天善智能
TIANSHAN SOFT

专注于商业智能BI和大数据的垂直社区平台

估计量的优良准则

Allen

www.hellobi.com

课程目录

- 无偏性
- 有效性
- 相合性
- 小结

引子

- 对于同一个参数,用不同的方法可以得到不同的估计量。同一参数出现多个估计量时

究竟哪一个更好？

- 确定估计量好坏的标准必须是整体性的，必须在大量观察的基础上从统计的意义上来评价估计量的好坏

具体的评价标准如下

矩法估计示例

- 求母体均值 $E\xi$ 与母体方差 $D\xi$ 的矩法估计
- 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是母体的子样，已知具有母体均值 $E\xi$ 和方差 $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$
- 求 $v_1=E\xi=\overline{\xi}$ ，$v_2=E\xi^2=(E\xi)^2+D\xi=\overline{\xi^2}$
- 解得矩法估计为 $\hat{E}\xi=\overline{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ ，$\hat{D}\xi=\overline{\xi^2}-\left(\overline{\xi}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\overline{\xi}\right)^2$

天善智能 TIANSHAN SOFT

极大似然估计示例

- 例：若X是服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体X的一个样本值，求参数 λ 的极大似然估计值
- 1.X的分布律为 $P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}(x=0,1,\cdots,n)$ ，所以似然函数为 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)$
- 2.取对数 $\ln L(\lambda)=-n\lambda+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}(x_i!)$
- 3.求导 $\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$ ，解得极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$

天善智能 TIANSHAN SOFT

极大似然估计示例

- 例：若总体X是 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体X的一个样本值，求参数 μ, σ^2 的极大似然估计值
- 1.X的概率密度为 $f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，所以似然函数为 $L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$
- 2.取对数 $\ln L(\mu,\sigma^2)=\ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$
- 3.求偏导 $\begin{cases}\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu}=0\\ \frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2}=0\end{cases}$ ，解得极大似然估计值为 $\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$ ，$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$

天善智能 TIANSHAN SOFT

样本均值和样本方差的性质

- 若母体X的原点矩 $v_k = EX^k$ 和中心矩 $\mu_k = E(X - v_1)^k, k = 1,2,3,4$ 都存在 ，若 $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是样本方差

- 样本方差 S^2 的数学期望：$ES^2 = \frac{n-1}{n}\mu_2$

存在系统性偏差

天善智能
TIANSHAN SOFT

无偏性

- 估计量是随机变量，对于不同的样本值就会得到不同的估计值，希望估计值在未知参数真值左右徘徊，最好它的数学期望等于未知参数的真值，这就导致了无偏性这个标准

- 寻找估计量时，除了含随机偏差外，还可能存在系统性偏差。在统计学上将没有系统性偏差的性质称为无偏性

无偏性—定义和理解

- 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自具有概率函数$\{f(x;\theta), \theta \in \Theta\}$的母体X的一个简单随机样本，$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是θ的估计量，如果有$E\hat{\theta} = \theta$ ，则称$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是 θ 的无偏估计，否则称为有偏的

- 无偏估计的整体性理解：如果估计量是无偏估计，则在每次抽样中，估计值几乎不会等于θ，有时偏大有时偏小，但是在进行很多次的抽样之后，这些估计值的平均值会与θ几乎相等；即允许存在随机误差，但无偏性要求没有系统误差。

无偏性—定义和理解

- 实际意义：估计量的无偏性并不是都有实际意义的，需要根据具体的情况来考虑

- 案例一：若制药公司要根据原料中某种成分的含量θ进行设计配料方案，由于未知，故用估计值$\hat{\theta}$去配料

此时的无偏估计量是没有现实意义的

- 案例二：考虑产品的价格时，应当把次品率也考虑进去，若某批产品次品率为θ, 每件合格品的价格为x，从长期来看，则每件产品的合理价格应为$x(1-\theta)$

天善智能
TIANSHAN SOFT

无偏性示例

- 若母体X的原点矩 $v_k = EX^k$ 和中心矩 $\mu_k = E(X - v_1)^k, k = 1,2,3,4$ 都存在 ，若 $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ 是样本方差
- 样本方差 S^2 的数学期望：$ES^2 = \frac{n-1}{n}\mu_2$
- 令 $S^{*2} = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ 则 $ES^{*2} = \frac{n}{n-1}ES^2 = \mu_2 = D\xi$

S^{*2} 是母体方差的无偏估计

- 当 $n \to +\infty$ 时，$ES^2 = \frac{n-1}{n}\mu_2 \to \mu_2$ ，则称 S^2 是母体方差的渐进无偏估计

天善智能 TIANSHAN SOFT

有效性

- 估计量的无偏性只保证了估计量的取值在参数真值周围波动,但是波动的幅度有多大呢?一般希望估计量波动的幅度越小越好,幅度越小,则估计量取值与参数真值有较大偏差的可能性越小,而衡量随机变量波动幅度的量就是方差——有效性

- 定义：若$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$都是参数$\theta$的无偏估计量，若$D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$

  则称 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$比$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$有效

有效性示例

- 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自均值为μ 方差为σ^2 的总体的样本 ，$\overline{X}, X_i (i=1,2,\cdots,n)$ 均为总体均值的$E(X)=\mu$的无偏估计量

哪个更有效？

- 由于$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$ ，$D(X_i)=\sigma^2 (i=1,2,\cdots,n)$

  其中 $D(\overline{X})<D(X_i)$

$\overline{X}$ 更有效

天善智能 TIANSHAN SOFT

相合性

- 估计量的无偏性、有效性，都是在样本容量一定的情况下讨论的。当样本容量$n \to +\infty$ 时，我们也希望有一个标准来评判估计量的优劣——相合性

估计量在 $n \to +\infty$ 时能不断接近未知参数的真值

- 定义：设$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为未知参数θ的估计量，若对任意的$\varepsilon > 0$，有

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$ ，或者$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \ge \varepsilon\right\} = 0$ ，称$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为$\theta$的**相合估计量**

相合性也称一致性，是估计量的最基本要求，
它反映了估计量的一种大样本性质

天善智能 TIANSHAN SOFT

小结

- 无偏性
- 有效性
- 相合性
- 小结