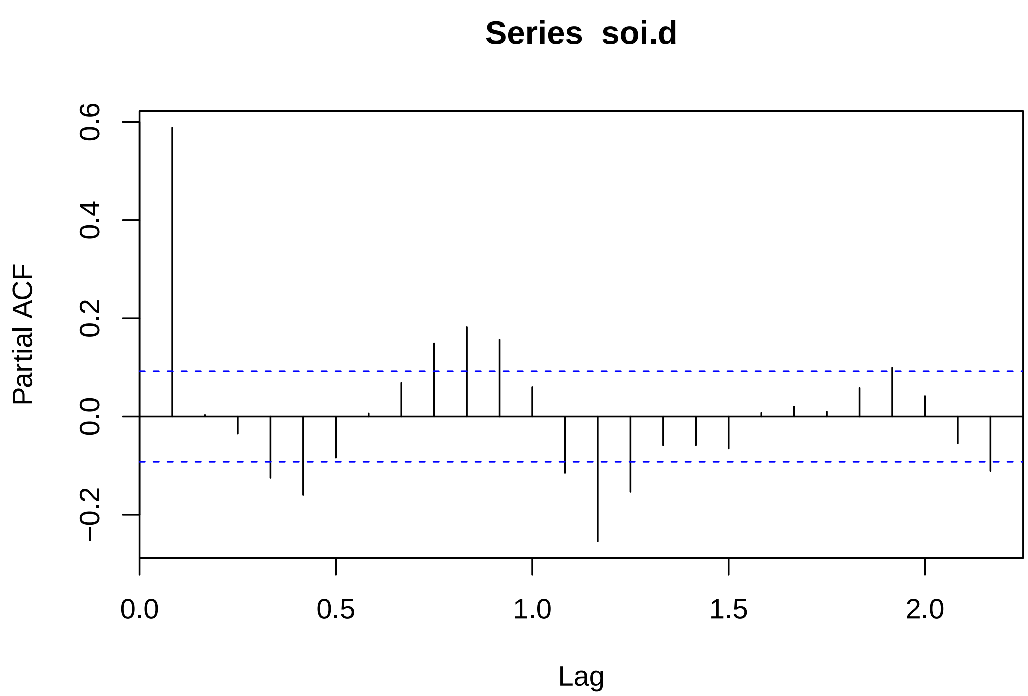




Se remueve la tendencia de la serie de entrada a partir de los residuos del ajuste de una regresión simple de los valores de la serie en términos del vector de los tiempos en que se obtuvieron las observaciones de la serie. Se muestra el gráfico de la serie SOI sin tendencia. Esta es ahora la serie de entrada x_t,con sus respectivos gráficos de las funciones muestrales de autocorrelación y autocorrelación parcial.





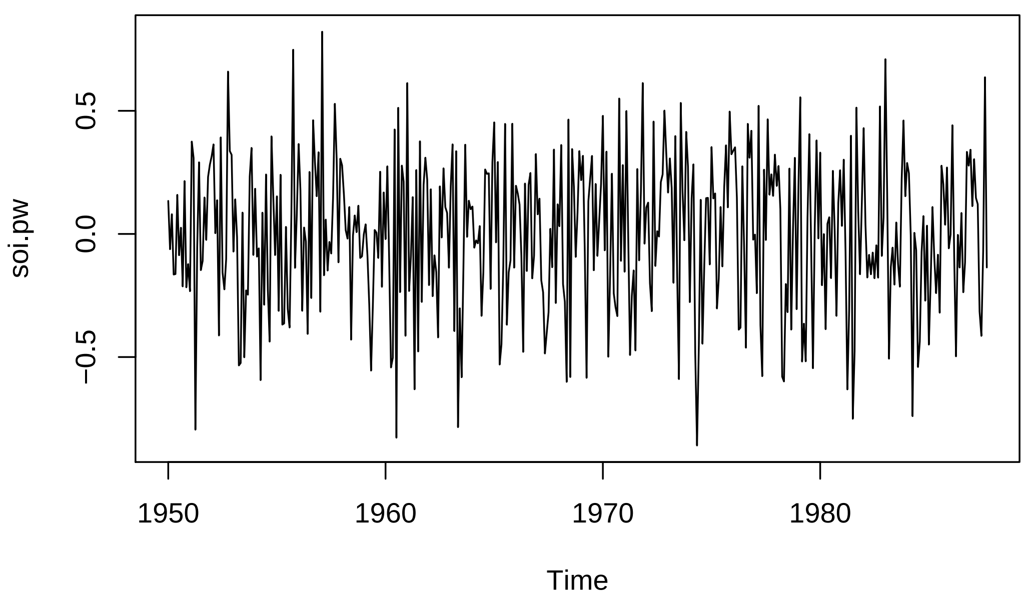


Se observa a partir del gráfico de autocorrelación parcial en el que el rezago 1 es significativo que la serie sin tendencia de SOI puede ser ajustada a través de un proceso autorregresrivo con p=1, es decir, un AR(1) puede ajustarla bien. Además el gráfico de autocorrelación muestra un decaimiento por medio de ondas senoidales amortiguadas. Con esto, se ajusta la serie y se obtiene que el valor de $\hat{\phi} = 0{,}5875$ y el valor de

$\hat{\sigma}_w^2 = 0{,}0918$ como se observa en los valores de los siguientes coeficientes.

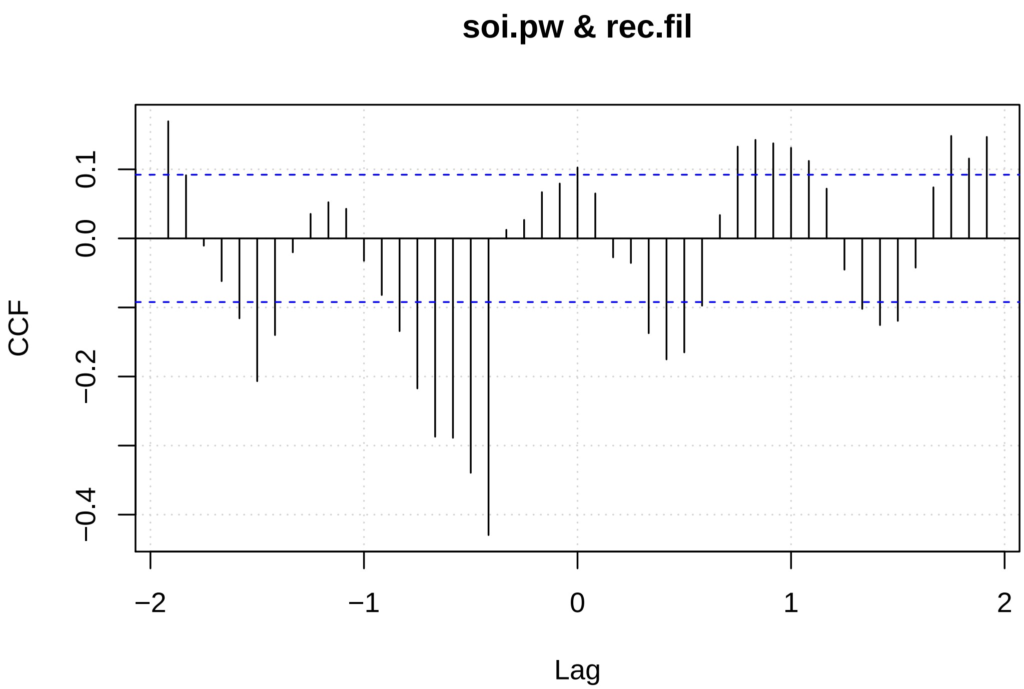
```
##
## Call:
## arima(x = soi.d, order = c(1, 0, 0))
##
## Coefficients:
##          ar1  intercept
##       0.5875     0.0008
## s.e.  0.0379     0.0344
##
## sigma^2 estimated as 0.09181:  log likelihood = -102.1,  aic = 210.19
```

Se procede a encontrar la serie SOI preblanqueda y se observa el gráfico respectivo, el cual debe mostrar un comportamiento de ruido blanco.



Una vez preblanqueada la serie de entrada, se aplica el filtro a la serie de salida o output *rec* utiizando el operador $(1 - 0{,}588B)$. Al tener la serie de reclutamiento filtrada se puede calcular la función de correlación cruzada. En este gráfico se nota el cambio relevante de $d = 5$ meses y la disminución posterior, lo que permite que sea adecuado plantear un modelo para la función de transferencia con las siguientes componentes:

$$\alpha(B) = \frac{\delta_0 B^5}{1 - \omega_1 B}$$



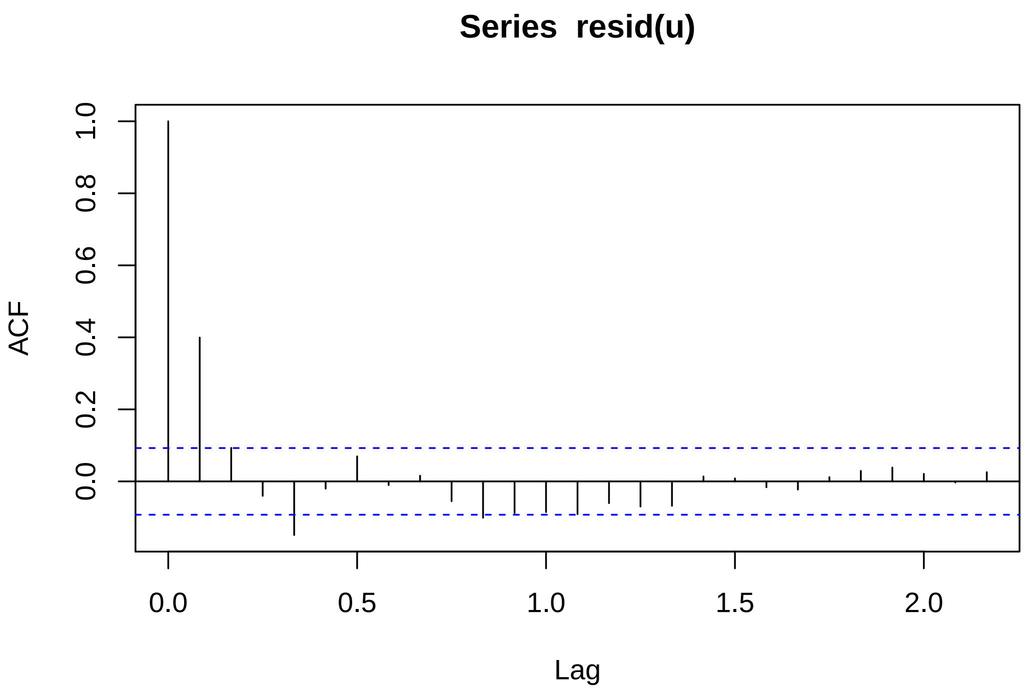
Ejemplo 2: Modelo de función de transferencia para SOI y Reclutamiento. Se desea ilustrar el procedimiento para ajustar un modelo de regresión rezagada de la forma sugerida en el ejemplo anterior a la serie sin tendencia SOI x_t y la serie de Reclutamiento y_t.

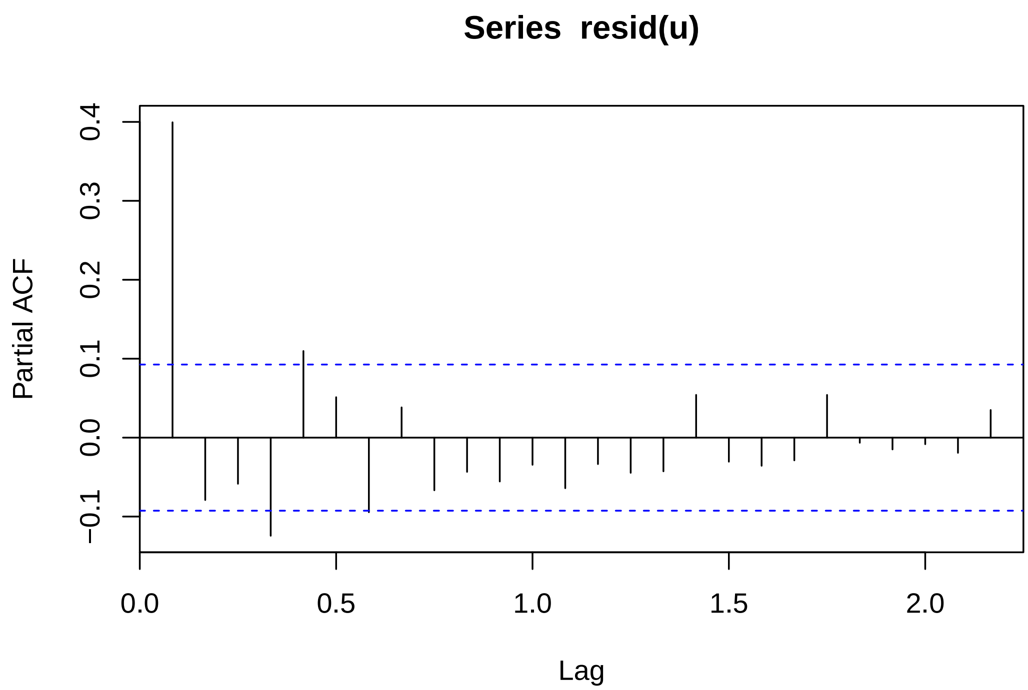
Según el ejemplo 1, se ha determinado que $y_t = \alpha + \omega_1 y_{t-1} + \delta_0 x_{t-5} + u_t$ es un modelo razonable. Una vez se tiene este modelo se realiza la regresión permitiendo errores autocorrelacionados. El modelo ajustado y los resultados de los coeficientes obtenidos en el programa Rstudio son:

$$y_t = 12 + 0{,}8 y_{t-1} - 21 x_{t-5} + u_t \quad \text{donde} \quad u_t = 0{,}45 u_{t-1} + w_t$$

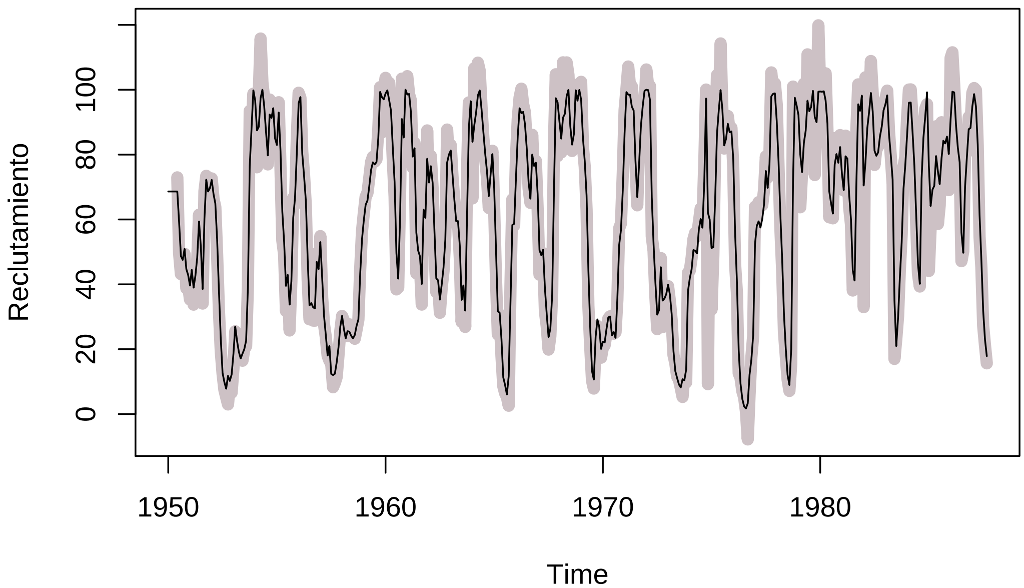
donde w_t es un proceso de ruido blanco con $\sigma_w^2 = 50$.

```
##
## Call:
## stats::arima(x = xdata, order = c(p, d, q), seasonal = list(order = c(P, D,
##     Q), period = S), xreg = xreg, optim.control = list(trace = trc, REPORT = 1,
##     reltol = tol))
##
## Coefficients:
##          ar1  intercept     RL1       SL5
##       0.4487    12.3323  0.8005  -21.0307
## s.e.  0.0503     1.5746  0.0234    1.0915
##
## sigma^2 estimated as 49.93:  log likelihood = -1511.79,  aic = 3033.57
```





Para terminar, se muestra el gráfico ACF y PACF del ruido estimado u_t los cuales indican que un proceso AR(1) es apropiado. Finalmente, el siguiente gráfico muestra la serie de salida Reclutamiento (en línea negra) y las predicciones de un paso adelante basadas en el modelo final.



6. Conclusiones

Los objetivos planteados al inicio del trabajo se han desarrollado siguiendo cada una de las etapas para la comprensión teórica de lo que reúne la construcción de este tipo de modelos. Por medio de los conceptos relacionados con las funciones de transferencia y las funciones de covarianza y correlación cruzada, se logró identificar la asociación entre ellas. La motivación inicial de establecer un modelo a partir de la información que puedan proporcionar dos series estacionarias utilizando funciones que asignen ponderaciones a los valores pasados de una serie de entrada para explicar una serie de salida, se tuvo en cuenta para desarrollar iterativamente la técnica.

Por otro lado, la metodología descrita por medio de los dos ejemplos de aplicación anteriores mostró principalmente el proceso secuencial del método de Box-Jenkins y se llevó a cabo utilizando las funciones de Rstudio. Los resultados de la aplicación muestran que la identificación de la función de respuesta al impulso o función de transferencia es aquella que permitirá diferentes predicciones de la serie de salida. Sin embargo, una de las desventajas de la metodología es que para hacer uso de la teoría en la práctica es necesario que las series de tiempo que se consideran y que se deseen estudiar para establecer diferentes asociaciones, deben ser estacionarias, por lo que si presentan algún indicio de tendencia o no estacionariedad se deben aplicar transformaciones para estabilización de la varianza o diferenciación a los datos de la serie antes de aplicar la metodología de las funciones de transferencia.

Referencias

[1] Shumway, Robert H. ; Stoffer, David S. Time series analysis and its applications. With R examples. Third edition. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2011. xii+596 pp. ISBN: 978-1-4419-7864-6

[2] Wei, William W. S. Time series analysis. Univariate and multivariate methods. Second edition. Addison Wesley/Pearson, Boston, MA, 2006. xxii+614 pp. ISBN: 0-321-32216-9