《机器学习》课程系列

叉积*

Cross Product

武汉纺织大学数学与计算机学院

杜小勤

2020/07/11

Contents

*本系列文档属于讲义性质，仅用于学习目的。Last updated on: July 12, 2020。

1 定义

设 $\vec{\boldsymbol{u}} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ 和 $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ 为非零向量，试找到一个向量 $\vec{\boldsymbol{w}} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$，它与 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 均正交？即满足条件：

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} &= 0 \\ \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

首先，按向量点积 (Dot Product) 或标量积 (Scalar Product) 定义，将各分量代入，可得：

$$\begin{cases} u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

从上面的方程中消去 w_3，得到：

$$\left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right) w_1 + \left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) w_2 = 0 \tag{3}$$

然后，选择：

$$\begin{cases} w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ w_2 = -\left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right) = u_3 v_1 - u_1 v_3 \end{cases} \tag{4}$$

将上式代入原方程 (2) 中，可得：

$$w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 \tag{5}$$

于是，得到向量：

$$\vec{\boldsymbol{w}} = \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle \tag{6}$$

或：

$$\vec{\boldsymbol{w}} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) \hat{\boldsymbol{i}} + \left(u_3 v_1 - u_1 v_3\right) \hat{\boldsymbol{j}} + \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right) \hat{\boldsymbol{k}} \tag{7}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{i}}$、$\hat{\boldsymbol{j}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 分别表示 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 轴方向的单位向量。于是，引入向量叉积 (Cross Product) 或向量积 (Vector Product) 来表示上述操作：

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} &= \vec{\boldsymbol{w}} \\ &= \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle \\ &= \left(u_2 v_3 - u_3 v_2\right) \hat{\boldsymbol{i}} + \left(u_3 v_1 - u_1 v_3\right) \hat{\boldsymbol{j}} + \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right) \hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{8}$$

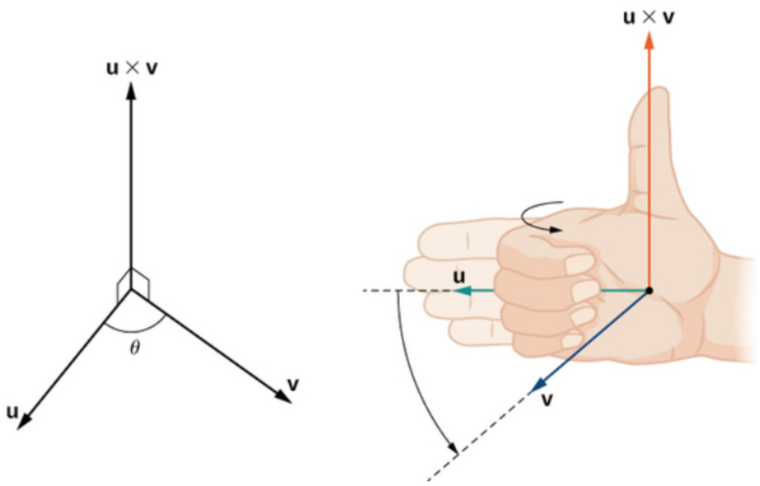

图 2-1: 向量叉积的右手规则

为方便记忆，叉积也可以使用行列式来表示：

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

2 方向

叉积计算的结果仍然是一个向量，其方向可以使用右手规则来确定，如图2-1所示：首先，平伸右手掌，确保手指指向方向与向量 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 一致；然后，除大拇指外，其余四指弯曲旋转指向向量 $\vec{\boldsymbol{v}}$，则大拇指指向的方向即为叉积向量 $\vec{\boldsymbol{w}}$ 的方向。注意，在操作时，四指弯曲旋转的角度不能超过 $180°$；否则，需要改变大拇指的方向。

另外，还需要注意的是，有些环境使用左手坐标系，因而需要使用左手规则来确定叉积向量的方向，操作方法类似。显然，左右手规则确定的叉积向量方向，刚好相反。

3 模

叉积向量的模等于：

$$\|\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\| = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\|\vec{\boldsymbol{v}}\| \sin\theta \tag{10}$$

其中，$0 \leqslant \theta \leqslant 180°$，$\theta$ 表示向量 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 和向量 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 之间的夹角。

证明：

$$
\begin{aligned}
\|\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\|^2 &= (u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2 \\
&= u_2^2v_3^2-2u_2u_3v_2v_3+u_3^2v_2^2+u_3^2v_1^2-2u_1u_3v_1v_3+u_1^2v_3^2+u_1^2v_2^2-2u_1u_2v_1v_2+u_2^2v_1^2 \\
&= u_1^2v_1^2+u_1^2v_2^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_2^2v_3^2+u_3^2v_1^2+u_3^2v_2^2+u_3^2v_3^2 \\
&\quad -\left(u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_3^2+2u_1u_2v_1v_2+2u_1u_3v_1v_3+2u_2u_3v_2v_3\right) \\
&= \left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \\
&= \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2-(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2 \\
&= \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2-\|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2\cos^2\theta \\
&= \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2\left(1-\cos^2\theta\right) \\
&= \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{11}
$$

如果将 θ 限制在 $[0°, 180°]$ 范围内，就得到：

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\| = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\sin\theta \tag{12}$$

□

4 性质

实际上，在上面的推导过程中，为确保叉积向量 $\vec{\boldsymbol{w}}$ 的模长非负，假设向量 $\vec{\boldsymbol{u}}$ 与向量 $\vec{\boldsymbol{v}}$ 的夹角 θ 不超过 180°。如果夹角 θ 超过了 180°，则意味着，叉积向量 $\vec{\boldsymbol{w}}$ 的方向将发生 180° 逆转。此外，当 $\theta = 0°$ 或 $\theta = 180°$ 时，叉积向量 $\vec{\boldsymbol{w}}$ 将变成 $\mathbf{0}$ 向量；当 $\theta = 90°$ 时，叉积向量 $\vec{\boldsymbol{w}}$ 的模长取得最大值。请验证上述结论。

由于 $\hat{\boldsymbol{i}}$、$\hat{\boldsymbol{j}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 是标准的单位向量，因而叉积操作也适用于它们：

$$\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0} \tag{13}$$

应用夹角为 0 的特点，可以得到上式。注意，上式中的 $\mathbf{0}$ 表示零向量。此外，应

用叉积的右手规则以及 $\hat{\boldsymbol{i}}$、$\hat{\boldsymbol{j}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 之间的正交性，可以得到如下公式：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{i}} \times \hat{\boldsymbol{j}} &= \hat{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\boldsymbol{j}} \times \hat{\boldsymbol{i}} &= -\hat{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\boldsymbol{j}} \times \hat{\boldsymbol{k}} &= \hat{\boldsymbol{i}} \\ \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{j}} &= -\hat{\boldsymbol{i}} \\ \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{i}} &= \hat{\boldsymbol{j}} \\ \hat{\boldsymbol{i}} \times \hat{\boldsymbol{k}} &= -\hat{\boldsymbol{j}}\end{aligned} \tag{14}$$

其它一些有用的性质如下：

1. 反交换律

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = -\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{u}} \tag{15}$$

2. 分配律

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{w}} \tag{16}$$

3. 标量乘法结合律

$$\lambda (\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) = (\lambda \vec{\boldsymbol{u}}) \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} \times (\lambda \vec{\boldsymbol{v}}) \tag{17}$$

4. 零向量叉积

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0} \tag{18}$$

5. 自身叉积

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0} \tag{19}$$

6. 标量三乘积 (Scalar Triple Product)

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = (\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \vec{\boldsymbol{w}} \tag{20}$$

下面证明最后一个性质：

证明：

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) &= u \cdot \langle v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1 \rangle \\
&= u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) \\
&= u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_2 v_1 w_3 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_3 \\
&= \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle \cdot \langle w_1, w_2, w_3 \rangle = (\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \vec{\boldsymbol{w}}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$\square$

如果使用行列式来表示，公式 (20) 的左端可以写为：

$$
\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{22}
$$

而右端可以写为：

$$
(\vec{\boldsymbol{u}} \times (\vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \vec{\boldsymbol{w}}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{23}
$$

显然，其等价性非常明显：将公式 (22) 的第 3 行，连续上移 2 次，而其它行的顺序不变，将得到公式 (23)，那么依据行列式的性质——行或列交换偶数次，行列式值的符号将维持不变。因此，公式 (22) 与公式 (23) 等价。

依据上述原理，还可以得到如下的等价公式：

$$
\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot (\vec{\boldsymbol{w}} \times \vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{w}} \cdot (\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) \tag{24}
$$

5 应用

1. 计算 2 个向量的正交向量

   直接应用叉积定义；如果需要得到单位正交向量，则：叉积向量的三分量乘以叉积模长的倒数。

2. 平行四边形的面积

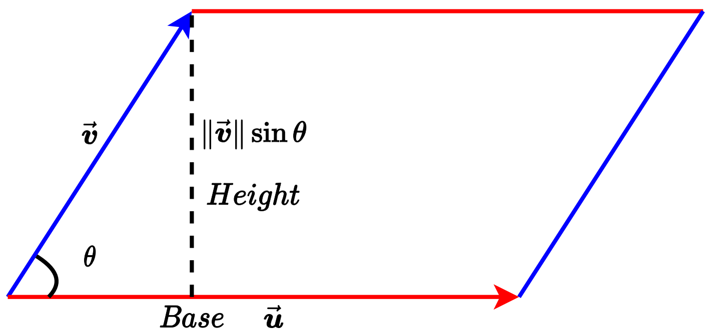

图 5-2: 叉积与平行四边形的面积

如图5-2所示，叉积与平行四边形面积的关系如下：

$$Area = Base \times Height = \|\vec{u}\| \left(\|\vec{v}\| \sin\theta\right) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \tag{25}$$

在二维平面中，为了应用叉积操作，可以对二维向量进行维度扩充[1]，即：

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_1\hat{\boldsymbol{i}} + u_2\hat{\boldsymbol{j}} + 0\hat{\boldsymbol{k}} \\ \vec{v} &= v_1\hat{\boldsymbol{i}} + v_2\hat{\boldsymbol{j}} + 0\hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{26}$$

则：

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{27}$$

3. 标量三乘积

前文已经讨论了标量三乘积、叉积与行列式之间的关系。

4. 平行六面体的体积

如图5-3所示，向量 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 分别组成了平行六面体的三条相邻边，则平行六面体的体积为这三个向量的 (任意) 标量三乘积的绝对值[2]：

$$Volume = \|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\| \tag{28}$$

其中，标量三乘积的结果本身是一个标量，此处为了表达上的统一，使用模长表示，同时也起到取绝对值的作用。另外，也需要注意，图中标注的投影

[1]一般而言，叉积定义适用于三维空间。
[2]根据前文的讨论，三个向量的任意标量三乘积的组合，计算结果的绝对值都是相等的。

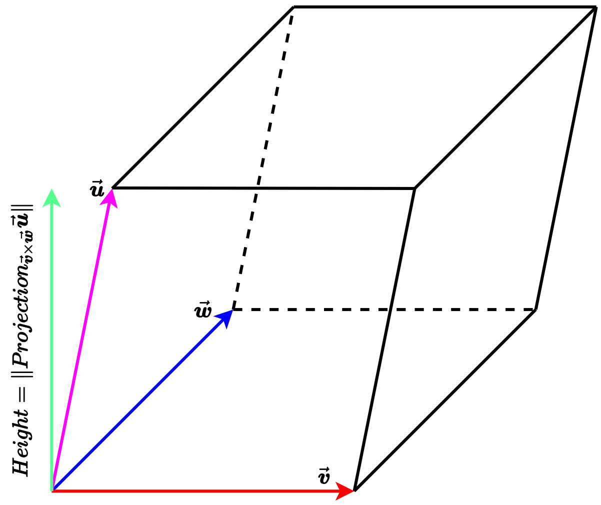

图 5-3: 标量三乘积与平行六面体的体积

被定义为：

$$Projection_{\vec{v}\times\vec{w}}\vec{u} = \frac{\vec{v}\times\vec{w}}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}\cdot\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|} \tag{29}$$

即需要对叉积 $\vec{v}\times\vec{w}$ 进行单位化。类似地，使用模长定义将其转换为高度：$Height = \|Projection_{\vec{v}\times\vec{w}}\vec{u}\|$。

证明：

$$\begin{aligned}
Volume &= Height \times BaseArea \\
&= \|Projection_{\vec{v}\times\vec{w}}\vec{u}\|\|\vec{v}\times\vec{w}\| \\
&= \left\|\frac{\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}\right\|\|\vec{v}\times\vec{w}\| \\
&= \|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\|
\end{aligned} \tag{30}$$

□

5. 3 向量的共面 (Coplanar) 判断

   如果 $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$，则该 3 向量共面；反之亦然[3]。

6. 单向量与给定 2 向量的正交性判断

   例如，给定两个向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$，判断第 3 个向量 $\vec{w}$ 与它们是否正交：如果 $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \mathbf{0}$，则 $\vec{w}$ 与 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 或它们所在的面正交。

[3] 它们的任一标量三乘积组合均可以作为判断依据。

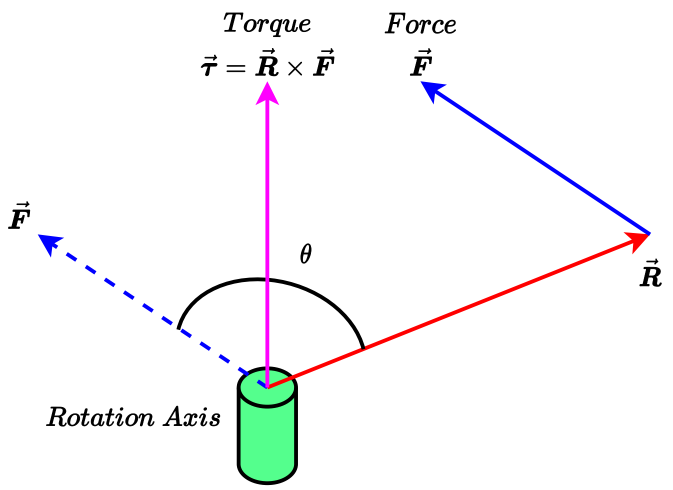

图 5-4: 力、力臂与力矩之间的关系

7. 力矩 (Torque)

   如图5-4所示，展示了力 (Force)、力臂与力矩 (Torque) 之间的关系：力矩等于力臂与力的叉积，即 $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$。

6 参考文献

1. Cross Product. https://math.libretexts.org/.

2. 同济大学数学教研室。《高等数学》，1978 年 10 月第 1 版。