Series de Tiempo

Notas de Clase

Mario José Pacheco López
sites.google.com/site/wmariojpl

Universidad de Córdoba
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas y Estadística
Programa de Estadística

2012-II

Índice

Sección 1 | Principios

Principios

Definiciones

Proceso estocástico

- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $Z(w,t)$, donde w pertenece al espacio muestral y t a un conjunto índice (generalmente $\mathbb{Z}$).
- Para w fijo, $Z(w,t)$, como función de t, es una realización del proceso estocástico. Así una serie de tiempo es una realización de un cierto proceso estocástico.
- Para un conjunto finito de v.a. $\{Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}\}$ de un proceso estocástico $\{Z(w,t) : t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, se define la función de distribución $n-$dimensional como

$$F\left(z_{t_1}, \ldots, z_{t_n}\right) = p\left\{w : z(w,t_1) \leq z_{t_1}, \ldots, z(w,t_n) \leq z_{t_n}\right\}$$

Principios

Definiciones

Proceso estacionario

- Un proceso se dice estacionario en distribución de $n-$ésimo orden si su función de distribución $n-$dimensional es

$$F\left(z_{t_1}, \ldots, z_{t_n}\right) = F\left(z_{t_1+k}, \ldots, z_{t_n+k}\right) \qquad (1)$$

  para cualquier $n-$tupla $(t_1, \ldots, t_n)$ y k entero.
- Un proceso se dice estrictamente estacionario si (1) es cierto para cualquier n $(= 1, 2, \ldots)$. Además si (1) se cumple para $n = m$, entonces también se cumple para $n \leq m$.

Principios

Definiciones

Funciones de media y varianza

- Generalmente se suprime la variable w y se escribe $Z(w, t)$ simplemente como $Z(t)$ o Z_t. Además el proceso es llamado de valor real si este sólo toma valores reales.
- Para un proceso de valor real $\{Z_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ se define la función de medias del proceso como:

$$\mu_t = E(Z_t)$$

- La función de varianza

$$\sigma_t^2 = E(Z_t - \mu_t)^2$$

Principios

Definiciones

Funciones de covarianza y correlación

- La función de covarianza entre Z_{t_1} y Z_{t_2}

$$\gamma(t_1, t_2) = E(Z_{t_1} - \mu_{t_1})(Z_{t_2} - \mu_{t_2})$$

- La función de correlación entre Z_{t_1} y Z_{t_2}

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}}$$

Principios

Definiciones

Propiedades en procesos estrictamente estacionarios

- Para un proceso estrictamente estacionario $\mu_t = \mu$, siempre que $E\left(\mid Z_t \mid < \infty\right)$ y $\sigma_t^2 = \sigma^2$, si $E\left(Z_t^2\right) < \infty$, para todo t.
- Además dado que $F\left(z_{t_1}, z_{t_2}\right) = F\left(z_{t_1+k}, z_{t_2+k}\right)$ para cualquier enteros t_1, t_2 y k,

$$\gamma\left(t_1, t_2\right) = \gamma\left(t_1 + k, t_2 + k\right), \quad \rho\left(t_1, t_2\right) = \rho\left(t_1 + k, t_2 + k\right)$$

- Haciendo $t_1 = t - k$ y $t_2 = t$, se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma\left(t_1, t_2\right) &= \gamma\left(t - k, t\right) = \gamma\left(t, t + k\right) = \gamma_k \\ \rho\left(t_1, t_2\right) &= \rho\left(t - k, t\right) = \rho\left(t, t + k\right) = \rho_k \end{aligned}$$

- Así, para un proceso estrictamente estacionario con primeros dos momentos finitos, la función de covarianza y correlación entre Z_t y Z_{t+k} depende únicamente de la diferencia k entre los tiempos.

Principios

Definiciones

Proceso débilmente estacionario

- Un proceso es llamado *débilmente estacionario* de orden n, si todos sus momentos conjuntos hasta de orden n son finitos e invariantes en el tiempo.
- Un proceso *débilmente estacionario de segundo orden* tendrá media y varianza constantes y sus funciones de covarianza y correlación solamente dependerán del número de períodos que separan los términos del proceso.
- Esta clase de proceso es también llamado proceso estacionario en sentido amplio o proceso estacionario en covarianza o simplemente estacionario.

Principios

Definiciones

Ejemplo

Considere la secuencia $Z_t = A\sin(wt+\theta)$, con A una v.a. de media 0 y varianza 1 y $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ independiente de A. Entonces

$$
\begin{aligned}
E(Z_t) &= E(A)\,E(\sin(wt+\theta)) = 0 \\
E(Z_t, Z_{t+k}) &= E\left\{A^2 \sin(wt+\theta)\sin(w(t+k)+\theta)\right\} \\
&= E\left(A^2\right) E\left\{\frac{1}{2}\left[\cos(wk) - \cos(w(2t+k)+2\theta)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cos(wk) - \frac{1}{2}E\left\{\cos(w(2t+k)+2\theta)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\cos(wk) - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(w(2t+k)+2\theta)\,\frac{1}{2\pi}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\cos(wk) - \frac{1}{8\pi}\left[\sin(w(2t+k)+2\theta)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\cos(wk)
\end{aligned}
$$

Principios

Definiciones

Funciones de autocovarianza y autocorrelación

Para un proceso estacionario $\{Z_t\}$ escribimos

$$\gamma_k = cov\left(Z_t, Z_{t+k}\right) = E\left(Z_t - \mu\right)\left(Z_{t+k} - \mu\right)$$

y

$$\rho_k = \frac{cov\left(Z_t, Z_{t+k}\right)}{\sqrt{Var\left(Z_t\right) Var\left(Z_{t+k}\right)}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

donde $\gamma_0 = Var\left(Z_t\right) = Var\left(Z_{t+k}\right)$. Como función de k, γ_k se denomina la función de autocovarianza y ρ_k la función de autocorrelación (ACF).

Principios

Definiciones

Propiedades

1. $\gamma_0 = Var\left(Z_t\right);\ \rho_0 = 1$
2. $\mid \gamma_k \mid \leq \gamma_0;\ \mid \rho_k \mid \leq 1$
3. $\gamma_k = \gamma_{-k};\ \rho_k = \rho_{-k}$, para todo k.
4. γ_k y ρ_k son semidefinidas positivas en el sentido que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\gamma_{|t_i-t_j|} \geq 0$$

y

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\rho_{|t_i-t_j|} \geq 0$$

para cualquier $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reales.

Principios
Definiciones

Demostración

1. Trivial
2. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\gamma_k^2 \quad \leq \quad E\left(Z_t-\mu\right)^2 E\left(Z_{t+k}-\mu\right)^2=\gamma_0^2$$

3. De la definición de γ_k

$$\gamma_k=E\left(Z_t-\mu\right)\left(Z_{t+k}-\mu\right)=E\left(Z_{(t+k)-k}-\mu\right)\left(Z_{(t+k)}-\mu\right)=\gamma_{-k}$$

4. Sea $X=\sum_{i=1}^n \alpha_i Z_{t_i}$, entonces

$$0 \leq Var(X)=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j cov\left(Z_{t_i}, Z_{t_j}\right)=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \gamma_{|t_i-t_j|}$$

Principios

Definiciones

Función de autocorrelación parcial

- Se usa para medir el grado de correlación entre Z_t y Z_{t+k} luego de remover la dependencia lineal con las variables intermedias

$$Corr\left(Z_t, Z_{t+k} \mid Z_{t+1}, Z_{t+2}, ..., Z_{t+k-1}\right)$$

- Puede ser obtenida considerando el siguiente modelo de regresión para la variable Z_{t+k} de un proceso de media cero

$$Z_{t+k} = \phi_{k1} Z_{t+k-1} + \phi_{k2} Z_{t+k-2} + \cdots + \phi_{kk} Z_t + e_{t+k}$$

con e_{t+k} incorrelado con Z_{t+k-j} para $j \geq 1$.

- Multiplicando por Z_{t+k-j} y tomando esperanza se tiene

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\gamma_{j-k} \\
\rho_j &= \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k}
\end{aligned}$$

Principios
Definiciones

Función de autocorrelación parcial

- Para $j = 1, 2, ..., k$ se tiene el sistema

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\
\rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\
&\vdots \\
\rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_0
\end{aligned}
$$

- Usando la regla de Cramer para $k = 1, 2, ...$ se tiene

$$
\phi_{11} = \rho_1, \quad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}
$$

Principios
Definiciones

Función de autocorrelación parcial

- En general

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

- Como una función de k, ϕ_{kk} es denominada función de autocorrelación parcial (PACF) entre Z_t y Z_{t+k}.

Principios

Definiciones

Proceso ruido blanco, RB

- Un proceso $\{a_t\}$ es llamado RB si este es una secuencia de v.a. incorreladas de una distribución fija con media constante $E(a_t) = \mu_a$, usualmente asumida como cero, varianza constante $Var(a_t) = \sigma_a^2$ y

$$\gamma_k = cov(a_t, a_{t+k}) = 0$$

para todo $k \neq 0$.

- De este modo, todo proceso RB es estacionario con función de autocovarianza

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Principios

Definiciones

Proceso ruido blanco, RB.

- Función de autocorrelación

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

- Función de autocorrelación parcial

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

- Un proceso RB se dice Gausiano si su función de distribución conjunta es normal. En adelante se hace referencia solo a procesos ruido blanco Gausianos de media cero.

Principios

Estimación

Estimación de la media

- Un estimador natural para la media $\mu = E\left(Z_t\right)$ de un proceso estacionario es $\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t$, con

$$E\left(\bar{Z}\right) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\left(Z_t\right) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

- Además

$$\begin{aligned} Var\left(\bar{Z}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} Cov\left(Z_t, Z_s\right) = \frac{\gamma_0}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\rho_{(t-s)} \\ &= \frac{\gamma_0}{n^2}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(n- \mid k \mid\right)\rho_k = \frac{\gamma_0}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{\mid k \mid}{n}\right)\rho_k \end{aligned}$$

donde $k = t - s$.

Principios

Estimación

Estimación de la media

- Así, si

$$lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{\mid k\mid}{n}\right)\rho_k\right]$$

es finito, entonces $Var\left(\bar{Z}\right)\to 0$ conforme $n\to\infty$, y $\bar{Z}$ es un estimador consistente de μ. Esto es,

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Z_t=\mu$$

en media cuadrática. Si esto se cumple se dice que el proceso es ergódico en media. Una condición suficiente para que este resultado se cumpla es que $\rho_k\to 0$ conforme $k\to\infty$.

Principios

Estimación

Estimación de la función de autocovarianza muestral

Un estimador para la función de autocovarianza es,

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t - \bar{Z}\right)\left(Z_{t+k} - \bar{Z}\right)$$

o

$$\hat{\hat{\gamma}} = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t - \bar{Z}\right)\left(Z_{t+k} - \bar{Z}\right)$$

Principios

Estimación

Estimación de la función de autocovarianza muestral

Pero,

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\bar{Z}\right)\left(Z_{t+k}-\bar{Z}\right) &= \sum_{t=1}^{n-k}\left[\left(Z_t-\mu\right)-\left(\bar{Z}-\mu\right)\right]\left[\left(Z_{t+k}-\mu\right)-\left(\bar{Z}-\mu\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\mu\right)\left(Z_{t+k}-\mu\right)-\left(\bar{Z}-\mu\right)\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\mu\right) \\
&\quad -\left(\bar{Z}-\mu\right)\sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_{t+k}-\mu\right)+\left(n-k\right)\left(\bar{Z}-\mu\right)^2 \\
&\approx \sum_{t=1}^{n-k}\left(Z_t-\mu\right)\left(Z_{t+k}-\mu\right)-\left(n-k\right)\left(\bar{Z}-\mu\right)^2
\end{aligned}
$$

Principios

Estimación

Estimación de la función de autocovarianza muestral

así,

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\gamma}_k\right) &\approx \gamma_k - \frac{k}{n}\gamma_k - \left(\frac{n-k}{n}\right) Var\left(\bar{Z}\right) \\
E\left(\hat{\hat{\gamma}}_k\right) &\approx \gamma_k - Var\left(\bar{Z}\right)
\end{aligned}
$$

De esta forma ambos estimadores son sesgados, pero si se omite el efecto de la estimación de μ representado en $Var\left(\bar{Z}\right)$ entonces $\hat{\hat{\gamma}}_k$ tiene un menor sesgo que $\hat{\gamma}_k$.

Principios

Estimación

Estimación de la función de autocorrelación

Cuando un proceso es Gausiano, Bartlett (1946) muestra que

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\hat{\gamma}_k, \hat{\gamma}_{k+j}\right) &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_i \gamma_{i+j} + \gamma_{i+k+j} \gamma_{i-k}\right) \\
Var\left(\hat{\gamma}_k\right) &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_i^2 + \gamma_{i+k} \gamma_{i-k}\right)
\end{aligned}
$$

Principios
Estimación

Estimación de la función de autocorrelación

También

$$Cov\left(\hat{\hat{\gamma}}_k, \hat{\hat{\gamma}}_{k+j}\right) \approx \frac{1}{n-k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\gamma_i\gamma_{i+j} + \gamma_{i+k+j}\gamma_{i-k}\right)$$

$$Var\left(\hat{\gamma}_k\right) \approx \frac{1}{n-k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\gamma_i^2 + \gamma_{i+k}\gamma_{i-k}\right)$$

Así, la varianza de $\hat{\gamma}_k$ es menor que la de $\hat{\hat{\gamma}}_k$ y decimos que el proceso es ergódico en función de autocovarianza cuando

$$lim_{n\to\infty}\hat{\hat{\gamma}}_k = \gamma_k$$

Principios
Estimación

Estimación de la función de autocorrelación

- Para una serie observada, la función de autocorrelación muestral (ACF) se define como

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Para un proceso estacionario Gausiano, Bartlett (1946) muestra que para $k > 0$ y $k + j > 0$,

$$\begin{aligned} Cov\left(\hat{\rho}_k, \hat{\rho}_{k+j}\right) \;&\backsimeq\; \frac{1}{n}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\rho_i\rho_{i+j} + \rho_{i+k+j}\rho_{i-k}\right. \\ &\quad -2\rho_k\rho_i\rho_{i-k-j} - 2\rho_{k+j}\rho_i\rho_{i-k} \\ &\quad \left.+2\rho_k\rho_{k+j}\rho_i^2\right) \end{aligned}$$

Principios

Estimación

Estimación de la función de autocorrelación

- Para n grande, $\hat{\rho}_k$ es aproximadamente normal con media ρ_k y varianza

$$Var\left(\hat{\rho}_k\right) \simeq \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\rho_i^2 + \rho_{i+k}\rho_{i-k} - 4\rho_k\rho_i\rho_{i-k} + 2\rho_k^2\rho_i^2\right)$$

- Para procesos en que $\rho_k = 0$ para $k > m$

$$Var\left(\hat{\rho}_k\right) \simeq \frac{1}{n}\left(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \cdots + \rho_m^2\right)$$

En la práctica los valores de ρ_i son desconocidos y se remplazan por $\hat{\rho}_i$.

Principios

Estimación

Estimación de la función de autocorrelación

Para un proceso RB $\{a_t\}$ con cuartos momentos finitos y n grande la ACF muestral, $\hat{\rho}_k$, para $k = 1, 2, ..., K$, donde K es fijo pero arbitrario, está distribuida aproximadamente normal con media cero y desviación estándar

$$\sigma_{\hat{\rho}_k} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Principios
Estimación

Estimación de la función de autocorrelación parcial

- La función de autocorrelación muestral $\hat{\phi}_{kk}$ se obtiene sustituyendo ρ_i por $\hat{\rho}_i$ en la pacf teórica. También puede calcularse de forma recursiva como:

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}_{11} &= \hat{\rho}_1 \\
\hat{\phi}_{k+1,k+1} &= \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_j} \\
\hat{\phi}_{k+1,j} &= \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1,k+1}\hat{\phi}_{k,k+1-j}
\end{aligned}
$$

con $j = 1, ..., k$.

- Bajo la hipótesis de que el proceso es RB, la varianza de $\hat{\phi}_{kk}$ se puede aproximar como

$$
Var\left(\hat{\phi}_{kk}\right) \backsimeq \frac{1}{n}
$$

Principios

Representaciones

Las representaciones autorregresiva y de medias móviles para expresar un proceso de series de tiempo son las más usadas en el análisis de series de tiempo.

Principios

Representaciones

Representación de medias móviles

En esta el proceso Z_t se escribe como combinación lineal de una secuencia de variables aleatorias incorreladas,

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots \\ &= \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \end{aligned}$$

con $\psi_0 = 1$ y $\{a_t\}$ ~RB con media cero y $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Introduciendo el operador de retraso $B^j x_t = x_{t-j}$, podemos escribir el proceso como

$$\dot{Z}_t = \psi(B)\, a_t$$

donde $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ y $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$.

Principios

Representaciones

Propiedades

$$
\begin{aligned}
E\left(Z_t\right) &= \mu \\
Var\left(Z_t\right) &= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2
\end{aligned}
$$

y

$$
E\left(a_t Z_{t-j}\right) = \begin{cases} \sigma_a^2 & \text{para } j = 0 \\ 0 & \text{para } j > 0 \end{cases}
$$

Principios

Representaciones

Propiedades

Además

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= E\left(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t+k}\right) \\
&= E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\psi_i\psi_j a_{t-i}a_{t+k-j}\right) \\
&= \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\psi_{i+k}
\end{aligned}$$

y

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\psi_{i+k}}{\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i^2}$$

Principios

Representaciones

Propiedades

Claramente las funciones de autocovarianza y autocorrelación son funciones solo de la diferencia en el tiempo k. Sin embargo, dado que estas envuelven sumas infinitas, para que sea estacionario se debe mostrar que γ_k sea finito para todo k.

$$
\begin{aligned}
|\gamma_k| &= \left| E\left(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t+k}\right) \right| \\
&\leq \left[Var\left(Z_t\right) Var\left(Z_{t+k}\right)\right]^{1/2} \\
&= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2
\end{aligned}
$$

por esta razón $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ es una condición necesaria para que el proceso sea estacionario.

Principios

Representaciones

Función generadora de autocovarianza

Para una secuencia γ_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la la fga se define como

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k$$

donde la varianza del proceso, γ_0, es el coeficiente de B^0 y la autocovarianza de orden k, γ_k, es el coeficiente tanto de B^k como de B^{-k}. Para la representación de medias móviles

$$\begin{aligned}\gamma(B) &= \sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k} B^k = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i \psi_j B^{j-i} \\ &= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^{-i} = \sigma_a^2 \psi(B) \psi\left(B^{-1}\right)\end{aligned}$$

donde $j = i + k$ y $\psi_j = 0$ para $j < 0$.

Principios
Representaciones

Representación autoregresiva

En este se hace una regresión entre el valor Z_t y los valores en el pasado, esto es,

$$\dot{Z}_t = \pi_1 \dot{Z}_{t-1} + \pi_2 \dot{Z}_{t-2} + \cdots + a_t$$

o equivalentemente

$$\pi(B)\,\dot{Z}_t = a_t$$

donde

$$\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$$

y

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} |\, \pi_j \,| < \infty$$

Principios

Representaciones

Procesos invertibles

- Un proceso es llamado invertible si puede ser escrito en esta forma. Box- Jenkins muestran que cuando se está pronosticando, un proceso no invertible no tiene sentido.
- Para que un proceso MA estacionario sea invertible, es decir, tenga una representación AR, es necesario que las raíces del polinomio $\psi(B) = 0$ caigan todas fuera del circulo unidad.
- No todo proceso invertible es necesariamente estacionario. Para que un proceso invertible sea estacionario, es decir tenga una representación MA, es necesario que las raíces del polinomio $\pi(B) = 0$ caigan todas fuera del círculo unidad.

Principios

Representaciones

Modelos

Aunque las representaciones MA y AR son útiles, ellas contienen un número infinito de parámetros que en la práctica no es posible estimar. Por tanto, la modelación de un fenómeno requiere usar un número finito de parámetros. De aquí surgen los modelos:

- Autorregresivos de orden p, AR(p):

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

- De Medias Móviles de orden q, MA(q):

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

Principios

Representaciones

Modelos

En la práctica, si nos restringimos a trabajar exclusivamente con un modelo MA o un modelo AR, el número de parámetros necesario puede ser excesivamente grande, frente al número disponible de datos recolectados para el análisis. Una alternativa natural es el modelo autorregresivo y de medias móviles ARMA(p,q):

$$\begin{aligned} Z_t &= \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \\ &\quad - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \end{aligned}$$

Esta clase de modelos es parsimoniosa, en el sentido que puede explicar el fenómeno con modelos potentes que tienen muy pocos parámetros.

Sección 2 | Modelos para Series de Tiempo

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo autorregresivo de orden p

Está dado por

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \cdots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t$$

o

$$\phi\left(p\right) \dot{Z}_t = a_t$$

donde $\phi\left(p\right) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$.
Dado que $\sum_{j=1}^{\infty} \mid \pi_j \mid = \sum_{j=1}^{p} \mid \phi_j \mid < \infty$, el proceso es siempre invertible. Para ser estacionario las raíces de $\phi\left(B\right) = 0$ deben estar fuera del círculo unidad.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo autorregresivo de primer orden AR(1)

Para este proceso escribimos

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + a_t$$

o

$$(1 - \phi_1 B)\, \dot{Z}_t = a_t$$

Como se mencionó este proceso es siempre invertible y para que sea estacionario se requiere que las raíces de $(1 - \phi_1 B) = 0$ estén fuera del círculo unidad. Esto es que $\mid \phi_1 \mid < 1$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo AR(1)

La función de autocovarianzas se obtiene como

$$\begin{aligned} E\left(\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_t\right) &= E\left(\phi_1\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_{t-1}\right) + E\left(\dot{Z}_{t-k}a_t\right) \\ \gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1}, \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

así, la acf es

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} = \phi_1^k, \qquad k \geq 1$$

con $\rho_0 = 1$. Además, como $\mid \phi_1 \mid < 1$ y el proceso es estacionario, la acf decae exponencialmente con todas la autocorrelaciones positivas si $0 < \phi < 1$ o con signos alternados si $-1 < \phi_1 < 0$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Pacf del modelo AR(1)

Para este modelo

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo autorregresivo de segundo orden AR(2)

Para este modelo se tiene

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + a_t$$

o

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) \dot{Z}_t = a_t$$

Este proceso es siempre invertible y para que sea estacionario se requiere que las raíces de $\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) = 0$ estén fuera del círculo unidad, lo cual implica que

$$\begin{cases} \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo AR(2)

La función de autocovarianzas se obtiene como

$$\begin{aligned} E\left(\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_t\right) &= E\left(\phi_1\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_{t-1}\right)+E\left(\phi_2\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_{t-2}\right)+E\left(\dot{Z}_{t-k}a_t\right) \\ \gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}, \qquad k\geq 1 \end{aligned}$$

así, la acf es

$$\rho_k=\phi_1\rho_{k-1}+\phi_2\rho_{k-2}, \qquad k\geq 1$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo AR(2)

Específicamente cuando $k = 1$ y 2

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Pacf del modelo AR(2)

Dado que

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$$

para $k \geq 1$, se sigue que

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 - \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right)^2} = \phi_2$$

y $\phi_{kk} = 0$, para $k \geq 3$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo autorregresivo de orden p, AR(p)

Está dado por

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + \cdots + \phi_p \dot{Z}_{t-p}$$

o

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) \dot{Z}_t = a_t$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo AR(p)

Premultiplicando por $\dot{Z}_{t-k}$ en el modelo y tomando esperanza

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \cdots \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k \geq 1$$

de esta forma la función de autocorrelación tiene la forma recursiva

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k \geq 1$$

Pacf del modelo AR(p)
Esta es tal que

$$\begin{cases} \phi_{kk} \neq 0, & k = 1, 2, \ldots, p \\ \phi_{kk} = 0, & k > p \end{cases}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo de medias móviles de orden q

Está dado por

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

o

$$Z_t = \mu + \theta(B) a_t$$

donde $\theta(q) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$.
Dado que $\sum_{j=1}^{\infty} \mid \theta_j \mid = \sum_{j=1}^{q} \mid \theta_j \mid < \infty$, el proceso es siempre estacionario. Para que sea invertible las raíces de $\theta(B) = 0$ deben estar fuera del círculo unidad.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo de medias móviles de primer orden MA(1)

Para este proceso escribimos

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

o

$$Z_t = \mu + (1 - \theta_1 B) a_t$$

Este proceso es siempre estacionario y para que sea invertible se necesita que las raíces de $(1 - \theta_1 B) = 0$ estén fuera del círculo unidad. Esto es que $\mid \theta_1 \mid < 1$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo MA(1)

La función de autocovarianzas se obtiene como

$$E\left(\dot{Z}_t\dot{Z}_{t+k}\right) = E\left(\dot{Z}_t a_{t+k}\right) - E\left(\theta_1\dot{Z}_t a_{t+k-1}\right)$$

pero $E\left(\dot{Z}_t a_{t+k}\right) = 0$ si $k > 0$, y si $k = 0$,

$$E\left(\dot{Z}_t a_t\right) = E\left(a_t^2\right) - \theta_1 E\left(a_{t-1}a_t\right) = \sigma_a^2$$

Además, $E\left(\dot{Z}_t a_{t+k-1}\right) = 0$ si $k > 1$,

$$E\left(\dot{Z}_t a_{t+k-1}\right) = \begin{cases} \sigma_a^2, & \text{si } k = 1 \\ -\theta_1\sigma_a^2 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

dado que

$$E\left(\dot{Z}_t a_{t-1}\right) = E\left(a_t a_{t-1}\right) - E\left(\theta_1 a_{t-1}^2\right) = -\theta_1\sigma_a^2$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo MA(1)

Así,

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2\left(1+\theta_1^2\right), & \text{si } k=0 \\ -\theta_1\sigma_a^2, & \text{si } k=1 \\ 0, & \text{si } k>1 \end{cases}$$

De este modo, la acf del modelo es

$$\rho_k = \begin{cases} -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k>1 \end{cases}$$

Dado que $\mid \theta_1 \mid < 1$ para que el proceso sea estacionario, entonces $\mid \rho_1 \mid < 1/2$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Pacf del modelo MA(1)

Para este modelo se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= \rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\
\phi_{22} &= \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^2}{\left(1+\theta_1^2+\theta_1^4\right)} = \frac{-\theta_1^2\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^6} \\
\phi_{33} &= \frac{-\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3}{\left(1+\theta_1^2+\theta_1^4+\theta_1^6\right)} = \frac{-\theta_1^3\left(1-\theta_1^2\right)}{1-\theta_1^8} \\
&\vdots \\
\phi_{kk} &= \frac{-\theta_1^k\left(1-\theta_1^{k-1}\right)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}
\end{aligned}$$

La pacf de este modelo decae exponencialmente y los valores de ϕ_{kk} son tales que$\mid \phi_{kk} \mid < 1/2$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo de medias móviles de segundo orden MA(2)

Para este proceso escribimos

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

o

$$Z_t = \mu + \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2\right) a_t$$

Este proceso es siempre estacionario y para que sea invertible se necesita que las raíces de $\left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2\right) = 0$ estén fuera del círculo unidad. Esto es que

$$\begin{cases} \theta_2 - \theta_1 < 1 \\ \theta_2 + \theta_1 < 1 \\ -1 < \theta_2 < 1 \end{cases}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo MA(2)

La función de autocovarianzas se puede obtener usando la función generadora de autocovarianzas

$$\begin{aligned}\gamma(B) &= \sigma_a^2\theta(B)\theta\left(B^{-1}\right)\\ &= \sigma_a^2\left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2\right)\left(1-\theta_1 B^{-1}-\theta_2 B^{-2}\right)\\ &= \sigma_a^2\left\{-\theta_2 B^{-2}+\left(\theta_1\theta_2-\theta_1\right)B^{-1}+\right.\\ &\quad \left.\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)B^0+\left(\theta_1\theta_2-\theta_1\right)B^1-\theta_2 B^2\right\}\end{aligned}$$

De esta forma

$$\gamma_k = \begin{cases}\sigma_a^2\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right), & \text{si } k=0\\ -\sigma_a^2\theta_1\left(1-\theta_2\right), & \text{si } k=1\\ -\sigma_a^2\theta_2, & \text{si } k=2\\ 0, & \text{si } k\geq 3\end{cases}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo MA(2)

y la acf

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)}, & \text{si } k=1 \\ \frac{-\theta_2}{\left(1+\theta_1^2+\theta_2^2\right)}, & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Pacf del modelo MA(2)

Para este proceso la pacf decae exponencialmente o como ondas amortiguadas dependiendo del signo y la magnitud de θ_1 y θ_2 y si las raíces de $\theta(B) = 0$ son reales o complejas.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo de medias móviles orden q, MA(q)

Está dado por

$$\dot{Z}_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right) a_t$$

con varianza

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2$$

con $\theta_0 = 1$ y con función de autocovarianza

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 \left(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q\right), & k = 1, 2, ..., q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo de medias móviles orden q, MA(q)

Así la acf toma la forma

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\cdots\theta_q^2}, & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

Para la pacf se tiene que esta decae exponencialmente o como ondas amortiguadas o como una mixtura de estas, dependiendo de las raíces de $\theta(B) = 0$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Relaciones de dualidad entre los procesos

Para un proceso estacionario AR(p),

$$\phi_p(B)\,\dot{Z}_t = a_t$$

donde $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)$, se puede escribir como

$$\dot{Z}_t = \frac{1}{\phi_p(B)} a_t = \psi(B)\, a_t$$

con $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots$, tal que

$$\phi_p(B)\,\psi(B) = 1$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Relaciones de dualidad entre los procesos

Así, por ejemplo, para un proceso AR(2)

$$\begin{aligned}\dot{Z}_t &= \frac{1}{(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)}a_t \\ &= \left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\cdots\right)a_t\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2\right)\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\cdots\right)=1$$

esto es

$$\begin{array}{rrr} 1+\psi_1 B+ & \psi_2 B^2+ & \psi_3 B^3+\cdots \\ -\psi_1 B- & \psi_1\phi_1 B^2- & \psi_2\phi_1 B^3-\cdots \\ & -\phi_2 B^2- & \psi_1\phi_2 B^3-\cdots=1 \end{array}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Relaciones de dualidad entre los procesos

Así,

$$\begin{array}{lrcl} B^1: & \psi_1 - \phi_1 = 0 & \rightarrow & \psi_1 = \phi_1 \\ B^2: & \psi_2 - \psi_1\phi_1 - \phi_2 = 0 & \rightarrow & \psi_2 = \psi_1\phi_1 + \phi_2 \\ B^3: & \psi_3 - \psi_2\phi_1 - \psi_1\phi_2 = 0 & \rightarrow & \psi_3 = \psi_2\phi_1 + \psi_1\phi_2 \\ \vdots & & & \end{array}$$

de donde, para $j \geq 2$

$$\psi_j = \psi_{j-1}\phi_1 + \psi_{j-2}\phi_2$$

donde $\psi_0 = 1$. En el caso especial $\phi_2 = 0$, se tiene que $\psi_j = \phi_1^j$ para $j \geq 0$, de donde

$$\begin{aligned} \dot{Z}_t &= \frac{1}{(1-\phi_1 B)} a_t \\ &= \left(1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \cdots\right) a_t \end{aligned}$$

Esto implica que un proceso finito AR estacionario es equivalente a un proceso de orden infinito MA.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Relaciones de dualidad entre los procesos

Dado un proceso MA(q) invertible,

$$\dot{Z}_t = \theta_q(B)\, a_t$$

con $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$, se puede reescribir como

$$\pi(B)\, \dot{Z}_t = \frac{1}{\theta_q(B)} \dot{Z}_t = a_t$$

donde

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots = \frac{1}{\theta_q(B)}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Relaciones de dualidad entre los procesos

Así, por ejemplo, el proceso MA(2) se puede escribir como

$$\left(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots\right) \dot{Z}_t = a_t$$

donde $\pi_1 = -\theta_1$, $\pi_2 = \pi_1\theta_1 - \theta_2$ y

$$\pi_j = \pi_{j-1}\theta_1 + \pi_{j-2}\theta_2, \quad \text{para } j \geq 3$$

Cuando $\theta_2 = 0$ se tiene el proceso MA(1) con $\pi_j = -\theta_1^j$ para $j \geq 1$.
Así, un proceso invertible MA(q) es equivalente a un proceso de orden infinito AR

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo Autorregresivo y de Medias Móviles ARMA(p, q)

El proceso mixto ARMA(p, q) se puede escribir como

$$\phi_p(B)\,\dot{Z}_t = \theta_q(B)\,a_t$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_p(B) &= 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p \\ \theta_q(B) &= 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\end{aligned}$$

para que el proceso sea invertible se requiere que las raíces de $\theta_q(B) = 0$ estén fuera del círculo unidad y para que sea estacionario se requiere que las raíces de $\phi_p(B) = 0$ estén también fuera del círculo unidad.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo Autorregresivo y de Medias Móviles ARMA(p, q)

El proceso estacionario e invertible ARMA(p, q) puede escribirse en sus representaciones AR y MA de orden infinito como

$$\begin{aligned} \phi(B)\,\dot{Z}_t &= a_t \\ \dot{Z}_t &= \psi(B)\,a_t \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \pi(B) &= 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots \\ \psi(B) &= 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots \end{aligned}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo ARMA(p, q)

Escribiendo el proceso como

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \cdots + \phi_2 \dot{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

y multiplicando $\dot{Z}_{t-k}$ por a ambos lados y tomando valor esperado

$$\begin{aligned} \gamma_k \quad = \quad & \phi_1 \gamma_{k-1} + \cdots + \phi_2 \gamma_{k-p} + \\ & E\left(a_t \dot{Z}_{t-k}\right) - \theta_1 E\left(a_{t-1} \dot{Z}_{t-k}\right) - \\ & \cdots - \theta_q E\left(a_{t-q} \dot{Z}_{t-k}\right) \end{aligned}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo ARMA(p, q)

pero

$$E\left(\dot{Z}_{t-k}a_{t-i}\right) = 0 \qquad \text{para } k > i$$

de donde

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \cdots + \phi_2\gamma_{k-p}, \qquad k > q$$

y por tanto

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \cdots + \phi_2\rho_{k-p}, \qquad k > q$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Pacf del modelo ARMA(p, q)

Dado que este proceso contiene el proceso MA como un caso particular, su pacf contiene contiene una mixtura de decaimientos exponencial o de ondas amortiguadas dependiendo de las raíces de $\phi_p(B) = 0$ y $\theta_q(B) = 0$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo ARMA(1,1)

Está dado por

$$(1-\phi_1 B)\,\dot{Z}_t = (1-\theta_1 B)\,a_t$$

o

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Para que este proceso sea estacionario se requiere que $\mid \phi_1 \mid < 1$ y para que sea invertible $\mid \theta_1 \mid < 1$.

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo ARMA(1,1)

Este proceso tiene representación autorregresiva pura

$$\pi(B)\dot{Z}_t = a_t$$

donde

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots = \frac{1-\phi_1 B}{1-\theta_1 B}$$

de donde

$$\begin{aligned}(1-\theta_1 B)\left(1-\pi_1 B-\pi_2 B^2-\cdots\right) &= 1-\phi_1 B\\ 1-(\pi_1+\theta_1)B-(\pi_2-\pi_1\theta_1)B^2 & \\ -(\pi_3-\pi_2\theta_1)B^3-\cdots &= 1-\phi_1 B\end{aligned}$$

y así,

$$\pi_j = \theta_1^{j-1}(\phi_1-\theta_1), \qquad j \geq 1$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Modelo ARMA(1,1)

También podemos escribir el proceso en su representación MA como

$$\dot{Z}_t = \psi(B)\, a_t = \frac{1-\theta_1 B}{1-\phi_1 B} a_t$$

con $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots$ y

$$\psi_j = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1)$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo ARMA(1,1)

La función de autocovarianza la podemos conseguir como

$$\gamma_k = E\left(\dot{Z}_{t-k}\dot{Z}_t\right) = \phi_1\gamma_{k-1} + E\left(\dot{Z}_{t-k}a_t\right) - \theta_1 E\left(\dot{Z}_{t-k}a_{t-1}\right)$$

Luego cuando $k = 0$

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + E\left(\dot{Z}_t a_t\right) - \theta_1 E\left(\dot{Z}_t a_{t-1}\right)$$

con

$$E\left(\dot{Z}_t a_t\right) = \sigma_a^2$$

y

$$E\left(\dot{Z}_t a_{t-1}\right) = \left(\phi_1 - \theta_1\right)\sigma_a^2$$

Así,

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1\left(\phi_1 - \theta_1\right)\sigma_a^2$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo ARMA(1,1)

Cuando $k = 1$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2$$

Así,

$$\gamma_0 = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2$$

y

$$\gamma_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2$$

y para $k \geq 2$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$$

Modelos para series de tiempo estacionarias

Acf del modelo ARMA(1,1)

- De esta forma se sigue que la acf del modelo ARMA(1,1) es

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}, & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1}, & k \geq 2 \end{cases}$$

- La ACF de un proceso ARMA(1,1) combina las características tanto de proceso AR(1) como de un proceso MA(1). El parámetro de medias móviles θ_1 entra en el cálculo de ρ_1. Más allá de $k = 1$, la ACF del proceso ARMA(1,1) sigue el mismo patrón de comportamiento de un proceso AR(1).

Modelos para series de tiempo estacionarias

Pacf del modelo ARMA(1,1)

- La forma general de la PACF de un modelo mixto es complicada y no se necesita derivar.
- Basta con observar que debido a que el proceso ARMA(1,1) contiene el proceso MA(1) como caso especial.
- Entonces la PACF del proceso ARMA(1,1) decae exponencialmente como la ACF.
- Su forma depende de los signos y magnitudes de los parámetros ϕ_1 y θ_1.

Modelos para series no estacionarias

Los procesos de series de tiempo discutidos anteriormente son todos procesos estacionarios, pero muchas series de tiempo aplicadas son no estacionarias.

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en media

Modelos con tendencia determinística

La función de medias de un proceso no estacionario puede ser representada por una tendencia determinística del tiempo. En tales casos, puede ser usado un modelo de regresión estándar para describir el fenomeno. Por ejemplo si la función de medias μ_t sigue una tendencia lineal, $\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$, entonces se puede usar el modelo

$$Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + a_t$$

con a_t RB de media cero.

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en media

Modelos con tendencia determinística

Más generalmente, si la tendencia determinística se puede describir por un polinomio de orden k, se puede modelar el proceso por

$$Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k + a_t$$

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en media

Modelos con tendencia determinística

Si la tendencia determinística se puede representar por una curva seno-coseno, se puede usar

$$Z_t = v_0 + v\cos(wt+\theta) + a_t = v_0 + \alpha\cos(wt) + \beta\sin(wt) + a_t$$

donde $\alpha = v\cos\theta,\ \beta = -v\sin(\theta),\ v = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ y$\theta = \tan^{-1}(-\beta/\alpha)$
Más generalmente

$$Z_t = v_0 + \sum_{j=1}^{m}(\alpha_j \cos w_j t + \beta_j \sin w_j t) + a_t$$

llamado el modelo de periodicidad oculta.

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en media

Modelos con tendencia estocástica

Existen algunas series en las cuales sus diferentes tramos no parecen ser muy diferentes, a excepción del nivel de la serie. Este tipo de comportamiento ha sido denominado no estacionaridad homogénea y en estas series su comportamiento local es independiente de su nivel. Por lo tanto, si $\Psi(B)$ el operador autorregresivo que describe el comportamiento, se tiene que

$$\Psi(B)(Z_t + C) = \Psi(B) Z_t$$

para cualquier C constante. Esta ecuación implica que

$$\Psi(B) = \phi(B)(1 - B)^d$$

para algún $d > 0$, donde $\phi(B)$ es un operador autorregresivo estacionario. Así, una serie no estacionaria homogenea se puede convertir a una serie estacionaria diferenciando apropiadamente la serie.

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en media

Modelos con tendencia estocástica

Por ejemplo, considere el modelo AR(1) no estacionario

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t$$

y observe que $Z_t - Z_{t-1} = a_t$ es estacionaria. Así, $Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)\, Z_t = \Delta Z_t$ es la primera diferencia de Z_t y se dice que la serie Z_t tiene una raíz unitaria.
En general, si la d-ésima diferencia de una serie Z_t es ruido blanco, entonces $(1 - B)^d\, Z_t = a_t$. En este caso, Z_t tiene d raíces unitarias.

Modelos para series no estacionarias

Modelos autorregresivos integrados de medias móviles (ARIMA)

Considere una serie homogénea no estacionaria Z_t. Se dice que Z_t sigue un proceso ARIMA(p,d,q) si la d-ésima diferencia sigue un proceso estacionario ARMA(p,q). En este caso escribimos

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_0 + \theta_q(B)a_t$$

El parámetro θ_0 juega papeles muy distintos cuando $d = 0$ y cuando $d > 0$. Cuando $d = 0$, el proceso original es estacionario y θ_0 está relacionado con la media del proceso original. Cuando $d > 0$, θ_0 es llamado término de tendencia determinística, y es omitido del modelo a menos que realmente sea necesario.

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en varianza y autocovarianza

Un proceso estacionario en media no necesariamente es estacionario en varianza y autocovarianza. Para estacionarizar una serie que no sea estacionaria en varianza con frecuencia se emplea una transformación potencial que permita estabilizar la varianza.

Es muy frecuente que un proceso no estacionario su varianza cambie a medida que cambia su nivel, es decir,

$$Var\left(Z_t\right) = cf\left(\mu_t\right)$$

para alguna constante c y f positivas y f monótona. En estos casos es posible encontrar una transformación $T\left(Z_t\right)$ de forma tal que $Var\left(T\left(Z_t\right)\right)$ sea constante.

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en varianza y autocovarianza

Considere la aproximación de $T(Z_t)$ usando series de Taylor alrededor de μ_t,

$$T(Z_t) \approx T(\mu_t) + T'(\mu_t)(Z_t - \mu_t)$$

donde $T'(\mu_t)$ es la primera derivada de $T(Z_t)$ evaluada en μ_t.
Entonces

$$Var(T(Z_t)) \approx \left[T'(\mu_t)\right]^2 Var(Z_t) = \left[T'(\mu_t)\right]^2 cf(\mu_t)$$

Para que la $Var(T(Z_t))$ sea constante, se debe elegir

$$T'(\mu_t) = \frac{1}{\sqrt{f(\mu_t)}}$$

lo que implica que

$$T(\mu_t) = \int \frac{1}{\sqrt{f(\mu_t)}} d\mu_t$$

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en varianza y autocovarianza

- Si $Var\left(Z_t\right) = c^2\mu_t^2$, entonces

$$T\left(\mu_t\right) = \int \frac{1}{\sqrt{\mu_t^2}} d\mu_t = \ln \mu_t$$

  en este caso se usa la transformación $\ln Z_t$.

- Si $Var\left(Z_t\right) = c\mu_t$, entonces

$$T\left(\mu_t\right) = \int \frac{1}{\sqrt{\mu_t}} d\mu_t = 2\sqrt{\mu_t}$$

  en este caso se usa la transformación $\sqrt{Z_t}$.

- Si $Var\left(Z_t\right) = c^2\mu_t^4$, entonces

$$T\left(\mu_t\right) = \int \frac{1}{\sqrt{\mu_t^4}} d\mu_t = -\frac{1}{\mu_t}$$

  en este caso se usa la transformación $1/Z_t$.

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en varianza y autocovarianza

Más generalmente, se puede usar la transformación de potencia de Box y Cox (1964)

$$T(Z_t) = Z_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{Z_t^{\lambda}-1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \ln Z_t & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

con λ es llamado el parámetro de la transformación. El valor de λ se obtiene como el valor que minimiza

$$S(\lambda) = \sum_{t=1}^{n} \left(Z_t^{(\lambda)} - \bar{Z}_t^{(\lambda)} \right)$$

donde $\bar{Z}_t^{(\lambda)}$ es la media de la serie transformada usando λ.

Modelos para series no estacionarias

No estacionariedad en varianza y autocovarianza

Puesto que para cada λ, la suma $S(\lambda)$ está medida en una escala diferente, el valor de λ no puede ser directamente seleccionado por la comparación de $S(\lambda)$ para diferentes valores de λ. Para hacerlas comparables debemos reemplazar $Z_t^{(\lambda)}$ por

$$T(Z_t) = Z_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{Z_t^{\lambda}-1}{\lambda \tilde{Z}^{\lambda-1}} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \tilde{Z} \ln Z_t & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

donde $\tilde{Z} = \left(\prod_{t=1}^{n} Z_t\right)^{1/n}$ es la media geométrica de las observaciones Z_t.

Modelos para series no estacionarias

Observaciones sobre la transformación de Box y Cox

- Sólo está definida para series positivas. Sin embargo, si una serie tiene valores negativos, la transformación puede ser usada sumando una constante a la serie de forma tal que se vuelva toda positiva. Esto no altera la estructura de correlación de la serie.
- Si es necesaria una transformación para estabilizar varianza, debe obtenerse antes de hacer cualquier otro análisis tal como diferenciar la serie.
- Frecuentemente, la transformación no solamente estabiliza la varianza, sino que puede mejorar la aproximación a la normalidad del proceso.

Sección 3 | Pronóstico

Pronóstico

Pronóstico

Uno de los principales objetivos del análisis de series de tiempo es el pronóstico o predicción de observaciones futuras. El modelo considerado aquí es el ARIMA(p,d,q)

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B) a_t$$

con a_t un proceso $N\left(0, \sigma_a^2\right)$. Por simplicidad el parámetro de tendencia determinística es omitido sin pérdida de generalidad.

Pronóstico

Pronóstico de mínimo error cuadrático medio

Considere primero el modelo estacionario, con $d = 0$ y $\mu = 0$,

$$\phi_p(B)\,Z_t = \theta_q(B)\,a_t$$

el cual tiene representación de medias móviles dada por

$$Z_t \quad = \quad \psi(B)\,a_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \cdots$$

donde

$$\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$$

y $\psi_0 = 1$. Para $t = n + l$, se tiene

$$Z_{n+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{n+l-j}$$

Pronóstico

Pronóstico de mínimo error cuadrático medio

Suponga que en el tiempo $t = n$ se tienen las observaciones Z_n, Z_{n-1},..., y queremos pronosticar l-pasos adelante el valor futuro Z_{n+l} como una combinación lineal de las observaciones Z_n, Z_{n-1},....
Dado Z_t para $t = n, n-1, \ldots$, sea

$$\hat{Z}_n(l) = \psi_l^* a_n + \psi_{l+1}^* a_{n-1} + \cdots$$

el pronóstico de Z_{n+l} de mínimo error cuadrático medio.

Pronóstico

Pronóstico de mínimo error cuadrático medio

El error cuadrático medio de pronóstico es

$$E\left(Z_{n+l} - \hat{Z}_n(l)\right)^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2 + \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^*\right]^2$$

el cual se minimiza cuando $\psi_{l+j} = \psi_{l+j}^*$. De donde

$$\hat{Z}_n(l) = \psi_l a_n + \psi_{l+1} a_{n-1} + \cdots$$

Pronóstico

Pronóstico de mínimo error cuadrático medio

Pero, teniendo en cuenta que

$$E\left(a_{n+j} \mid Z_n, Z_{n-1}, \ldots\right) = \begin{cases} 0, & j > 0 \\ a_{n+j}, & j \leq 0 \end{cases}$$

de donde

$$E\left(Z_{n+l} \mid Z_n, Z_{n-1}, \ldots\right) = \psi_1 a_n + \psi_{l-1} a_{n-1} + \cdots$$

Así, el pronóstico de mínimo error cuadrático medio de Z_{n+l} está dado por la esperanza condicional

$$\hat{Z}_n(l) = E\left(Z_{n+l} \mid Z_n, Z_{n-1}, \ldots\right)$$

Pronóstico

Pronóstico de mínimo error cuadrático medio

El error de pronóstico es

$$e_n(l) = Z_{n+l} - \hat{Z}_n(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j a_{n+l-j}$$

Dado que $E\left(e_n(l) \mid Z_t,\ t \leq n\right) = 0$, el pronóstico es insesgado con varianza

$$Var\left(e_n(l)\right) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2$$

Pronóstico

Pronóstico de mínimo error cuadrático medio

Para un proceso normal, un IC del $100\,(1-\alpha)$ % para el pronóstico es

$$\hat{Z}_n\,(l) \pm z_{\alpha/2} \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2\right)^{1/2} \sigma_a$$

El error de pronóstico un paso adelante es

$$e_n\,(1) = Z_{n+1} - \hat{Z}_n\,(1) = a_{n+1}$$

y por tanto es independiente. Esto implica que $\hat{Z}_n\,(1)$ es el mejor pronóstico de Z_{n+1}.

Pronóstico

Pronóstico de Mínimo ECM para modelos arima

Considere ahora el caso en el que $d \neq 0$. Conocida la serie hasta el tiempo n, el pronóstico optimo de Z_{n+l} está dado por la esperanza condicional

$$E\left(Z_{n+l} \mid Z_n, Z_{n-1}, \ldots\right)$$

Reescribiendo el modelo en el tiempo $t+l$ en su representación AR, se tiene

$$\pi\left(B\right) Z_{t+l} = a_{t+l}$$

donde

$$\pi\left(B\right) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j = \frac{\phi\left(B\right)\left(1-B\right)^d}{\theta\left(B\right)}$$

Pronóstico

Pronóstico de Mínimo ECM para modelos arima

o equivalentemente

$$Z_{t+l} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t+l-j} + a_{t+l}$$

y aplicando el operador $1 + \psi_1 B + \cdots + \psi_{l-1} B^{l-1}$ se obtiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l-1} \pi_j \psi_k Z_{t+l-j-k} + \sum_{k=0}^{l-1} \psi_k a_{t+l-k} = 0$$

donde $\pi_0 = -1$ y $\psi_0 = 1$.

Pronóstico

Pronóstico de mínimo ECM para modelos arima

Por otra parte, se puede mostrar que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l-1}\pi_j\psi_k Z_{t+l-j-k} = \pi_0 Z_{t+l} + \sum_{m=1}^{l-1}\sum_{i=0}^{m}\pi_{m-i}\psi_i Z_{t+l-m} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{l-1}\pi_{l-1+j-i}\psi_i Z_{t-j+1}$$

Seleccionando ψ tal que $\sum_{i=0}^{m}\pi_{m-i}\psi_i = 0$, para $m = 1, \ldots, l-1$ se tiene

$$\pi_j^{(l)} = \sum_{i=0}^{l-1}\pi_{l-1+j-i}\psi_i$$

Pronóstico

Pronóstico de mínimo ECM para modelos arima

Así, dado Z_t, para $t \leq n$,

$$\hat{Z}_n(l) = E\left(Z_{n+l} \mid Z_t, t \leq n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j^{(l)} Z_{n-j+1}$$

Pronóstico

Pronóstico de mínimo ECM para modelos arima

Dado que $E\left(a_{n+j} \mid Z_t, t \leq n\right) = 0$, para $j > 0$. El error de pronóstico es

$$e_n\left(l\right) = Z_{n+l} - \hat{Z}_n\left(l\right) = \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j a_{n+l-j}$$

donde los ψ_j se pueden calcular recursivamente como

$$\psi_j = \sum_{i=0}^{j-1} \pi_{j-i}\psi_i, \qquad j = 1, \ldots, l-1$$

Pronóstico

Cálculo de Pronósticos

El pronóstico de mínimo error cuadrático medio de Z_{n+l} es la esperanza condicional

$$\hat{Z}_n(l) = E\left(Z_{n+l} \mid Z_n, Z_{n-1}, \dots\right)$$

Sea

$$\psi(B) = \phi(B)(1-B)^d = 1 - \psi_1 B - \cdots - \psi_{p+d} B^{p+d}$$

el modelo ARIMA(p,d,q) puede escribirse como

$$\begin{aligned} Z_{n+l} &= \psi_1 Z_{n+l-1} + \psi_2 Z_{n+l-2} + \cdots + \psi_{p+d} Z_{n+l-p-d} \\ &\quad + a_{n+l} - \theta_1 a_{n+l-1} - \cdots - \theta_q a_{n+l-q} \end{aligned}$$

Pronóstico

Cálculo de Pronósticos

Tomando esperanza condicional

$$\begin{aligned}\hat{Z}_n(l) &= \psi_1 \hat{Z}_n(l-1) + \cdots + \psi_{p+d}\hat{Z}_n(l-p-d) \\ &\quad + \hat{a}_n(l) - \theta_1 \hat{a}_n(l-1) - \cdots - \theta_q \hat{a}_n(l-q)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{Z}_n(j) &= E\left(Z_{n+j} \mid Z_n, Z_{n-1}, \ldots\right), & j \geq 1 \\ \hat{Z}_n(j) &= Z_{n+j}, & j \leq 0 \\ \hat{a}_n(j) &= 0, & j \geq 1\end{aligned}$$

y

$$\hat{a}_n(j) = Z_{n+j} - \hat{Z}_{n+j-1}(1) = a_{n+j}, \quad j \leq 0$$

Pronóstico

Ejemplo

Considere el pronóstico l pasos adelante para el modelo ARIMA(1,0,1):

$$(1-\phi B)(Z_t-\mu)=(1-\theta B)\,a_t$$

Para $t=n+l$,

$$Z_{n+l}=\mu+\phi\left(Z_{n+l-1}-\mu\right)+a_{n+l}-\theta a_{n+l-1}$$

Tomando esperanza condicional, se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_n(1) &= \mu+\phi\left(Z_n-\mu\right)-\theta a_n \\
\hat{Z}_n(2) &= \mu+\phi\left(\hat{Z}_n(1)-\mu\right) \\
&= \mu+\phi\left(\mu+\phi\left(Z_n-\mu\right)-\theta a_n-\mu\right) \\
&= \mu+\phi^2\left(Z_n-\mu\right)-\phi\theta a_n
\end{aligned}$$

y en general $\hat{Z}_n(l)=\mu+\phi^l\left(Z_n-\mu\right)-\phi^{l-1}\theta a_n$.

Pronóstico

Varianza del error de pronóstico

$$Var\left(e_n\left(l\right)\right) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2$$

pero de la relación

$$\left(1-\phi B\right)\left(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\cdots\right) = \left(1-\theta B\right)$$

se puede mostrar que

$$\psi_j = \phi^{j-1}\left(\phi-\theta\right), \qquad j \geq 1$$

Así

$$Var\left(e_n\left(l\right)\right) = \sigma_a^2 \left\{1+\sum_{j=1}^{l-1}\left[\phi^{j-1}\left(\phi-\theta\right)\right]^2\right\}$$

Pronóstico

Ejemplo

Considere la serie `lh` de `R`. Asumiendo que a esta la rige el modelo AR(1) de parámetros $\phi_1 = 0{,}6$, $\mu = 2{,}4$ y $\sigma_a^2 = 0{,}1$, el pronóstico l pasos adelante se puede conseguir como

$$\hat{Z}_n(l) = \mu + \phi^l (Z_n - \mu)$$

y como $Z_n = 2{,}9$, entonces para $l \leq 5$, $\hat{Z}_n(1) = 2{,}70$, $\hat{Z}_n(2) = 2{,}58$, $\hat{Z}_n(3) = 2{,}51$, $\hat{Z}_n(4) = 2{,}47$ y $\hat{Z}_n(5) = 2{,}44$.

Pronóstico

Ejemplo

Por otra parte se tiene que

$$\psi_j = \phi_1^j, \qquad j \geq 0$$

de donde

$$Var\left(e_n\left(l\right)\right) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} \phi_1^{2j} = 0{,}1 \sum_{j=0}^{l-1} 0{,}36^j$$

Para $l = 5$, $Var\left(e_n\left(1\right)\right) = 0{,}1$, $Var\left(e_n\left(2\right)\right) = 0{,}136$, $Var\left(e_n\left(3\right)\right) = 0{,}149$, $Var\left(e_n\left(4\right)\right) = 0{,}154$ y $Var\left(e_n\left(5\right)\right) = 0{,}155$.

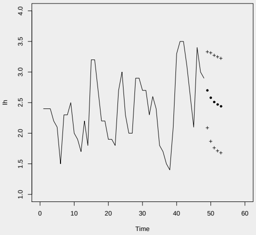
Pronóstico

Ejemplo

Graficamente, junto con los intervalos de confianza normales para el pronóstico

$$\hat{Z}_n(l) \pm 1{,}96 \left(0{,}1^2 \sum_{j=0}^{l-1} 0{,}36^j \right)^{1/2}$$

se tiene



Pronóstico

Actualización de Pronósticos

Para el modelo ARIMA, el error de pronostico es

$$e_n(l) = Z_{n+l} - \hat{Z}_n(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j a_{n+l-j}$$

En particular, el error de pronóstico un paso adelante es

$$e_n(1) = Z_{n+1} - \hat{Z}_n(1) = a_{n+1}$$

y por tanto

$$e_{n-1}(1) = Z_n - \hat{Z}_{n-1}(1) = a_n$$

Además,

$$\begin{aligned} e_{n-1}(l+1) &= Z_{n-1+l+1} - \hat{Z}_{n-1}(l+1) \\ &= Z_{n+l} - \hat{Z}_{n-1}(l+1) \end{aligned}$$

Pronóstico

Actualización de Pronósticos

pero

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{n-1}(l+1) &= \psi_{l+1}a_{n-1} + \psi_{l+2}a_{n-2} + \cdots \\ &= \hat{Z}_n(l) - \psi_l a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{n-1}(l+1) &= Z_{n+l} - \hat{Z}_n(l) + \psi_l a_n \\ &= e_n(l) + \psi_l a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_n(l) &= \hat{Z}_{n-1}(l+1) + \psi_l a_n \\ &= \hat{Z}_{n-1}(l+1) + \psi_l \left(Z_n - \hat{Z}_{n-1}(1)\right) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\hat{Z}_{n+1}(l) = \hat{Z}_n(l+1) + \psi_l \left(Z_{n+1} - \hat{Z}_n(1)\right)$$

Sección 4 | Identificación de Modelos

Identificación de modelos

Considerando el modelo ARIMA(p,d,q) general

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)(1 - B)^d Z_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \cdots \theta_q B^q)$$

la metodología de identificación de modelos se refiere a identificar las transformaciones equeridas (estabilización de varianza y diferenciación), decidir si se incluye el parámetro determinístico θ_0 cuando $d \geq 1$ y los órdenes apropiados de p y q para el modelo.

Identificación de modelos

Pasos para la idetificación

- Graficar la serie de tiempo y seleccionar una transformación de potencia apropiada. Luego seleccionar un orden de diferenciación apropiado.
- Calcular y examinar el comportamiento de la ACF y la PACF muestral parala serie transformada y diferenciada para identificar los órdenes p y q en el modelo, teniendo en cuenta las siguientes características teóricas:

Identificación de modelos

Pasos para la idetificación

Proceso	ACF	PACF
AR(p)	Decaimiento exponencial o como ondas amortiguadas	Se corta luego del rezago p
MA(q)	Se corta luego del rezago q	Decaimiento exponencial o como ondas amortiguadas
ARMA(p,q)	Decae luego del rezago $(q - p)$	Decae luego del rezago $(p - q)$

Identificación de modelos

Pasos para la idetificación

- Para determinar si el parámetro θ_0 debe estar incluido en el modelo se puede realizar una prueba t dividiendo la media muestral $\bar{W}$ de la serie diferenciada $W = (1 - B)^d Z_t$ con su error estándar aproximado

$$S_{\bar{W}} = \left[\frac{\hat{\gamma}_0}{n} (1 + 2\hat{\rho}_1 + \cdots ` + 2\hat{\rho}_k) \right]^{1/2}$$

donde $\hat{\gamma}_0$ es la varianza muestral y $\hat{\rho}_1, \ldots, \hat{\rho}_k$ son las primeras k autocorrelaciones muestrales significativas de $\{W_t\}$. Así si la estadística es no significativa entonces no se incluye a θ_0 en el modelo.

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

- Dadas las dificultades de identificación de modelos ARMA con p y q distintos de cero, es necesario un método de identificación de modelos mixtos ARMA más allá de la ACF y la PACF. Este es el caso de la función de autocorrelación muestral extendida (EACF).
- Considere el modelo

$$(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) Z_t = (1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q) a_t$$

de donde

$$Y_t = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) Z_t$$

sigue un modelo MA(q).

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

- Suponga que se tienen n observaciones disponibles de un proceso ARMA(p,q), con p conocido y $q > 0$ desconocido, si se ajusta vía mínimos cuadrados un modelo AR(p) a los datos, esto es

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_1 Z_{t-i} + e_t, \qquad t = p+1, \ldots, n$$

con e_t el término de error, los estimadores de mínimos cuadrados $\hat{\phi}_i^{(0)}$ de ϕ_i, $i = 1, \ldots, p$, serán inconsistentes y los residuales estimados

$$\hat{e}_t^{(0)} = Z_t - \sum_{i=0}^{p} \hat{\phi}_i^{(0)} Z_{t-i}$$

no serán ruido blanco.

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

- Considere ahora el modelo

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_1 Z_{t-i} + \beta_1 \hat{e}_{t-1}^{(0)} + e_t, \qquad t = p+2, \ldots, n$$

Si $q > 1$, los estimadores de mínimos cuadrados $\hat{\phi}_i^{(1)}$ de ϕ_i, $i = 1, \ldots, p$, serán inconsistentes y los residuales estimados $\hat{e}_t^{(1)}$ no serán ruido blanco. Este proceso puede continuar hasta que se consigan estimadores consistentes para ϕ_i y los $\hat{e}_t^{(m)}$ sean ruido blanco.

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

En la páctica el verdadero valor de p no se conoce, pero un procedimiento sugerido consiste en un conjunto de regresiones iteradas para determinar los órdenes p y q. Así, se define la m-ésima EACF $\rho_j^{(m)}$ de Z_t como la función de autocorrelación muestral de $\hat{e}_t^{(m)}$ del modelo ajustado

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_1 Z_{t-i} + \sum_{k=0}^{m} \beta_{k+1} \hat{e}_{t-k+1}^{(k)} + e_t, \qquad t = p + m + 2, \ldots, n$$

Identificación de modelos

Función de autocorrelación muestral extendida

arregladas en una tabla como sigue:

	MA				
AR	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\hat{\rho}_1^{(0)}$	$\hat{\rho}_2^{(0)}$	$\hat{\rho}_3^{(0)}$	$\hat{\rho}_4^{(0)}$	$\cdots$
1	$\hat{\rho}_1^{(1)}$	$\hat{\rho}_2^{(1)}$	$\hat{\rho}_3^{(1)}$	$\hat{\rho}_4^{(1)}$	$\cdots$
2	$\hat{\rho}_1^{(2)}$	$\hat{\rho}_2^{(2)}$	$\hat{\rho}_3^{(2)}$	$\hat{\rho}_4^{(2)}$	$\cdots$
3	$\hat{\rho}_1^{(3)}$	$\hat{\rho}_2^{(3)}$	$\hat{\rho}_3^{(3)}$	$\hat{\rho}_4^{(3)}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

con

$$\hat{\rho}_j^{(m)} \xrightarrow{P} \begin{cases} 0, & 0 \leq m - p < j - q \\ X \neq 0, & \text{e.o.p.} \end{cases}$$

Sección 5 | Estimación de Parámetros

Estimación de parámetros

Parámetros a estimar

Luego de identificar un modelo, el nuevo paso es estimar los parámetros en el modelo. Los parámetros a estimar son:

$$\begin{aligned} \phi &= (\phi_1, \ldots, \phi_p)' \\ \mu &= E(Z_t) \\ \theta &= (\theta_1, \ldots, \theta_q)' \\ \sigma_a^2 &= E\left(a_t^2\right) \end{aligned}$$

del modelo ARMA general

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \cdots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

donde $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$, $t = 1, \ldots, n$ y $\{a_t\}$ iid $N\left(0, \sigma_a^2\right)$.

Estimación de parámetros

El método de los momentos

El método de los momentos consiste en sustituir los momentos muestrales por su contraparte teórica. Por ejemplo en el proceso AR(p)

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \cdots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t$$

la media $\mu = E\left(Z_t\right)$ es estimada por $\bar{Z}$. Para estimar ϕ, usamos el echo que $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}$ para $k \geq 1$ en el sistema de ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-3} & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \cdots & \hat{\rho}_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix}$$

Estimación de parámetros

El método de los momentos

Habiendo obtenido $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_p$ y usando la relación

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \cdots + \phi_p\gamma_p + \sigma_a^2$$

podemos obtener el estimador de momentos de σ_a^2 como

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{\gamma}_0\left(1 - \hat{\phi}_1\hat{\rho}_1 - \cdots - \hat{\phi}_p\hat{\rho}_p\right)$$

Los estimadores de momentos para procesos MA y ARIMA son complicados. En general los estimadores de momentos son muy sensibles a errores de redondeo. Ellos son usados usualmente usados como estimaciones iniciales en métodos más eficientes de estimación.

Estimación de parámetros

El método de máxima verosimilitud condicional

Para el modelo

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \cdots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

la densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)'$ está dada por

$$\Pr\left(\mathbf{a} \mid \phi, \mu, \theta, \sigma_a^2\right) = \left(2\pi\sigma_a^2\right)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^{n} a_t^2\right]$$

y escribiendo

$$a_t = \theta_1 a_{t-1} + \cdots + \theta_q a_{t-q} - \phi_1 \dot{Z}_{t-1} - \cdots - \phi_p \dot{Z}_{t-p}$$

podemos escribir la verosimilitud como función de los parámetros $\left(\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2\right)$.

Estimación de parámetros

El método de máxima verosimilitud condicional

Sea $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)'$ y asumiendo las condiciones iniciales $\mathbf{Z}_* = (Z_{1-p}, \dots, Z_{-1}, Z_0)'$ y $\mathbf{a}_* = (a_{1-q}, \dots, a_{-1}, a_0)'$ conocidas. La función de log verosimilitud es

$$\ln L_* \left(\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2\right) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_a^2 - \frac{S_* \left(\phi, \mu, \theta\right)}{2\sigma_a^2}$$

donde

$$S_* \left(\phi, \mu, \theta\right) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2 \left(\phi, \mu, \theta \mid \mathbf{Z}_*, \mathbf{a}_*, \mathbf{Z}\right)$$

es la función suma de cuadrados condicional. Las cantidades $\hat{\phi}$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\theta}$ que maximizan la log verosimilitud son llamados estimadores máximo verosímiles condicionales.

Estimación de parámetros

El método de máxima verosimilitud condicional

Las condiciones iniciales para $\mathbf{Z}_*$ se pueden tomar como $\bar{Z}$ y para $\mathbf{a}_*$, bajo el supuesto de que a_t se distribuye $N\left(0, \sigma_a^2\right)$, se pueden asumir iguales a cero. Luego de obtener los estimadores de ϕ, μ y θ, se puede conseguir el estimador de σ_a^2 como

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S_*\left(\phi, \mu, \theta\right)}{df}$$

donde df es el número de términos usados en S_* menos el número de parámetros estimados.

Estimación de parámetros

Otros métodos de estimación

Otros métodos de estimación son el método de máxima verosimilitud incondicional, de máxima verosimilitud exacta y los no lineales.

Estimación de parámetros

Selección de modelos

En análisis de series de tiempo varios modelos pueden ser adecuados para representar un conjunto de datos. Un criterio para la selección de modelos basado en los residuales es el AIC de Akaike. Asumiendo que se ajusta un modelo de M parámetros a los datos el criterio de información de Akaike se define como

$$AIC\,(M) = -2\ln\left[\text{máxima verosimilitud}\right] + 2M$$

Según este criterio, la selección del modelo se basa en aquel que tenga un menor valor AIC.

Sección 6 | Series de Tiempo Estacionales

Series de Tiempo Estacionales

Muchas series de tiempo económicas y financieras contienen una componente estacional que se repite después de un período regular de tiempo.

Series de Tiempo Estacionales

Modelos ARIMA estacionales

Es frecuente que la componente estacional sea aleatoria y correlacionada con las otras componentes no estacionales. Suponga que no sabemos que la serie Z_t contiene una componente estacional y ajustamos un modelo ARIMA a la serie, es decir,

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B) b_t$$

Entonces, obviamente la serie b_t no será un proceso de ruido blanco, puesto que contiene las correlaciones entre períodos (estacionales) que no se tuvieron en cuenta.

Series de Tiempo Estacionales

Modelos ARIMA estacionales

Suponga que b_t es un proceso estacionario y sea

$$\rho_{j(S)} = \frac{E\left(b_{t-js} - \mu_b\right)\left(b_t - \mu_b\right)}{\sigma_b^2}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

la función de autocorrelación de b_t, la cual representa las relaciones entre períodos que no se tuvieron en cuenta. Entonces, para un proceso no estacionario b_t estas relaciones también se pueden representar por un modelo ARIMA de la forma

$$\Phi_P\left(B^S\right)\left(1 - B^S\right)^D b_t = \Theta_Q\left(B^S\right) a_t$$

Series de Tiempo Estacionales

Modelos ARIMA estacionales

donde

$$\Phi_P\left(B^S\right) = 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \cdots - \Phi_P B^{PS}$$

y

$$\Theta_Q\left(B^S\right) = 1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2S} - \cdots - \Theta_Q B^{QS}$$

son polinomios en B^S sin factores comunes. Los ceros de estos polinomios caen fuera del círculo unidad y $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco.
Combinando las ecuaciones anteriores, se obtiene el modelo estacional multiplicativo de Box y Jenkins,

$$\Phi_P\left(B^S\right)\phi_p(B)(1-B)^d\left(1-B^S\right)^D \dot{Z}_t = \Theta_Q\left(B^S\right)\theta_q(B)\,a_t$$