

Análisis de series de tiempo volátiles univariadas

El análisis financiero de series de tiempo está relacionado con la valoración de activos financieros en el tiempo.

- Una característica clave de las series financieras: tienen más elementos de incertidumbre que las series lineales.

Ejemplo: En el mercado financiero la desviación estándar de los rendimientos de un activo es llamada la **volatilidad**.

⇒ La volatilidad es usada para caracterizar el **riesgo** del activo financiero.

⇒ La volatilidad de la serie de los rendimientos en general es cambiante, no es observable directamente y debe ser estimada.

⇒ En la estimación de la volatilidad la teoría y los métodos estadísticos juegan un papel importante.

- La mayoría de estudios financieros investigan los **rendimientos** (o retornos) en lugar de los precios de los activos:

⇒ Para el inversionista promedio el rendimiento de un activo es un resumen completo y libre de escala de la oportunidad de invertir.

⇒ Las series de los rendimientos son más fáciles de manejar que las series de precios debido a que tienen propiedades estadísticas más atractivas.

- Sea P_t el precio de un activo en el período t . Definimos,

⇒ El retorno simple neto de un período (o tasa de variación de los precios):

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

⇒ El retorno compuesto continuo, o log-retorno:

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1}$$

- Relaciones entre R_t y r_t :

$$r_t = \ln(1 + R_t)$$

$$R_t = e^{r_t} - 1$$

Si los retornos R_t y r_t están en porcentajes,

$$r_t = 100 \ln \left(1 + \frac{R_t}{100} \right)$$

$$R_t = 100(e^{r_t/100} - 1)$$

- **Ejemplo:** Suponga que el log-retorno mensual r_t de un activo es 4.46%.

Entonces R_t es $100(e^{4.46/100} - 1) = 4.56\%$.

Observación: De la expansión en series de Taylor de $\ln(P_t / P_{t-1})$ alrededor de 1 se obtiene

$$\ln(P_t / P_{t-1}) = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right)^3 - \dots$$

Por tanto, usando la aproximación de primer orden,

$$\ln(P_t / P_{t-1}) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}},$$

o,

$$r_t \approx R_t$$

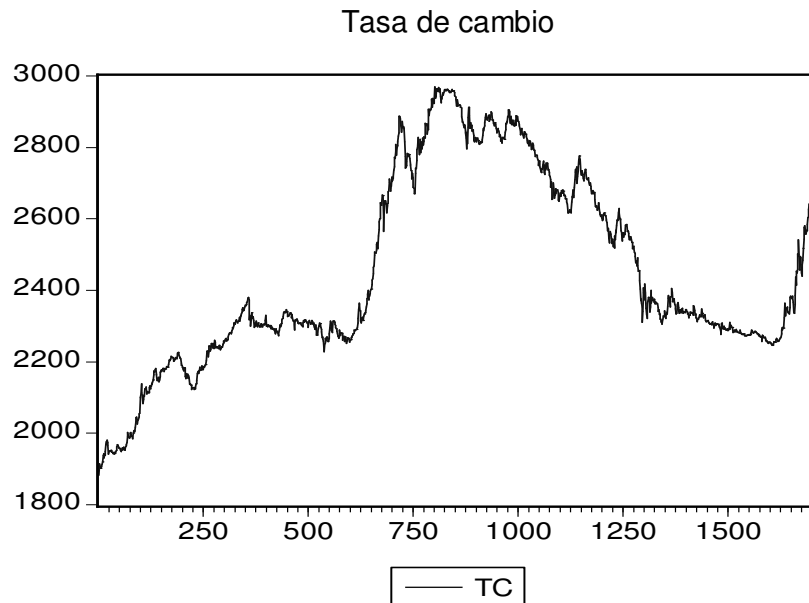
La aproximación es mejor cuanto menor sea el retorno simple o la tasa de variación de los precios, R_t .

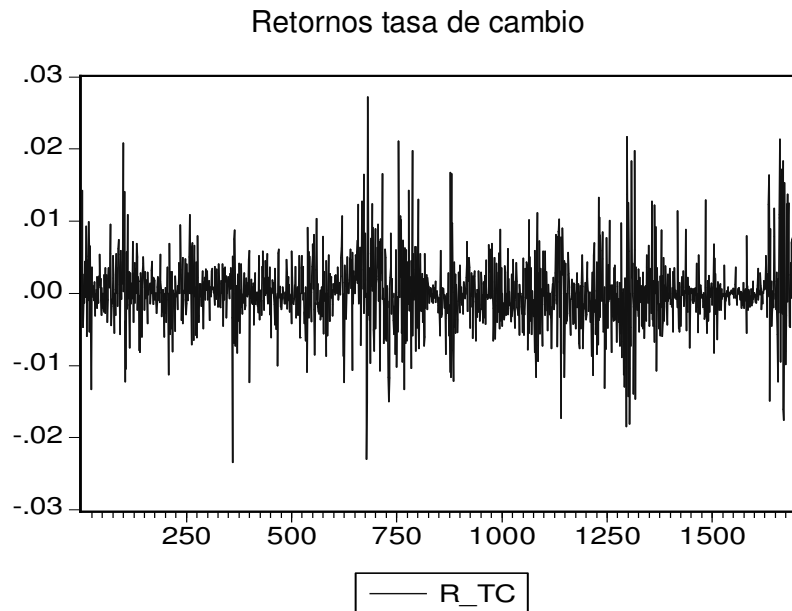
- **Exceso de retorno** es la diferencia entre el retorno del activo y el retorno de algún activo tomado como referencia. Generalmente el activo de referencia elegido es un activo libre de riesgo.
- Caracterización de la volatilidad (Hechos estilizados):
 1. Exceso de curtosis de las series financieras (Mandelbrot, 1963; Fama 1963, 1965).
 2. Existencia de períodos de alta y baja volatilidad, denominados clusters de volatilidad. Si la volatilidad es alta (baja) en un período tiende a seguir siendo alta (baja) para el período siguiente (Mandelbrot, 1963; Engel, 1982).
 3. De manera ocasional pueden ocurrir valores de alta volatilidad en períodos concretos, denominados saltos de precios discontinuos (discontinuous price-jump, Figlewski, 1977).
 4. En el largo plazo, los períodos de alta o baja volatilidad tienden a ser seguidos por períodos en los que la volatilidad es más moderada (Hsieh, 1995; Figlewski, 1977).
 5. Algunas series comparten co-movimientos con otras series. Por ejemplo, cuando se estudian las tasas de interés en diferentes mercados, los movimientos importantes de un mercado tienden a relacionarse con los de otro mercado. De ahí la importancia de los

modelos multivariados para series de tiempo volátiles que permitan analizar esas relaciones (Aydemir, 1998).

6. Algunas series parecen serpentear, mostrando tendencia a crecer o decrecer.
7. La volatilidad parece reaccionar diferentemente a un gran incremento del precio y a un gran descenso en el precio; la volatilidad se comporta diferente según lleguen al mercado buenas o malas noticias (Campbell y Hentschel, 1992).

Algunos de estos hechos estilizados ocurren en la tasa de cambio y sus retornos para Colombia, representada en las siguientes gráficas.

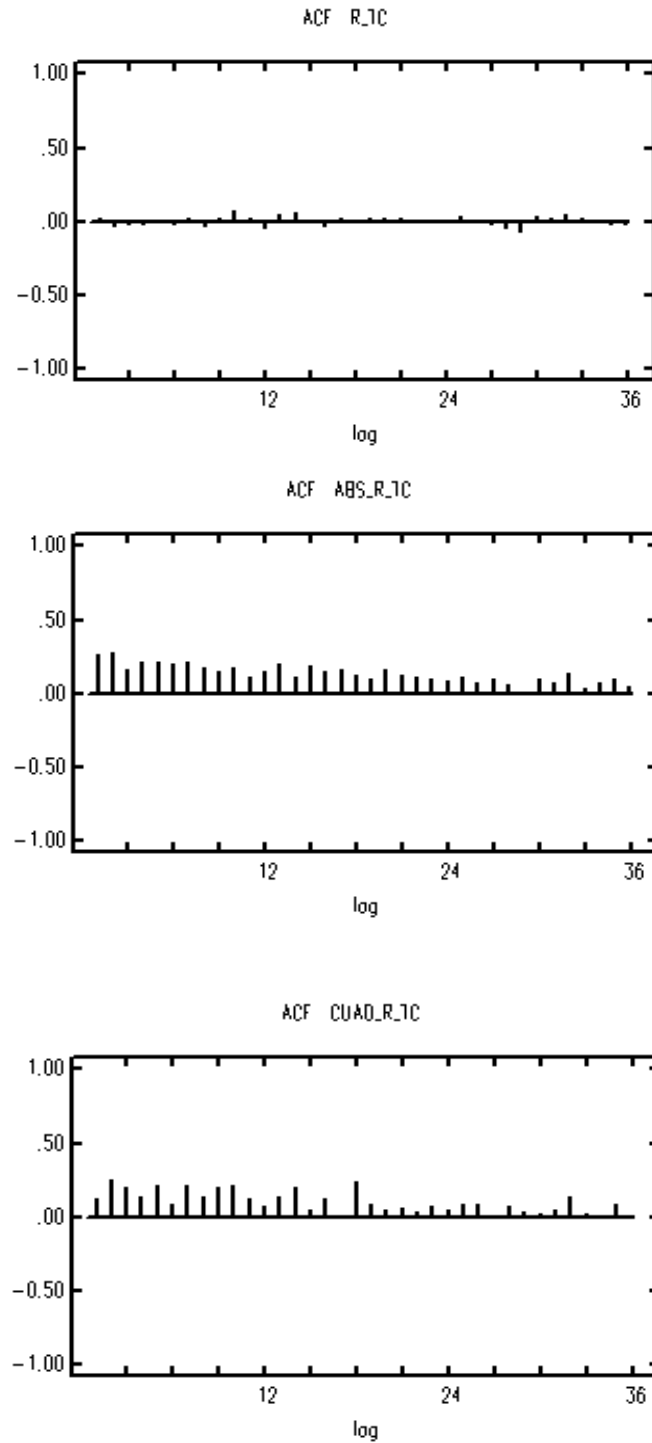




Estas propiedades juegan un papel importante en el desarrollo de los modelos de volatilidad.

La estructura de un modelo para explicar la volatilidad

- Sea $r_t = \ln(Z_t / Z_{t-1})$ el retorno (o log .retorno) de un activo en el período t . La idea básica detrás de un estudio de volatilidad es que la serie r_t no está correlacionada serialmente o posee valores pequeños en las correlaciones seriales, pero la serie es dependiente. Observe los correlogramas de los retornos de la tasa de cambio y de sus valores absolutos y cuadrados.



Mientras el correlograma de los retornos muestra que la serie parece ser serialmente no correlacionada, los correlogramas del valor absoluto y de los cuadrados sugieren que la serie no es independiente.

- Suponga que F_{t-1} es el conjunto de información disponible hasta el período $t-1$ y consideremos la media condicional y la varianza condicional de r_t dado F_{t-1} ,

$$\mu_t = E(r_t | F_{t-1}) \quad \text{y} \quad \sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | F_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}] \quad (1)$$

- ✓ La dependencia serial de un retorno r_t en general es débil, si es que existe. El modelo para r_t será de la forma

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad (2)$$

donde μ_t sigue, por ejemplo, un modelo ARMA(p,q) de la forma,

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}$$

bajo las condiciones de regularidad vistas anteriormente.

El orden (p, q) del modelo ARMA generalmente depende de la frecuencia de los datos: Por ejemplo, los rendimientos diarios de un índice de mercado pueden exhibir alguna correlación serial pequeña, pero los retornos mensuales pueden no exhibir ninguna correlación.

- ✓ Combinando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | F_{t-1}) = \text{Var}(a_t | F_{t-1})$$

- Los modelos de *heterocedasticidad condicional* tienen que ver con la evolución de σ_t^2 . La forma bajo la cual σ_t^2 evoluciona en el tiempo diferencia un modelo de volatilidad de otro.
- Por simplicidad en la introducción de los modelos de volatilidad, supondremos que el modelo para la media condicional μ_t está dado. A

a_t se le denominará *shock* o *el retorno corregido por la media* (vea ecuación (2)).

El modelo ARCH, Engle(1982)

- La idea básica del modelo de heterocedasticidad condicional autorregresiva, o modelo ARCH, es que

- a) El retorno corregido por la media a_t no está serialmente correlacionado pero es dependiente.
- b) La dependencia de a_t puede ser descrita por una simple función cuadrática de sus valores rezagados.

- Específicamente el modelo ARCH(m) supone que

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ es una sucesión de variables i.i.d con media cero y varianza 1, y $\alpha_j > 0$, para $j \geq 0$.

Los coeficientes α_j , para $j > 0$ deben cumplir algunas condiciones de regularidad para asegurar que la varianza incondicional de a_t sea finita.

Algunas veces se supone que $\varepsilon \sim N(0,1)$ o una distribución t de Student estandarizada.

- **Interpretación:** Dada la estructura del modelo, grandes shocks tienden a ser seguidos por otros grandes shocks. Esta característica es similar a la de la volatilidad por clusters observadas en la series de retornos.

Algunas veces se usa h_t para denotar la varianza condicional. En este caso el shock es $a_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$.

- **Propiedades de los modelos ARCH**

El estudio del modelo ARCH(1) es importante comprender las propiedades del modelo ARCH(m).

$$\text{El ARCH(1): } a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2$$

donde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$.

- ✓ La media incondicional de a_t :

$$E(a_t) = E[E(a_t / F_{t-1})] = E[\sigma_t E(\varepsilon_t)] = 0$$

- ✓ La varianza incondicional de a_t :

$$\text{Var}(a_t) = E(a_t^2) = E[E(a_t^2 / F_{t-1})] = E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)$$

Como a_t es un proceso estacionario,

$$\text{Var}(a_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Como la varianza debe ser positiva, es necesario que $0 \leq \alpha_1 < 1$.

- ✓ Momentos incondicionales de alto orden de a_t :

En algunas aplicaciones se necesita que algunos momentos de alto orden de a_t existan y por tanto α_1 debe satisfacer algunas restricciones adicionales. Por ejemplo para estudiar el comportamiento de la cola de su distribución, se necesita que el cuarto momento de a_t sea finito. Bajo normalidad en ε_t ,

$$E(a_t^4) = E[E(a_t^4 / F_{t-1})] = 3E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2 = 3E(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4)$$

puesto que $E(a_t^4 / F_{t-1}) = 3[E(a_t^2 / F_{t-1})]^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2$.

Si a_t es estacionaria en el cuarto momento, con $m_4 = E(a_t^4)$,

$$m_4 = 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\text{Var}(a_t) + \alpha_1^2 m_4)$$

$$m_4 = 3\alpha_0^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) + 3\alpha_1^2 m_4$$

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}$$

Este resultado tiene dos implicaciones importantes:

- Como el cuarto momento de a_t es positivo, entonces α_1 también debe satisfacer la condición $1 - 3\alpha_1^2 > 0$, es decir $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$.
- La curtosis no condicional de a_t es,

$$\frac{E(a_t^4)}{[\text{Var}(a_t)]^2} = 3 \frac{(1 - \alpha_1^2)}{(1 - 3\alpha_1^2)} > 3$$

Por tanto, el exceso de curtosis de a_t es positivo y la cola de la distribución de a_t es más pesada que la de la distribución normal. En otras palabras, el shock a_t del modelo condicional Gaussiano ARCH(1), tiene más probabilidad de producir “outliers” que un ruido blanco Gaussiano. Esto está de acuerdo con los hallazgos empíricos sobre “outliers” en series de tiempo financieras.

Estas propiedades siguen cumpliéndose para modelos ARCH(m) pero las fórmulas son cada vez más complicadas a medida que m crece.

- **Debilidades del Modelo ARCH**

1. El modelo supone que los shocks negativos y positivos tienen el mismo efecto sobre la volatilidad, debido a que ella depende del cuadrado de los shocks anteriores. En la práctica, es bien conocido que el precio de un activo financiero responde en forma diferente a shocks negativos y positivos.
2. El modelo ARCH es bastante restrictivo. Por ejemplo, en el ARCH(1), el parámetro α_1 debe ser tal que $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$, para que la serie tenga cuarto momento finito. En la práctica, esto limita la habilidad de modelos ARCH con innovaciones Gaussianas para capturar el exceso de curtosis. Las restricciones llegan a ser cada vez más complicadas a medida que m crece.
3. El modelo ARCH no proporciona ninguna pista para comprender la fuente de variación de las series de tiempo financieras. Solamente proporcionan una manera mecánica para describir el comportamiento de la varianza condicional. No da indicación sobre las causas de que ese comportamiento ocurra.
4. El modelo ARCH tiende a sobre-predecir la volatilidad debido a que responden lentamente a grandes shocks aislados sobre la serie de retornos.

- **Construcción de un modelo ARCH**

Se emplean los siguientes cuatro pasos:

1. Construya un modelo econométrico (o un modelo ARMA o modelo ARFIMA) para la media de los retornos, de forma tal que se remueva toda la dependencia lineal de los retornos.
2. Use los residuales del modelo estimado para probar si existen efectos ARCH.
3. Si los efectos ARCH son estadísticamente significativos especifique un modelo de volatilidad y realice la estimación conjunta de las ecuaciones de media y volatilidad.
4. Diagnostique cuidadosamente el modelo y redefínalo si es necesario.

1. Modelación del efecto medio y pruebas:

Se especifica un modelo ARMA o un modelo ARFIMA o un modelo econométrico para remover la correlación serial presente en los datos. En muchas series de tiempo financieras, este paso consiste en remover la media muestral de los datos, si dicha media es significativamente diferente de cero. Para algunas series diarias de retornos, un simple modelo AR(1) podría ser útil. Una vez estimado el modelo, los residuales al cuadrado, \hat{a}_t^2 , son usados para chequear heterocedasticidad condicional.

Pruebas del efecto ARCH:

- ✓ Prueba de Ljung-Box sobre los \hat{a}_t^2 . McLeod y Li (1983).

El estadístico Q de Ljung y Box puede ser usado para probar la significancia de un grupo de coeficientes ρ_j de

\hat{a}_t^2 , $j=1,2,\dots,m$, donde

$$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^m \rho_j^2 / (T-j)$$

Para muestras grandes, $Q \sim \chi^2(m)$.

- ✓ Prueba de Multiplicadores de Lagrange de Engle (1982). El procedimiento es el siguiente:

i) Obtenga los cuadrados de los residuales de mínimos cuadrados de la estimación del mejor para la media (por ejemplo, de un modelo ARMA), \hat{a}_t^2 .

ii) Regrese \hat{a}_t^2 sobre una constante y $\hat{a}_{t-1}^2, \hat{a}_{t-2}^2, \dots, \hat{a}_{t-m}^2$, es decir estime la ecuación

$$\hat{a}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{a}_{t-1}^2 + \gamma_2 \hat{a}_{t-2}^2 + \dots + \gamma_m \hat{a}_{t-m}^2$$

Bajo la hipótesis de que no hay errores ARMA, el estadístico de la prueba TR^2 tiene una distribución límite $\chi^2(m)$. En muestras pequeñas, la distribución $F(m, T-2m-1)$ suele funcionar mejor que la $\chi^2(m)$.

2. Determinación del orden ARCH

Sea $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$. Entonces $\sigma_t^2 = a_t^2 - \eta_t$. Reemplazando σ_t^2 en la expresión del modelo ARCH(m), $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2$, se obtiene la forma AR(m) del modelo ARCH(m), dada por

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2 + \eta_t$$

donde η_t es una serie no correlacionada de media cero.

Como el ARCH es un AR(m) para el proceso a_t^2 , entonces si las pruebas anteriores son significativas, use la PACF de a_t^2 para determinar el orden del ARCH. La ACF de a_t^2 decae exponencialmente.

3. Estimación del modelo ARCH(m)

✓ Estimación bajo normalidad.

La función de verosimilitud es

$$f(a_1, a_2, \dots, a_T / \alpha) =$$

$$f(a_T / F_{T-1}) f(a_{T-1} / F_{T-2}) \dots f(a_{m+1} / F_m) f(a_1, a_2, \dots, a_m / \alpha)$$

$$= \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right] (f(a_1, a_2, \dots, a_m / \alpha))$$

donde $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)'$ y $f(a_1, a_2, \dots, a_m / \alpha)$ es la f.d.p conjunta de a_1, a_2, \dots, a_m .

La forma exacta de $f(a_1, a_2, \dots, a_m / \alpha)$ es complicada y generalmente se elimina de la función de verosimilitud sobre todo cuando el tamaño muestral es suficientemente grande.

En estos casos se usa la función de *verosimilitud condicional*

$$f(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T / \alpha, a_1, \dots, a_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right]$$

donde σ_t^2 puede ser evaluada recursivamente. Los estimadores obtenidos de esta forma son llamados estimadores máximo verosímiles condicionales bajo normalidad.

La maximización de la verosimilitud anterior es equivalente a maximizar su logaritmo natural,

$$l(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T / \alpha, a_1, \dots, a_m) = \sum_{t=m+1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) - \frac{a_t^2}{2\sigma_t^2} \right]$$

o, equivalentemente, a maximizar

$$l(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T / \alpha, a_1, \dots, a_m) = - \sum_{t=m+1}^T \left[\frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) + \frac{a_t^2}{2\sigma_t^2} \right]$$

donde $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2$ puede ser evaluada recursivamente.

✓ Estimación bajo la distribución t

En algunas aplicaciones es más apropiado suponer que ε_t sigue una distribución de colas más pesadas que la normal, tal como una distribución t de Student. Sea x_v una variable aleatoria con

distribución t de Student con ν (nu) grados de libertad. Entonces,

$$Var(x_\nu) = \frac{\nu}{\nu-2}, \text{ si } \nu > 2.$$

En este caso usamos, $\varepsilon_t = x_\nu / \sqrt{\nu/(\nu-2)}$. La f.d.p de ε_t es

$$f(\varepsilon_t / \nu) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma[\nu/2]\sqrt{(\nu-2)\pi}} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

donde $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$, es la función Gama usual.

Haciendo el cambio de variables $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$ se obtiene la función de verosimilitud de las a_t :

$$f(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T / \alpha, a_1, \dots, a_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma[\nu/2]\sqrt{(\nu-2)\pi}} \frac{1}{\sigma_t} \left[1 + \frac{a_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

donde $\nu > 2$. Los estimadores derivados de la función de verosimilitud anterior son denominados estimadores máximo verosímiles condicionales bajo distribución t de Student.

Los grados de libertad de la t de Student pueden ser especificados a priori o pueden ser estimados conjuntamente con los otros parámetros. Un valor entre 3 y 6 es usado si ν es preespecificado.

Si los grados de libertad son preespecificados entonces el logaritmo natural de la función de verosimilitud es

$$l(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T / \alpha, a_1, \dots, a_m) = - \sum_{t=m+1}^T \left[\frac{(\nu+1)}{2} \ln \left(1 + \frac{a_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2} \right) + \ln(\sigma_t^2) \right]$$

Si los grados de libertad son estimados conjuntamente con los demás parámetros, el logaritmo natural de la función de verosimilitud es

$$l(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T / \alpha, a_1, \dots, a_m) =$$

$$(T - m) \{ \ln(\Gamma[(v+1)/2]) - \ln(\Gamma[v/2]) - 0.5 \ln((v-2)\pi) \} -$$

$$\sum_{t=m+1}^T \left[\frac{(v+1)}{2} \ln \left(1 + \frac{a_t^2}{(v-2)\sigma_t^2} \right) + \ln(\sigma_t^2) \right]$$

✓ **Estimación bajo la distribución de errores generalizada (GED)**

Una variable aleatoria x con distribución GED tiene función de densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \frac{v \exp\left(-\frac{1}{2} |x/\lambda|^v\right)}{\lambda 2^{1+1/v} \Gamma(1/v)} \quad \text{si } -\infty < x < \infty, \quad 0 < v < \infty$$

donde $\lambda = [2^{-2/v} \Gamma(1/v) / \Gamma(3/v)]^{1/2}$.

Esta distribución se reduce a la normal si $v=2$ y tiene colas más pesadas cuando $v < 2$. La función de verosimilitud condicional $l(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_T / \alpha, a_1, \dots, a_m)$ puede ser obtenida usando la anterior fdp.

3. Chequeo del modelo

Para el modelo ARCH, los shocks estandarizados $a_t^s = \frac{a_t}{\sigma_t}$, son variables aleatorias i.i.d, con distribución estándar normal o t de Student o GED. Por tanto se puede chequear la validez del modelo ARCH examinando la serie de residuales $\hat{a}_t^s = \frac{\hat{a}_t}{\hat{\sigma}_t}$.

- ✓ Los estadísticos de Ljung-Box de \hat{a}_t^s pueden ser usados para probar la validez de la ecuación de la media.
- ✓ Los estadísticos de Ljung-Box de $(\hat{a}_t^s)^2$ pueden ser usados para probar la validez de la ecuación del volatilidad.

- ✓ La asimetría, curtosis y gráficos de probabilidad de \hat{a}_t^s pueden ser usados para probar la validez de la distribución usada.

Pronósticos del modelo ARCH

- Pueden ser obtenidos recursivamente como en el caso del modelo AR. Considere el modelo ARCH(m). En el origen h , el pronóstico 1-paso delante de σ_{h+1}^2 es

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \dots + \alpha_m a_{h+1-m}^2$$

El pronóstico 2-pasos adelante es

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_h^2(1) + \alpha_2 a_h^2 + \dots + \alpha_m a_{h+2-m}^2$$

Y el pronóstico l -pasos adelante para σ_{h+l}^2 es

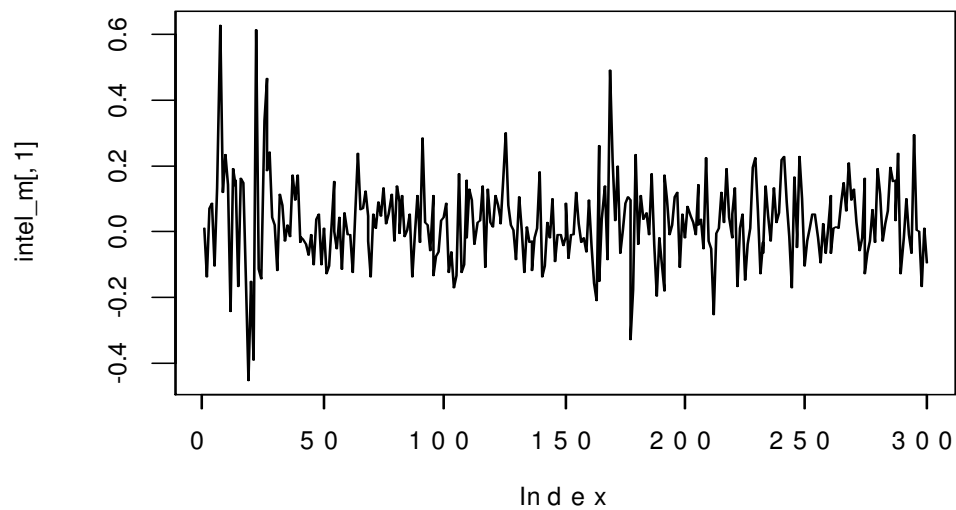
$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \sigma_h^2(l-i)$$

donde $\sigma_h^2(l-i) = a_{h+l-i}^2$ si $l-i \leq 0$.

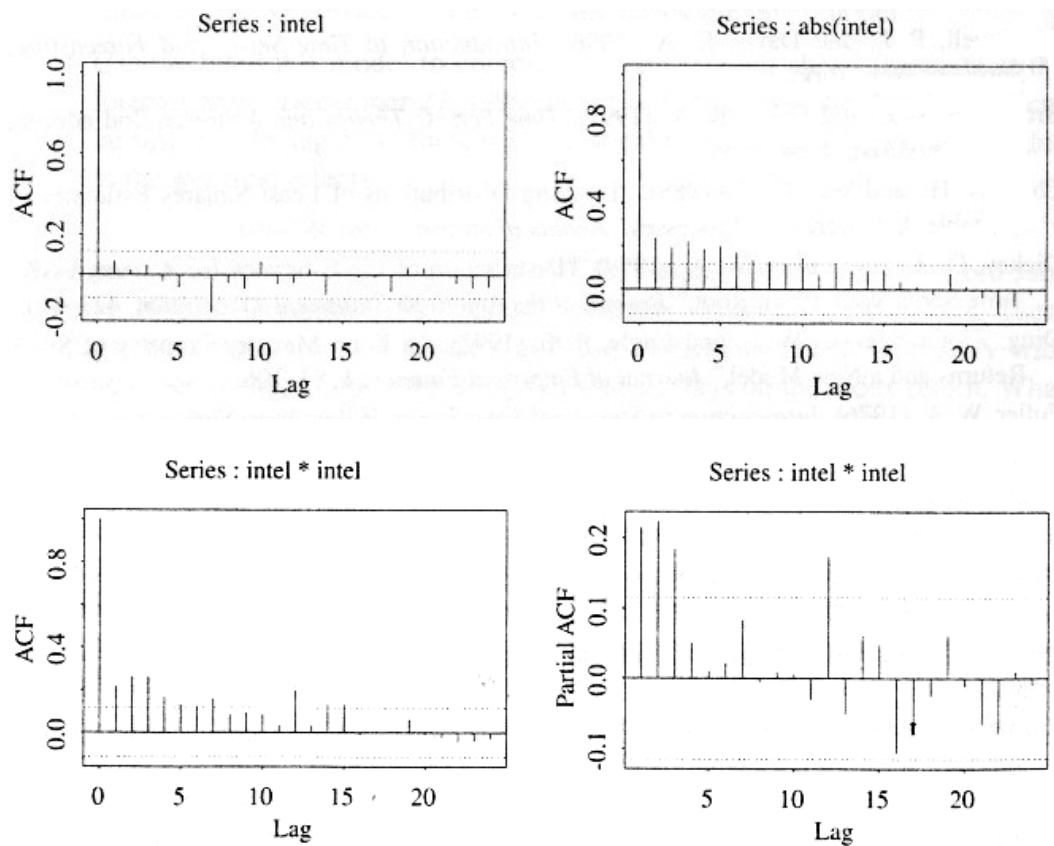
Ejemplo: Serie mensual de los rendimientos de las acciones de Intel Corp.

Construcción de un modelo ARCH para la serie mensual de retornos de las acciones de Intel Corp.

Gráfica de los retornos



Correlogramas



- ✓ El correlograma de los retornos muestra que parece no existir correlación serial entre ellos. Por tanto el modelo para la media sería

$$r_t = \mu + a_t$$

- ✓ Los correlogramas de los retornos absolutos y al cuadrado muestran claramente la existencia de heterocedasticidad condicional y las pruebas estadísticas no son necesarias.

Identificación del orden del ARCH

La PACF muestral de los retornos al cuadrado indican que un ARCH(3) podría ser apropiado.

El modelo identificado preliminarmente sería:

$$r_t = \mu + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \alpha_3 a_{t-3}^2$$

Suponiendo que $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, el modelo ajustado es:

$$r_t = 0.0196 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.0090 + 0.2973 a_{t-1}^2 + 0.0900 a_{t-2}^2 + 0.0626 a_{t-3}^2$$

Donde los errores estándar de los parámetros son, respectivamente, 0.0062, 0.0013, 0.0887, 0.0645 y 0.0777.

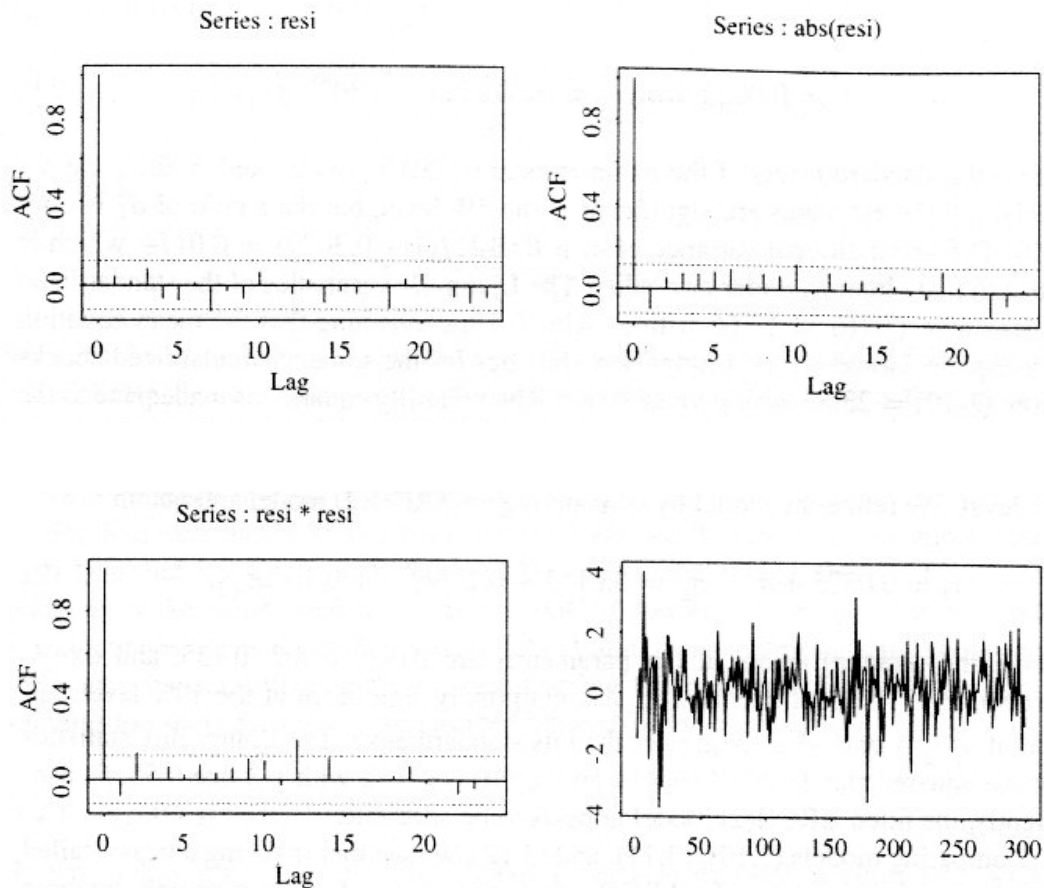
Las estimaciones de α_2 y α_3 parecen no ser estadísticamente significativas a un nivel del 5%. Por tanto el modelo se puede simplificar. El nuevo modelo estimado es

$$r_t = 0.0213 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.00998 + 0.4433 a_{t-1}^2$$

Donde los errores estándar de los parámetros son, respectivamente, 0.0062, 0.00124 y 0.0938. Todos los estimadores son altamente estadísticamente significativos.

Las siguientes gráficas muestran los shocks estandarizados y las ACF muestrales de algunas funciones de ellos.



El estadístico de Ljung-Box de \hat{a}_t^s es $Q(10)=12.53$ con un valor p de 0.25.

El estadístico de Ljung-Box de $(\hat{a}_t^s)^2$ es $Q(10)=17.23$ con un valor p de 0.07, lo que significa que el modelo ARCH(1) es adecuado para un nivel de significancia del 5%.

El modelo ARCH(1) estimado tiene propiedades interesantes.

- ✓ El valor esperado del retorno mensual de las acciones Intel es alrededor de 2.1%, lo cual es asombroso.
- ✓ $\alpha_1^2 = 0.4437^2 < 1/3$, lo que indica que existe el cuarto momento incondicional de los retornos de las acciones de Intel.
- ✓ La varianza incondicional de los retornos es $0.00998/(1 - 0.4437) = 0.0179$.
- ✓ El modelo puede ser usado para predecir la volatilidad de los retornos de las acciones de Intel.

Innovación con distribución t

Para comparar, también se ajustó un modelo ARCH(1) suponiendo que ε_t sigue una distribución t estandarizada con 5 grados de libertad.

Modelo estimado:

$$r_t = 0.0222 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.0121 + 0.3029a_{t-1}^2$$

Donde los errores estándar de los parámetros son, respectivamente, 0.0019, 0.0061 y 0.1443. Todos los estimadores son altamente estadísticamente significativos al 5%.

La varianza incondicional de los retornos es $0.0121/(1 - 0.3029) = 0.0174$ que está muy cerca de la obtenida bajo normalidad.

El estadístico de Ljung-Box de \hat{a}_t^s es $Q(10) = 13.66$ con un valor p de 0.19.

El estadístico de Ljung-Box de $(\hat{a}_t^s)^2$ es $Q(10) = 23.83$ con un valor p de 0.008, lo que significa que al modelo ARCH(1) es inadecuado para un nivel de significancia del 5%.

Se refinó el modelo considerando un ARCH(2) y se obtuvo:

$$r_t = 0.0225 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.0113 + 0.2269a_{t-1}^2 + 0.108a_{t-2}^2$$

Donde los errores estándar de los parámetros son, respectivamente, 0.006, 0.002, 0.135 y 0.094. El estimador del coeficiente de a_{t-1}^2 es marginalmente significativo al 10%, mientras que el de a_{t-2}^2 es solamente un poco mayor que su error estándar. El estadístico de Ljung-Box de $(\hat{a}_t^s)^2$ es $Q(10)=8.82$ con un valor p de 0.55, lo que indica que el modelo ARCH(2) parece ser adecuado.

De la comparación de los tres modelos ajustados observamos:

- ✓ El uso de una distribución de colas más pesadas reduce el efecto ARCH.
- ✓ En este caso, la diferencia entre los tres modelos es pequeña.
- ✓ Un modelo más apropiado para estos datos pertenece a la clase de modelos GARCH, la cual se describirá a continuación.

El modelo GARCH (Bollerslev, 1986)

- Aunque el modelo ARCH es simple, muchas veces requiere de muchos parámetros para describir adecuadamente el proceso de volatilidad del rendimiento de un activo. Bollerslev (1986) propone una generalización del modelo ARCH, la cual es conocida como el modelo ARCH Generalizado o modelo GARCH.
- Sea $a_t = r_t - \mu_t$ el rendimiento corregido por la media. Se dice que a_t sigue un modelo GARCH(m,s) si

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \text{ donde } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

donde, como antes, $\{\varepsilon_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d con media cero y varianza 1, (su distribución puede ser normal, t de student o de valor extremo generalizada, entre otras) $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, y $\sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} \alpha_i + \beta_i < 1$. Esta última condición implica que la varianza incondicional de a_t es finita, mientras que la varianza condicional evoluciona en el tiempo.

- Reparametrización del modelo GARCH:

El modelo para la varianza condicional de un proceso GARCH(m,s) se puede escribir en términos de polinomios como

$$(1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \dots - \beta_s B^s) \sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_m B^m) a_t^2$$

$$\checkmark \quad \beta(B) \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(B) a_t^2$$

$$\text{donde } \beta(B) = 1 - \beta_1 B - \beta_2 B^2 - \dots - \beta_s B^s \text{ y}$$

$$\alpha(B) = \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_m B^m$$

Si las raíces de $\beta(B) = 0$ caen fuera del círculo unidad,

$$\checkmark \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 / \beta(1) + \lambda(B) a_t^2$$

donde $\lambda(B) = \frac{\alpha(B)}{\beta(B)}$. En esta forma, el GARCH(m,s) se puede escribir como un ARCH(∞).

- ✓ Haciendo $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$, obtenemos, que el GARCH(m,s) se puede escribir en forma ARMA para a_t^2 como

$$\phi(B) a_t^2 = \alpha_0 + \beta(B) \eta_t$$

donde $\phi(B) = \beta(B) - \alpha(B)$. Este proceso es débilmente estacionario si las raíces de $\phi(B) = 0$ caen fuera de círculo unidad. Se puede probar que η_t es una martingala en diferencias (es decir, $E(\eta_t) = 0$ y $cov(\eta_t, \eta_{t-j}) = 0$ para $j \geq 1$). Sin embargo, las η_t no son i.i.d.

Propiedades del modelo GARCH

- Usando la media incondicional de un modelo ARMA se puede probar que

$$E(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{máx\{m,s\}} \alpha_i + \beta_i} = Var(a_t)$$

- Un modelo GARCH puede ser considerado como una aplicación de un modelo ARMA a la serie a_t^2 . Las fortalezas y debilidades del modelo GARCH puede ser analizadas desde el modelo más simple GARCH(1,1), donde

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \text{ donde } 0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq 1, (\alpha_1 + \beta_1) < 1$$

1. Un gran valor para a_{t-1}^2 o σ_{t-1}^2 produce un aumento en σ_t^2 . Esto significa que un valor grande en a_{t-1}^2 tiende a ser seguido por un gran valor en a_t^2 , generando el comportamiento de la volatilidad por clusters.
2. Se puede probar que si $1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2 > 0$, entonces

$$\frac{E(a_t^4)}{\{[E(a_t^2)]^2\}} = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$$

Por tanto, de la misma manera que los modelos ARCH, la cola de la distribución de un modelo GARCH(1,1) es más pesada que la de una distribución normal.

3. El modelo proporciona una función paramétrica simple que puede ser usada para describir la evolución de la volatilidad.

Pronósticos de un modelo GARCH

- Pueden ser obtenidos usando métodos similares a los del modelo ARMA. Considere el modelo GARCH(1,1) y sea h el origen del pronóstico. Para el pronóstico 1-paso adelante (o de horizonte 1) se tiene que

$$\sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

donde a_h y σ_h^2 son conocidos en el período h . Por tanto el pronóstico 1-paso adelante es

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

- Para el pronóstico varios pasos adelante se usa $a_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$ y la ecuación de volatilidad puede ser re-escrita como

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1)$$

Cuando $t=h+1$, la ecuación es

$$\sigma_{h+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{h+1}^2 + \alpha_1 \sigma_{h+1}^2 (\varepsilon_{h+1}^2 - 1)$$

Puesto que $E(\varepsilon_{h+1}^2 - 1 | Fh) = 0$, el pronóstico de la volatilidad 2-pasos adelante en el origen h satisface la ecuación

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(1)$$

En general.

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1), \quad l > 1$$

Este es exactamente el mismo resultado para un modelo ARMA(1,1) cuyo polinomio AR es $1 - (\alpha_1 + \beta_1)B$.

- Usando sustitución repetida, el pronóstico l-pasos adelante puede ser escrito como

$$\sigma_h^2(l) = \frac{\alpha_0[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}\sigma_h^2(1)$$

Por tanto, si $l \rightarrow \infty$,

$$\sigma_h^2(l) \rightarrow \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}$$

dado que $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$. En conclusión, el pronóstico varios pasos adelante converge a la varianza incondicional de a_t a medida que el horizonte del pronóstico tiende hacia infinito. Dado que dicha varianza exista.

Desventajas del modelo GARCH:

1. Como en el caso del modelo ARCH, responde de la misma forma a shocks negativos y positivos.
2. Estudios empíricos recientes de series financieras de alta frecuencia han mostrado que el comportamiento de las colas de los modelos GARCH permanecen demasiado cortas, aun con innovaciones con distribución t de Student.

Evaluación del Pronóstico de la volatilidad

- Puesto que la volatilidad del rendimiento de un activo no es directamente observable, la comparación del comportamiento de la volatilidad de diferentes modelos es un reto para el análisis de datos.
- En la literatura, algunos investigadores usan los pronósticos fuera de la muestra y comparan los pronósticos de la volatilidad $\sigma_h^2(l)$ con el shock a_{h+l}^2 . Esta aproximación con frecuencia encuentra una baja correlación entre a_{h+l}^2 y $\sigma_h^2(l)$. Sin embargo, tal hallazgo no es sorprendente debido a que a_{h+l}^2 sola no es una medida adecuada de la volatilidad en el período $h+l$.
- Considere los pronósticos 1-paso adelante. Desde el punto de vista estadístico, $E(a_{h+1}^2 | F_h) = \sigma_{h+1}^2$, de manera que a_{h+1}^2 es un estimador consistente para σ_{h+1}^2 . Pero no es un estimador preciso de σ_{h+1}^2 , puesto que una sola observación de una variable aleatoria con media conocida no puede proporcionar un estimador preciso de su varianza. Por tanto, estrictamente hablando, tal aproximación para evaluar el comportamiento de los pronósticos de volatilidad no es apropiado. Ver Andersen y Bollerslev (1998),

Identificación del Modelo GARCH

- La característica clave de un modelo GARCH es que la varianza condicional de sus errores sigue un ARMA. Por tanto, es de esperar que los residuales de un modelo ajustado deberían mostrar este patrón característico.
- Suponga que Z_t es estimado como un proceso ARMA. Si el modelo es adecuado, la ACF y PACF de los residuales deberían indicar un proceso de ruido blanco. Sin embargo, la ACF de los *residuales al cuadrado*,

pueden ayudar a identificar el orden del proceso GARCH. El procedimiento es el siguiente:

1. identifique el mejor modelo para Z_t y obtenga los cuadrados de los residuales, \hat{a}_t^2 .
2. Calcule y grafique la ACF de \hat{a}_t^2 ,

$$\rho_j = \frac{\sum_{t=j+1}^T (\hat{a}_t^2 - \sigma^2)(\hat{a}_{t-j}^2 - \sigma^2)}{\sum_{t=1}^T (\hat{a}_t^2 - \sigma^2)}$$

Donde $\sigma^2 = \sum_{t=1}^T \hat{a}_t^2$ y T es el Número de residuales.

3. En muestras grandes, el error estándar de ρ_j es $T^{0.5}$. Si hay valores ρ_j significativamente diferente de cero, ellos son indicativos de errores GARCH. El estadístico Q de Ljung y Box puede ser usado para probar la significancia de un grupo de coeficientes ρ_j ,

$$Q = T(T+2) \sum_{j=1}^m \rho_j^2 / (T-j)$$

Para muestras grandes, $Q \sim \chi^2(m)$.

Engle (1982) propuso una prueba de Multiplicadores de Lagrange para errores ARCH. El procedimiento es el siguiente:

1. Obtenga los cuadrados de los residuales de mínimos cuadrados de la estimación del mejor modelo ARMA, \hat{a}_t^2 .
2. Regrese \hat{a}_t^2 sobre una constante y $\hat{a}_{t-1}^2, \hat{a}_{t-2}^2, \dots, \hat{a}_{t-m}^2$, es decir estime la ecuación

$$\hat{a}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{a}_{t-1}^2 + \gamma_2 \hat{a}_{t-2}^2 + \dots + \gamma_m \hat{a}_{t-m}^2$$

Bajo la hipótesis de que no hay errores ARMA, el estadístico de la prueba TR^2 tiene una distribución límite $\chi^2(m)$.

En muestras pequeñas, la distribución $F(m, T-2m-1)$ suele funcionar mejor que la $\chi^2(m)$.

Evaluación del Ajuste

- Una manera de evaluar si un modelo GARCH es adecuado, es ver como de bien dicho modelo ajusta los datos. Algunos autores emplean los criterios de información tales como AIC, SBC, etc. Además, algunos paquetes estadísticos presentan estas medidas de buen ajuste para cualquier tipo de estimación de modelos GARCH. Sin embargo, se debe tener cuidado con la interpretación de estos resultados, puesto que Bollerslev, Engle y Nelson (1994) mostraron que sus propiedades estadísticas en el contexto de estos modelos son desconocidas.

Considere el criterio de información de Akaike,

$$AIC = T(\ln(\text{Suma de los cuadrados de los residuales})) + 2m$$

Observe que la Suma de los cuadrados de los residuales es idéntica a

$$\sum_{t=1}^T \hat{a}_t^2. \text{ Por tanto, el AIC es una medida de la desviación cuadrática del}$$

modelo con respecto a la media.

- Suponga que se quiere saber, cómo de bien el modelo de la varianza ajusta los datos. Por ejemplo, se quiere saber si un ARCH(2) proporciona un mejor ajuste de la varianza que un GARCH(1,1). Como una analogía a la suma de cuadrados de los residuales, considere

$$RSS^* = \sum_{t=1}^T (\hat{a}_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2$$

RSS^* será pequeño si los valores ajustados $\hat{\sigma}_t^2$ están cerca de \hat{a}_t^2 .

Una manera de comparar modelos alternativos es estimar una regresión de los valores ajustados \hat{a}_t^2 sobre los valores de σ_t^2 . El modelo con el mayor coeficiente de determinación R^2 sería el modelo más apropiado. Observe que RSS^* no penaliza el uso de parámetros adicionales.

- Aunque se sabe poco de los criterios de selección en la evaluación de modelos para la varianza, una sugerencia que parece ser promisoría es usar medidas análogas al AIC, SBC, etc. Si asumimos que el proceso del error es normal, el valor de la función de verosimilitud maximizada depende de

$$\hat{L} = -\sum_{t=1}^T [\ln(\sigma_t^2) - \hat{a}_t^2 / \sigma_t^2]$$

donde σ_t^2 = es el valor estimado de la varianza condicional

\hat{a}_t^2 = es el valor del residual al cuadrado

\hat{L} = es el valor maximizado de la función de verosimilitud.

Usando \hat{L} se pueden construir

$$AIC = -\ln \hat{L} + 2m$$

$$SBC = -\ln \hat{L} + m \ln(T)$$

donde m es el número de parámetros.

Diagnósticos para modelos GARCH

- Además de proporcionar un buen ajuste, un modelo GARCH estimado debe capturar todos los aspectos dinámicos del modelo de la media y de la varianza.
- Los residuales del modelo no deberían de estar serialmente correlacionados y no deberían mostrar evidencia de volatilidad condicional.

- Para probar estas propiedades, sea $\hat{a}_t^s = \hat{a}_t / \hat{\sigma}_t$ los residuales estandarizados. Entonces

1. Para probar que el modelo para la media es adecuado, use la prueba de Ljung-Box sobre \hat{a}_t^s . No se debe rechazar la hipótesis de que las autocorrelaciones son cero.

2. Para probar que el modelo para la varianza es adecuado, use la prueba de Ljung-Box sobre los cuadrados de los residuales estandarizados, $(\hat{a}_t^s)^2$. No se debe rechazar la hipótesis de que las autocorrelaciones son cero.

3. Diagnóstico de efectos Leverage: Algunas series financieras tienden a disminuir la volatilidad cuando los retornos aumentan y a aumentarla cuando los retornos caen. Este evento es denominado el efecto **Leverage**. Para probar la existencia de este efecto no considerado en el modelo estimado, obtenga los residuales estandarizados del modelo, $\hat{a}_t^s = \hat{a}_t / \hat{\sigma}_t$ y estime una regresión de la forma

$$(\hat{a}_t^s)^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{a}_{t-1}^s + \gamma_2 \hat{a}_{t-2}^s + \dots + \gamma_m \hat{a}_{t-m}^s + \varepsilon_t$$

Si no existe el efecto leverage los residuales al cuadrado estarán no correlacionados con los niveles de los residuales. Por tanto, podemos concluir que hay efectos leverage si el valor observado de la F para probar la hipótesis $H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 0$, es mayor su valor crítico.

- Engle y Ng (1993) desarrollaron otra prueba para determinar si los shocks positivos y negativos tienen diferentes efectos sobre la varianza condicional. Sea d_{t-1} una variable dummy que toma el valor de 1 si $\hat{a}_{t-1} < 0$ y es igual a cero si $\hat{a}_{t-1} \geq 0$. la prueba consiste en determinar si los residuales al cuadrado pueden ser predichos usando la sucesión $\{d_{t-1}\}$.

La prueba usa una ecuación de regresión de la forma

$$(a_t^s)^2 = \gamma_0 + \gamma_1 d_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

Si la prueba t indica que γ_1 es estadísticamente diferente de cero, el signo del shock es útil para predecir la volatilidad condicional.

- La generalización de la prueba usa la regresión

$$(a_t^s)^2 = \gamma_0 + \gamma_1 d_{t-1} + \gamma_2 d_{t-1} a_{t-1}^s + \gamma_3 (1 - d_{t-1}) a_{t-1}^s + \varepsilon_{1t}$$

La presencia de $d_{t-1} a_{t-1}^s$ y de $(1 - d_{t-1}) a_{t-1}^s$ sirve para determinar si los efectos de los shocks positivos y negativos también dependen de su tamaño. La prueba de la hipótesis $H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ puede realizarse usando la F. El rechazo de H_0 conduce a concluir que existe efecto leverage y que se debería usar un modelo que los considere.

Estrategia para la construcción de un modelo GARCH

- A continuación se describe el procedimiento para la modelación de un proceso GARCH (La misma para el ARCH).

Primer paso: Identifique un modelo adecuado para la media. Esto se puede hacer usando las herramientas vistas para la identificación de un modelo ARMA. Verifique:

- i) La existencia de efectos ARCH. Si existen continúe al segundo paso.
- ii) La existencia de efectos de leverage. Si se detectan el modelo GARCH no es adecuado. La construcción del modelo de varianza debe considerar su inclusión, como en los modelos EGARCH y TARCH que se verán más adelante.

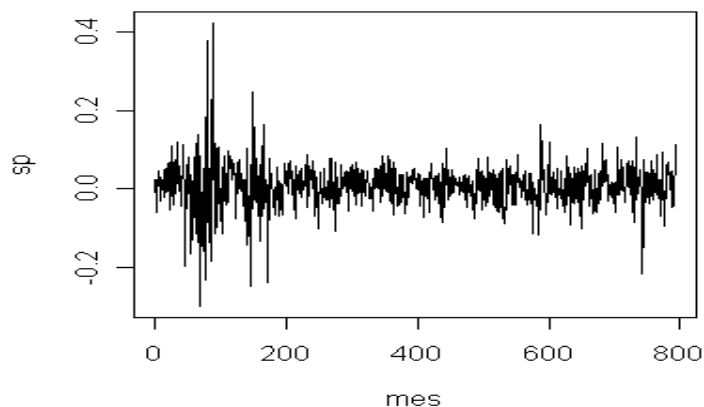
El segundo paso: Una vez que el modelo para la media es estimado, se procede a la identificación del modelo para la varianza usando los residuales al cuadrado obtenidos en el primer paso.

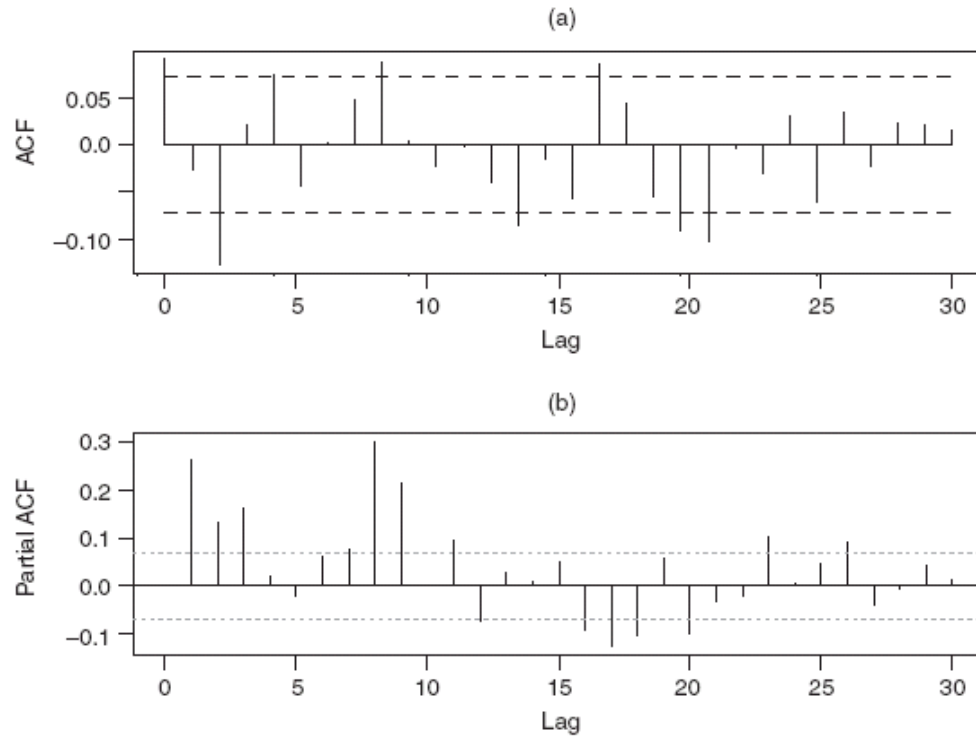
Tercer paso: Realizar diagnósticos.

Estimación de un modelo GARCH

- El método de estimación máximo verosímil condicional se puede aplicar, dado que los valores iniciales sean conocidos. Por ejemplo, suponga el modelo GARCH(1,1). Si σ_1^2 es considerado fijo, entonces podemos calcular recursivamente a σ_t^2 . En algunas aplicaciones, la varianza muestral de a_t sirve como un buen un buen valor de inicio de σ_t^2 .

Ejemplo: La selección del orden de un modelo GARCH no es fácil. En la mayoría de aplicaciones se usan orden bajos, tales como el GARCH(1,1), GARCH(2,1), GARCH(1,2). Considere el exceso de rendimientos mensuales del índice S&P500, desde 1926, para un total de 792 observaciones. Un análisis preliminar arroja que un ARCH(9) es un posible modelo para explicar la volatilidad de la serie. A continuación exploramos si un modelo GARCH(1,1) que permite modelar de manera más simple la dinámica de la volatilidad de la serie.





Gráficas: a) ACF de r_t , b) ACF de r_t^2

- La ACF de los retornos muestra correlación serial en los rezagos 1 y 3 (El eje horizontal del gráfico a) no inicia en cero sino en 1).
- La PACF de los retornos al cuadrado muestran una dependencia lineal fuerte.

El modelo estimado para la media es el MA(3):

$$r_t = 0.0062 + a_t + 0.0944a_{t-1} - 0.1407a_{t-3}, \quad \sigma_a = 0.0576.$$

Todos los coeficientes son significativos a un nivel del 5%.

Alternativamente, de la PACF, podemos identificar un modelo AR(3), cuya estimación es, bajo normalidad,

$$r_t = 0.088r_{t-1} - 0.023r_{t-2} - 0.123r_{t-3} + 0.0066 + \hat{a}_t, \quad \hat{\sigma}_a^2 = 0.00333.$$

Seleccionando un modelo GARCH(1,1) para la varianza, su estimación conjunta es:

$$r_t = 0.021r_{t-1} - 0.034r_{t-2} - 0.13r_{t-3} + 0.0085 + \hat{a}_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000099 + 0.1219a_{t-1}^2 + 0.8476\sigma_{t-1}^2$$

Usando la ecuación de volatilidad, un estimador de la varianza incondicional para a_t es

$$\frac{0.000099}{1 - 0.8476 - 0.1219} = 0.00325$$

La cual es muy similar a la obtenida antes, en la estimación del modelo AR(3) para la media.

Todos los coeficientes AR de la ecuación de la media resultan no significativos al 5%. Podemos refinar el modelo como:

$$r_t = 0.0065 + \hat{a}_t$$

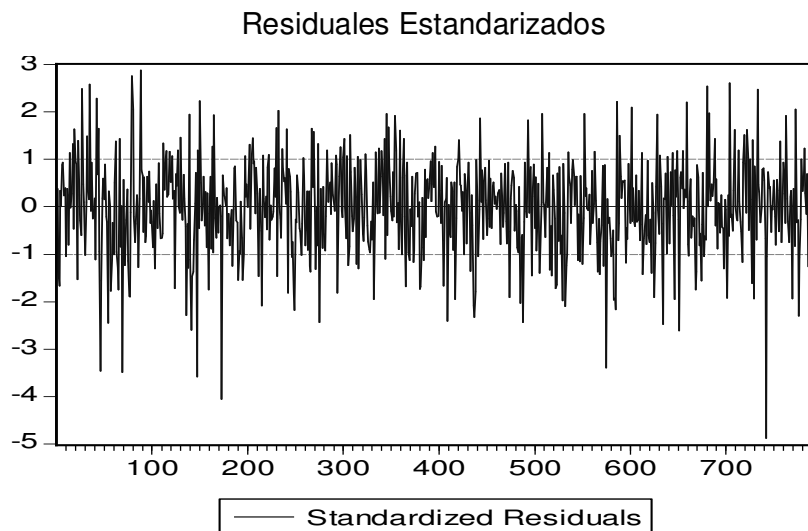
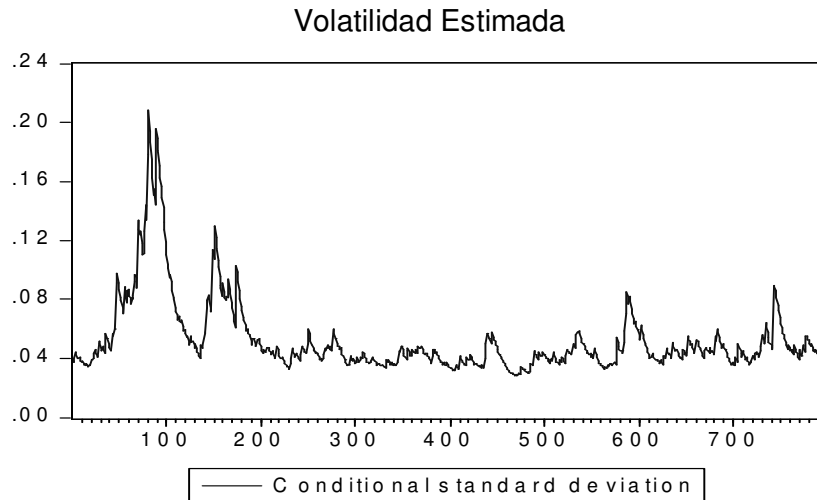
$$\sigma_t^2 = 0.00014 + 0.1352a_{t-1}^2 + 0.8220\sigma_{t-1}^2$$

El error estándar para el parámetro de la ecuación de la media es 0.0015, mientras que los de los parámetros para la ecuación de volatilidad son 0.00002, 0.0208 y 0.0166, respectivamente.

La varianza incondicional de a_t es $\frac{0.00014}{1 - 0.822 - 0.1352} = 0.00324$.

El modelo resultante es un modelo GARCH estacionario.

Las siguientes gráficas presentan el proceso de volatilidad estimada y los residuales estandarizados $\hat{a}_t^s = \hat{a}_t / \hat{\sigma}_t$.



La serie de residuales estandarizados luce como un proceso de ruido blanco. A continuación se presentan la ACF para dichos residuales y sus cuadrados.

Para los residuales estandarizados, $Q(10)=10.32$ con un valor p de 0.41.
Para $Q(20)=22.61$ con un valor p de 0.31.

Para los cuadrados de los residuales estandarizados, $Q(10)=8.83$ con un valor p de 0.55. Para $Q(20)=15.82$ con un valor p de 0.73.

Por tanto el modelo parece ser adecuado.

Observe que $\alpha_1 + \beta_1 = 0.9572$, que está cerca de uno. Este evento frecuentemente ocurre en la práctica y conduce a imponer la restricción de que $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ en la estimación del GARCH(1,1), generando el modelo GARCH integrado que será visto más tarde.

Para pronosticar la volatilidad del exceso de rendimientos del índice S&P500 usamos la ecuación de volatilidad estimada. Por ejemplo, en el origen h ,

$$\sigma_{h+1}^2 = 0.00014 + 0.1352a_h^2 + 0.8220\sigma_h^2$$

El pronóstico 1-paso adelante es

$$\sigma_h^2(1) = 0.00014 + 0.1352\hat{a}_h^2 + 0.8220\sigma_h^2$$

donde \hat{a}_h es el residual de la ecuación de la media en el período h , y σ_h^2 , se obtiene de la ecuación de volatilidad. La siguiente tabla los pronósticos de la media y la volatilidad con origen $h=792$.

Horizonte	1	2	3	4	5	∞
Retorno	0.0065	0.0065	0.0065	0.0065	0.0065	0.0065
Volatilidad	0.00311	0.00312	0.00312	0.00313	0.00314	0.00324

Innovación con distribución t de Student

Suponiendo que ε_t sigue una distribución t de Student estandarizada con 5 grados de libertad, la estimación de GARCH(1,1) es la siguiente

$$r_t = 0.0085 + \hat{a}_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.00018 + 0.1277a_{t-1}^2 + 0.8217\sigma_{t-1}^2$$

Con errores estándar para los parámetros de 0.0014, 0.55×10^{-4} , 0.0349 y 0.0382, respectivamente. En este modelo $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \approx 0.95$, muy cerca de 1.

El estadístico de Ljung-Box para los residuales estandarizados es $Q(10)=10.45$ con un valor p de 0.40, y para sus cuadrados es $Q(10)=9.33$ con un valor p de 0.50. Por tanto, el modelo GARCH(1,1) con distribución t es adecuado.

Estimación de los grados de libertad

Si extendemos el modelo GARCH(1,1) permitiendo que los grados de libertad de la distribución t sean estimados, obtenemos

$$r_t = 0.0083 + \hat{a}_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.00017 + 0.1277a_{t-1}^2 + 0.8193\sigma_{t-1}^2$$

donde la estimación para los grados de libertad es de 6.51. Observe que los parámetros estimados son muy similares a los obtenidos antes. El error estándar de los grados de libertad estimados es 1.49. Por tanto, a un nivel del 5%, no podemos rechazar la hipótesis de usar una distribución t con 5 grados de libertad.

El modelo GARCH Integrado (Engle y Bollerslev, 1986)

- La ecuación de volatilidad del modelo GARCH puede ser re-escrita como

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_{t-j}$$

o, como vimos antes,

$$\phi(B)a_t^2 = \alpha_0 + \beta(B)\eta_t$$

donde $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$. Si el polinomio AR de la expresión anterior contiene una raíz unitaria, se obtiene el modelo GARCH integrado o modelo IGARCH.

- Similar a lo que ocurre en los modelos ARIMA, la característica clave del modelo IGARCH es que el impacto sobre a_t^2 de los shocks pasados $\eta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$, $i > 0$, es persistente.
- El modelo IGARCH(1,1):

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \text{ donde } \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2$$

donde ε_t está definida como antes y $0 < \beta_1 < 1$.

Ejemplo: Modelo IGARCH para el exceso de retornos del índice mensual S&P500.

De la estimación del modelo del GARCH(1,1) estimado antes para este índice se observa que $\alpha_1 + \beta_1 = 0.9572$, que está cerca de uno. Este evento frecuentemente ocurre en la práctica y conduce a imponer la restricción de que $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ en la estimación del GARCH(1,1), generando el modelo IGARCH,

$$r_t = 0.0067 + \hat{a}_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000119 + 0.1941 a_{t-1}^2 + 0.8059 \sigma_{t-1}^2$$

donde los errores estándar para los parámetros de la ecuación de volatilidad son 0.0017, 0.000013 y 0.0144, respectivamente.

Los parámetros son similares a los del GARCH(1,1), pero hay una gran diferencia entre los dos modelos.

- ✓ La varianza incondicional de a_t , y por tanto la de r_t , no está definida bajo el modelo IGARCH(1,1). Esto parece ser difícil de justificar para una serie de exceso de retornos.
- ✓ Desde un punto de vista teórico, el fenómeno IGARCH podría ser causado por cambios de nivel ocasionales en la volatilidad. La verdadera causa de la persistencia en volatilidad amerita una cuidadosa investigación.
- ✓ Vimos que pronóstico l -pasos adelante para el modelo GARCH(1,1) puede ser escrito como

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(l-1)$$

Cuando $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, por sustitución repetida sobre la ecuación anterior se obtiene

$$\sigma_h^2(l) = \sigma_h^2(1) + (l-1)\alpha_0, \quad l \geq 1$$

Por tanto, el efecto de $\sigma_h^2(1)$ sobre las volatilidades futuras también es persistente, y los pronósticos de la volatilidad forman una línea recta con pendiente α_0 .

- ✓ Nelson (1990a) y Bougerol y Picard (1992) estudian algunas propiedades probabilísticas del proceso de volatilidad σ_t^2 bajo el modelo IGARCH. Ellos muestran que bajo ciertas condiciones, el proceso es estrictamente estacionario y ergódico, pero no débilmente estacionario, debido a que no posee sus primeros dos momentos.
- ✓ El caso donde $\alpha_0 = 0$ es de interés especial en el estudio de un modelo IGARCH(1,1). En este caso, los pronósticos de

la volatilidad son simplemente $\sigma_h^2(1)$ para todos los horizontes de pronóstico.

⇒ Este modelo especial IGARCH(1,1) es el modelo de volatilidad usado por RiskMetrics, el cual es una aproximación para calcular el Valor en Riesgo (VaR).

⇒ El modelo también genera un proceso de suavización exponencial para la serie $\{a_t^2\}$. Para ver esto, el modelo se puede reescribir , por sustitución repetida, como

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= (1 - \beta_1)a_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 \\ \sigma_t^2 &= (1 - \beta_1)a_{t-1}^2 + \beta_1[(1 - \beta_1)a_{t-2}^2 + \beta_1\sigma_{t-2}^2] \\ \sigma_t^2 &= (1 - \beta_1)a_{t-1}^2 + (1 - \beta_1)\beta_1a_{t-2}^2 + \beta_1^2\sigma_{t-2}^2 \\ &\dots \\ \sigma_t^2 &= (1 - \beta_1)(a_{t-1}^2 + \beta_1a_{t-2}^2 + \beta_1^2\sigma_{t-3}^2 + \dots)\end{aligned}$$

lo cual corresponde a una suavización exponencial con factor de descuento β_1 .

- Davidson (2003) muestra que realmente el proceso de varianza condicional de un modelo IGARCH(1,1) es de memoria corta y no es estacionario lo cual es paradójico pues este modelo se define en la literatura (y según lo visto anteriormente) como la contraparte en volatilidad al modelo de raíces unitarias para el nivel de una serie de tiempo. Muestra que esta paradoja puede ser debida a la aplicación por analogía de los resultados de los modelos integrados en niveles a los modelos de varianzas condicionales con una estructura dinámica aparentemente similar.

El modelo GARCH-M (Engle y Bollerslev, 1986)

- En finanzas, el retorno de una acción puede depender de su volatilidad. Para modelar este fenómeno se utiliza el modelo GARCH en media, denotado por GARCH-M.
- El modelo GARCH(1,1)-M puede ser escrito como

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

donde μ y c son constantes. El parámetro c es llamado el parámetro de *premio al riesgo*: Un valor positivo de c indica que el retorno está positivamente relacionado con su volatilidad.

- En la literatura se han propuesto otras especificaciones del premio al riesgo, dentro de las cuales está $r_t = \mu + c\sigma_t + a_t$.
- La formulación del modelo GARCH-M implica que existe correlación serial en r_t , la cual es introducida por la correlación serial del proceso $\{\sigma_t^2\}$. Por tanto, la existencia del premio al riesgo es otra razón por la cual los retornos pueden exhibir correlación serial.

Ejemplo: Modelo GARCH-M para el exceso de retornos del índice S&P500.

Estimación usando TSM:

1. Ruido con distribución Gaussiana

Estimate	Std. Err.	t Ratio	p-Value		
Intercept	0.00619	0.00254	2.437	0.015	
Garch-M Variance	0.7401	1.0468	0.707	0.48	
GARCH Intercept^(1/2)	0.02327	0.004	-----	-----	
GARCH Alpha1	0.11982	0.02435	4.921	0	
GARCH Beta1	0.85781	0.0259	33.12	0	

Log Likelihood = 1266.69

```

Schwarz Criterion = 1250.01
Hannan-Quinn Criterion = 1257.2
Akaike Criterion = 1261.69
Sum of Squares = 2.6968
R-Squared = 0.0015
Residual SD = 0.0586
Residual skewness = -0.518
Residual kurtosis = 4.3511
Jarque-Bera Test = 95.2936 {0}
Ljung-Box (residuals): Q(12) = 13.0508 {0.365}
Ljung-Box (squared residuals): Q(12) = 11.9542 {0.449}

```

1. Ruido con distribución t de Student

Estimate	Std. Err.	t Ratio	p-Value
Student's t d.f. ^(1/2)	2.68603	0.3307	-----
Intercept	0.00735	0.00277	2.655 0.008
Garch-M Variance	0.62131	1.09523	0.567 0.571
GARCH Intercept ^(1/2)	0.02759	0.0034	-----
GARCH Alpha1	0.11136	0.02573	4.328 0
GARCH Beta1	0.84686	0.02776	30.506 0

```

Log Likelihood = 1280.17
Schwarz Criterion = 1260.15
Hannan-Quinn Criterion = 1268.78
Akaike Criterion = 1274.17
Sum of Squares = 2.6947
R-Squared = 0.0036
Residual SD = 0.0586
Residual skewness = -0.5908
Residual kurtosis = 4.5703
Jarque-Bera Test = 126.962 {0}
Ljung-Box (residuals): Q(12) = 13.0025 {0.369}
Ljung-Box (squared residuals): Q(12) = 13.5756 {0.329}

```

Los resultados muestran que el premio al riesgo estimado no es significativo, usando la especificación del GARCH-M en varianza.

Otra posibilidad es usar la especificación del GARCH-M en desviación estándar. Usando TSM y errores t de student la estimación de este modelo es:

Estimate	Std. Err.	t Ratio	p-Value
Student's t d.f. ^(1/2)	2.68043	0.3261	-----
Intercept	0.00474	0.00645	0.735 0.463
Garch-M SD	0.08851	0.14067	0.629 0.529
GARCH Intercept ^(1/2)	0.02756	0.0034	-----
GARCH Alpha1	0.11114	0.02512	4.424 0
GARCH Beta1	0.84733	0.02693	31.464 0

```

Log Likelihood = 1280.18
Schwarz Criterion = 1260.17
Hannan-Quinn Criterion = 1268.8
Akaike Criterion = 1274.18
Sum of Squares = 2.6999
R-Squared = 0.0013

```

```

Residual SD = 0.0586
Residual skewness = -0.5907
Residual kurtosis = 4.5801
Jarque-Bera Test = 127.962 {0}
Ljung-Box (residuals): Q(12) = 13.0783 {0.363}
Ljung-Box (squared residuals): Q(12) = 13.5993 {0.327}

```

Los resultados confirman la no significancia del estimador del premio al riesgo.

El modelo GARCH Exponencial (Nelson, 1991)

- Para superar algunas debilidades del modelo GARCH en explicar las series financieras, Nelson (1991) propuso el modelo GARCH Exponencial. Específicamente, para permitir efectos asimétricos entre los retornos de los activos, Nelson propuso la innovación ponderada

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma [|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)]$$

donde θ y γ son constantes reales. Tanto ε_t como $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$ son sucesiones i.i.d con media cero y distribuciones continuas. Por tanto $E[g(\varepsilon_t)] = 0$.

- La asimetría de $g(\varepsilon_t)$ puede ser vista fácilmente reescribiéndola como

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & \text{si } \varepsilon_t \geq 0 \\ (\theta - \gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|) & \text{si } \varepsilon_t < 0 \end{cases}$$

- Cuando ε_t tiene una distribución normal estandarizada,

$$E(|\varepsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$$

- Cuando ε_t tiene una distribución t de Student estandarizada,

$$E(|\varepsilon_t|) = \frac{2\sqrt{v-2}\Gamma((v+1)/2)}{(v-1)\Gamma(v/2)\sqrt{\pi}}$$

- Un modelo EGARCH(m,s) puede ser escrito como

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}}{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m} g(\varepsilon_{t-1})$$

donde α_0 es una constante, B es el operador de rezagos tal que $Bg(\varepsilon_t) = g(\varepsilon_{t-1})$, y $1 + \beta_1 B + \dots + \beta_{s-1} B^{s-1}$ y $1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m$ son polinomios con sus ceros fuera del círculo unidad y sin raíces comunes.

- Usando esta representación se pueden estudiar algunas propiedades del modelo EGARCH en forma similar a las del modelo GARCH. Por ejemplo, la media incondicional de $\ln(\sigma_t^2)$ es α_0 .
- Sin embargo, el modelo difiere del modelo GARCH en varias formas:
 - ✓ Usa el logaritmo de la varianza para relajar la restricción de coeficientes positivos.
 - ✓ El empleo de $g(\varepsilon_t)$ permite al modelo responder asimétricamente a valores positivos y negativos rezagados de a_t .
- Para comprender mejor la propiedades del modelo EGARCH, considere el modelo simple EGARCH(1,1)

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \text{donde} \quad (1 - \alpha B) \ln(\sigma_t^2) = (1 - \alpha) \alpha_0 + g(\varepsilon_{t-1})$$

donde las ε_t son variables aleatorias i.i.d con distribución normal estándar y se omitió el subíndice de α_1 . En este caso $E(|\varepsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$, y el modelo es

$$(1 - \alpha B) \ln(\sigma_t^2) = \begin{cases} \alpha_* + (\theta + \gamma)\varepsilon_{t-1} & \text{si } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ \alpha_* + (\theta - \gamma)(-\varepsilon_{t-1}) & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

donde $\alpha_* = (1 - \alpha)\alpha_0 - \sqrt{2/\pi} \gamma$. La varianza condicional evoluciona de una manera no lineal que depende del signo de a_{t-1} , similar a un modelo autorregresivo de umbral, TAR (Tong, 1978, 1990).

- Específicamente, σ_t^2 se puede escribir como

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha} \exp(\alpha_*) \begin{cases} \exp[(\gamma + \theta) \frac{a_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}] & \text{si } a_{t-1} \geq 0 \\ \exp[(\gamma - \theta) \frac{|a_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}] & \text{si } a_{t-1} < 0 \end{cases}$$

Los coeficientes $(\gamma + \theta)$ y $(\gamma - \theta)$ muestran la asimetría en respuesta a valores positivos y negativos de a_{t-1} . Puesto que shocks negativos tienden a tener varianza mayor, se espera que θ sea negativo. Para modelos EGARCH de orden más alto, la no linealidad es mucho más complicada.

Ejemplo 1.

Nelson (1991) aplica el modelo EGARCH a los excesos de retorno diarios del índice de mercado ponderado del Center for Research in Security Prices, CRSP, desde julio de 1962 a diciembre de 1987.

Los excesos de retorno se obtienen removiendo los retornos de los bonos del Tesoro de los retornos de índice mercado ponderado, suponiendo que los retornos de los bonos del Tesoro son constantes para cada día calendario dentro del mes dado. Se cuenta con 6048 observaciones.

Sea r_t el exceso de retorno. El modelo empleado es un EGARCH-M

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + c \sigma_t^2 + a_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \ln(1 + wN_t) + \frac{1 + \beta B}{1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2} g(\varepsilon_{t-1})$$

donde σ_t^2 es la varianza condicional de a_t dado F_{t-1} . N_t es el número de días no comerciales entre $t-1$ y t , α_0 y w son parámetros, $g(\varepsilon_t)$ fue definida anteriormente y ε_t tiene una distribución de error generalizada cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{v \exp(-\frac{1}{2} |x/\lambda|^v)}{\lambda 2^{1+\frac{1}{v}} \Gamma(1/v)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < v < \infty$$

Donde $\Gamma(.)$ es la función gamma y

$$\lambda = [2^{-2/v} \Gamma(1/v) / \Gamma(3/v)]^{1/2}$$

De forma similar al modelo GARCH-M, c es el parámetro de premio al riesgo. La siguiente tabla presenta los parámetros estimados y sus errores estándar.

Param.	α_0	w	γ	α_1	α_2	β
Estim.	-10.060	0.183	0.156	1.929	-0.929	-0.978
Err.Est	0.346	0.028	0.013	0.015	0.015	0.006
Param.	θ	ϕ_0	ϕ_1	c	v	
Estim.	-0.118	$3.5 \cdot 10^{-4}$	0.205	-3.361	1.571	
Err.Est.	0.009	$9.9 \cdot 10^{-5}$	0.012	2.026	0.032	

La ecuación de la media presenta dos características de interés:

- ✓ Usa un modelo AR(1) para tener en cuenta la correlación serial posible en los excesos de retorno.
- ✓ Usa la volatilidad σ_t^2 como un regresor en que tiene en cuenta el premio al riesgo, cuya estimación resulta negativa pero estadísticamente no significativa.

Ejemplo 2.

Considere los retornos mensuales de las acciones de IBM desde enero de 1926 a diciembre de 1997, para un total de 864 observaciones. Se considera un modelo AR(1)-EGARCH(1,1) y el modelo ajustado bajo normalidad es

$$r_t = 0.0105 + 0.092r_{t-1} + \hat{a}_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = -5.496 + \frac{g(\varepsilon_{t-1})}{1 - 0.856B}$$

$$g(\varepsilon_{t-1}) = -0.0795\varepsilon_{t-1} + 0.2647 \left[\varepsilon_{t-1} | -\sqrt{2/\pi} \right]$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución normal estandarizada.

- ✓ Todas las estimaciones son estadísticamente significativas al 5%.
- ✓ Para el proceso residual estandarizado, \hat{a}_t / σ_t , los estadísticos de Ljung-Box, $Q(10)=6.31$ (valor $p=0.71$) y $Q(20)=21.4$ (valor $p=0.32$). Por tanto no hay correlación serial en los residuales estandarizados.
- ✓ Para el proceso anterior al cuadrado, los estadísticos de Ljung-Box, $Q(10)=4.13$ (valor $p=0.90$) y $Q(20)=15.93$ (valor $p=0.66$).

Por tanto no hay heterocedasticidad condicional en los residuales estandarizados al cuadrado.

- ✓ El modelo parece ser adecuado.
- ✓ La volatilidad estimada, usando la ecuación correspondiente es

$$\ln(\sigma_t^2) = -1.001 + 0.856 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \begin{cases} 0.1852\varepsilon_{t-1} & \text{si } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ -0.344\varepsilon_{t-1} & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

Tomando antilogaritmos,

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2(0.856)} e^{-1.001} \begin{cases} e^{0.1852\varepsilon_{t-1}} & \text{si } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ e^{-0.344\varepsilon_{t-1}} & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}$$

- ✓ Esta ecuación muestra la respuesta asimétrica en la volatilidad a los shocks pasados positivos y negativos bajo un modelo EGARCH. Por ejemplo, para un shock estandarizado de magnitud 2 (es decir, de dos desviaciones estándar), obtenemos

$$\frac{\sigma_t^2(\varepsilon_{t-1} = -2)}{\sigma_t^2(\varepsilon_{t-1} = 2)} = \frac{\exp[-0.3442(-2)]}{\exp[0.1852(2)]} = e^{0.318} = 1.374$$

Por tanto, el impacto de un shock negativo de tamaño de dos veces la desviación estándar es alrededor de 37.4% mayor que un shock positivo del mismo tamaño. En general, mientras mayor sea el shock, mayor es la diferencia en el impacto de la volatilidad.

Pronósticos del Modelo EGARCH

- Para ilustrar los pronósticos varios pasos adelante usaremos el modelo EGARCH(1,1), suponiendo que los parámetros son conocidos y que las innovaciones son Gaussianas. En este caso el modelo es

$$\ln(\sigma_t^2) = (1 - \alpha_1)\alpha_0 + \alpha_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + g(\varepsilon_{t-1})$$

$$g(\varepsilon_{t-1}) = \theta \varepsilon_{t-1} + \gamma(|\varepsilon_{t-1}| - \sqrt{2/\pi})$$

- Tomando función exponencial, el modelo es

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha_1} \exp[(1 - \alpha_1)\alpha_0] \exp[g(\varepsilon_{t-1})]$$

$$g(\varepsilon_{t-1}) = \theta \varepsilon_{t-1} + \gamma(|\varepsilon_{t-1}| - \sqrt{2/\pi})$$

- Sea h el origen del pronóstico. Para el pronóstico de horizonte 1,

$$\sigma_{h+1}^2 = \sigma_h^{2\alpha_1} \exp[(1 - \alpha_1)\alpha_0] \exp[g(\varepsilon_h)]$$

Por tanto:

- ✓ El pronóstico de la volatilidad 1 período adelante en el origen h es

$$\hat{\sigma}_h^2(1) = \sigma_{h+1}^2$$

- ✓ El pronóstico de la volatilidad 2 períodos adelante en el origen h es

$$\sigma_{h+2}^2 = \sigma_{h+1}^{2\alpha_1} \exp[(1 - \alpha_1)\alpha_0] \exp[g(\varepsilon_{h+1})]$$

Tomando esperanza condicional hasta el período h, obtenemos

$$\hat{\sigma}_h^2(2) = \hat{\sigma}_h^{2\alpha_1}(1) \exp[(1 - \alpha_1)\alpha_0] E_h \{ \exp[g(\varepsilon_{h+1})] \}$$

donde E_h denota la esperanza condicional tomada en el período de origen h y donde

$$\begin{aligned}
E_h \{ \exp[g(\varepsilon)] \} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\theta\varepsilon + \gamma(|\varepsilon| - \sqrt{2/\pi})] f(\varepsilon) d\varepsilon \\
E_h \{ \exp[g(\varepsilon)] \} &= \exp[-\gamma\sqrt{2/\pi}] \left[\int_0^{\infty} \exp[(\theta+\gamma)\varepsilon] f(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^0 \exp[(\theta-\gamma)\varepsilon] f(\varepsilon) d\varepsilon \right] \\
&= \exp[-\gamma\sqrt{2/\pi}] \left[\exp\left[\frac{(\theta+\gamma)^2}{2}\right] \Phi(\theta+\gamma) + \exp\left[\frac{(\theta-\gamma)^2}{2}\right] \Phi(\gamma-\theta) \right]
\end{aligned}$$

donde $f(\varepsilon)$ y $\Phi(x)$ son, respectivamente, la fdp y la función de distribución acumulada normal.

Por tanto, el pronóstico de la volatilidad 2 períodos adelante es

$$\begin{aligned}
\sigma_h^2(2) &= \sigma_h^{2\alpha_1}(1) \exp[(1-\alpha_1)\alpha_0 - \gamma\sqrt{2/\pi}] \times \\
&\quad \{ \exp[(\theta+\gamma)^2/2] \Phi(\theta+\gamma) + \exp[(\theta-\gamma)^2/2] \Phi(\gamma-\theta) \}
\end{aligned}$$

- ✓ Repitiendo el procedimiento anterior, obtenemos la fórmula recursiva para obtener el pronóstico de la volatilidad j períodos adelante:

$$\begin{aligned}
\sigma_h^2(j) &= \sigma_h^{2\alpha_1}(j-1) \exp[(1-\alpha_1)\alpha_0 - \gamma\sqrt{2/\pi}] \times \\
&\quad \{ \exp[(\theta+\gamma)^2/2] \Phi(\theta+\gamma) + \exp[(\theta-\gamma)^2/2] \Phi(\gamma-\theta) \}
\end{aligned}$$

- **Ejemplo:** Considere el modelo AR(1)-EGARCH anterior para los rendimientos mensuales de las acciones de IBM. En el origen $h=864$,

$\sigma_{864}^2(1) = 6.05 \times 10^{-3}$, $\sigma_{864}^2(2) = 5.82 \times 10^{-3}$, $\sigma_{864}^2(3) = 5.63 \times 10^{-3}$ y $\sigma_{864}^2(10) = 4.94 \times 10^{-3}$. Estos pronósticos convergen gradualmente a la varianza muestral 4.37×10^{-3} de la serie de innovaciones a_t .

El modelo FIGARCH (Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996)

- El modelo GARCH(p,q) puede ser expresado como un proceso ARMA(m,p) en a_t^2 , como

$$[1 - \alpha(B) - \beta(B)]a_t^2 = \omega + [1 - \beta(B)]\eta_t$$

donde $\beta(B) = \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \dots + \beta_p B^p$, $\alpha(B) = \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_q B^q$, $m = \max\{p, q\}$ y $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$ tiene media cero y es serialmente no correlacionado.

- Cuando el polinomio $1 - \alpha(B) - \beta(B)$ contiene una raíz unitaria, Engle y Bollerslev (1986) definen el modelo de varianza integrada, o modelo IGARCH(p,q) como:

$$\phi(B)(1 - B)a_t^2 = \omega + [1 - \beta(B)]\eta_t$$

donde $\phi(B) = [1 - \alpha(B) - \beta(B)](1 - B)^{-1}$ es de orden m-1.

- **Definición y propiedades:** El modelo GARCH fraccionalmente integrado o FIGARCH, se obtiene reemplazando el operador primera diferencia de la ecuación IGARCH, por el operador de diferencia fraccional. Análogamente al proceso ARFIMA(p,d,q) para la media, el proceso FIGARCH para a_t se define como

$$\phi(B)(1 - B)^d a_t^2 = \omega + [1 - \beta(B)]\eta_t$$

donde $0 < d < 1$ y las raíces de $\phi(B)$ y de $1 - \beta(B)$ caen fuera del círculo unidad. Recuerde $(1 - B)^d$ tiene una expansión binomial en términos de la función hipergeométrica como $(1 - B)^d = F(-d, 1, 1; B)$, donde dicha función está definida como

$$F(m, n, s; x) = \Gamma(s) \Gamma(m)^{-1} \Gamma(n)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma(m+j) \Gamma(n+j) \Gamma(s+j)^{-1} \Gamma(j+1)^{-1} x^j$$

- ✓ Alternativamente, el modelo FIGARCH(p,d,q) se puede escribir como

$$[1 - \beta(B)] \sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(B) - \phi(B)(1-B)^d] a_t^2$$

Por tanto, la varianza condicional de a_t está dada por

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(B)]^{-1} \phi(B)(1-B)^d\} a_t^2$$

$$\sigma_t^2 = \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \lambda(B) a_t^2$$

donde $\lambda(B) = \lambda_1 B + \lambda_2 B^2 + \dots$

Para que el proceso FIGARCH(p,d,q) esté bien definido y la varianza condicional sea positiva casi seguramente para todo t, se debe cumplir que todos los coeficientes $\lambda_j \geq 0$.

- ✓ Para $0 < d \leq 1$ la función hipergeométrica evaluada en $B=1$ es igual a cero, es decir, $(1-B)^d = F(-d, 1, 1; B) = F(-d, 1, 1; 1) = 0$ y por tanto $\lambda(1) = 1$.
- ✓ El término $\omega > 0$ tiene la misma interpretación que en el modelo IGARCH. En consecuencia, el segundo momento de la distribución incondicional de a_t es infinito, y por tanto el proceso FIGARCH no es débilmente estacionario, al igual que el proceso IGARCH.
- ✓ Sin embargo, Nelson (1990a) y Bougerol y Picard (1992) mostraron que el modelo IGARCH(p,q), es estrictamente estacionario y ergódico. Se puede probar que los coeficientes de los rezagos de alto orden de la representación ARCH infinita de cualquier modelo FIGARCH puede ser dominada en valor absoluto por los correspondientes coeficientes IGARCH de la ecuación

$$\phi(B)(1-B)a_t^2 = \omega + [1 - \beta(B)]\eta_t$$

y entonces se puede concluir que la clase de procesos FIGARCH es estrictamente estacionaria y ergódica si $0 \leq d \leq 1$.

- ✓ Hay diferencias importantes en la disipación de un shock sobre la varianza condicional entre un modelo GARCH, un modelo FIGARCH con $0 \leq d \leq 1$ y un modelo IGARCH (Ver, por ejemplo, Baillie, Bollerslev, Mikkelsen, 1996):

⇒ En el modelo GARCH los shocks desaparecen a una tasa decaimiento exponencial.

⇒ Para el modelo FIGARCH los shocks desaparecen a una tasa de decaimiento hiperbólico.

⇒ Para el modelo IGARCH, $d=1$, la función de respuesta acumulada no converge a cero, y por tanto los shocks no desaparecen. Entonces, desde el punto de vista de los pronósticos, los shocks sobre la varianza condicional del modelo IGARCH persisten indefinidamente. Este comportamiento extremo del IGARCH puede reducir su atractivo en estudios sobre precios de activos. Además, el modelo no es compatible con la persistencia observada después de grandes shocks tal como el de Octubre de 1987. Otra razón para dudar de bondad empírica de los modelos IGARCH está relacionada con el tema de agregación: el proceso generador de datos de un modelo IGARCH en altas frecuencias debería también implicar un modelo IGARCH en bajas frecuencias. Sin embargo, este resultado teórico no concuerda con los resultados empíricos obtenidos para la mayoría de tipos de activos.

- Davidson (2003) mostró que el hecho contraintuitivo de que la longitud de la memoria del proceso FIGARCH se incrementa a medida que el parámetro d va de 1 hacia cero. Esto es lo opuesto al papel desempeñado por el mismo parámetro en los modelos ARFIMA de niveles. Observe también que para $d=1$ (el caso del modelo IGARCH) se obtiene un proceso varianza condicional de memoria corta. Davidson muestra que esta paradoja puede ser debida a la aplicación por analogía de los resultados de los modelos integrados y fraccionalmente integrados en niveles a los modelos de varianzas condicionales con una estructura dinámica aparentemente similar.

El modelo GARCH de Umbrales (Glosten, Jagannathan y Rurkle, 1993; Zakoian, 1994))

- Un modelo de volatilidad frecuentemente usado para manejar efectos leverage es el modelo GARCH de Umbrales o modelo TGARCH. Un modelo TGARCH(m,s) toma la forma

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s (\alpha_i + \gamma_i N_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^m \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

donde N_{t-i} es un indicador para los a_{t-i} negativos, es decir,

$$N_{t-i} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{t-i} < 0 \\ 0 & \text{si } a_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

y los α_i , γ_i y β_j son parámetros no negativos que satisfacen condiciones similares a aquellos de los modelos GARCH.

- Observando el modelo, se ve que un a_{t-i} positivo contribuye en $\alpha_i a_{t-i}^2$ a σ_t^2 , mientras que un a_{t-i} negativo contribuye en un mayor impacto $(\alpha_i + \gamma_i) a_{t-i}^2$ a σ_t^2 . El modelo usa el cero como el *umbral* para separar los impactos de los shocks pasados. También se pueden emplear otros

valores. El modelo es también llamado el modelo GJR debido a Glosten et al. (1993). Zakoian (1994), propuso un modelo de umbral similar al GJR, basado sobre la desviación estándar condicional en lugar de la varianza condicional.

Ejemplo: Modelo TGARCH(1,1) para la serie de rendimientos mensuales de las acciones de IBM, usando una distribución condicional GED para las innovaciones.

$$r_t = 0.0121 + \hat{a}_t$$

$$\sigma_t^2 = 3.45 \times 10^{-4} + (0.0658 + 0.0843N_{t-1})a_{t-1}^2 + 0.818\sigma_{t-1}^2$$

donde el parámetro estimado de la GED es 1.51 con error estándar de 0.099. El error estándar para el parámetro de la ecuación de la media es 0.002, y los errores estándar para los parámetros de la ecuación de volatilidad son 1.26×10^{-4} , 0.0314, 0.0395 y 0.049, respectivamente. Para los residuales estandarizados $Q(12)=18.34$ (valor $p=0.106$) y para sus cuadrados $Q(12)=5.36$ (valor $p=0.95$). Por tanto el modelo es adecuado y el efecto leverage es estadísticamente significativo a un nivel del 5%.

El modelo APARCH (Ding, Granger y Engle, 1993)

La estructura general del modelo es la siguiente:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \text{ donde } \varepsilon_t \sim i.i.d(0, 1)$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|a_{t-i}| - \gamma_i a_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

donde $\alpha_0 \geq 0$, $\delta \geq 0$,

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p$$

$$-1 < \gamma_i < 1, i = 1, 2, \dots, p$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, q.$$

- En términos de polinomios en el operador B , el modelo puede ser escrito como

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha(B)(|a_t| - \gamma a_t)^\delta + \beta(B)\sigma_t^\delta$$

donde

$$\alpha(B) = \sum_{i=1}^p \alpha_i B^i, \quad \beta(B) = \sum_{j=1}^q \beta_j B^j, \text{ y}$$

$$\alpha_0 \geq 0, \delta \geq 0,$$

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p$$

$$-1 < \gamma_i < 1, i = 1, 2, \dots, p$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, q.$$

- **Reparametrización del modelo APARCH:** Sean $g(a_t) = |a_t| - \gamma a_t$ y

$\eta_t = g(a_t)^\delta - \sigma_t^\delta$. Entonces el modelo APARCH puede ser escrito como:

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))g(a_t)^\delta = \alpha_0 + (1 - \beta(B))\eta_t$$

$$\phi(B)g(a_t)^\delta = \alpha_0 + (1 - \beta(B))\eta_t$$

- El modelo impone una transformación potencial de Box-Cox del proceso de desviación estándar condicional y asimetría.
- El uso de esta transformación puede linealizar modelos que de otra forma serían no lineales.
- La forma funcional para la desviación estándar condicional es familiar para los economistas que la conocen como la función de producción de elasticidad de sustitución constante (CES) de Arrow et al. (1961).
- El modelo permite capturar la respuesta asimétrica de la volatilidad a shocks positivos y negativos (efecto leverage) de los retornos de los activos:

La volatilidad tiende a crecer como respuesta a “malas noticias” (los excesos de los retornos son menores que los esperados) y cae como respuesta a “buenas noticias”. Estudios empíricos realizados por Nelson (1991), Glosten, Jaganathan y Runkle (1989) y Engle y Ng (1992) muestran que es crucial la inclusión del término de asimetría en modelos de series financieras.

- Esta versión generalizada de modelo ARCH, llamado el modelo ARCH Potencial Asimétrico y denotado como APARCH, incluye 7 modelos como casos especiales (ver Ding, et al., 1993):

1. Modelo ARCH(p) de Engle (1982): Haciendo $\delta=2$, $\gamma_i=0$ y $\beta_j=0$.
2. Modelo GARCH de Bollerslev (1986): Haciendo $\delta=2$ y $\gamma_i=0$.
3. Modelo GARCH en desviación estándar absoluta de Taylor/Schwert (). Haciendo $\delta=1$ y $\gamma_i=0$.
4. El modelo GJR de Glosten, Jaganathan y Runkle (1989). Haciendo $\delta=2$ y $0 \leq \gamma_i < 1$.
5. Modelo TARCH de Zakoian (1991): Haciendo $\delta=1$ y $\beta_j=0$.
6. Modelo NARCH de Higgins y Bera (1990) : Haciendo $\gamma_i=0$ y $\beta_j=0$.
7. Modelo Log-ARCH de Geweke (1986) y Pantula (1986) es el caso límite cuando $\delta \rightarrow 0$.

- Si suponemos que la distribución condicional de r_t es normal, la condición para la existencia de $E(\sigma_t^\delta)$ y de $E|a_t|^\delta$ es (vea Ding et al. (1993))

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^p \alpha_i \{(1+\gamma_i)^\delta + (1-\gamma_i)^\delta\} 2^{\frac{\delta-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

Si esta condición es satisfecha, entonces cuando $\delta \geq 2$ obtenemos que a_t es estacionario en covarianza. Sin embargo, $\delta \geq 2$ es una condición suficiente para que a_t sea estacionario en covarianza.

Ejemplo: APARCH para la serie diaria del índice S&P500

El modelo APARCH se ajustó a los retornos de la serie del precio de cierre diario del índice S&P500. Se usaron 17055 observaciones, de Enero 3 de 1928 a agosto 30 de 1991.

- ✓ La Tabla 2.1 presenta un resumen estadístico para los retornos. Su curtosis es de 25.42 mucho mayor que la de la normal la cual es 3. La curtosis y el rango estudentizado (el cual es el rango dividido por su desviación estándar) muestra el comportamiento de colas gruesas característico comparado con la distribución normal. El estadístico Jarque-Bera para la prueba de normalidad sugiere que la distribución de los retornos está lejos de la distribución normal.

Table 2.1
Summary statistics of r_t .

data	sample size	mean	std	skewness	kurtosis	min	max	studentized range	normality test
r_t	17054	0.00018	0.0115	-0.487	25.42	-0.228	0.154	33	357788

- ✓ Los siguientes gráficos muestran el movimiento diario de largo plazo de los precios diarios, retornos y retornos absolutos sobre los 62 años pasados.

- ⇒ Hay una tendencia hacia arriba para los precios pero los retornos son bastante estables alrededor de su media 0.00018 aproximadamente.
- ⇒ De la serie de los retornos absolutos podemos observar claramente la observación de Mandelbrot (1963) y Fama (1965) de que los retornos absolutos grandes (pequeños) son seguidos por retornos absolutos grandes (pequeños).
- ⇒ La volatilidad del mercado cambia en el tiempo, lo que sugiere que un modelo adecuado para los datos debería tener una estructura de volatilidad cambiante en el tiempo, tal como la sugerida por un modelo ARCH.
- ⇒ Durante la Gran Depresión de 1929 y comienzos de 1930 la volatilidades son mucho mayores que en cualquier otro período.
- ⇒ Hay un salto repentino en los precios durante la caída del mercado de 1987, pero a diferencia de la Gran Depresión, la alta volatilidad en el mercado no fue muy larga.

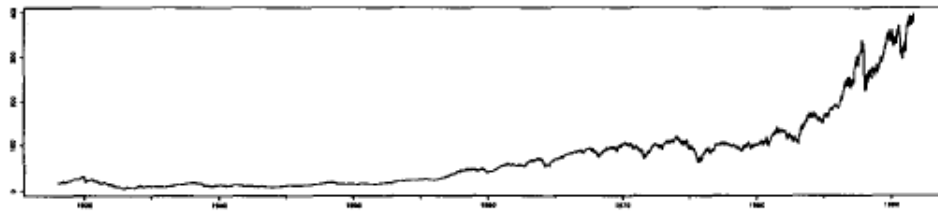


Fig. 2.1. Standard & Poor 500 daily price index 01/03/28–08/30/91.

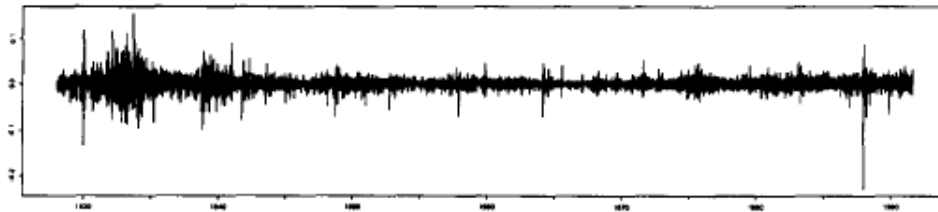


Fig. 2.2. Standard & Poor 500 daily returns 01/04/28–08/30/91.

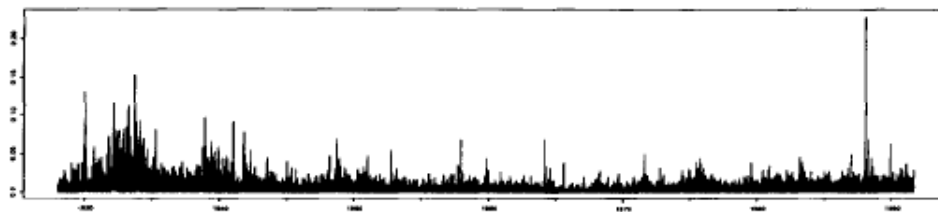


Fig. 2.3. Standard & Poor 500 daily absolute returns 01/04/28–08/30/91.

Los resultados para el modelo estimado fueron

$$r_t = 0.00021 + 0.145\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.2) \quad (19.0)$$

$$s_t^{1.43} = 0.000014 + 0.083(|\varepsilon_{t-1}| - 0.373\varepsilon_{t-1})^{1.43} + 0.920s_t^{1.43}, \quad (4.5) \quad (32.4) \quad (-20.7) \quad (474)(33.7)$$

log likelihood: 56974.

- ✓ La estimación de δ es 1.43 la cual es significativamente diferente de 1 (modelo de Taylor/Schwert) o de 2 (modelo GARCH de Bollerslev).

- ✓ El estadístico t para el término de asimetría es de 32.4 el cual es muy significativo, indicando que existen efectos leverage en los retornos.
 - ✓ Usando los valores de las funciones de verosimilitud maximizadas bajo los GARCH y APARCH, podemos construir fácilmente una prueba anidada H_0 : El modelo es GARCH contra H_1 : el modelo es APARCH. El estadístico de prueba es $\lambda = 2(l_1 - l_0)$ donde l_0 y l_1 son las log verosimilitudes maximizadas bajo H_0 y H_1 , respectivamente. Bajo H_0 , λ tiene una distribución χ^2_2 . En el ejemplo $\lambda = 2(56974 - 56822) = 304$. Por tanto se rechaza H_0 de que los datos son generados por un modelo GARCH. Similarmente se puede probar que el modelo de Taylor/Schwert también se rechaza.
- Cuando en el polinomio autoregresivo de la forma ARMA del modelo APARCH existe una raíz fraccional, se obtiene el modelo FIAPARCH (Tse, 1998) el cual también permite modelar larga memoria en el proceso de volatilidad. Es decir, el modelo FIAPARCH sigue la especificación

$$(1-B)^d \phi(B) g(a_t)^\delta = \alpha_0 + (1-\beta(B))\eta_t$$

donde $0 \leq d \leq 1$ y todas las raíces de $\phi(B) = 0$ caen fuera del círculo unidad.

El Modelo HYAPARCH (Schoffer, 2003)

- Este modelo combina el modelo FIAPARCH de Tse (1998) y el modelo HYGARCH de Davidson (2003) y produce un nuevo modelo que presenta todas las características encontradas en la investigación empírica en la series de retornos del mercado financiero: Volatilidad por clusters, leptocurtosis, asimetría y larga memoria:

- ✓ La simetría significa que un decrecimiento, por ejemplo en el precio de los activos financieros, es seguido por un incremento en la volatilidad condicional (Black, 1976; Christie, 1982).
- ✓ Con respecto a la persistencia (larga memoria) se sabe que la función de autocorrelación empírica de las volatilidades condicionales decae muy lentamente a medida que crece el orden, específicamente a una tasa de decaimiento hiperbólica. Esta característica es conocida como memoria larga.
- Para modelar estas características se han propuesto varias extensiones del modelo GARCH tales como los modelos EGARCH, APARCH, FIGARCH. A diferencia de los modelos integrados FIGARCH y FIAPARCH introducidos por Baillie et al. (1996) y Tse (1998), cuyos segundos momentos condicionales son infinitos, el nuevo modelo APARCH Hiperbólico es estacionario y considera que la volatilidad condicional queda mejor representada por medio de una potencia no entera del valor absoluto de las observaciones.
- Considere el modelo FIAPARCH, el cual incluye los modelos GARCH, APARCH y FIGARCH como casos particulares. Sea $g(a_t) = |a_t| - \gamma a_t$ y sea $\eta_t = g(a_t)^\delta - \sigma_t^\delta$. Entonces el proceso FIAPARCH es una solución a la ecuación

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - B)^d g(a_t)^\delta = \alpha_0 + (1 - \beta(B))\eta_t$$

Si $(1 - \beta(B))^{-1}$ existe entonces σ_t^δ puede ser escrito como

$$\sigma_t^\delta = (1 - \beta(B))^{-1} (\alpha_0 - \alpha(B) + (1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - (1 - B)^d) g(a_t)^\delta$$

Sea $\varphi(B)$ el filtro

$$\varphi(B) = (1 - \beta(B))^{-1} (\alpha_0 - \alpha(B) + (1 - \alpha(B) - \beta(B))(1 - (1 - B)^d))$$

Entonces

$$\sigma_t^\delta = \varphi(B) g(a_t)^\delta$$

Por tanto el modelo FIAPARCH se puede escribir como

$$\sigma_t^\delta = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j g(a_{t-j})^\delta = \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (|a_{t-j}| - \gamma a_{t-j})^\delta$$

- Para eliminar la no estacionalidad del modelo FIGARCH, Davidson (2003) introduce el modelo HYGARCH. La modificación con respecto al FIGARCH consiste en reemplazar la diferencia fraccional $(1 - B)^d$ por $((1 - \tau) + \tau(1 - B)^d)$ donde $\tau \geq 0$. Bajo la restricción $\tau < 1$ y las demás restricciones sobre los parámetros del modelo, el proceso estocástico resultante es débilmente estacionario y además los valores al cuadrado de la serie exhiben memoria larga. Por tanto un modelo HYGARCH es capaz de reproducir las características de volatilidad por clusters, leptocurtosis y memoria larga.
- Como resultado de la modificación descrita, el modelo HYGARCH se puede escribir como

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))((1 - \tau) + \tau(1 - B)^d) a_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(B))(a_t^2 - \sigma_t^2)$$

Sin embargo, el modelo HYGARCH no tiene en cuenta la asimetría y el hecho de que la volatilidad condicional está mejor representada por potencia no enteras del valor absoluto de las observaciones.

- **Definición del modelo HYAPARCH:** El proceso Hiperbólico HYAPARCH sigue la especificación:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))((1 - \tau) + \tau(1 - B)^d)g(a_t)^\delta = \alpha_0 + (1 - \beta(B))\eta_t$$

Donde $g(a_t) = |a_t| - \gamma a_t$, sea $\eta_t = g(a_t)^\delta - \sigma_t^\delta$, $\alpha(B) = \sum_{i=1}^p \alpha_i B^i$, $\beta(B) = \sum_{j=1}^q \beta_j B^j$,

y $\alpha_0 \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, $-1 < \gamma_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, p$,

$\beta_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, q$.

- Los parámetros τ y d son los parámetros de amplitud (Qué tan grandes pueden ser las variaciones en la varianza condicional) y memoria del proceso de volatilidad (Cuánto tiempo tarda en disiparse un shock sobre la volatilidad).

✓ $\tau = 1$ el modelo corresponde al FIAPARCH cuyo proceso de volatilidad no es estacionario y su memoria es larga cuando $0 < d < 1$. La memoria decrece cuando $d \rightarrow 1$!!

✓ $d = 1$ y $\tau = 1$ el modelo corresponde al IAPARCH, cuyo proceso de volatilidad no es estacionario, pero es de memoria corta (Davidson, 2004)

✓ $d = 1$ y $\tau < 1$ el modelo corresponde al APARCH, cuyo proceso de volatilidad es estacionario

- $g(a_t) = |a_t| - \gamma a_t$ es la función de asimetría donde γ es el parámetro de asimetría con $|\gamma| < 1$. Si $\gamma = 0$ no hay asimetría. En los modelos anteriores esta restricción implica modelos FIPARCH, IPARCH y PARCH, respectivamente.
- El parámetro de potencia en la volatilidad es δ . Si $\delta = 2$, los modelos anteriores serían FIGARCH, IGARCH y GARCH, respectivamente.

- Una manera natural de probar memoria geométrica contra memoria hiperbólica es probar $d=1$.
- Si $\tau > 1$ el proceso no es estacionario.

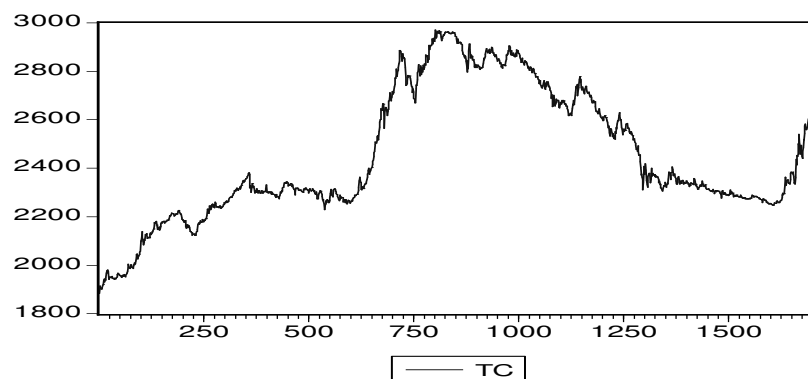
Ejemplo:

Precio de cierre diario del Peso colombiano con respecto al Dólar americano — COP/USD — para el período comprendido entre enero de 2000 y julio de 2006. Para la serie de tasa de cambio se calcularon los log-retornos definidos como:

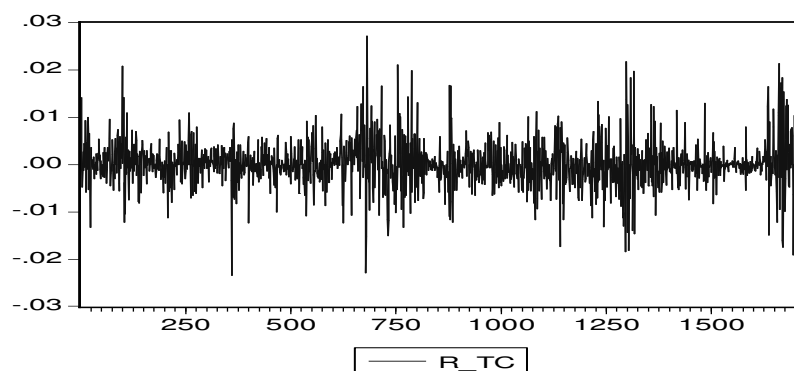
$$r_t = 100 \log(y_t / y_{t-1})$$

donde y_t representa el precio de cierre de COP/USD en el t -ésimo día.

Tasa de cambio



Retornos de la tasa de cambio



Estadísticas de los retornos	
Media	0.015
Mediana	0.000
Máximo	2.719
Mínimo	-2.345
Desviación estándar	0.475
Asimetría	0.204
Curtosis	7.010
Primer cuartil	-0.186
Tercer cuartil	0.222
Jarque-Bera	1160.71 {0.00}
Q(20)	35.377 {0.02}
Q2(20)	753.26 {0.00}
T	1715

Exploración de la memoria larga para la media

GPH			Whittle		
[T [^] .6]	[T [^] .7]	[T [^] .5]	[T [^] .6]	[T [^] .7]	[T [^] .5]
0.181	0.069	0.25	0.151	0.035	0.136
-2.455	-1.407	-2.128	-2.858	-0.938	-1.738
{0.014}	{0.16}	{0.034}	{0}	{0}	{0}
R/S modificado			KPSS		
m=4	m=8	m=24	m=4	m=8	m=24
-2.008	-2.014	(1.903)	-0.707	-0.719	-0.635
{0.025}	{0.025}	{0.025}	{0.025}	{0.025}	{0.025}
Lobato-Robinson			HLM		
	-1.107			2.059	
	{0.866}			{0.02}	

- Castaño, Gallón y Gómez (2008, 2009) proponen otra prueba basada en una aproximación autorregresiva de la componente de corto plazo del modelo ARFIMA. Los resultados de la prueba usando una aproximación AR(8):

Estimación de d :	0.271
Estadístico de la prueba:	4.788
Valor p:	0.000

Se rechaza H_0

Se concluye que el proceso de media de los retornos de la tasa de cambio colombiana parece tener memoria larga.

- Para evitar la imposición de modelos inapropiados se propone identificar un modelo más adecuado usando la estrategia de modelos anidados: Se trata de emplear un modelo general que considere:
 - Memoria del proceso de media: Corta o larga
 - Volatilidad por clusters
 - Proceso de varianza condicional heterocedástica: estacionario o no estacionario
 - Efectos de asimetría
 - Persistencia y larga memoria en el proceso de volatilidad
 - Proceso de volatilidad potencial
 - Distribuciones leptocúrticas (no normales)
- Un modelo general en el cual se pueden investigar las características anteriores es el modelo ARFIMA-HYAPARCH.

$$\phi(B)(1-B)^{d_m} r_t = \theta(B)a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (1)$$

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))((1 - \tau) + \tau(1 - B)^d) g(a_t)^\delta = \alpha_0 + (1 - \beta(B))\eta_t \quad (2)$$

La ecuación (1) permite modelar la memoria del proceso de media:

- ✓ Si $d_m = 0$ el proceso de media tiene memoria corta dirigida por un proceso ARMA(p,q).
- ✓ Si $-0.5 < d_m < 0.5$, entonces $(1-B)^{d_m}$ es el operador de diferencia fraccional para series estacionarias e invertibles.

- ✓ Existe memoria larga si $0 < d_m < 0.5$. A medida que d_m tiende a 0.5 la memoria crece.
 - ✓ Si $-0.5 < d_m < 0$ el proceso es de memoria corta y es antipersistente, existe fuerte reversión a la media.
 - ✓ $\phi(B)$ y $\theta(B)$ son los polinomios autorregresivo y de medias móviles regulares que conducen la memoria corta del proceso.
 - ✓ ε_t es una sucesión de variables i.i.d con media cero y varianza 1.
- La ecuación (2) permite modelar el proceso de volatilidad y sus parámetros fueron descritos antes.
 - La estrategia de estimación de modelos anidados arroja los siguientes resultados.

Estrategia de estimación						
Especificación	HYAPGARCH		FIAPGARCH		IGARCH	
Media condicional						
d_m	0.099	(17.842)	0.099	(17.334)	0.096	(110.276)
ϕ_1	-0.100	(-94.988)	-0.100	(-94.004)	-0.096	(101.526)
ϕ_2	-0.068	(-58.036)	-0.069	(-43.106)	-0.066	(-38.086)
ϕ_3	-0.035	(-41.467)	-0.035	(-33.217)	-0.033	(-32.833)
ϕ_4	-0.039	(-30.594)	-0.039	(-33.461)	-0.038	(-34.232)
Varianza condicional						
α_0	0.205	(6.240)	0.206	(2.731)	0.169	(9.224)
β_1	0.857	(19.714)	0.845	(27.148)	0.790	(30.107)
γ	-0.213	(-1.512)	0.035	(0.174)	—	
δ	1.568	(9.579)	1.750	(3.862)	2	(fijo)
d	1.105	(12.007)	1.076	(20.610)	1	(fijo)
τ	1.040	(52.263)	1	(fijo)	1	(fijo)

- **Diagnósticos.** Los criterios de información presentados abajo definen el mejor modelo mientras mayor sea su valor.

Especificación	HYAPGARCH	FIAPGARCH	IGARCH
parámetro distribución	0.955 (17.842)	0.971 (17.333)	0.964 (18.941)
Log-L	-744.927	-747.178	-747.836
Akaike	-756.927	-758.178	-755.836
Schwarz	-789.596	-788.125	-777.616
Hannan–Quinn	-769.018	-769.261	-763.897
Asimetría	-0.032	-0.031	-0.0431
Curtosis	7.672	7.580	7.915
Jarque–Bera	1556.3 {0}	1495.51 {0}	1722.77 {0}
Q(15)*	18.211 {0.252}	18.734 {0.226}	19.128 {0.208}
Q2(15)*	4.052 {0.998}	3.755 {0.998}	4.668 {0.995}

- La tasa de cambio colombiana presenta evidencia de larga memoria en la media y no tiene reversión a la media.
- La potencia adecuada para modelar el proceso de volatilidad es 2.
- El proceso de varianza condicional parece responder mejor a un modelo IGARCH. Por tanto el proceso de volatilidad no es estacionario y es de memoria corta.
- La distribución del término de error tiene colas más pesadas que la normal. Parece responder a una distribución GED.