2024 年第六届中青杯全国大学生数学建模竞赛题目

C 题："X 疾病"在人群中的传播

2024 年 2 月，世界卫生组织总干事谭德塞就"X 疾病"暴发的可能性发出公开警告。"X 疾病"并不代表某一种具体的疾病，而是由未知病原体引发可能导致全球大流行的传染病，这种"未知"的病理现象，可能导致"比新冠大流行还要高 20 倍的死亡率"，"X 疾病"最主要的特点是高致病、传播速度较快且容易变异，它的发生发展存在很大的不确定性。

"X 疾病"可从多种源头形成，包括化学武器流出的病毒，以及人、畜共频繁接触的传染而出现新的疾病。未来有可能因宿主行为、环境等因素改变而容易大流行。为了更好地了解该疾病在人群中的传播规律，需要进行数学建模分析。

"X 疾病"可从多种源头形成，包括化学武器流出的病毒，未来有可能因宿主行为、环境等因素改变而容易大流行。为了更好地了解该疾病在人群中的传播规律，需要进行数学建模分析。

请你和你的团队给出有关"X 疾病"问题的详细推导和分析过程，以及合理的参数设定和模型假设。完成下列四个任务：

任务 1：请设计一个包括易感者（S）、患者（I）、康复者（R）和死亡者（D）四个群体的传染病传播模型，使用传染病传播动力学方程描述各群体之间的转变情况，来描述"X 疾病"在人群中的传播。

解题思路：

针对任务一中建立包括易感者（S）、患者（I）、康复者（R）和死亡者（D）四个群体的传染病传播模型，我们可以按照以下步骤进行详细解题思路：

1. 基本假设和符号定义：

假设总人口为 N，将人群分为易感者（S）、患者（I）、康复者（R）和死亡者（D）四个群体。

定义传染率为 β，康复率为 γ，死亡率为 μ。

2. 建立传染病传播模型：

根据 SIRD 模型的基本假设，我们可以建立以下微分方程组来描述四个群体之间的转变情况：

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{\beta SI}{N}$$
$$\frac{dI}{dt}=\frac{\beta SI}{N}-(\gamma+\mu)I$$
$$\frac{dR}{dt}=\gamma I$$
$$\frac{dD}{dt}=\mu I$$

其中，S 表示易感者数量，I 表示患者数量，R 表示康复者数量，D 表示死亡者数量，N 表示总人口数。

3. 解释微分方程组中的含义：

第一个方程描述易感者的变化率，即易感者的减少率与易感者与患者的接触和传染率成正比。

第二个方程描述患者的变化率，即患者的增加率与易感者与患者的接触和传染率成正比，减少率与康复率和死亡率成比例。

第三个方程描述康复者的变化率，即康复者的增加率与患者的治愈率成正比。

第四个方程描述死亡者的变化率，即死亡者的增加率与患者的死亡率成正比。

4. 参数设定和模型求解：

根据题目要求和实际情况，设置合理的参数值，如传染率 β、康复率 γ、死亡率 μ，然后可以通过数值方法或解析方法求解该微分方程组，得到各个群体随时间变化的情况。

以上是针对任务一中设计包括四个群体的传染病传播模型的详细解题思路。

建模过程：

针对任务一中设计包括易感者（S）、患者（I）、康复者（R）和死亡者（D）四个群体的传染病传播模型，以下是详细的建模过程：

1、基本假设和符号定义：

总人口为常数 N。

将人群分为易感者（S）、患者（I）、康复者（R）和死亡者（D）四个群体。

定义传染率为 β，康复率为 γ，死亡率为 μ。

2、建立微分方程组：

a. 易感者（S）的变化率：

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{\beta SI}{N}$$

易感者的减少率与易感者与患者的接触和传染率成正比。

b. 患者（I）的变化率：

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\beta SI}{N}-(\gamma+\mu)I$$

患者的增加率与易感者与患者的接触和传染率成正比，减少率与康复率和死亡率成比例。

c. 康复者（R）的变化率：

$$\frac{dR}{dt}=\gamma I$$

康复者的增加率与患者的治愈率成正比。

d. 死亡者（D）的变化率：

$$\frac{dD}{dt}=\mu I$$

死亡者的增加率与患者的死亡率成正比。

3、初始条件：

给定初始时刻的易感者、患者、康复者和死亡者的数量。

4、求解微分方程组：

可以通过数值方法（如欧拉法、Runge-Kutta 法等）或解析方法求解微分方程组，得到各个群体随时间的变化情况。

5、模型分析：

分析模型的稳定性，找出传染病的传播特征，如传播速度、感染高峰等。

考虑不同参数对传染病传播的影响，如传染率、康复率和死亡率的变化对疫情的控制效果等。

通过以上建模过程，我们可以建立一个描述易感者、患者、康复者和死亡者之间互动关系的传染病传播模型，帮助我们理解和预测传染病在人群中的传播情况。

MATLAB 代码：

```
% 参数定义
N = 1000; % 总人口数
beta = 0.3; % 传染率
```

```
gamma = 0.1; % 康复率
mu = 0.05; % 死亡率

% 初始条件
S0 = N - 1; % 初始易感者数量
I0 = 1; % 初始患者数量
R0 = 0; % 初始康复者数量
D0 = 0; % 初始死亡者数量

% 时间范围
tspan = [0 100];

% 定义微分方程
f = @(t, y) [-beta*y(1)*y(2)/N; beta*y(1)*y(2)/N - (gamma + mu)*y(2);
gamma*y(2); mu*y(2)];

% 解微分方程
[t, y] = ode45(f, tspan, [S0, I0, R0, D0]);

% 绘图
figure;
plot(t, y(:,1), 'b', t, y(:,2), 'r', t, y(:,3), 'g', t, y(:,4), 'k', 'LineWidth', 1.5);
legend('易感者 S', '患者 I', '康复者 R', '死亡者 D');
xlabel('时间');
ylabel('人数');
title('传染病传播模型');
```

这段 MATLAB 代码使用了 ode45 函数来求解微分方程组，并通过绘图展示了易感者、患者、康复者和死亡者随时间的变化情况。您可以根据需要调整参数

值、初始条件和时间范围，以及进行进一步的模型分析和可视化。

Python 代码：

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# 参数定义
N = 1000  # 总人口数
beta = 0.3  # 传染率
gamma = 0.1  # 康复率
mu = 0.05  # 死亡率

# 初始条件
S0 = N - 1  # 初始易感者数量
I0 = 1  # 初始患者数量
R0 = 0  # 初始康复者数量
D0 = 0  # 初始死亡者数量
y0 = [S0, I0, R0, D0]

# 时间范围
t = np.linspace(0, 100, 1000)

# 定义微分方程
def deriv(y, t, N, beta, gamma, mu):
    S, I, R, D = y
    dSdt = -beta * S * I / N
    dIdt = beta * S * I / N - (gamma + mu) * I
    dRdt = gamma * I
```

```
    dDdt = mu * I
    return dSdt, dIdt, dRdt, dDdt

# 解微分方程
ret = odeint(deriv, y0, t, args=(N, beta, gamma, mu))
S, I, R, D = ret.T

# 绘图
plt.figure()
plt.plot(t, S, 'b', label='易感者 S')
plt.plot(t, I, 'r', label='患者 I')
plt.plot(t, R, 'g', label='康复者 R')
plt.plot(t, D, 'k', label='死亡者 D')
plt.xlabel('时间')
plt.ylabel('人数')
plt.title('传染病传播模型')
plt.legend()
plt.show()
```

这段 Python 代码使用了 odeint 函数来求解微分方程组，并通过绘图展示了易感者、患者、康复者和死亡者随时间的变化情况。您可以根据需要调整参数值、初始条件和时间范围，以及进行进一步的模型分析和可视化。

任务 2：基于你所建立的模型，分析"X 疾病"爆发后的传播速度和规模受到哪些因素的影响，如何调控才能有效控制病情传播？

解题思路：

下面是针对任务 2 的详细解题思路：

1、影响传播速度和规模的因素：

传染率（beta）：传染率越高，疾病的传播速度和规模越大。可以通过隔离患者、提高个人防护意识等方式降低传染率。

康复率（gamma）：康复率越高，疾病传播速度越慢，规模越小。提高康复率

可以减缓疾病传播速度。

死亡率（mu）：死亡率的增加会导致疾病传播速度变快，规模变大。有效的医疗措施和治疗方法可以降低死亡率。

人口密度：人口密度大的地区传播速度更快，规模更大。可以通过限制人员流动、提倡社交距离等方式控制传播速度。

医疗资源：充足的医疗资源可以减少感染者的数量，降低传播速度和规模。

2、有效控制病情传播的方法：

提高个人防护意识：鼓励人们勤洗手、戴口罩、保持社交距离等措施，可以有效减缓疾病传播速度。

加强医疗资源投入：增加医疗设备、提高医护人员数量，及时救治感染者，降低死亡率，控制传播规模。

实施隔离措施：对患者、疑似患者和密切接触者进行隔离，阻断传播链条，减缓病情传播速度。

推广疫苗接种：疫苗接种可以提高人群免疫力，有效控制疫情传播。

加强信息发布和宣传：及时发布疫情信息、科学防控知识，提高公众对疫情的认识和应对能力。

通过分析这些因素，结合建立的传播模型，可以评估不同情况下疾病传播的速度和规模，制定相应的控制措施，有效控制病情传播，保护公共卫生安全。

建模过程：

针对任务 2 的建模过程可以按照以下步骤进行：

1、建立传染病传播模型：

定义易感者人群（S）、患者人群（I）、康复者人群（R）、死亡者人群（D）。

利用微分方程描述人群之间的转移关系：

易感者的变化率：$\frac{dS}{dt} = -\beta \cdot S \cdot I / N$

患者的变化率：$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I / N - (\gamma + \mu) \cdot I$

康复者的变化率：$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I$

死亡者的变化率：$\frac{dD}{dt} = \mu \cdot I$

其中，N 为总人口数，β 为传染率，γ 为康复率，μ 为死亡率。

2、分析传播速度和规模受到的影响：

传染率（β）：传染率越高，传播速度越快，规模越大。

康复率（γ）：康复率越高，传播速度越慢，规模越小。

死亡率（μ）：死亡率越高，传播速度越快，规模越大。

人口密度、医疗资源等因素也会影响传播速度和规模。

3、调控措施的建模：

提高个人防护意识：可以通过增加一个表示个人防护水平的参数来调节传染率。

加强医疗资源投入：可以增加一个表示医疗资源的参数，影响康复率和死亡率。

实施隔离措施：可以引入一个表示隔离程度的参数，影响传播率。

推广疫苗接种：可以引入一个表示疫苗接种率的参数，影响易感者数量。

加强信息发布和宣传：可以通过信息传播模型，考虑信息对公众行为的影响，从而影响传播速度。

4、模拟不同情况下的传播速度和规模：

调整传染率、康复率、死亡率等参数，模拟疾病传播的不同情况。

根据模拟结果分析不同因素对传播速度和规模的影响，评估控制措施的有效性。

通过上述建模过程，可以量化不同因素对传染病传播速度和规模的影响，制定有效的控制策略，保护公共健康。

MATLAB 代码：

```
% 参数设置
beta = 0.3; % 传染率
gamma = 0.1; % 康复率
mu = 0.01; % 死亡率
N = 1000; % 总人口数
I0 = 1; % 初始感染人数
S0 = N - I0; % 初始易感者人数
R0 = 0; % 初始康复人数
```

```
D0 = 0; % 初始死亡人数

% 时间设置
tspan = [0 200]; % 模拟时间范围

% 定义微分方程组
ode = @(t, y) [ -beta*y(1)*y(2)/N;
                beta*y(1)*y(2)/N - (gamma + mu)*y(2);
                gamma*y(2);
                mu*y(2)];

% 初值
y0 = [S0; I0; R0; D0];

% 解微分方程
[t, y] = ode45(ode, tspan, y0);

% 绘图
figure;
plot(t, y(:,1), 'b', t, y(:,2), 'r', t, y(:,3), 'g', t, y(:,4), 'k', 'LineWidth', 2);
legend('易感者', '感染者', '康复者', '死亡者');
xlabel('时间');
ylabel('人数');
title('传染病传播模型');
grid on;
```

Python 代码：

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
from scipy.integrate import odeint

# 定义传染病传播模型的微分方程
def SIR_model(y, t, beta, gamma, mu, N):
    S, I, R, D = y
    dSdt = -beta * S * I / N
    dIdt = beta * S * I / N - (gamma + mu) * I
    dRdt = gamma * I
    dDdt = mu * I
    return dSdt, dIdt, dRdt, dDdt

# 参数设置
beta = 0.3   # 传染率
gamma = 0.1   # 康复率
mu = 0.01   # 死亡率
N = 1000   # 总人口数
I0 = 1   # 初始感染人数
S0 = N - I0   # 初始易感者人数
R0 = 0   # 初始康复人数
D0 = 0   # 初始死亡人数

# 时间设置
t = np.linspace(0, 200, 1000)

# 求解微分方程
y0 = S0, I0, R0, D0
y = odeint(SIR_model, y0, t, args=(beta, gamma, mu, N))

# 绘图
```

```
plt.figure()
plt.plot(t, y[:, 0], 'b', label='易感者')
plt.plot(t, y[:, 1], 'r', label='感染者')
plt.plot(t, y[:, 2], 'g', label='康复者')
plt.plot(t, y[:, 3], 'k', label='死亡者')
plt.xlabel('时间')
plt.ylabel('人数')
plt.title('传染病传播模型')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

任务 3：若“X 疾病”爆发后，采取了一系列的干预措施，例如隔离、佩戴口罩、接种疫苗等，请你通过构建数学模型预测“X 疾病”的发展趋势。

解题思路：

1、选择合适的传染病模型：根据问题背景和干预措施的特点，可以选择适合描述干预措施影响的传染病模型。例如，可以考虑 SIR 模型的变体，如带有治疗率和接种率的 SEIR 模型。

2、确定模型参数：根据已知信息和数据，确定模型的参数，包括传染率、康复率、死亡率、接触率等。同时，考虑干预措施的影响，如隔离率、口罩有效率、疫苗覆盖率等。

3、构建数学模型：基于选定的传染病模型和参数，建立描述干预措施影响的数学模型。模型应考虑干预措施对传染率、接触率等的影响，以及干预措施的实施时间和强度。

4、模拟预测：利用数值计算方法，如 Euler 方法、Runge-Kutta 方法等，对建立的数学模型进行模拟计算。通过调整模型参数和干预措施的条件，可以预测“X 疾病”在不同干预情况下的发展趋势。

5、评估预测结果：分析模拟结果，评估不同干预措施对“X 疾病”发展趋势的影响。比较不同干预方案的效果，找出最有效的控制措施组合，以降低疾病传播风险。

6、优化措施：根据模拟结果和评估分析，优化干预措施，制定更合理的防控策略，以最大程度地减少疾病传播，保护公共健康。

建模过程：

针对任务3，我们可以建立一个带有干预措施的 SEIR 模型，考虑隔离、佩戴口罩和接种疫苗等干预措施的影响。下面是详细的建模过程：

1、SEIR 模型描述：

设易感者数量为 $S(t)$，暴露者数量为 $E(t)$，感染者数量为 $I(t)$，康复者数量为 $R(t)$。根据 SEIR 模型的描述，我们可以建立以下微分方程组：

$$\frac{dS}{dt}=-\beta\frac{S}{N}I-\delta S$$

$$\frac{dE}{dt}=\beta\frac{S}{N}I-\sigma E$$

$$\frac{dI}{dt}=\sigma E-\gamma I$$

$$\frac{dR}{dt}=\gamma I$$

其中：

β 是传染率；

δ 是隔离率，表示易感者被隔离的速率；

σ 是暴露者转化为感染者的速率；

γ 是康复率。

2、考虑干预措施影响：

隔离措施：隔离率 δ 可以根据实际情况设定，隔离措施会减少易感者和感染者之间的接触。

口罩措施：口罩的使用可以降低传播率 β，可以考虑引入口罩有效率 ϵ，使得传染率 β 变为 $\beta(1-\epsilon)$。

疫苗措施：接种疫苗可以提高暴露者转化为感染者的速率 σ，可以考虑引入疫苗覆盖率 v，使得转化速率 σ 变为 $\sigma+\alpha v$。

3、带有干预措施的 SEIR 模型：

带有干预措施的 SEIR 模型可以表示为：

中青杯思路、代码、参考论文，关注【公众号：数模加油站】，或加入QQ群聊：618423543即可免费获取

$$\frac{dS}{dt}=-\beta(1-\epsilon)\frac{S}{N}I-\delta S$$
$$\frac{dE}{dt}=\beta(1-\epsilon)\frac{S}{N}I-(\sigma+\alpha v)E$$
$$\frac{dI}{dt}=\sigma E-\gamma I$$
$$\frac{dR}{dt}=\gamma I$$

其中， α 是疫苗的保护效果参数。

4、模拟预测及分析：

利用数值计算方法，如 Euler 方法、Runge-Kutta 方法等，对建立的带有干预措施的 SEIR 模型进行模拟计算。通过调整模型参数和干预措施的条件，可以预测“X 疾病”在不同干预情况下的发展趋势，并评估不同干预方案的效果。通过以上建模过程，可以考虑隔离、口罩和疫苗等干预措施对传染病传播的影响，为制定科学有效的防控策略提供建议。

MATLAB 代码：

```
function seir_model_with_interventions()
    % 参数设置
    N = 1000; % 总人口数
    beta = 0.3; % 传染率
    gamma = 0.1; % 康复率
    sigma = 0.2; % 暴露者转化为感染者的速率
    delta = 0.01; % 隔离率
    epsilon = 0.5; % 口罩有效率
    alpha = 0.1; % 疫苗保护效果参数
    v = 0.3; % 疫苗覆盖率

    % 初始条件
    S0 = N - 1;
    E0 = 1;
    I0 = 0;
    R0 = 0;
```

```
    % 模拟参数
    tspan = 0:0.1:100;
    y0 = [S0, E0, I0, R0];

    % 求解微分方程组
    [t, y] = ode45(@seir_eqs, tspan, y0);

    % 绘图
    plot(t, y);
    legend('S', 'E', 'I', 'R');
    xlabel('时间');
    ylabel('人数');
    title('带干预措施的 SEIR 模型');
end

function dydt = seir_eqs(t, y)
    S = y(1);
    E = y(2);
    I = y(3);

    beta_eff = beta * (1 - epsilon); % 考虑口罩的传染率
    sigma_eff = sigma + alpha * v; % 考虑疫苗的转化速率

    dS = -beta_eff * S * I / N - delta * S;
    dE = beta_eff * S * I / N - sigma_eff * E;
    dI = sigma_eff * E - gamma * I;
    dR = gamma * I;
```

```
    dydt = [dS; dE; dI; dR];
end

Python 代码
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# 参数设置
N = 1000  # 总人口数
beta = 0.3  # 传染率
gamma = 0.1  # 康复率
sigma = 0.2  # 暴露者转化为感染者的速率
delta = 0.01  # 隔离率
epsilon = 0.5  # 口罩有效率
alpha = 0.1  # 疫苗保护效果参数
v = 0.3  # 疫苗覆盖率

# 初始条件
S0 = N - 1
E0 = 1
I0 = 0
R0 = 0

# 时间范围
t = np.linspace(0, 100, 1000)

# SEIR 模型方程
def seir_eqs(y, t):
```

```
    S, E, I, R = y
    beta_eff = beta * (1 - epsilon)   # 考虑口罩的传染率
    sigma_eff = sigma + alpha * v   # 考虑疫苗的转化速率

    dS = -beta_eff * S * I / N - delta * S
    dE = beta_eff * S * I / N - sigma_eff * E
    dI = sigma_eff * E - gamma * I
    dR = gamma * I

    return dS, dE, dI, dR

# 求解微分方程组
result = odeint(seir_eqs, [S0, E0, I0, R0], t)

# 绘图
plt.plot(t, result)
plt.legend(['S', 'E', 'I', 'R'])
plt.xlabel('时间')
plt.ylabel('人数')
plt.title('带干预措施的 SEIR 模型')
plt.show()
```

任务 4：根据你的研究成果，提出关于“X 疾病”到来前的几条相关建议。

针对任务 4，我们可以提出以下建议：

1. 疫情监测与预警

在疾病到来前，建议建立完善的疫情监测与预警体系，包括监测病例数量、疫情传播速度、病毒变异情况等信息，及时发现潜在风险并提前做好准备。

2. 制定应急预案

针对“X 疾病”，制定详细的应急预案，包括调配医疗资源、确定隔离措施、制定疫苗接种计划等，以便在疫情爆发时能够迅速作出应对。

3. 宣传教育和预防措施

开展相关疾病的宣传教育活动，向公众传达疾病的传播途径、预防措施等信息，提高公众的防范意识，如佩戴口罩、保持良好的个人卫生习惯等。

4. 加强医疗机构准备

确保医院和卫生机构的医疗设备、药品储备、医护人员培训等方面准备充足，以应对可能出现的疫情爆发并保障患者得到及时救治。

5. 国际合作与信息共享

加强国际合作与信息共享，与其他国家和组织合作，共同应对疾病传播风险，分享疫情信息和科研成果，共同努力应对全球性公共卫生挑战。

6. 社区防控与协作机制

建立健全的社区防控与协作机制，加强社区卫生服务网络建设，提高社区居民自我防护意识，实行居家隔离等措施，有效控制疫情的传播。

通过以上建议，可以在疾病到来前做好充分准备，提高社会对疫情的应对能力，降低疫情对生活和经济造成的影响。