天善智能
TIANSHAN SOFT

专注于商业智能BI和大数据的垂直社区平台

数理统计的基本概念（三）

Allen

课程目录

- 样本均值和样本方差的性质
- 卡方分布
- t分布
- F分布
- 小结

样本均值和样本方差的性质

- 设母体X的分布函数$F(x)$具有二阶矩，即$EX=\mu<+\infty$，$DX=\sigma^2<+\infty$，若$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自这一母体的一个样本
- 样本均值$\overline{X}$的数学期望：$E\overline{X}=\mu$
- 样本均值$\overline{X}$的方差：$D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$

天善智能 TIANSHAN SOFT

样本均值和样本方差的性质

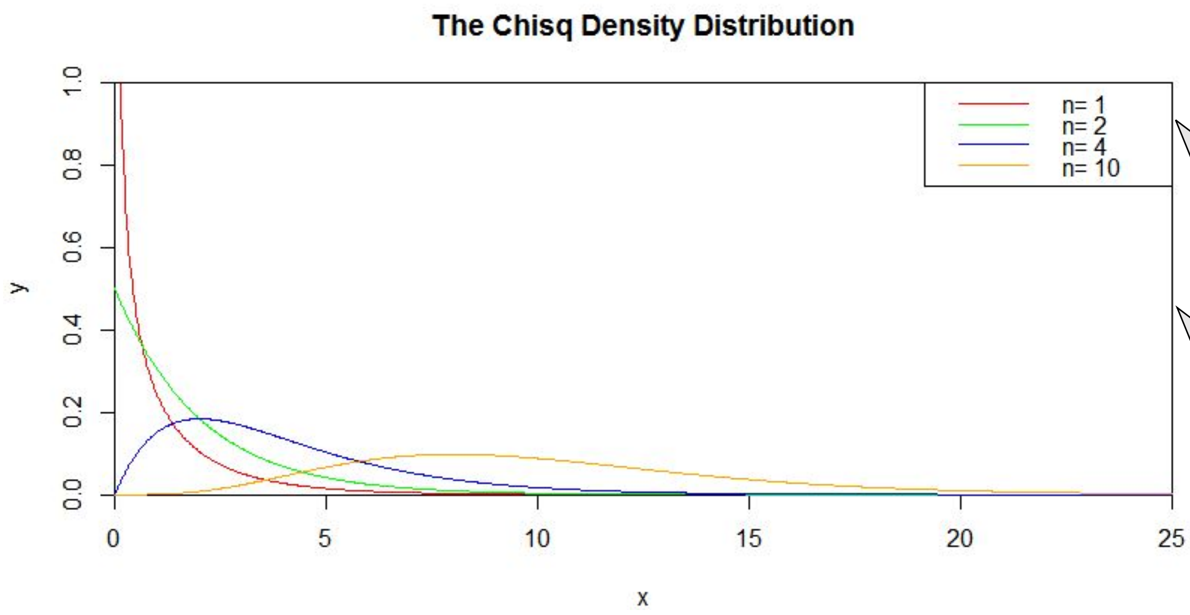
- 若母体X的原点矩 $v_k = EX^k$ 和中心矩 $\mu_k = E(X - v_1)^k, k = 1,2,3,4$ 都存在 ，若 $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是样本方差
- 样本方差 S^2 的数学期望：$ES^2 = \frac{n-1}{n}\mu_2$
- 样本方差 S^2 的方差：$DS^2 = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}$

天善智能 TIANSHAN SOFT

卡方分布

- 定义：设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体$N(0,1)$的一个简单样本，则称统计量

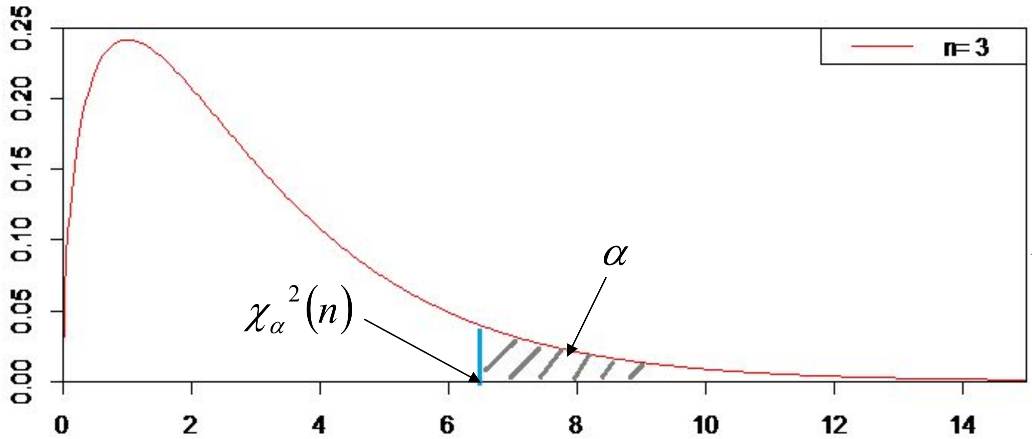
$Y = {X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_n}^2$ 为服从自由度为n的χ^2分布，记为$Y \sim \chi^2(n)$



n越小，密度曲线越陡峭，峰度系数越大

n越大，密度曲线越平缓，峰度系数越小

卡方分布分位数



其中 $P\{\chi^2 > \chi_\alpha{}^2(n)\} = \alpha$

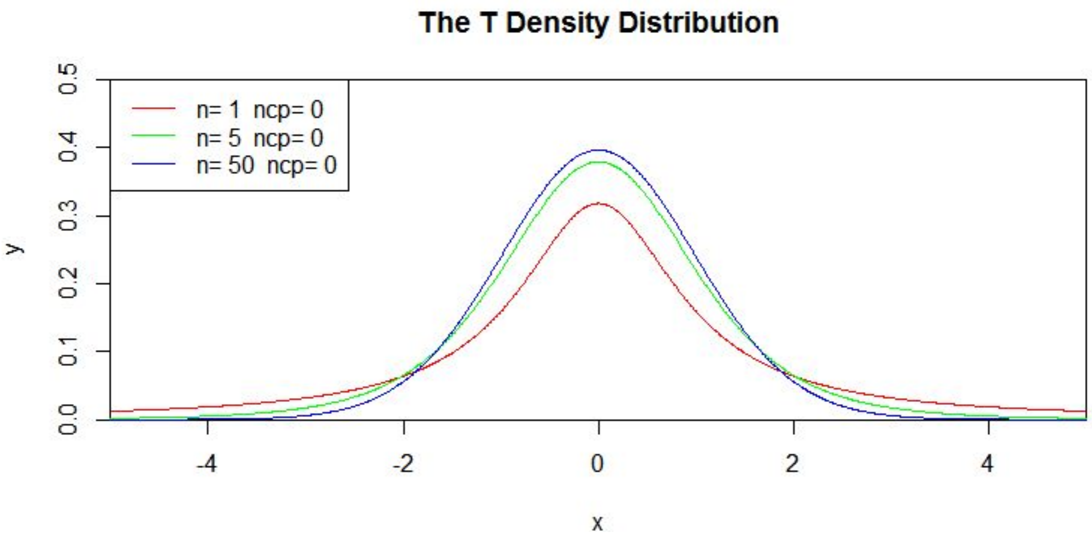
- 定义：若给定 $\alpha, 0<\alpha<1$,存在 $\chi_\alpha{}^2(n)$ 使 $P\{\chi^2 > \chi_\alpha{}^2(n)\} = \alpha$ ，则称点 $\chi_\alpha{}^2(n)$ 是 χ^2 分布的 α 分位点，上图是 $n=3, \alpha=0.1$ 的 χ^2 分布上的 α 分位点 $\chi_\alpha{}^2(n)$

卡方分布性质

- 可加性：若 $X_1 \sim \chi^2(m), X_2 \sim \chi^2(n)$，二者相互独立，则 $X_1 + X_2 \sim \chi^2(m+n)$
- 期望：若$X \sim \chi^2(n)$，则 $E(X) = n$
- 方差：若$X \sim \chi^2(n)$，则 $D(X) = 2n$

t分布

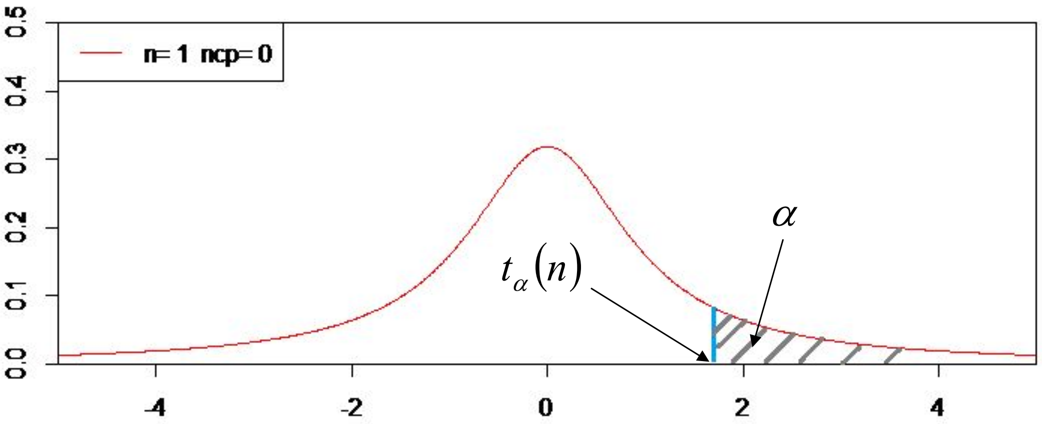
- 定义：若$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则称随机变量$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$是服从自由度为n的t分布，记作$T \sim t(n)$



n越小，峰度系数越大

n越大，峰度系数越小

t分布分位数

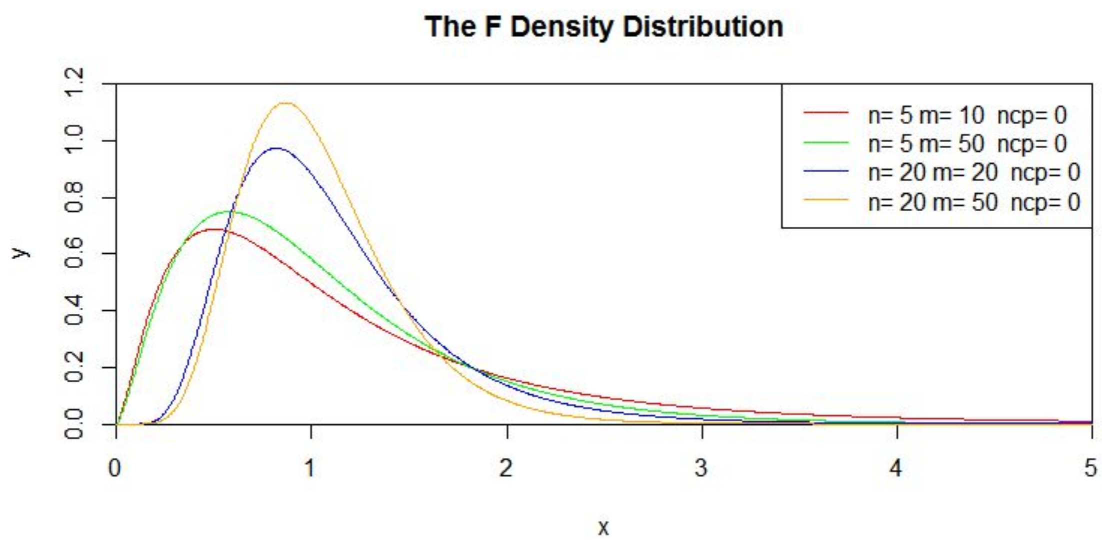


其中 $P\{T > t_\alpha(n)\} = \alpha$

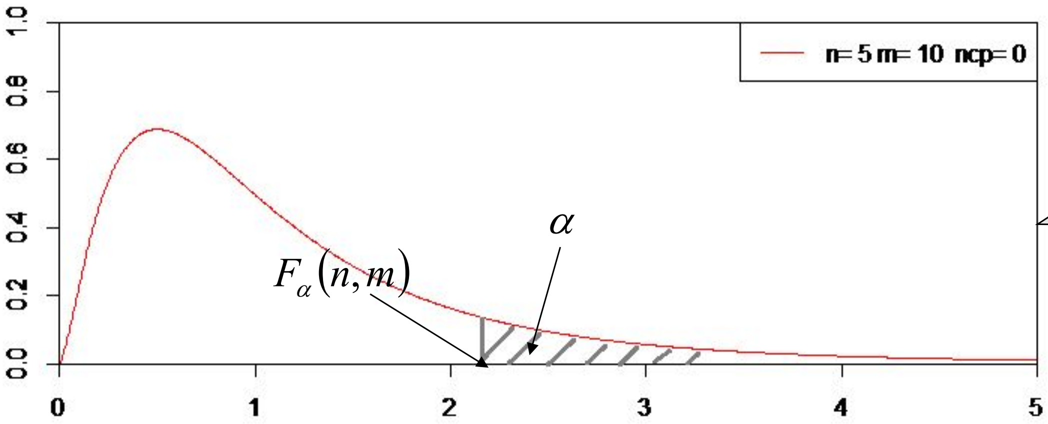
- 定义：若给定 $\alpha, 0<\alpha<1$,存在 $t_\alpha(n)$ 使 $P\{T > t_\alpha(n)\} = \alpha$ ，则称点 $t_\alpha(n)$ 是t分布的 α分位点，上图是 $n=1, \alpha=0.1$ 的t分布上的 α 分位点 $t_\alpha(n)$

F分布

- 定义：若$X \sim \chi^2(n)$ ，$Y \sim \chi^2(m)$，且 X,Y 相互独立，则称随机变量$F = \dfrac{X/n}{Y/m}$ 是服从自由度为(n,m)的F分布,称n为第一自由度,m为第二自由度记作$F \sim F(n,m)$



F分布分位数



其中 $P\{F > F_\alpha(n,m)\} = \alpha$

- 定义：若给定 $\alpha, 0<\alpha<1$,存在 $F_\alpha(n,m)$ 使 $P\{F > F_\alpha(n,m)\} = \alpha$，则称点 $F_\alpha(n,m)$ 是F分布的 α 分位点

天善智能 TIANSHAN SOFT

F分布性质

- 若 $X \sim F(n,m)$ ，则 $1/X \sim F(m,n)$
- $F_{1-\alpha}(n,m)=\dfrac{1}{F_{\alpha}(m,n)}$
- 设 $X \sim t(n)$ ，则 $X^2 \sim F(1,n)$

天善智能 TIANSHAN SOFT

小结

- 样本均值和样本方差的性质
- 卡方分布
- t分布
- F分布
- 小结