



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Instituto de Matemáticas  
Final - Series de Tiempo I

Profesor: Duván Cataño

1. Suppose we would like to predict a single stationary series  $x_t$  with zero mean and autocorrelation function  $\gamma(h)$  at some time in the future, say,  $t + l$ , for  $l > 0$ .

a) If we predict using only  $x_t$  and some scale multiplier  $A$ , show that the mean-square prediction error

$$MSE(A) = \mathbb{E}[(x_{t+l} - Ax_t)^2]$$

is minimized by the value

$$A = \rho(l).$$

b) Show that the minimum mean-square prediction error is

$$MSE(A) = \gamma(0)[1 - \rho^2(l)].$$

c) Show that if  $x_{t+l} = Ax_t$ , then  $\rho(l) = 1$  if  $A > 0$ , and  $\rho(l) = -1$  if  $A < 0$ .

2. Una serie de 400 observaciones presentó los siguientes resultados:

$h$	1	2	3	4	5	6	7
$\phi_{hh}$	0.8	-0.5	0.07	-0,02	-0,01	0.05	0.04

con  $\bar{x}_t = 8$  y  $\mu_0 = 9$ .

- a) Explique por qué podemos ajustar a la serie un modelo AR(2).
- b) Obtenga las estimativas  $\hat{\phi}_1$  y  $\hat{\phi}_2$  del modelo AR(2) utilizando las ecuaciones de Yule-Walker.
- c) Verifique que el modelo ajustado satisface las condiciones de estacionaridad.
- d) Usando  $\hat{\phi}_1$  y  $\hat{\phi}_2$  como verdaderos, describa el comportamiento general de la ACF de ese proceso.

3. Suponga que el modelo  $(1 - B^4)x_t = a_t + a_{t-1} - 0,5a_{t-4}$ , donde  $\sigma_a^2 = 2,25$ , fue ajustado a las observaciones de una serie de datos trimestrales con una muestra de  $T = 100$ .  
Suponga que las observaciones y residuos de los últimos cuatro trimestres son dadas por:

Trimestre	I	II	III	IV
$x_t$	124	121	129	139
$a_t$	2	-1	1	3

- a) Encuentre las predicciones  $x_{100}(l)$ , para  $l = 1, 2, 3, 4$ .  
b) Construya los intervalos de predicción con  $\alpha = 0,05$ .

4. Suponga que el modelo ajustado para  $x_t$  ha sido

$$x_t - x_{t-1} = (1 - 0,5B)b_t,$$

pero los residuos  $b_t$  no son aleatorios. Si el modelo posteriormente identificado para  $b_t$  fue un ARIMA(0, 1, 1), con  $\theta = -0,8$ , ¿cuál es el modelo que debemos considerar para  $x_t$ ?