Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Series de Tiempo II

Profesor: Duván Cataño
25 de Septiembre de 2018

Nombre: ______________________________ Carné: ______________

Nota: *El examen consta de 5 numerales para ser resueltos en un tiempo máximo de 2 horas. Los procedimientos empleados para llegar a cada respuesta deben ser justificados y quedar registrados en el examen.*

1. **(30 %)** Suponga que los residuos $\hat{a}_t$ del modelo $(1-B)x_t = (1+0,6B)a_t$, ajustado de una serie de 80 observaciones, proporcionan las siguientes autocorrelaciones:

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho_{\hat{a}}(h)$	0.39	0.20	0.09	0,04	0,09	-0.08	-0.05	0.06	0.07	-0.02

   a) Analice la adecuación del modelo ajustado y si existe alguna indicación de falta de ajustamiento del modelo. Si esto ocurre, sugiera un modelo modificado.
   b) Calcular la densidad espectral del modelo encontrado en el numeral anterior. Haga las suposiciones necesarias para garantizar su existencia.

2. **(20 %)** Probar que

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \rho, & h = \pm 1 \\ 0, & o.c \end{cases}$$

   es una función de autocovarianza si y sólo si $|\rho| < 1/2$.

3. **(30 %)** Sea $y_t = a_t + ca_{t-1} + ca_{t-2} + \ldots + ca_1$, para $t > 0$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$.
   a) Calcular la media y autocovarianza de y_t. ¿Es estacionaria?
   b) Demostrar que la serie $z_t = (1-B)y_t$ es estacionaria.
   c) Calcular el espectro de z_t y determinar la frecuencia donde alcanza el máximo.

4. **(10 %)** Para el proceso $y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j x_{t-j}$, con $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$. Demostrar que si x_t tiene espectro $f_x(w)$, entonces el espectro de la serie filtrada de salida, y_t, $f_y(w)$, está relacionada con el espectro de la serie de entrada x_t mediante

$$f_y(w) = |A(w)|^2 f_x(w)$$

   donde la función de respuesta frecuencia es dada $A(w) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-2\pi i w j}$.

5. **(10 %)** Considere la serie

$$x_t = \sin(2\pi U t),$$

   para $t = 1, 2, \ldots$, donde U tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$. Demostrar que x_t no es estrictamente estacionaria.

Solución