天善智能
TIANSHAN SOFT

专注于商业智能BI和大数据的垂直社区平台

假设检验的基本概念（二）

Allen

课程目录

- 假设检验的两类错误
- 显著性检验问题、显著性水平
- 求解引例
- 假设检验的一般步骤
- 小结

引例

- 设某厂生成一种灯泡，其寿命服从正态分布 $X \sim N(\mu, 40000)$ ，过去较长时间来看，灯泡的平均寿命为1500小时。但是现在采用新生产线后，从生产的灯泡中随机抽取了25只，测得平均寿命为1700小时。问采用新生产线后，灯泡的寿命是否显著提高？

假设检验的两类错误

- 两种可能性：
- 1.若H_0为真，但是子样观察值仍然落入到拒绝域C中，那么这种假设检验的结果就是错误的
- 2.若H_1为真，但是子样观察值仍然落入非拒绝域C^*中，那么这种假设检验的结果也是错误的

假设检验的两类错误——第一类错误

- **第一类错误**：当H_0为真，但是子样观察值仍然落入到拒绝域C中，那么按照给定的检验法则，应当拒绝H_0，就将这种错误称为第一类错误。其发生的概率称为犯第一类错误的概率或称拒真概率，通常记为α 即：

$$P\langle 拒绝H_0 \mid H_0为真\rangle = \alpha$$

- 引例中母体分布为$X \sim N(\mu, 40000)$，若记$\mu_0 = 1500$，则原假设可表示为$H_0: \mu = \mu_0$ 备择假设可表示为$H_1: \mu > \mu_0$，那么犯第一类错误的概率 α为：

$$P\langle (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C \mid \mu = \mu_0 \rangle = \alpha$$

天善智能 TIANSHAN SOFT

假设检验的两类错误——第二类错误

- 第二类错误：当H_1为真，但是子样观察值仍然落入非拒绝域C^*中,那么按照给定的检验法则，应当接受H_0，就将这种错误称为第二类错误。其发生的概率称为犯第二类错误的概率或称受伪概率，通常记为β即：

$$P\langle 接受H_0 \mid H_1为真 \rangle = \beta$$

- 引例中母体分布为$X \sim N(\mu,40000)$，若记$\mu_0 = 1500$，则原假设可表示为$H_0: \mu = \mu_0$备择假设可表示为$H_1: \mu > \mu_0$，那么犯第二类错误的概率β为：

$$P\langle (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C^* \mid \mu > \mu_0 \rangle = \beta$$

天善智能 TIANSHAN SOFT

假设检验的两类错误

- 假设检验的两类错误见如下表格：

		母体情况	
		H_0 为真	H_1 为真
子样	$\in$临界域（拒绝H_0）	犯第一类错误	正确
	$\notin$临界域（接受H_0）	正确	犯第二类错误

显著性检验问题、显著性水平

- 理想情况下，是找到一个临界域c 使得范两类错误的概率 α和 β 都很小，但是在样本容量 n 固定的情况下，两类错误都很小是不可能的，否则就会导致样本容量很大

- 显著性检验问题：如果只对犯第一类错误的概率加以限制，而不考虑范第二类错误的概率，这种统计假设检验问题就称为显著性检验问题，对给定的犯第一类错误的概率α 称为显著性水平

显著性检验问题、显著性水平

- 如果一个检验确定，那么临界域C 和补集C^* 就完全确定，那么在实际中就要寻找检验统计量$t=t(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ ，记为$F=\{t=t(x_1,x_2,\cdots,x_n);(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C\}$和
$F^*=\{t=t(x_1,x_2,\cdots,x_n);(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^*\}$
- 于是子样空间划分问题变为检验统计量求值问题，即：
$P\langle t\in F \mid H_0\text{为真}\rangle = P\langle (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C \mid H_0\text{为真}\rangle=\alpha$ 和$P\langle t\in F^* \mid H_1\text{为真}\rangle = P\langle (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^* \mid H_1\text{为真}\rangle=\beta$
- 如果在H_0成立的条件下，统计量t 的分布已知，那么对于给定α 就可以通过等式$P\langle t\in F \mid H_0\text{为真}\rangle=\alpha$ 来确定区域F

天善智能 TIANSHAN SOFT

求解引例

- 若原假设 $H_0: \mu = 1500$ 为真，那么样本容量为25的子样均值$\overline{X}$ 服从 $N\left(\mu_0, \frac{\sigma_0{}^2}{n}\right) = N(1500,1600)$ 分布，如果假设 $H_1: \mu > 1500$ 为真，子样均值 $\overline{X}$ 比 μ_0 大的可能性就大，那么子样观察值所得均值比 μ_0 大到什么程度才认为拒绝原假设
- 如果取 $u = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 1500}{40}$ 作为检验统计量，那么在原假设为真时u服从 $N(0,1)$ 分布，　于是对于给定显著性水平α 有 $P(u \geq u_{1-\alpha}) = \alpha$

$u_{1-\alpha}$ 是 $N(0,1)$ 的 $1-\alpha$　分位数

天善智能
TIANSHAN SOFT

求解引例

- 由上可知当子样观测值算出的 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)>u_{1-\alpha}$ 时就拒绝原假设 H_0。这样如果取显著性水平 $\alpha=0.05$ ，从标准正态分布表中就可查得 $u_{1-\alpha}=1.65$ ，从而得到临界域为 $C=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\dfrac{\bar{x}-1500}{40}\geq 1.65\right\}$ 即 $C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\bar{x}\geq 1566\}$

- 这样如果一次抽样的观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C$ ，就拒绝原假设 H_0 ，这时犯第一类错误的概率是 $\alpha=0.05$，由于观测到的灯泡寿命均值是1700，所以就拒绝原假设

假设检验的一般步骤

- 1.根据实际问题要求建立原假设H_0和备择假设H_1

原假设$H_0: \mu = 1500$和备择假设$H_1: \mu > 1500$

- 2.选取合适的检验统计量使其在H_0为真时不含未知参数，可求分位数

检验统计量$u = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \dfrac{\overline{X} - 1500}{40}$服从标准正态分布

- 3.给定显著性水平α（一般为0.1,0.05,0.01等），求出临界域

显著性水平 $\alpha = 0.05$求出临界域$C = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \overline{x} \geq 1566\}$

- 4.若子样观测值算得的u值在临界域中，则拒绝原假设H_0，否则接受H_0

观测值1700落在临界域中，就拒绝原假设

小结

- 假设检验的两类错误
- 显著性检验问题、显著性水平
- 求解引例
- 假设检验的一般步骤
- 小结

天善智能
TIANSHAN SOFT