天善智能
TIANSHAN SOFT

专注于商业智能BI和大数据的垂直社区平台

极大似然估计

Allen

www.hellobi.com

课程目录

- 引子
- 极大似然估计简史
- 极大似然原理
- 极大似然估计法
- 示例
- 小结

引子

- 问题1：一位同学和一位老猎人外出打猎，突然一只野兔从前方窜过，只听一声枪响，野兔倒下。

野兔是谁打中的呢？

- 问题2：一个箱子中装有形状大小完全相同的白球和黑球100个，其中一种颜色99个，另一种1个，现随机从中取一球，结果是黑色球。

箱中白球和黑球的个数？

天善智能
TIANSHAN SOFT

极大似然估计简史

- 极大似然最早是由德国数学家高斯提出的
- 费希尔在1912年的文章中重新提出，并且证明了这个方法的一些性质，极大似然估计这一名称也是费希尔给出的
- 极大似然原理的直观想法是：一个随机试验如有若干个可能的结果A，B，C，...。若在一次试验中，结果A出现，则一般认为试验条件对A出现有利，也即A出现的概率很大

极大似然估计原理

- 若一试验有n个可能结果$A_1, A_2, \cdots, A_n,$现在做一个试验，如果事件A_i发生了，则认为事件A_i在这n个可能结果中出现的概率最大

一次试验就出现的事件（应该）有较大的概率

- 简言之：极大似然估计就是在一次抽样中，如果得到观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n,$则选取$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$作为$\theta$的估计值，使得当$\theta = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$时，样本出现的概率最大

天善智能 TIANSHAN SOFT

极大似然估计法

- 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自具有概率函数$\{f(x;\theta), \theta \in \Theta\}$的母体X的一个简单随机样本，样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$的联合概率函数在$X_i$取已知观测值$x_i, i = 1, \cdots, n$时的值$f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$是$\theta$的函数

- 用$L(\theta) = L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示上式，称这个式子为样本的似然函数，即

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1,\theta) f(x_2,\theta) \cdots f(x_n,\theta)$$

极大似然估计法—离散型

- 若$X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自离散型母体X的一个简单随机样本，$L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n)$就是观测到$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的概率，可以把$L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n)$看成是$\theta$的一个测度

- 寻找观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的函数$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，以$\hat{\theta}$代替$\theta$使得

$$L(\hat{\theta}; x_1, x_2, \cdots, x_n) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n)$$ 成立

- 那么满足上式的$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$就是最可能产生$x_1, x_2, \cdots, x_n$的参数$\theta$的值，称$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为参数$\theta$的极大似然估计值，统计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为参数$\theta$的极大似然估计量

天善智能 TIANSHAN SOFT

极大似然估计法—连续型

- 若$X_1,X_2,\ldots,X_n$是取自连续型母体X的一个简单随机样本，$L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)$就是观测到$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的概率，可以把$L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)$看成是$\theta$的一个测度
- 寻找观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的函数$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，以$\hat{\theta}$代替$\theta$使得

  $L(\hat{\theta};x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)$成立
- 因为$\ln x$是x的单调增函数，所以使用$\ln L(\hat{\theta};x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max\limits_{\theta\in\Theta}\ln L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)$也可求得极大似然估计值

天善智能 TIANSHAN SOFT

极大似然估计法—步骤

- 1.构造似然函数 $L(\theta)$

  离散型： $L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)$ 连续型： $L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$

- 2.取对数：$\ln L(\theta)$

- 3.求导：$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$

- 4.解似然方程得到 θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}$

注意：若似然方程无解或者似然函数不可导，不能用此方法

天善智能 TIANSHAN SOFT

示例

- 例：若X是服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体X的一个样本值，求参数 λ 的极大似然估计值

- 1.X的分布律为 $P\{X=x\}=\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}(x=0,1,\cdots,n)$，所以似然函数为 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)$

- 2.取对数 $\ln L(\lambda)=-n\lambda+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}(x_i!)$

- 3.求导 $\dfrac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=-n+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$，解得极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$

天善智能 TIANSHAN SOFT

示例

- 例：若总体X是 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体X的一个样本值，求参数 μ,σ^2 的极大似然估计值
- 1.X的概率密度为 $f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，所以似然函数为 $L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$
- 2.取对数 $\ln L(\mu,\sigma^2)=\ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$
- 3.求偏导 $\begin{cases}\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=0\\ \frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=0\end{cases}$ ，解得极大似然估计值为 $\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$ ，$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$

天善智能 TIANSHAN SOFT

小结

- 引子
- 极大似然估计简史
- 极大似然原理
- 极大似然估计法
- 示例
- 小结