Nguyễn Quang Tuấn

Ths. Thái Bảo Khánh – Ths. Trần Quốc Vương
Ths. Lê Thị Thùy Trang – Ths. Nguyễn Thị Thùy Dung

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
VÀ
ỨNG DỤNG TRONG KINH TẾ
(Dùng cho nhóm ngành Kinh tế)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC - KỸ THUẬT

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH VÀ THỜI GIAN HỌC PHẦN

1. **Sử dụng sách**
    - Giảng viên (GV) sử dụng sách làm tài liệu giảng dạy chính.
    - Sinh viên làm bài tập trực tiếp vào sách hoặc giấy A4 và đóng thành tập.
    - Sinh viên nộp lại bài tập vào 02 buổi học: **giữa kỳ** và **cuối kỳ** để GV chấm điểm.

2. **Thời gian và tỉ lệ đánh giá học phần**
    - Thời gian học của học phần: Từ ....đến ....
    - Thời gian thi giữa kỳ của học phần: ....
    - Thời gian thi cuối kỳ của học phần: ....
    - Thời gian nộp bài tập: ....

3. **Thông tin GV giảng dạy**
    - Họ và tên: ....
    - Điện thoại: ....
    - Email ....

4. **Thông tin sinh viên tham gia học**
    - Họ và tên: ....
    - Mã số SV: ....
    - Điện thoại: ....
    - Email ....

Lời nói đầu

Đại số tuyến tính là một lĩnh vực toán học quan trọng và có nhiều ứng dụng rộng rãi trong kinh tế. Nó nghiên cứu về các phép toán và thuật toán liên quan đến các biến số tuyến tính và mối quan hệ giữa chúng. Việc áp dụng các khái niệm và phương pháp của đại số tuyến tính trong kinh tế giúp tăng cường khả năng phân tích, dự báo và quyết định thông qua việc xây dựng mô hình, tối ưu hóa và phân tích dữ liệu kinh tế. Dưới đây là một số khái niệm cơ bản của đại số tuyến tính, được trình bày thành ba chương trong cuốn sách nhỏ này, và các ứng dụng của chúng trong kinh tế:

• **Chương 1. Ma trận:** Ma trận là một bảng số gồm hàng và cột, được sử dụng để biểu diễn thông tin và dữ liệu trong kinh tế. Ví dụ, ma trận có thể đại diện cho thu nhập của các hộ gia đình, có thể biểu diễn mô hình tương tác giữa các ngành công nghiệp. Định thức dùng để giải quyết hệ phương trình tuyến tính, định giá tài sản, phân tích chuỗi cung ứng và kinh tế toán học.

• **Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính:** Hệ phương trình tuyến tính là một tập hợp các phương trình trong đó các biến số chỉ có số mũ là một. Đại số tuyến tính cung cấp phương pháp để giải quyết và phân tích các hệ phương trình tuyến tính. Trong kinh tế, hệ phương trình tuyến tính được sử dụng để mô hình hóa và giải quyết các vấn đề như mô hình kinh tế toàn cầu, dự báo thị trường và quản lý rủi ro.

• **Chương 3. Quy hoạch tuyến tính:** Quy hoạch tuyến tính là một phương pháp toán học dùng để tối ưu hóa một hàm mục tiêu tuyến tính trong các ràng buộc tuyến tính. Nó được sử dụng để giải quyết các vấn đề tối ưu trong nhiều lĩnh vực, bao gồm cả kinh tế, đặc biệt là: quản lý sản xuất, quản lý kho, quản lý đầu tư, quy hoạch vận tải,...

Cuốn sách nhỏ này được viết dựa trên cách tiếp cận mới từ quyển "MATHEMATICS FOR ECONOMICS AND BUSINESS" của IAN JACQUES: các khái niệm Toán học được trình bày từ những vấn đề nhỏ nhất với các ví dụ minh họa rõ ràng. Cách tiếp cận này phù hợp cho những sinh viên, có thể yếu về khả năng Toán học, có thể dễ dàng tiếp cận, hiểu, thực hành và vận dụng được vào các bài toán thực tế. Cho dù như vậy, các đối tượng Toán học được trình bày trong quyển sách nhỏ này cũng không vì thế mà mất đi bản chất vốn có của nó. Do đó, cuốn sách này có thể được dùng để giảng dạy hoặc làm tài liệu tham khảo cho những sinh viên nhóm ngành Kinh tế, Quản trị kinh doanh và Tài chính ngân hàng ở các trường Cao đẳng – Đại học, chỉ cần sinh viên có tinh thần học tập và một ít kiến thức Toán học ở bậc phổ thông.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng và đọc lại bản thảo nhiều lần nhưng chắc chắn rằng trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi sai sót và nhầm lẫn, mong bạn đọc cho ý kiến đóng góp.

Mọi góp ý gửi về địa chỉ:
Nguyễn Quang Tuấn - Khoa CNTT - Trường ĐH Nha Trang
Số 02 Nguyễn Đình Chiểu, TP. Nha Trang, Tỉnh Khánh Hòa
Email: tuannq@ntu.edu.vn
Số điện thoại: 0987305113.

Ngày 06 tháng 06 năm 2023

Nhóm tác giả

Mục lục

Chương1

MA TRẬN
Các ví dụ trong kinh tế

Mục 1.1 giới thiệu khái niệm về ma trận như là một đối tượng toán học thuận tiện để biểu diễn thông tin được hiển thị trên bảng. Bằng cách định nghĩa các phép toán ma trận như cộng, trừ, nhân một số với một ma trận và nhân hai ma trận với nhau, ta có thể phát triển đại số ma trận. Các ví dụ kinh tế đơn giản được sử dụng để minh họa các định nghĩa này và cho thấy rằng các quy tắc về tính toán ma trận gần như tương đồng với các quy tắc của phép tính các số thông thường. Ở mục 2.2, bạn sẽ được chỉ dẫn cách tính ma trận nghịch đảo. Điều này tương tự như nghịch đảo của một số và cho phép giải các phương trình ma trận.

1.1 Ma trận.

MỤC TIÊU

Cuối phần này, bạn sẽ có thể:

- Hiểu ký hiệu và thuật ngữ của đại số ma trận.
- Tìm được ma trận chuyển vị.
- Cộng và trừ ma trận.
- Nhân một số với một ma trận.
- Nhân các ma trận với nhau.
- Lũy thừa của một ma trận vuông.

Chúng ta xem xét một bảng niêm yết giá trong một phiên giao dịch trên sàn chứng khoán của hai mã chứng khoán **ACB** (Ngân hàng Á Châu) và **BCM** (Tổng công ty đầu tư và phát triển công nghiệp) với các mức giá : **Trần** (là mức giá tối đa mà cổ phiếu có thể tăng trong một phiên giao dịch và nó phụ thuộc vào sàn được niêm yết), **Sàn** (mức giá tối đa mà cổ phiếu có thể giảm trong một phiên giao dịch) và **TC** (là mức giá đóng cửa tại phiên giao dịch gần nhất). Có thể rõ ràng từ ngữ cảnh để biết chính xác những con số trong bảng đại diện cho cái

CK	Trần	Sàn	TC
ACB	23.30	20.30	21.80
BCM	83.30	72.50	77.90

Hình 1.1: (Nguồn: Sàn chứng khoán Vietnam)

gì. Trong trường hợp này, việc bỏ qua tiêu đề bảng và viết thông tin này một cách ngắn gọn hơn bởi một bảng các số sau, là hợp lý

$$A = \begin{bmatrix} 23.30 & 20.30 & 21.80 \\ 83.30 & 72.50 & 77.90 \end{bmatrix}$$

và nó chính là một ví dụ của ma trận. Nói một cách dễ hiểu, ma trận là một bảng các số được sắp thành các hàng và cột, tạo thành một hình chữ nhật, và được bao quanh hai đầu bởi một cặp dấu ngoặc vuông hoặc ngoặc tròn. Các số trong bảng được gọi là các phần tử của ma trận đó. Người ta thường dùng các chữ cái hoa $A, B, C, \ldots$ để kí hiệu các ma trận và các chữ các thường $a, b, c, \ldots$ để kí hiệu các phần tử của ma trận đó. Một ma trận A gồm 6 phần tử, được sắp thành 2 hàng và 3 cột được gọi là ma trận có cỡ (2×3). Tổng quát, một ma trận A có cỡ $(m \times n)$, có m hàng và n cột, có thể được viết một các tường minh như sau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

với các phần tử của nó là a_{ij}, là phần tử nằm ở hàng i và cột j (*đôi khi, trong thực tế hoặc trong một số ứng dụng, chẳng hạn như Excel thì việc truy xuất một phần tử trong bảng bằng cách gọi chỉ số cột đứng trước chỉ số hàng, chẳng hạn như $A1, C7, M10, \ldots$. Điều đó cũng không ảnh hưởng gì vì giao điểm của hai đường thẳng, nếu có, là duy nhất*). Lấy lại ví dụ ma trận A được xem xét ở đầu mục, ta thấy $a_{11} = 23.30$, $a_{23} = 77.90$ và tương tự cho việc xác định các phần tử khác. Trong một vài tình huống, để cho gọn hơn, người ta sẽ kí hiệu một ma trận A có cỡ $(m \times n)$ với các phần tử của nó là a_{ij} như sau $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ hoặc $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$.

***Ví dụ* 1.1.1.** Cho bảng số liệu sau

CK	Trần	Sàn	TC
ACB	23.30	20.30	21.80
BCM	83.30	72.50	77.90
BID	47.90	41.70	44.80
BVH	48.05	41.85	44.95
CTG	30.70	26.70	28.70
FPT	91.20	79.40	85.30
GAS	101.70	88.50	95.10

Hình 1.2: (Nguồn: Sàn chứng khoán Vietnam)

a) Hãy lập ma trận B cho bảng số liệu và cho biết cỡ của B.

b) Xác định các phần $b_{11}, b_{3,2}, b_{43}, b_{61}$.

1.2 Các phép toán.

Như vậy, chúng ta đã giải thích ma trận là gì và cung cấp một số ký hiệu để xử lý chúng. Một ma trận chắc chắn mang lại cho chúng ta một phương tiện thuận tiện để mô tả thông tin được trình bày trong một bảng. Tuy nhiên, chúng tôi muốn đi xa hơn và sử dụng ma trận để giải quyết các vấn đề trong kinh tế. Để làm điều này, chúng tôi mô tả một số phép toán toán học có thể thực hiện trên ma trận, bao gồm:

- Chuyển vị;
- Cộng và trừ;
- Nhân với một số;
- Nhân hai ma trận.

Một sự "bỏ sót" hiển nhiên trong danh sách là phép chia ma trận. Chính xác mà nói, không thể chia một ma trận cho một ma trận khác, mặc dù chúng ta có thể gần đạt được ý tưởng của phép chia bằng cách định nghĩa "ma trận nghịch đảo", mà chúng tôi xem xét trong Mục 1.3.

1.2.1 Chuyển vị.

Chúng ta xét lại bảng niêm yết giá của hai mã chứng khoán **ACB** và **BCM** với ma trận số liệu

$$A = \begin{bmatrix} 23.30 & 20.30 & 21.80 \\ 83.30 & 72.50 & 77.90 \end{bmatrix}.$$

Bây giờ, với các thông tin về mã chứng khoán và giá giống như Hình 1.1, nhưng chúng ta trình bày lại bảng niêm yết bằng cách đổi hàng thành cột tương ứng. Khi đó, ma trận số liệu tương ứng là

$$B = \begin{bmatrix} 23.30 & 83.30 \\ 20.30 & 72.50 \\ 21.80 & 77.90 \end{bmatrix}.$$

Trong tình huống này, chúng ta nói hai ma trận A và B là chuyển vị của nhau, và viết là $A^T = B$ - đọc là "A chuyển vị bằng B", hoặc $B^T = A$ - đọc là "B chuyển vị bằng A".

Phép chuyển vị của ma trận được thực hiện bằng cách thay thế các hàng bằng các cột, sao cho hàng đầu tiên trở thành cột đầu tiên, hàng thứ hai trở thành cột thứ hai và tiếp tục như vậy. Số hàng của ma trận A sau đó sẽ giống như số cột của ma trận A^T và ngược lại. Do đó, nếu A có cỡ $m \times n$, thì A^T sẽ có cỡ $n \times m$.

1.2.2 Phép cộng và phép trừ

Một quán bán đồ ăn vặt, có bán Trà sữa (ly), Shushi (phần) và Xiên que nướng (xiên) qua hai hình thức là bán tại quán và qua các ứng dụng đặt đồ ăn. Số liệu bán được trong một ngày cho bởi bảng sau:

Món Loại hình	Trà sữa	Shushi	Xiên que
Tại quán	30	20	50
Qua app	40	15	10

Hình 1.3:

Dễ để thiết lập ma trận số liệu của số lượng đơn vị sản phẩm bán ra là $A = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 40 & 15 & 10 \end{bmatrix}$, và giả sử đây là số lượng bán ra của ngày Thứ 7. Tương tự, chúng ta có thể giả sử số lượng bán ra của ngày Chủ nhật được biểu thị bởi $B = \begin{bmatrix} 80 & 50 & 100 \\ 30 & 15 & 10 \end{bmatrix}$. Điều này có nghĩa là, chẳng hạn xét tại vị trí $(1, 1)$, Thứ 7 bán được 30 ly trà sữa tại quán và Chủ nhật bán được 80 ly tại quán. Do đó, tổng cộng hai ngày đã bán được $30 + 80 = 110$ (ly) trà sữa tại quán. Tương tự cho các món ăn khác với các hình thức bán tương ứng, ta có thể tính được tổng số lượng bán ra cho hai ngày là

$$C = \begin{bmatrix} 30+80 & 20+50 & 50+100 \\ 40+30 & 15+15 & 10+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 70 & 150 \\ 70 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

Chúng ta miêu tả điều này bằng cách nói rằng C là tổng của hai ma trận A và B và viết là $C = A + B$. Nói chung, để cộng (hoặc trừ) hai ma trận có cùng cỡ, chúng ta chỉ cần cộng (hoặc trừ) các phần tử tương ứng của chúng. Với hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, ta có công thức tổng quát như sau

$$\boxed{\text{C=A}\pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}}$$

Lưu ý lại rằng, điều kiện cần để thực hiện được phép cộng (hoặc trừ) hai ma trận là chúng phải có cùng cỡ với nhau.

***Ví dụ* 1.2.1.** Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Tính $a)\ A+B$, $b)\ A-B$, $c)\ A-A$, $d)\ A+C$.

Giải.

$a)$ $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 2+1 & (-4)+1 \\ (-1)+0 & 0+3 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

$b)$ $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 & 2-1 & (-4)-1 \\ (-1)-0 & 0-3 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

$c)$ $A - A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 2-2 & (-4)-4 \\ (-1)-1 & 0-0 & 5-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$d)$ Không thực hiện được phép cộng vì hai ma trận có cỡ khác nhau.

Kết quả của Câu c) trong Ví dụ 1.2.1 là một ma trận có cỡ 2×3 mà tất cả các phần tử của nó đều là số 0. Một ma trận như vậy được gọi là **ma trận không**. Chúng ta có nhiều ma trận không với các cỡ khác nhau, chẳng hạn như $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$ tương ứng là các ma trận không với các cỡ 1×1, 1×2, 2×2, 3×2, 3×4. Tuy nhiên, bất kể như vậy, chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu đơn giản là $\mathbf{0}$ cho tất cả các ma trận này vì thông thường trong bất kỳ ví dụ cụ thể nào, chúng ta đều biết được cỡ phù hợp và ma trận không cụ thể nào đang được sử dụng. Theo định nghĩa của phép cộng và phép trừ, đối với bất kỳ ma trận A, ta có $A - A = \mathbf{0}$ và $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$. Vai trò của ma trận $\mathbf{0}$ trong đại số ma trận tương tự như số 0 trong phép tính thông thường.

1.2.3 Nhân một số với một ma trận

Bây giờ chúng ta hãy tưởng tượng và thử thay đổi các thông số của Hình 1.3: **Trà sữa:=Áo, Shushi:=Quần và Xiên que:=Mũ** ; tương tự như vậy, thay **Tại quán:=Trong nước, Qua app:=Xuất khẩu**. Vì các số chỉ là đại diện nên ta sẽ giữ nguyên số lượng như vậy và gọi chúng là bảng số liệu về số lượng các sản phẩm bán được trong 1 tháng. Hãy thực hiện yêu cầu: Lập

bảng số liệu về số lượng các phẩm bán được trong Quý I năm 2023 ?
Để thực hiện yêu cầu, với lưu ý một quý có 3 tháng, ta có thể tính như sau

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 40 & 15 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 40 & 15 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 40 & 15 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 60 & 150 \\ 120 & 45 & 30 \end{bmatrix} = B$$

Dễ thấy rằng, $B = \begin{bmatrix} 90 & 60 & 150 \\ 120 & 45 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \times 30 & \mathbf{3} \times 20 & \mathbf{3} \times 50 \\ \mathbf{3} \times 40 & \mathbf{3} \times 15 & \mathbf{3} \times 10 \end{bmatrix} = \mathbf{3}. \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 40 & 15 & 10 \end{bmatrix} = \mathbf{3}.A$

Đây có thể được xem như sự mở rộng "nhân một số cho một vector", có nghĩa là, khi thực hiện nhân một số cho một ma trận, ta nhân số đó cho tất cả các phần tử của ma trận. Tổng quát, cho trước số k và ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Khi đó, $k.A = [k.a_{ij}]_{m\times n}$.

***Ví dụ* 1.2.2.** Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Tính $a)\ 2.A$ $\quad b)\ (-3).B^T$ $\quad c)\ 2.A - 3.B^T$.

Giải.

$a)\ 2A = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times 1 & 2\times 4 \\ 2\times(-2) & 2\times 0 & 2\times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -4 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

$b)\ B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; $\quad (-3)B^T = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -12 \\ -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

$c)\ 2A - 3B^T = 2A + (-3B) = \begin{bmatrix} 6+0 & 2+(-6) & 8+(-12) \\ (-4)+(-9) & 0+3 & 12+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -13 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

1.2.4 Nhân hai ma trận.

Chúng ta bắt đầu bằng cách hướng dẫn cho bạn cách nhân một vector hàng với một vector cột. Để minh họa điều này, hãy xem xét lại bảng số liệu ở Hình 3, giả sử rằng hàng hóa Trà sữa, Shushi và Xiên que được bán với giá (ngàn đồng)/đơn vị sản phẩm lần lượt là $25, 30$ và 12, được cho bởi vector cột sau đây:

$$C = \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Ma trận hàng biểu thị số lượng bán được tại quán và qua app tương ứng là

$$H_1 = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 40 & 15 & 10 \end{bmatrix}.$$

Tính doanh thu bằng cách nhân số lượng bán được cho đơn giá một sản phẩm, ta có

- Doanh thu nhận được từ việc bán các món ăn **tại quán**

  - Trà sữa: $30 \times 25 = 750$ (ngàn đồng).

- Shusui: $20 \times 30 = 600$ (ngàn đồng).

- Xiên que: $50 \times 12 = 600$ (ngàn đồng).

Tổng doanh thu khi bán tại quán là

$$TR_1 = 750 + 600 + 600 = 1950 \text{ (ngàn đồng)}.$$

- Tương tự, doanh thu cho việc bán các món ăn **qua app** là

$$TR_2 = (40 \times 25) + (15 \times 30) + (10 \times 12) = 1000 + 450 + 120 = 1570 \text{ (ngàn đồng)}.$$

Chúng ta xem xét cách trình bày các phép toán trên, dưới dạng ma trận

$$TR_1 = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (30 \times 25) + (20 \times 30) + (50 \times 12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \end{bmatrix}$$

$$TR_2 = \begin{bmatrix} 40 & 15 & 10 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (40 \times 25) + (15 \times 30) + (10 \times 12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1950 \end{bmatrix}$$

Gọi $TR = \begin{bmatrix} TR_1 \\ TR_2 \end{bmatrix}$ là ma trận doanh thu của quán. Khi đó

$$TR = \begin{bmatrix} \text{Ma trận sản lượng} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \text{Ma trận giá} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \\ 40 & 15 & 10 \end{bmatrix}_{\mathbf{2\times 3}} . \begin{bmatrix} 25 \\ 30 \\ 12 \end{bmatrix}_{\mathbf{3\times 1}} = \begin{bmatrix} 750 \\ 1950 \end{bmatrix}_{\mathbf{2\times 1}}$$

Ở đây, chúng ta có thể mở rộng bằng cách xem xét có n sản phẩm cần bán với các giá bán tương ứng, được cho tương ứng bởi 2 ma trận sau

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix},$$

khi đó

$$\textbf{Doanh thu} = X.P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Bây giờ chúng ta sẽ định nghĩa phép nhân hai ma trận. Cho A là một ma trận có cỡ $(\mathbf{m} \times \mathbf{n})$ và B là một ma trận có cỡ $(\mathbf{n} \times \mathbf{p})$. Khi đó, $C = A.B$ là một ma trận có cỡ $(\mathbf{m} \times \mathbf{p})$ và các phần tử c_{ij} của ma trận tích được xác định bằng cách **nhân hàng thứ i của A cho cột thứ j của B** , tức là

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = x_{i1}b_{1j} + x_{i2}b_{2j} + \ldots + x_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}b_{kj}.$$

Chúng ta có 3 lưu ý khi thực hiện phép nhân ma trận, cụ thể là

- Số cột của A bằng với số hàng của B. Nếu điều kiện này được thỏa mãn thì chúng ta thực hiện được phép nhân (theo thứ tự) $C = AB$.

- Ma trận $C = AB$ có cỡ $(\mathbf{m} \times \mathbf{p})$, trong đó $\mathbf{m}$ là số hàng của A và $\mathbf{p}$ là số cột của B.

- Cuối cùng, các phần tử của C được tìm bằng cách nhân vector hàng và vector cột với nhau.

Để hiểu rõ hơn kỹ thuật thực hiện nhân hai ma trận, chúng ta xem xét một ví dụ sau

***Ví dụ* 1.2.3.** Cho ba ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ và } \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép tính: $a)AB$, $b)BA$, $c)AC$, $d)BC$, $e)ABC$, $f)BAC$.

Giải.

$a)$ Sẽ là một ý tưởng tốt nếu trước khi thực hiện tính toán cụ thể, bạn cần kiểm tra liệu hai ma trận này có nhân được với nhau hay không. Nếu chúng nhân được với nhau thì xác định cỡ của ma trận tích là bao nhiêu. Trong trường hợp này, ta thấy ma trận A có cỡ là $(\mathbf{2} \times \mathbf{3})$ nên số cột của A là $\mathbf{3}$; ma trận B có cỡ là $(\mathbf{3} \times \mathbf{2})$ nên số hàng của B là $\mathbf{3}$. Như vậy, chúng ta thực hiện được phép nhân cho hai ma trận A và B, theo thứ tự là AB. Ma trận tích sau khi thực hiện phép nhân sẽ có cỡ là $(\mathbf{2} \times \mathbf{2})$, được viết tường minh như sau

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

trong đó

$$d_{11} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} = (1\times 2) + (2\times(-1)) + (3\times 0) = 0$$

$$d_{12} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = (1\times 1) + (2\times 3) + (3\times 4) = 19$$

$$d_{21} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} = (0\times 2) + ((-1)\times(-1)) + (4\times 0) = 1$$

$$d_{22} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = (0\times 1) + ((-1)\times 3) + (4\times 4) = 18.$$

Vậy $AB = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\\0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 19\\1 & 18\end{bmatrix}$.

b) Trong trường hợp này, ta nhận thấy phép nhân BA là thực hiện được với ma trận tích có cỡ là $(\mathbf{3}\times\mathbf{3})$. Thực hiện các phép tính tương tự như trên, ta có kết quả

$$BA = \begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2\times 1)+(1\times 0) & (2\times 2)+(1\times(-1)) & (2\times 3)+(1\times 4)\\((-1)\times 1)+(3\times 0) & ((-1)\times 2)+(3\times(-1)) & ((-1)\times 3)+(3\times 4)\\(0\times 1)+(4\times 0) & (0\times 2)+(4\times(-1)) & (0\times 3)+(4\times 4)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}2 & 3 & 10\\-1 & -5 & 9\\0 & -4 & 16\end{bmatrix}.$$

Từ hai kết quả tính toán AB và BA, ta thấy rằng *phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán*, tức là, nói chung $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

c) Thực hiện tương tự như hai trường hợp trên, kết quả cho ma trận tích có cỡ $(\mathbf{2}\times\mathbf{3})$.

d) Ta thấy số cột của ma trận B là **2**, trong khi đó số hàng của ma trận C là **3**. Do đó, phép nhân BC không thực hiện được.

e) Để thực hiện phép nhân ba ma trận, chúng ta có thể thực hiện (AB), sau đó đem ma trận này nhân với C theo thứ tự, có nghĩa là $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$; hoặc cũng có thể thực hiện $\mathbf{ABC} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Lưu ý rằng, trong quá trình tính toán, nếu có phép nhân nào không thực hiện được thì kết luận rằng tích ABC không tồn tại. Trong trường hợp này, ma trận tích ABC không tồn tại. Vì sao?

f) Dành cho bạn đọc.

1.2.5 Lũy thừa của một ma trận vuông.

Cho trước một ma trận A có cỡ $(m\times n)$ bất kỳ. Phép nhân $\mathbf{AA}$ sẽ không thực hiện được nếu $m \neq n$; phép nhân chỉ thực hiện được khi số hàng và số cột của A bằng nhau, tức là

$m = n$, một ma trận như vậy được gọi là *ma trận vuông* cấp n. Với k là một số nguyên không âm, lũy thừa của ma trận A được định nghĩa như sau

$$\mathbf{A^k} = \underbrace{\mathbf{A.A\ldots A}}_{\mathbf{k}\text{ lần}}$$

Quy ước, $\mathbf{A^0} = \mathbf{I_n}$.
Trong đó, $\mathbf{I_n}$ là ma trận đơn vị cấp n được "định nghĩa" như sau

$$\mathbf{I_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \mathbf{I_4} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \ldots$$

Nếu A là một ma trận vuông cấp n thì tập tất cả các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là đường chéo chính. Như vậy, ma trận đơn vị là một ma trận vuông với các phần tử trên đường chéo chính là **1** và các phần tử ngoài đường chéo chính là **0**. Dễ dàng kiểm tra, với A là ma trận vuông cấp n, ta có

$$A.\mathbf{I_n} = \mathbf{I_n}.A = A.$$

***Ví dụ* 1.2.4.** Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Thực hiện các phép tính: $a)\ A\mathbf{I_2}$ $\quad b)\ \mathbf{I_3}B$ $\quad c)\ A^2, A^3, A^4, A^{2023}, A^{2024}$ $\quad d)\ B^2, B^3$.

Giải.

$a)$, $b)$. Dành cho bạn đọc.

$c)$ Ta có

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; A^3 = AAA = A^2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; A^{2023} = \begin{bmatrix} 0 & 4044 \\ 2022 & 0 \end{bmatrix}; A^{2024} = \begin{bmatrix} 2024 & 0 \\ 0 & 2024 \end{bmatrix}.$$

$d)$ Dành cho bạn đọc.

***Ví dụ* 1.2.5.** Chứng minh rằng

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^6 + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^6$$

Giải. Dành cho bạn đọc. (Qua ví dụ này thấy rằng **Định lý cuối cùng của Fermat** trong đại số các ma trận không còn đúng.)

***Ví dụ* 1.2.6. (Chuyển đổi thị trường lao động).**
Giả sử có một người, tại một thời điểm nào đó, có thể nhận một trong ba trạng thái riêng biệt: **Có việc làm (E), Thất nghiệp (U)** hoặc **Không tham gia lực lượng lao động (N)**. Trong mỗi thời kỳ, mỗi cá nhân có thể thay đổi trạng thái với một xác suất nào đó hoặc vẫn ở trạng thái hiện tại. Ma trận xác suất chuyển tiếp trạng thái của một người được viết như sau

$$\begin{bmatrix} Pr(E,E) & Pr(U,E) & Pr(N,E) \\ Pr(E,U) & Pr(U,U) & Pr(N,U) \\ Pr(E,N) & Pr(U,N) & Pr(N,N) \end{bmatrix},$$

trong đó $Pr(E,U)$ là xác suất chuyển trạng thái của một người từ **có việc làm** sang **thất nghiệp**, $Pr(E,N)$ là xác suất chuyển trạng thái của một người từ **có việc làm** sang **không tham gia lực lượng lao động**, $Pr(U,E)$ là xác suất chuyển trạng thái của một người từ **thất nghiệp** sang **có việc làm**,...,và tiếp tục như vậy.
Gọi $x_0 = \begin{bmatrix} E_0 \\ U_0 \\ N_0 \end{bmatrix}$ là vector ban đầu của số người ở mỗi trạng thái trong thị trường lao động. Khi đó, nếu $x_n = \begin{bmatrix} E_n \\ U_n \\ N_n \end{bmatrix}$ là vector biểu thị số lượng người có việc làm, thất nghiệp và không tham gia lực lượng lao động sau n giai đoạn thì x_n được tính theo công thức sau

$$\begin{bmatrix} E_n \\ U_n \\ N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Pr(E,E) & Pr(U,E) & Pr(N,E) \\ Pr(E,U) & Pr(U,U) & Pr(N,U) \\ Pr(E,N) & Pr(U,N) & Pr(N,N) \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} E_0 \\ U_0 \\ N_0 \end{bmatrix}.$$

1.3 Ma trận nghịch đảo .

MỤC TIÊU

Cuối phần này, bạn sẽ có thể:

- Tính được định thức của ma trận vuông cấp **2**.
- Tính được định thức của ma trận vuông cấp **3**.
- Tìm được ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp **2**
- Tìm được ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp **3**.
- Giải được một số dạng phương trình ma trận đơn giản.

Đến đây, bạn có thể đã thấy được rằng có nhiều sự tương đồng trong tính toán giữa đại số các số và đại số ma trận, chẳng hạn như, phép cộng, phép trừ, phép nhân. Sẽ bỏ lỡ điều gì đó nếu chúng ta không nhắc đến phép tìm nghịch đảo của một ma trận. Như ta đã biết, với một số $a \neq 0$ luôn tồn tại một số, được kí hiệu là $\frac{1}{a}$ hoặc a^{-1}, thỏa mãn $a.\frac{1}{a} = a.a^{-1} = 1$ và ta gọi nó là nghịch đảo của số a. Trong phép nhân các ma trận, ma trận đơn vị cấp n là $\mathbf{I_n}$ có tính chất tương tự như số 1 trong hệ thống số. Lưu ý rằng, phép tìm ma trận nghịch đảo chỉ được

thực hiện trên lớp các ma trận vuông.
Theo cách tiếp cận trên, nếu cho trước một ma trận A vuông cấp n. Bài toán đặt ra là tìm một ma trận, được kí hiệu là A^{-1}, sao cho

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I_n}$$

Nếu có ma trận A^{-1} như vậy thì ta gọi nó là *ma trận nghịch đảo của* A và ta nói là A *khả nghịch* . Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, khi đó ma trận A có ma trận nghịch đảo là

$$A^{-1} = \frac{1}{(\mathbf{0} \times \mathbf{3}) - (\mathbf{1} \times \mathbf{2})} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng kiểm tra được $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{I_2}$. Giả sử $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ là một ma trận vuông cấp 2 bất kì. Khi đó, nếu $\mathbf{a_{11}}a_{22} - \mathbf{a_{12}}a_{21} \neq 0$ thì ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a_{11}}a_{22} - \mathbf{a_{12}}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Đặt $\det(A) = \mathbf{a_{11}}a_{22} - \mathbf{a_{12}}a_{21}$ và được gọi là *định thức* của ma trận A vuông cấp 2, đôi khi người ta cũng dùng kí hiệu $|A|$ thay cho $\det(A)$. Như vậy, điều kiện cần và đủ để ma trận vuông cấp 2 khả nghịch chính là $\det(A) \neq 0$ và điều này cũng đúng cho những ma trận vuông cấp n bất kỳ.

1.3.1 Định thức.

Có nhiều phương pháp để tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông cho trước, nếu nó tồn tại, chẳng hạn như phương pháp Gauss - Jordan, Định lý Haminton - Cayley, Ma trận khối, ... Ở đây, chúng ta xem xét phương pháp dùng *phần phụ đại số* để tìm ma trận nghịch đảo mà công cụ chính đó là định thức.

- Với $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì định thức của A được tính như sau

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\mathbf{1+1}}\mathbf{a_{11}}a_{22} + (-1)^{\mathbf{1+2}}\mathbf{a_{12}}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Với $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ thì định thức của A được tính như sau

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\mathbf{1+1}}\mathbf{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{\mathbf{1+2}}\mathbf{a_{12}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{\mathbf{1+3}}\mathbf{a_{13}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Trên đây là cách tính định thức bằng cách **khai triển theo hàng thức nhất.**

***Ví dụ* 1.3.1.** Tính định thức của hai ma trận sau $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có

- $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (2 \times 0) - (3 \times (-1)) = 3.$
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{1}.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{2}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-3-0) - 2(0-2) + 3(0-(-2)) = 7.$

1.3.2 Thực hành tìm ma trận nghịch đảo.

1. **Bài toán.** Cho ma trận A vuông cấp 3. Tìm ma trận nghịch đảo của A, nếu có.
2. **Các bước giải.**
   - **Bước 1.** Tính $\det(A)$.

     +) Nếu $\det(A) = 0$ thì kết luận ma trận A không có nghịch đảo. Dừng lại.

     +) Nếu $\det(A) \neq 0$ thì kết luận A khả nghịch và chuyển sang **Bước 2**.
   - **Bước 2.** Tính các phần phụ đại số theo công thức $\mathbf{A_{ij}} = (-1)^{i+j}.\mathbf{M_{ij}}$, với $\mathbf{M_{ij}}$ là định thức còn lại sau khi bỏ đi hàng i và cột j của ma trận A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\ A_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},\ A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

   - **Bước 3.** Ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Cách tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận vuông cấp 2 hay cấp $n > 3$ bất kỳ cũng được thực hiện tương tự như trên.

***Ví dụ* 1.3.2.** Cho ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận nghịch đảo của A, nếu có.

Giải. Ta có $\det(A) = -2 \neq 0$. Do đó, A khả nghịch. Tính toán các A_{ij} $(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$, cụ thể như sau

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Vậy ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

***Ví dụ* 1.3.3.** Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Giải. Dành cho bạn đọc.

1.3.3 Phương trình ma trận .

Mục này trình bày một trong những ứng dụng của ma trận nghịch đảo thông qua các ví dụ cụ thể. Đối với những hệ phương trình tuyến tính gồm hai phương trình, hai ẩn hoặc ba phương trình, ba ẩn thì đã có nhiều cách giải khác nhau, chẳng hạn như phép thế, phép khử. Ở đây, chúng ta sẽ biểu diễn các hệ như vậy dưới dạng ma trận và dùng ma trận nghịch đảo để giải các phương trình ma trận này. Điều này tương đồng với việc giải phương trình bậc nhất $ax + b = 0\,(a \neq 0)$ mà ta đã biết.

***Ví dụ* 1.3.4.** Các giá cân bằng P_1 và P_2 của hai loại hàng hóa thỏa mãn các phương trình sau

$$\begin{aligned} 4P_1 - P_2 &= 13 \\ 2P_1 - 5P_2 &= -7 \end{aligned}$$

Hãy biểu diễn hệ phương trình này dưới dạng ma trận và từ đó tìm P_1, P_2.

Giải. Sử dụng các kí hiệu của ma trận, hệ phương trình

$$\begin{aligned} 4P_1 - P_2 &= 13 \\ 2P_1 - 5P_2 &= -7 \end{aligned}$$

có thể được viết lại như sau

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Đặt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, ta biểu diễn được hệ phương trình dưới dạng một phương trình ma trận là $A.\mathbf{X} = B$. Giả sử A khả nghịch, tức $\det(A) \neq 0$, thì phương trình có nghiệm là $\mathbf{X} = A^{-1}B$.
Thực hiện tính toán cụ thể, ta có $\det(A) = 18 \neq 0$, do đó A khả nghịch và ma trận nghịch đảo của A là

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Cuối cùng, thực hiện phép nhân ma trận A^{-1} với B, ta được

$$\mathbf{X} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 72 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vậy $P_1 = 4$ và $P_2 = 3$.

***Ví dụ* 1.3.5.** Các phương trình tuyến tính cung và cầu tổng quát cho một mô hình thị trường hàng hóa được cho bởi

$$\begin{aligned} P &= \quad aQ_S + b \quad (a > 0, b > 0) \\ P &= -cQ_D + d \quad (c > 0, d > 0) \end{aligned}$$

a) Chứng minh rằng trong ký hiệu ma trận, giá cân bằng P và sản lượng Q thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}.$$

b) Giải phương trình ma trận trên để biểu diễn P, Q theo a, b, c, d.

Giải. Dành cho bạn đọc.

Bài tập chương 1

Bài tập 1.1. Doanh số hàng tháng (tính bằng triệu vnd) của Laptop (B1) và Điện thoại (B2) tại ba nhà cửa hàng của FPT (R1, R2, R3) như sau:

Tháng 5	R1	R2	R3
B1	35	27	13
B2	50	42	39

Tháng 6	R1	R2	R3
B1	31	37	23
B2	60	48	49

a) Hãy viết các ma trận A và B đại diện cho doanh số bán hàng trong Tháng 5 và Tháng 6, tương ứng.

b) Bằng cách tìm $A + B$, hãy viết ra ma trận tổng doanh số bán hàng trong hai tháng.

c) Bằng cách tìm $A - B$, hãy viết ra ma trận chênh lệch doanh số bán hàng trong hai tháng.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.2. Một nhà sản xuất ô tô sản xuất ba kiểu xe khác nhau ở ba nhà máy khác nhau A, B và C đạt mức sản xuất (tính bằng triệu đô la Mỹ) trong nửa đầu và nửa cuối năm như sau

Nửa đầu năm	Mẫu 1	Mẫu 2	Mẫu 3
Nhà máy A	27	41	50
Nhà máy B	35	39	70
Nhà máy C	30	53	47

Nửa cuối năm	Mẫu 1	Mẫu 2	Mẫu 3
Nhà máy A	25	42	48
Nhà máy B	35	40	66
Nhà máy C	34	50	48

Tóm tắt thông tin này dưới dạng ma trận và tìm tổng sản lượng của từng nhà máy trong cả năm.

Giải.

Bài tập 1.3. Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hãy tính $2A$, $2B$, $2A + 2B$, $2(A + B)$. Bạn có thấy mối liên hệ giữa kết quả của $2A + 2B$ và $2(A + B)$ hay không? Đó là gì?

Giải.

Bài tập 1.4. Nếu A, B và C là các ma trận có cỡ lần lượt là $3 \times 3, 2 \times 3$ và 4×2 thì phép tính ma trận nào sau đây khả thi? Nếu tính toán được, hãy cho biết cỡ của ma trận kết quả

$$4B, \quad A + B, \quad 3B^T + C, \quad AB, \quad B^T A, \quad (CB)^T, \quad CBA.$$

Giải.

Bài tập 1.5. Một công ty sản xuất ba sản phẩm $P1, P2$ và $P3$ và bán cho hai khách hàng $C1$ và $C2$. Số lượng mặt hàng của mỗi sản phẩm được bán cho những khách hàng này là

Ma trận A	P1	P2	P3
C1	8	7	9
C2	3	1	2

Công ty tính cho cả hai khách hàng cùng một mức giá cho mỗi sản phẩm theo

Ma trận giá bán	P1	P2	P3
$\mathbf{B} =$	[100	500	$200]^T$

Để sản xuất mỗi mặt hàng loại $P1, P2$ và $P3$, hãng sử dụng 4 loại nguyên vật liệu là $R1, R2, R3$ và $R4$. Số tấn cần thiết cho mỗi mặt hàng được đưa ra bởi

Ma trận C	R1	R2	R3	R4
P1	1	0	0	1
P2	1	1	2	1
P3	0	0	1	2

Chi phí cho mỗi tấn nguyên liệu thô là

Ma trận chi phí	R1	R2	R3	R4
$\mathbf{D} =$	[20	20	15	$15]^T$

Ngoài ra, đặt $\mathbf{E} = [1 \quad 1]$. Tìm các tích ma trận sau và đưa ra lời giải thích cho từng kết quả.

a) $\mathbf{AB}$, b) $\mathbf{AC}$, c) $\mathbf{CD}$, d) $\mathbf{ACD}$, e) $\mathbf{EAB}$, f) $\mathbf{EACD}$, g) $\mathbf{EAB} - \mathbf{EACD}$.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 1.6. Một công ty đặt hàng 12, 30 và 25 mặt hàng G1, G2 và G3. Chi phí của mỗi mục G1, G2 và G3 lần lượt là \$8, \$30 và \$15.

a) Viết ra các vector giá và số lượng phù hợp, và sử dụng phép nhân ma trận để tính tổng chi phí của đơn đặt hàng.

b) Viết vector giá mới khi chi phí của G1 tăng 20%, chi phí của G2 giảm 10% và chi phí của G3 không thay đổi. Sử dụng phép nhân ma trận để tính ra chi phí mới của đơn đặt hàng và từ đó tìm ra phần trăm thay đổi tổng thể trong tổng chi phí.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.7. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.
Tìm $A^T, \quad B^T, \quad A^T + B^T, \quad (A+B)^T.$
Bạn có nhận thấy mối liên nào giữa $A^T + B^T$ và $(A+B)^T$?

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.8. Các ma trận A, B, C và D có cỡ tương ứng là $3 \times 5, 5 \times 2, 5 \times 5$ và 3×5. Cho biết có thể thực hiện các phép toán ma trận sau hay không. Nếu có thể, hãy cho biết cỡ của ma trận kết quả.

$a) 7B. \quad b)\,(A+C)^T. \quad c) A - 2D. \quad d) BC. \quad e) CB^T. \quad f) D^TA. \quad g) A^T + B^T.$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.9. Một chuỗi cửa hàng thể thao A, B và C bán áo phông, giày tập và vợt cầu lông. Doanh thu và lợi nhuận hàng tuần trên mỗi mặt hàng được thể hiện trong các bảng dưới đây:

Doanh số mỗi tuần	Shop A	Shop B	Shop C
Áo phông	60	40	25
Giày tập	80	120	90
Vợt	8	1	20

Lợi nhuận trên mỗi mặt hàng	Shop A($)	Shop B($)	Shop C($)
Áo phông	1	1	1.5
Giày tập	6	7	8
Vợt	20	22	25

Hai ma trận cỡ 3×3 lập từ bảng doanh thu và lợi nhuận được ký hiệu lần lượt là S và P.

a) Nếu SP^T được ký hiệu là A, hãy tìm phần tử a_{11} và giải thích ngắn gọn về con số này.

b) Nếu S^TP được ký hiệu là B, hãy tìm phần tử b_{33} và giải thích ngắn gọn về con số này.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 1.10. Cho ba ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Nếu $D = A^T(2B - 3C)$ thì phần tử d_{32} bằng bao nhiêu?

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 1.11. Tính định thức và ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 1.12. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

a) Tính AB và BA.

b) Kiểm tra $\det(AB) = \det(A).\det(B)$ hay không?

c) Nếu ma trận A không khả nghịch, B khả nghịch thì có thể rút ra kết luận gì về ma trận AB. Hãy đưa ra lý giải ngắn gọn cho câu trả lời của bạn.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.13. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tìm điều kiện của a để ma trận A khả nghịch và tìm A^{-1} trong trường hợp này.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.14. Giá cân bằng P_1 và P_2 của hai hàng hóa thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} 9P_1 + P_2 & = 43 \\ 2P_1 + 7P_2 & = 57 \end{cases}.$$

Biểu diễn hệ thống này dưới dạng ma trận và từ đó tìm các giá trị của P_1 và P_2 .

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.15. Hàm cung và cầu đối với hai hàng hóa phụ thuộc lẫn nhau được cho bởi

$$\begin{aligned} Q_{D_1} &= 50 - 2P_1 + P_2 \\ Q_{D_2} &= 10 + P_1 - 4P_2 \\ Q_{S_1} &= -20 + P_1 \\ Q_{S_2} &= -10 + 5P_2 \end{aligned}$$

a) Chứng minh rằng giá cân bằng thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

b) Tìm nghịch đảo của ma trận 2×2 trong câu a) và từ đó tìm giá cân bằng.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.16. Các mức tiêu dùng cân bằng, C, và thu nhập, Y, đối với mô hình kinh tế vĩ mô hai khu vực đơn giản thỏa mãn các phương trình cấu trúc

$$\begin{cases} Y &= C + I^* \\ C &= aY + b \end{cases}$$

trong đó a và b là các tham số thỏa mãn $0 < a < 1$ và $b > 0$, và I^* biểu thị đầu tư theo kế hoạch.

a) Hãy biểu diễn hệ thống trên ở dạng $A\mathbf{X} = B$, với $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix}$.

b) Tìm $\mathbf{X}$.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 1.17. Vietnam Airline và **Vietject** là hai hãng hàng không được phép khai thác trên cùng một tuyến đường. Thị phần hành khách thường xuyên thay đổi từ tháng này sang tháng khác. **Vietnam Airline** giữ lại 4/5 số khách hàng của mình trong khi **Vietject** chỉ giữ lại được 3/4 số khách hàng của mình.

a) Nếu gọi A_n và B_n , tương ứng, là số lượng khách hàng bay **Vietnam Airline** và **Vietject** trong tháng thứ n.
Hãy thiết lập phương trình ma trận để biểu diễn sự phụ thuộc của hai ma trận $\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix}$.

b) Nếu số lượng khách hàng bay **Vietnam Airline** và **Vietject** trong tháng đầu tiên lần lượt là 10000 và 16000. Hãy sử dụng phép nhân ma trận để tìm ra số người bay **Vietnam Airline**

- Một tháng sau.
- Ba tháng sau.
- Sáu tháng sau.

c) Nếu số lượng khách hàng bay trên **Vietnam Airline** và **Vietject** trong bất kỳ tháng nào lần lượt là 6300 và 5500. Hãy tính xem có bao nhiêu người đã bay bằng mỗi hãng hàng không trong tháng trước đó.

Chương2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1 Hệ phương trình tuyến tính.

Nhiều bài toán và mô hình trong kinh tế, mà ở đó các biến số phụ thuộc tuyến tính với nhau, và với nhiều điều kiện (ràng buộc) khác nhau, chẳng hạn như: phương trình cung - cầu, bài toán tìm giá cân bằng, bài toán chi tiêu và tiết kiệm tài chính, bài toán tối ưu hóa sản xuất, vận chuyển hàng hóa, bài toán phân bổ nguồn vốn tài sản công của chính phủ,...Các bạn có thể xem các ví dụ cụ thể ở **Chương 1** để rõ hơn. Việc thiết lập các mô hình toán cho kinh tế là quan trọng, nhằm mô tả sự phụ thuộc giữa các biến số, các ràng buộc khác nhau; tuy nhiên, việc giải để tìm nghiệm các bài toán này càng quan trọng hơn. Một trong những cách để trình bày rõ ràng các hệ phương trình tuyến tính chính là sử dụng kí hiệu ma trận và các phép toán mà chúng ta đã trình bày ở **Chương 1**. Đối với những bài toán có số lượng biến số và số lượng ràng buộc lớn thì việc giải các bài toán này nhất thiết phải được sự hỗ trợ từ máy tính. Tuy nhiên, việc hiểu sâu sắc bản chất toán học sẽ là một lợi thế lớn cho việc hiệu chỉnh các mô hình, từ đó đem đến kết quả tốt nhất.

2.1.1 Hệ phương trình tuyến tính - Các kí hiệu ma trận.

Để thuận tiện và rõ ràng trong việc trình bày lý thuyết, chúng ta sẽ sử dụng các kí hiệu x, y, z để chỉ các biến; trong trường hợp nhiều biến hơn, chúng ta sẽ đánh số các biến bởi $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots; z_1, z_2, \ldots$. Chúng ta bắt đầu từ một hệ phương trình tuyến tính gồm hai phương trình, hai ẩn là x, y

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ -x+y &= 0 \end{cases}$$

Bằng cách đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, chúng ta đưa được hệ trên về dạng phương trình ma trận

$$A.\mathbf{X} = B$$

Cách giải phương trình ma trận dạng này là sử dụng ma trận nghịch đảo, và cách giải này chỉ áp dụng được khi A là ma trận vuông và khả nghịch. Trong trường hợp ma trận A không vuông hoặc không khả nghịch thì chúng ta sử dụng **phương pháp khử Gauss**, sẽ được trình bày ở Mục 2.3. Để làm được điều đó, trước tiên, chúng ta giới thiệu các kí hiệu ma trận liên quan tới một hệ phương trình tuyến tính bất kỳ.

Một hệ phương trình tuyến tính có m phương trình và n ẩn có dạng sau

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases},$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn; $a_{ij}, b_i \, (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ là các hệ số. Việc giải hệ phương trình này chính là đi tìm tất cả các bộ giá trị của $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sao cho tất cả các phương trình trong hệ được thỏa mãn và mỗi bộ giá trị như thế được gọi là một nghiệm của hệ đã cho. Dưới đây là các ma trận liên quan đến hệ phương trình tuyến tính đang xét:

- Ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số.
- Ma trận $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận ẩn số.
- Ma trận $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ được gọi là ma trận hệ số tự do.
- Ma trận $\overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ được gọi là ma trận hệ số mở rộng.

Khi đó, hệ đã cho có thể viết lại dưới dạng phương trình ma trận: $A.\mathbf{X} = B$.

***Ví dụ* 2.1.1.** Chúng ta xem xét một số hệ sau cùng với các ma trận của nó

- Hệ $\begin{cases} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 2 \end{cases}$ có hai phương trình, hai ẩn là x, y và ma trận hệ số, ma trận ẩn, ma trận hệ số tự do, ma trận hệ số mở rộng, tương ứng là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

- Hệ $\begin{cases} x + y - z &= 3 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ 3x + y - 4z &= 2 \end{cases}$ có ba phương trình, ba ẩn là x, y, z và ma trận hệ số, ma trận ẩn, ma trận hệ số tự do, ma trận hệ số mở rộng, tương ứng là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right].$$

- Hệ $\begin{cases} x + y + 3z &= 0 \\ x - y - 4z &= 0 \end{cases}$ có hai phương trình, ba ẩn là x, y, z và ma trận hệ số, ma trận ẩn, ma trận hệ số tự do, ma trận hệ số mở rộng, tương ứng là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

2.1.2 Quy tắc Cramer.

MỤC TIÊU

Cuối phần này, bạn sẽ có khả năng:

- Nhận thức về các hạn chế khi sử dụng ma trận nghịch đảo để giải hệ phương trình tuyến tính.
- Sử dụng Quy tắc Cramer để giải hệ phương trình tuyến tính.
- Áp dụng Quy tắc Cramer để phân tích các mô hình kinh tế tĩnh.

Sau đây, chúng tôi giới thiệu một cách giải khác, bằng cách sử dụng định thức, cho các hệ có hai phương trình, hai ẩn; ba phương trình, ba ẩn; hoặc tổng quát hơn là những hệ có số phương trình (số ràng buộc) và số ẩn bằng nhau. Một hệ phương trình tuyến tính được gọi là **hệ Cramer** nếu thỏa mãn hai điều kiện sau

- Hệ có số phương trình và số ẩn bằng nhau.

- Ma trận hệ số có định thức khác 0.

Trong các phần trước, chúng tôi đã mô tả cách tính định thức và ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2 và 3. Các khái niệm này có thể được mở rộng và áp dụng để giải cho các hệ thống lớn hơn, tuy nhiên, lượng công sức cần thiết sẽ tăng đáng kể khi kích thước ma trận tăng lên. Ví dụ, hãy xem xét công việc liên quan đến việc giải hệ thống sau bằng phương pháp ma trận nghịch đảo

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 3 \\ x-2y+3z-t &= 2 \\ 3x+y-4z-2t &= 1 \\ -x-y+z+t &= 0 \end{cases}.$$

Phương trình ma trận tương ứng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trong trường hợp này, ma trận hệ số có 16 phần tử, do đó trong quá trình tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) sẽ thực hành tính toán 16 định thức con cấp 3, tức là những định thức sau khi bỏ đi 1 hàng và 1 cột của ma trận hệ số. Điều này, ít nhiều cũng làm cho những sinh viên có tinh thần học tập nhất cũng không tránh khỏi lo lắng và chán nản, chưa vội bàn đến khả năng mắc sai sót khi tính toán. Hơn nữa, trong các bài toán kinh tế, chỉ một số ít các biến số mà người ta thực sự quan tâm. Ví dụ, bạn chỉ cần quan tâm đến biến x, trong trường hợp như vậy thì việc bỏ ra một công sức lớn để tính ma trận nghịch đảo rõ ràng là lãng phí, đặc biệt là khi các biến còn lại y, z, t không có nhu cầu được biết đến.

Trong phần này, chúng tôi mô tả một phương pháp thay thế để tìm giá trị của một biến số tại một thời điểm. Phương pháp mới này yêu cầu ít công sức hơn, nếu chỉ cần quan tâm đến một số biến số được chọn, được biết đến là Quy tắc Cramer và sử dụng định thức ma trận. Quy tắc Cramer để giải hệ Cramer, khẳng định rằng biến số thứ i, là x_i , có thể được tìm thấy từ công thức

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A_i})}{\det(A)},$$

trong đó $\mathbf{A_i}$ là ma trận có được bằng cách thay cột thứ i của ma trận A bằng cột hệ số tự do B phía tay phải.

***Ví dụ* 2.1.2.** Xem xét hệ phương trình tuyến tính sau $\begin{cases} x_1+2x_2 &= 1 \\ 2x_1-x_2 &= 1 \end{cases}$.

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Khi đó, ta có phương trình $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Nhận thấy, hệ đã cho có hai phương trình, hai ẩn với $\det(A) = -5 \neq 0$ nên nó là một hệ Cramer và ta cần tìm giá trị của biến thứ 2, là x_2. Theo Quy tắc Cramer, ta có

$$x_2 = \frac{\det(\mathbf{A_2})}{\det(A)},$$

trong đó, $\mathbf{A_2}$ có được bằng cách thay cột thứ 2 của A là $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ bởi cột hệ số tự do $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng tính được $\det(\mathbf{A_2}) = (1 \times 1) - (1 \times 2) = -1$ và giá trị của x_2 là

$$x_2 = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}.$$

***Ví dụ* 2.1.3.** Xem xét hệ phương trình tuyến tính sau $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_3 &= 1 \end{cases}$.

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Khi đó, ta có phương trình

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nhận thấy, hệ đã cho có ba phương trình, ba ẩn với $\det(A) = -9 \neq 0$ nên nó là một hệ Cramer và ta cần tìm giá trị của biến thứ 1, là x_1. Theo Quy tắc Cramer, ta có

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{A_1})}{\det(A)},$$

trong đó, $\mathbf{A_1}$ có được bằng cách thay cột thứ 1 của A là $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ bởi cột hệ số tự do $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Khai triển theo hàng thứ nhất, tính được $\det(\mathbf{A_1}) = -3$ và giá trị của x_1 là

$$x_1 = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ minh họa việc sử dụng Quy tắc Cramer để phân tích các mô hình kinh tế. Ví dụ được xem xét là mô hình kinh tế tĩnh ba ngành liên quan đến hoạt động của chính phủ.

***Ví dụ* 2.1.4.** (Xem [4]) Các mức cân bằng thu nhập là Y, thu nhập sẵn có là Y_d, C là chi tiêu và thuế là T; I^*, G^* lần lượt là đầu tư và chi tiêu theo kế hoạch ban đầu của chính phủ. Cho một mô hình kinh tế tĩnh ba ngành thỏa mãn các phương trình cấu trúc sau:

$$\begin{aligned} Y &= C + I^* + G^* \\ C &= aY_d + b \qquad (0 < a < 1, b > 0) \\ Y_d &= Y - T \\ T &= tY + T^* \qquad (t < 1, T^* > 0) \end{aligned}$$

Chứng minh rằng hệ thống này có thể được viết dưới dạng $A\mathbf{X} = B$, trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ Y_d \\ T \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} I^* + G^* \\ b \\ 0 \\ T^* \end{bmatrix}$$

Sử dụng Quy tắc Cramer để giải hệ trên cho biến Y.

Giải. Trong mô hình này, các biến phụ thuộc là Y, C, Y_d và T, vì vậy chúng ta bắt đầu bằng cách điều chỉnh các phương trình sao cho các biến này xuất hiện ở phía trái. Hơn nữa, vì vector "chưa biết", $\mathbf{X}$, được cho là

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ Y_d \\ T \end{bmatrix},$$

Chúng ta cần sắp xếp các phương trình sao cho các biến số xuất hiện theo thứ tự Y, C, Y_d, T. Ví dụ, trong trường hợp của phương trình thứ ba

$$Y_d = Y - T,$$

thực hiện phép chuyển vế và đổi dấu, thu được

$$-Y + Y_d + T = 0.$$

Làm tương tự cho các phương trình còn lại, ta thu được

$$\begin{array}{rrrrcc} Y & -C & & & = & I^* + G^* \\ & C & -aY_d & & = & b \\ -Y & & +Y_d & +T & = & 0 \\ -tY & & & +T & = & T^* \end{array}$$

Vì vậy, phương trình ma trận của hệ thống là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \\ Y_d \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^* + G^* \\ b \\ 0 \\ T^* \end{bmatrix}$$

Trước tiên, ta tính định thức của ma trận A bằng cách khai triển theo hàng thứ nhất

$$\det(A) = (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(-1).\begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a + at.$$

Vì Y là biến đầu tiên theo thứ tự các biến, theo Quy tắc Cramer, nên

$$Y = \frac{\det(\mathbf{A_1})}{\det(A)}.$$

Thay cột thứ 1 của A bởi cột hệ số tự do, được

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} I^* + G^* & -1 & 0 & 0 \\ b & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ T^* & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính $\det(\mathbf{A_1})$ bằng cách khai triển theo hàng thứ nhất:

$$\det(\mathbf{A_1}) = (-1)^{1+1}.\,(I^* + G^*) \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(-1). \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ T^* & 0 & 1 \end{vmatrix} = I^* + G^* + b - aT^*.$$

Vậy

$$Y = \frac{I^* + G^* + b - aT^*}{1 - a + at}.$$

2.1.3 Các phép biến đổi sơ cấp về hàng trên ma trận.

Chúng ta đã biết được ý tưởng đằng sau việc tìm nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính bằng các phép biến đổi tương đương: **đổi chỗ hai phương trình trong hệ**, **nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0** và **cộng vào phương trình này bội lần một phương trình khác**, nhằm đưa hệ đã cho ban đầu về một hệ mới tương đương nhưng đơn giản hơn, dễ giải quyết hơn.
Trong mục này, chúng ta sẽ tìm hiểu sự tương đồng trong các phép biến đổi tương đương đối với hệ phương trình tuyến tính với sự thay đổi trên các hàng của ma trận hệ số mở rộng của nó. Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{có ma trận hệ số mở rộng} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Chúng ta theo dõi bảng sau

Các phép biến đổi tương đương	**Hệ phương trình**	**Ma trận hệ số mở rộng**
Đổi chỗ hai phương trình cho nhau	$\begin{cases} -x + 2y &= 2 \\ 2x + y &= 1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$
Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0	$\begin{cases} -2x + 4y &= 4 \\ 2x + y &= 1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} -2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$
Cộng vào phương trình này bội lần của một phương trình khác	$\begin{cases} -2x + 4y = 4 \\ 5y = 5 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$

Như vậy, tương ứng với các phép biến đổi tương đương trong hệ phương trình tuyến tính là các phép biến đổi trên hàng của ma trận hệ số mở rộng. Bao gồm ba phép biến đổi sơ cấp sau

- Đổi chỗ hai hàng cho nhau, kí hiệu là $H_i \longleftrightarrow H_j$.
- Nhân một hàng cho một số $\alpha \neq 0$, kí hiệu là $H_i \longrightarrow \alpha.H_i$.
- Cộng vào hàng này bội lần của một hàng khác, kí hiệu là $H_i \longrightarrow H_i + \alpha.H_i$.

2.1.4 Ma trận bậc thang.

Các phép biến đổi tương đương của một hệ phương trình ở bảng trên cho thấy rằng, đến hệ cuối cùng thì phương trình thứ 2 của hệ chỉ còn một ẩn là y. Do đó, việc giải nó trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Các phép biến đổi sơ cấp về hàng của một ma trận, tương ứng, sẽ đưa ma trận đó về một ma trận có **dạng bậc thang**. Ma trận bậc thang là những ma trận thỏa mãn hai tính chất sau

• Các **hàng bằng không**, là những hàng mà tất cả các phần tử trên hàng đó là số 0, nếu có, thì **nằm bên dưới** các **hàng khác không**.

• Đối với các hàng khác không, tức là những hàng mà trên hàng đó có ít nhất một phần tử khác 0, thì **phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên** (tính từ bên trái qua) **nằm về phía tay trái** của cột chứa **phần tử khác không đầu tiên của hàng dưới**.

Các ma trận bên dưới là các ma trận bậc thang. Ví dụ là ma trận đầu tiên, tính từ trái qua, ma trận này có ba hàng: hàng thứ nhất là hàng khác không, hàng thứ hai và hàng thứ ba là các hàng bằng không. Đối với ma trận thứ hai cũng có ba hàng: hàng thứ nhất và hàng thứ hai là các hàng khác không, hàng thứ ba là hàng bằng không (quan sát thấy điều kiện thứ nhất được thỏa mãn); đối với hàng thứ nhất và thứ hai thì phần tử **khác 0 đầu tiên** của hàng thứ nhất là số **1**, **phần tử khác 0 đầu tiên** của hàng thứ hai là số **-2**, phần tử này **nằm ở cột thứ 2** của ma trận. Rõ ràng số **1** nằm về phía bên tay trái của cột 2, chứa số **-2**,...

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ldots$$

***Ví dụ* 2.1.5.** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận sau về dạng bậc thang

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải. Nhận xét rằng

• Ma trận A đã cho có ba hàng và không có hàng bằng không, do đó việc kiểm tra đối với điều kiện thứ nhất được thỏa mãn.

• Phần tử khác 0 đầu tiên của hàng thứ nhất là số **2**; phần tử khác 0 đầu tiên của hàng thứ hai là số **-1**; phần tử khác 0 đầu tiên của hàng thứ ba là số **1** và tất cả các phần tử này đều nằm ở **cột 1** của ma trận A.

Mục tiêu của chúng ta là sẽ biến đổi vị trí $a_{21} = -1$ thành số 0, để phần tử khác 0 đầu tiên của hàng 2, nếu có, sẽ được đẩy về phía tay phải của cột 1. Làm tương tự cho hàng 3, và cứ tiếp tục như vậy...

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thực hành tính toán như sau

- Trước tiên, chúng ta nhân hàng thứ nhất của A cho $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ để đưa phần tử khác 0 đầu tiên của nó về số 1

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H_1} \to \frac{1}{2}H_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_1$$

- Cộng hàng 2 của ma trận A_1 cho hàng 1 của nó. Hàng 2 thay đổi như sau

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H_1} \to \frac{1}{2}H_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H_2} \to H_2 + H_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{5/2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_2$$

Như vậy, chúng ta thấy rằng, phần tử khác 0 đầu tiên của hàng 2 lúc này là **5/2** nằm ở cột 2, tức là nằm về bên phải của cột 1, chứa phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên.

- Cộng hàng 3 của ma trận A_2 cho $(-\mathbf{1})\times$ **hàng 1**: $\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$. Hàng 3 thay đổi như sau

$$A \to A_1 \to A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{5/2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H_3} \to H_3 + (-1)H_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{5/2} & 1 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 1 \end{bmatrix} = A_3$$

- Nhân hàng 2 của ma trận A_3 cho $\left(\dfrac{2}{5}\right)$, ta được

$$A_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{5/2} & 1 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H_2} \to \left(\frac{2}{5}\right) H_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2/5 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 1 \end{bmatrix} = A_4$$

- Cộng hàng 3 của ma trận A_4 cho $(-\mathbf{1/2})\times$ **hàng 2**: $\begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/5 \end{bmatrix}$. Hàng 3 thay đổi như sau

$$A \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2/5 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{H_3} \to H_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) H_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2/5 \\ 0 & 0 & \mathbf{4/5} \end{bmatrix} = A_5.$$

Ma trận A_5 là một ma trận bậc thang.

***Ví dụ* 2.1.6.** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận sau về dạng bậc thang

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Giải. Ta có

$$B=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbf{H_2}\to H_2+(-4)H_1}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&3\\0&-3&-6\\7&8&9\end{bmatrix}\xrightarrow{\mathbf{H_3}\to H_3+(-7)H_1}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&3\\0&\mathbf{-3}&-6\\0&-6&-12\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{H_3}\to H_3+(-2)H_2}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&3\\0&\mathbf{-3}&-6\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}=B'$$

Ma trận B' là một ma trận bậc thang.

2.2 Phương pháp Gauss.

MỤC TIÊU

Cuối phần này, bạn sẽ có khả năng:

- Nhận thức về các hạn chế khi sử dụng ma trận nghịch đảo, Quy tắc Cramer để giải hệ phương trình tuyến tính.
- Sử dụng phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính.
- Áp dụng để phân tích các mô hình kinh tế tĩnh.

Trong các phần trước, bằng việc sử dụng các kí hiệu ma trận, chúng ta hoàn toàn có thể đưa một hệ phương trình tuyến tính về dạng phương trình ma trận và sử dụng các công cụ như ma trận nghịch đảo, Quy tắc Cramer để giải chúng. Tuy nhiên, đối với những hệ có số phương trình và số ẩn không bằng nhau, hoặc định thức của ma trận hệ số bằng 0, thì các công cụ trên không áp dụng được. Để có thể giải được một hệ phương trình tuyến tính với số phương trình và số ẩn bất kỳ, chúng ta sử dụng **phương pháp Gauss**. Lưu ý rằng, nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính chỉ có thể rơi vào một trong ba trường hợp: **Vô nghiệm** , **Duy nhất nghiệm** hoặc **Vô số nghiệm**.

Tương tự như khi biến đổi một hệ phương trình thành hệ tương đương với nó, chúng ta chỉ quan tâm đến những phương trình mà các hệ số gắn liền với ẩn có ít nhất một hệ số khác 0, kể cả hệ số tự do. Những phương trình như vậy tương ứng với những hàng khác không trong ma trận hệ số mở rộng, có nghĩa là, ta chỉ cần quan tâm đến những hàng khác không sau khi đưa một ma trận về dạng bậc thang. Giả sử, cho ma trận A, bằng các phép biến sơ cấp về hàng ta đưa được A về dạng bậc thang là ma trận A', khi đó, **số hàng khác không** của ma trận bậc thang A' được gọi là **hạng của** A. Kí hiệu là $r(A)$ hoặc rank(A). Chẳng hạn, ở Ví dụ 2.2.1, hạng của A là $r(A)=3$ và ở Ví dụ 2.2.2, hạng của B là $r(B)=2$.

- **Bài toán.** Cho một hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình và n ẩn.
  Hãy biện luận và giải hệ đã cho.

- **Các bước giải.**

  Bước 1. Viết ma trận hệ số mở rộng $\overline{A}=[A|B]$.
  Bước 2. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang.
  Bước 3. So sánh $r(A), r(\overline{A})$ và n - số ẩn.

- Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì hệ đã cho vô nghiệm.
- Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ thì hệ đã cho có duy nhất nghiệm.
- Nếu $r(A) = r(\overline{A}) < n$ thì hệ đã cho có vô số nghiệm.

***Ví dụ* 2.2.1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - z & = 1 \\ -2x + y + 2z & = 0 \\ 2x + 5y - 2z & = 2 \end{cases}$$

Giải. Ma trận hệ số mở rộng là

$$\overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_2} \to H_2 + 2H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_3} \to H_3 + (-2)H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{H_3} \to H_3 + (-1)H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

Ta thấy, $r(A) = 2 < 3 = (\overline{A})$ nên hệ đã cho vô nghiệm. Để hiểu rõ hơn, với ma trận bậc thang, phương trình cuối cùng được viết lại là $0x + 0y + 0z = -2$ (vô nghiệm).

***Ví dụ* 2.2.2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ -2x - y + z & = 1 \\ x + 3y - 2z & = 1 \end{cases}$$

Giải. Ma trận hệ số mở rộng là

$$\overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_2} \to H_2 + 2H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_3} \to H_3 + (-1)H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{H_3} \to H_3 + (-2)H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Ta thấy, $r(A) = (\overline{A}) = 3 =$ số ẩn nên hệ đã cho có duy nhất nghiệm. Từ ma trận bậc thang cuối cùng, hệ được viết lại như sau

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad\;\; y - z = 1 \\ \qquad\quad z = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ là $(-3, 1, -1)$.

***Ví dụ* 2.2.3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

Giải. Ma trận hệ số mở rộng là

$$\overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right].$$

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_2} \to H_2 + (-4)H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_3} \to H_3 + (-7)H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{H_3} \to H_3 + (-2)H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ta thấy, $r(A) = (\overline{A}) = 2 < 3 =$ số ẩn nên hệ đã cho có vô số nghiệm. Từ ma trận bậc thang cuối cùng, hệ được viết lại như sau

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\; -3y - 6z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -\frac{1}{2}z \\ z \quad \text{tùy ý} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ đã cho là $S = \{(-3\alpha, \alpha/2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Bài tập chương 2

Bài tập 2.1. Tính các định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Sử dụng kết quả trên để giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x + y = 4 \end{cases}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.2. Sử dụng Quy tắc Cramer để tìm giá trị của x thỏa mãn từng hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} -x+y &= 1 \\ -2x-y &= 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 5x-2y &= 7 \\ 2x+y &= -1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x+2y &= 7 \\ 5x-3y &= 1 \end{cases}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.3. Sử dụng Quy tắc Cramer để tìm giá trị của y thỏa mãn từng hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x+3y &= -2 \\ 2x+y &= -3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+4y &= 9 \\ 2x-7y &= 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 7x-3y &= 4 \\ 2x+5y &= 7 \end{cases}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.4. Sử dụng Quy tắc Cramer để tìm giá trị của z thỏa mãn từng hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ -2x-y+2z &= 0 \\ 3x+y-z &= 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} -3x+2y-z &= 7 \\ 2x+y+2z &= 1 \\ x+y-3z &= 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x+y+z &= 1 \\ 5x-3y+z &= 1 \\ -x+y-z &= 2 \end{cases}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.5. Sử dụng Quy tắc Cramer, giải hệ

a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ cho biến x.

b) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 73 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ cho biến y.

c) $\begin{bmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ cho biến z.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.6. Hãy xem xét mô hình kinh tế vĩ mô ba ngành:

$$\begin{aligned} Y = &\quad C + I^* + G^* \\ C = &\quad a(Y - T) + b \\ T = &\quad tY + T^* \end{aligned}$$

a) Hãy biểu diễn hệ trên theo kí hiệu ma trận $A\mathbf{X} = B$ với $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ T \end{bmatrix}$.

b) Dùng Quy tắc Cramer giải hệ này cho Y.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.7. Hãy xem xét mô hình kinh tế vĩ mô được xác định bởi:

$$\begin{aligned} Y &= C + I^* + G^* + X^* - M \\ C &= aY + b \qquad (0 < a < 1,\ b > 0) \\ M &= mY + M^* \qquad (0 < m < 1,\ M^* > 0) \end{aligned}$$

Chứng minh rằng, hệ này có thể viết dưới dạng $A\mathbf{X} = B$, trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} Y \\ C \\ M \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} I^* + G^* + X^* \\ b \\ M^* \end{bmatrix}.$$

Dùng Quy tắc Cramer giải hệ này cho Y.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 2.8. Đưa các ma trận sau về dạng bậc thang, từ đó xác định hạng của mỗi ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 2.9. Đưa các ma trận sau về dạng bậc thang, từ đó xác định hạng của mỗi ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & -8 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -2 \\ -1 & -9 & 2 \\ 2 & 18 & -4 \end{bmatrix}.$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 2.10. Tùy theo tham số a, hãy tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ -0.8 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.11. Tùy theo tham số m, hãy tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -0.6 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.12. Tùy theo tham số a và m, hãy tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.13. Sử dụng phương pháp Gauss giải các hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x+y-2z &= 0 \\ 3x+y-z &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -3x+2y-z &= 7 \\ 2x+y+2z &= 1 \\ -x+3y+z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x+y+z &= 1 \\ 5x-3y+z &= 1 \\ x+5y+z &= 1 \end{cases}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 2.14. Biện luận và giải nghiệm của hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} mx + y + z & = 0 \\ 2x + (m+1)\,y + (m+1)\,z & = 0 \\ x + y + mz & = 1 \end{cases}.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Chương3

QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.

Để hiểu cách áp dụng một lý thuyết toán học vào việc giải quyết một vấn đề thực tế, hãy xem xét các giai đoạn mà vấn đề trải qua từ khi được nêu ra đến kết luận. Chúng ta liệt kê bốn giai đoạn như sau:

- Nhận biết vấn đề;
- Xây dựng một mô hình toán học;
- Giải quyết vấn đề toán học;
- Chuyển đổi kết quả trở lại vào ngữ cảnh của vấn đề gốc.

Quy hoạch tuyến tính là một phương pháp toán học dùng để tối ưu hóa một hàm mục tiêu tuyến tính trong các ràng buộc tuyến tính. Nó được sử dụng để giải quyết các vấn đề tối ưu trong nhiều lĩnh vực, bao gồm cả kinh tế.
Nhìn lại lịch sử, vào năm 1939, nhà toán học người Nga L. V. Kantorovich đã xuất bản một quyển sách có tựa đề "Phương pháp toán học trong Tổ chức và Kế hoạch Sản xuất". Kantorovich đã nhận ra rằng một loạt các vấn đề về sản xuất dẫn đến cùng một vấn đề toán học và vấn đề này có thể được giải quyết bằng các phương pháp số học. Tuy nhiên, công trình của Kantorovich đã không được công nhận. Năm 1941, Frank Hitchcock đặt ra vấn đề vận chuyển, và năm 1945, George Stigler xem xét vấn đề về việc xác định một chế độ ăn đủ cho một cá nhân với chi phí tối thiểu... Qua những vấn đề này và những vấn đề khác, đặc biệt là những vấn đề liên quan đến nỗ lực trong chiến tranh Thế chiến II, trở nên rõ ràng rằng cần phải có một phương pháp khả thi để giải quyết các vấn đề quy hoạch tuyến tính. Sau đó, vào năm 1951, George Dantzig đã phát triển phương pháp đơn hình. Với những nghiên cứu và cải tiến liên tục, đến nay phương pháp đơn hình là một công cụ thật sự mạnh mẽ trong việc giải quyết các bài toán quy hoạch tuyến tính.

Ứng dụng của quy hoạch tuyến tính trong các mô hình kinh tế là rất đa dạng. Dưới đây là một số ví dụ:

• Quản lý sản xuất: Quy hoạch tuyến tính có thể được sử dụng để tối ưu hóa quy trình sản xuất, bao gồm việc phân bổ tài nguyên và lựa chọn công nghệ sản xuất để đạt được hiệu suất cao nhất và giảm thiểu chi phí sản xuất.

• Quản lý kho: Quy hoạch tuyến tính có thể giúp tối ưu hóa việc quản lý kho hàng, bao gồm việc xác định lượng hàng tồn kho tối ưu, lựa chọn điểm đặt kho và lịch trình nhập xuất hàng hóa để đáp ứng yêu cầu của khách hàng và giảm thiểu chi phí vận chuyển và lưu trữ.

• Quản lý đầu tư: Quy hoạch tuyến tính có thể được áp dụng để đưa ra quyết định về việc đầu tư vốn vào các dự án kinh doanh khác nhau, xác định phân bổ tài nguyên với mục tiêu tối ưu hóa lợi nhuận hoặc giảm thiểu rủi ro.

• Quy hoạch vận tải: Quy hoạch tuyến tính có thể giúp tối ưu hóa kế hoạch vận tải, bao gồm việc phân bổ tài nguyên vận chuyển, lựa chọn đường đi tối ưu, và lập lịch giao hàng để đạt được hiệu quả cao nhất và giảm thiểu chi phí vận chuyển.

• Quản lý tài chính: Quy hoạch tuyến tính có thể được sử dụng để tối ưu hóa quyết định về phân bổ tài chính, ví dụ như việc xác định phương án đầu tư tài sản, quản lý danh mục đầu tư, hoặc lập kế hoạch tài chính dựa trên các ràng buộc tài chính.

3.1 Thiết lập mô hình toán cho các bài toán kinh tế .

3.1.1 Một số ví dụ mở đầu.

Trên thực tế, quy hoạch tuyến tính là một công cụ quan trọng đối với các nhà quản lý doanh nghiệp, những người cần phân bổ các nguồn lực hữu hạn như lao động, thời gian sử dụng máy móc hoặc nguyên liệu thô để tối đa hóa lợi nhuận hoặc giảm thiểu chi phí. Từ quy hoạch được sử dụng theo nghĩa lập kế hoạch sản xuất hoặc lập kế hoạch quản lý. Trong phần này, chúng ta phát triển một kỹ năng quan trọng có thể gọi chung là xây dựng bài toán. Ở đây chúng ta bắt đầu với thông tin, có lẽ chỉ được đưa ra một cách mơ hồ bằng lời, và cố gắng diễn đạt nó chính xác hơn bằng cách sử dụng ngôn ngữ của toán học. Để mô tả cách lập bài toán, chúng ta bắt đầu bằng một số ví dụ chỉ liên quan đến hai biến như sau

***Ví dụ* 3.1.1.** Một hãng điện tử quyết định tung ra thị trường hai mẫu máy tính bảng TAB1 và TAB2. Chi phí sản xuất mỗi thiết bị loại TAB1 là 120 đô la và chi phí cho TAB2 là 160 đô la. Công ty nhận ra rằng đây là một dự án mạo hiểm, vì vậy nó quyết định giới hạn tổng chi phí sản xuất hàng tuần ở mức $4000. Ngoài ra, do thiếu lao động lành nghề, tổng số máy tính bảng mà công ty có thể sản xuất trong một tuần nhiều nhất là 30. Lợi nhuận kiếm được trên mỗi thiết bị là 600 đô la cho TAB1 và 700 đô la cho TAB2. Hãng nên tổ chức sản xuất như thế nào để tối đa hóa lợi nhuận?

***Ví dụ* 3.1.2.** Một công ty bảo hiểm sử dụng nhân viên toàn thời gian và bán thời gian, những người làm việc lần lượt là 40 và 20 giờ mỗi tuần. Nhân viên toàn thời gian được trả $80 mỗi tuần và nhân viên bán thời gian $32. Ngoài ra, chính sách của công ty là số lượng nhân viên bán thời gian không được vượt quá một phần ba số lượng nhân viên toàn thời gian. Nếu số giờ làm việc của nhân viên mỗi tuần để xử lý công việc của công ty là 900 giờ, thì cần bao nhiêu nhân viên loại nào để hoàn thành công việc với chi phí tối thiểu?

Giải. Nếu công ty tuyển dụng x nhân viên làm việc toàn thời gian và y nhân viên làm việc bán thời gian, công ty muốn chọn x và y sao cho giảm thiểu chi phí lương hàng tuần. Ngoài ra, với mức lương hàng tuần lần lượt là \$80 và \$32 cho nhân viên làm việc toàn thời gian và làm việc bán thời gian, tổng chi phí lương sẽ là:

$$80x + 32y.$$

Nhân viên làm việc toàn thời gian và bán thời gian làm việc, tương ứng, là 40 và 20 giờ mỗi tuần, do đó tổng số giờ làm việc sẵn có là:

$$40x + 20y.$$

Yêu cầu của công ty là số giờ làm việc ít nhất là 900, cho nên chúng ta có ràng buộc:

$$40x + 20y \leq 900.$$

Một ràng buộc khác đối với công ty phát sinh từ việc số nhân viên làm việc bán thời gian không được vượt quá một phần ba số nhân viên làm việc toàn thời gian. Điều này có nghĩa, ví dụ, nếu công ty tuyển dụng 60 nhân viên làm việc toàn thời gian, thì không được phép tuyển dụng nhiều hơn 20 nhân viên làm việc bán thời gian vì:

$$\frac{1}{3}60 = 20,$$

tổng quát, nếu x là số lượng nhân viên làm việc toàn thời gian, thì số lượng nhân viên làm việc bán thời gian y không thể vượt quá $x/3$, tức là:

$$y \leq \frac{x}{3}.$$

Ngoài ra, các ràng buộc về người là không âm, nên

$$x \geq 0\,, \qquad y \geq 0.$$

Như vậy, vấn đề được yêu cầu được mô tả bởi bài toán sau

Bài toán. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$80x + 32y$$

thỏa mãn các ràng buộc sau

$$\begin{array}{lcc} 40x + 20y & \leq & 900 \\ y & \leq & \dfrac{x}{3} \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}.$$

***Ví dụ* 3.1.3.** Một cô gái dành 95 % thu nhập kiếm được cho hàng hóa và dịch vụ thiết yếu, chỉ để lại 5% cho hàng hóa xa xỉ, được chia nhỏ giữa quần áo hợp thời trang và các chuyến du lịch. Giá của mỗi món quần áo là 50 đô la và một chuyến đi du lịch có giá 150 đô la. Hàm tiện ích tương ứng là

$$U = 7x + 3y\,,$$

trong đó, x và y tương ứng là số lượng quần áo thời trang và số lần đi du lịch. Để duy trì diện mạo hợp lý suốt cả năm, rất quan trọng phải mua ít nhất 9 món quần áo mới hàng năm. Biết rằng thu nhập kiếm được hàng năm là $20,000$ đô la, hãy thiết lập bài toán cho yêu cầu tối đa hóa hàm tiện ích.

Giải. Dành cho bạn đọc.

3.1.2 Phương pháp đồ thị

MỤC TIÊU

Cuối phần này, bạn sẽ có khả năng:

- Xác định vùng được định nghĩa bởi một bất phương trình tuyến tính.
- Vẽ phạm vi khả thi được định nghĩa bởi các bất phương trình tuyến tính đồng thời.
- Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính bằng đồ thị.
- Nhận biết rằng một bài toán quy hoạch tuyến tính có thể có vô số lời giải.
- Nhận biết rằng một bài toán quy hoạch tuyến tính có thể không có lời giải hữu hạn.

Trong phần trước, liên quan đến việc xác định vấn đề; một vấn đề, ban đầu được trình bày bằng lời, được biểu diễn bằng ký hiệu toán học. Giai đoạn thứ hai liên quan đến việc giải quyết thực tế của một vấn đề như vậy. Kinh nghiệm cho thấy sinh viên thường thấy giai đoạn đầu tiên khó khăn hơn. Vì vậy, chúng tôi đề nghị sinh viên cần thực hành nhiều hơn trước khi đọc phần tiếp theo, ít nhất là thiết lập được bài toán cho vấn đề thực tế được nêu ra; và phần này, chúng tôi bắt đầu bằng việc nghiên cứu các kỹ thuật giải toán học cho chúng.

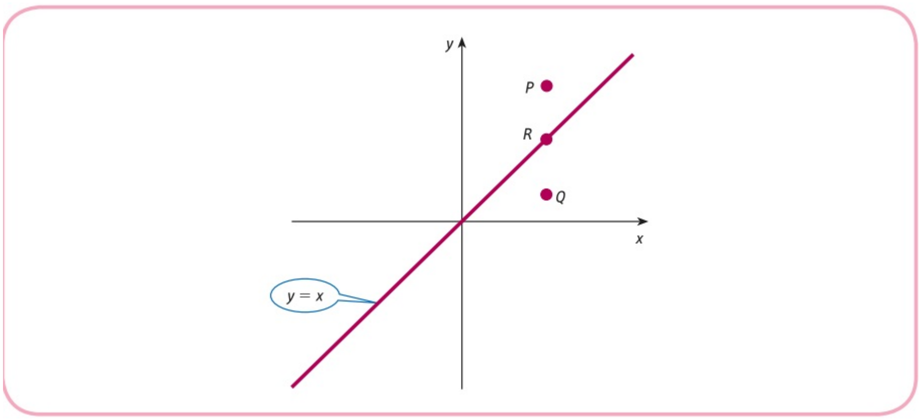
Nhắc lại rằng, một phương trình tuyến tính có dạng

$$ax + by = c,$$

và đồ thị của chúng trên mặt phẳng OXY là một đường thẳng. Chúng ta cũng có thể đưa ra một minh họa đồ họa tương tự cho các bất phương trình tuyến tính liên quan đến hai biến khi dấu bằng được thay thế bằng một trong các dấu

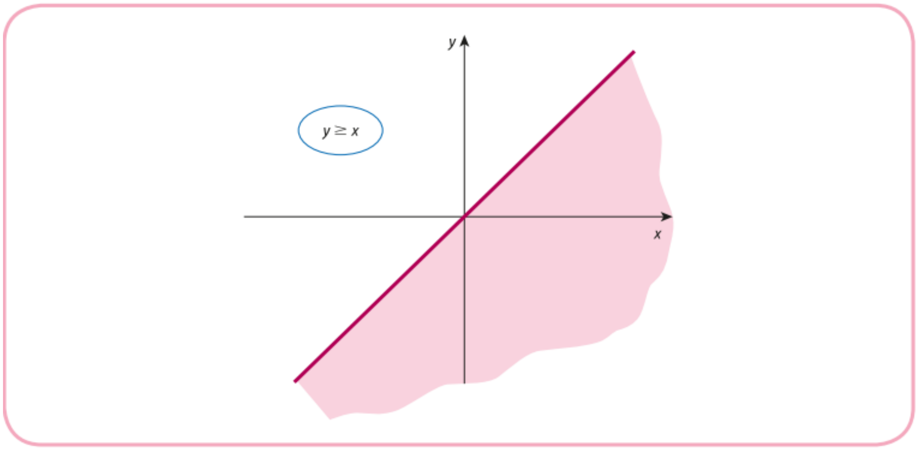
$$\begin{array}{cc} < & \text{(nhỏ hơn.)} \\ \leq & \text{(nhỏ hơn hoặc bằng.)} \\ > & \text{(lớn hơn.)} \\ \geq & \text{(lớn hơn hoặc bằng.)} \end{array}$$

Để minh họa điều này, hãy xem xét bất phương trình đơn giản sau đây: $y \geq x$. Xét tọa độ



Hình 3.1: Vị trí các điểm so với đường thẳng $y = x$.

những điểm trong mặt phẵng có dạng (x, y). Chúng ta thấy rằng, những điểm R nằm trên đường thẳng, tức là $y = x$; những điểm P nằm phía trên đường thẳng, tức là $y > x$; những điểm Q nằm phía dưới đường thẳng, tức là $y < x$.
Như vậy, một đường thẳng sẽ chia một mặt phẳng chứa nó, ra ba phần: phần đường thẳng (dấu bằng), phần phía trên đường thẳng (dấu lớn hơn) và phần phía dưới đường thẳng (dấu nhỏ hơn). Để minh họa đồ họa cho phần lựa chọn: nhiều tác giả sẽ đánh dấu phần chọn, phần bỏ đi sẽ để trống; nhiều người khác lại đánh dấu phần bỏ đi, phần lựa chọn được bỏ trống. Trong sách này của chúng ta, sẽ làm theo cách hai



Hình 3.2: Phần tô màu là phần bỏ đi.

Chúng ta xét các bất phương trình sau

$$\begin{aligned} ax + by &< c \\ ax + by &\leq c \\ ax + by &> c \\ ax + by &\geq c \end{aligned}$$

Trước tiên, chúng ta xem xét đường thẳng $ax + by = c$. Sau đó, chúng ta quyết định xem phía nào của đường thẳng cần xem xét. Một cách dễ dàng để làm điều này là chọn một "điểm kiểm tra", (x, y). Điểm được chọn không quan trọng, miễn là nó không nằm trên đường thẳng chính nó. Sau đó, các số x và y được thay vào bất phương trình ban đầu. Nếu bất phương trình được thỏa mãn, thì phía chứa điểm kiểm tra là vùng quan tâm. Nếu không, chúng ta chọn vùng ở phía khác của đường thẳng.

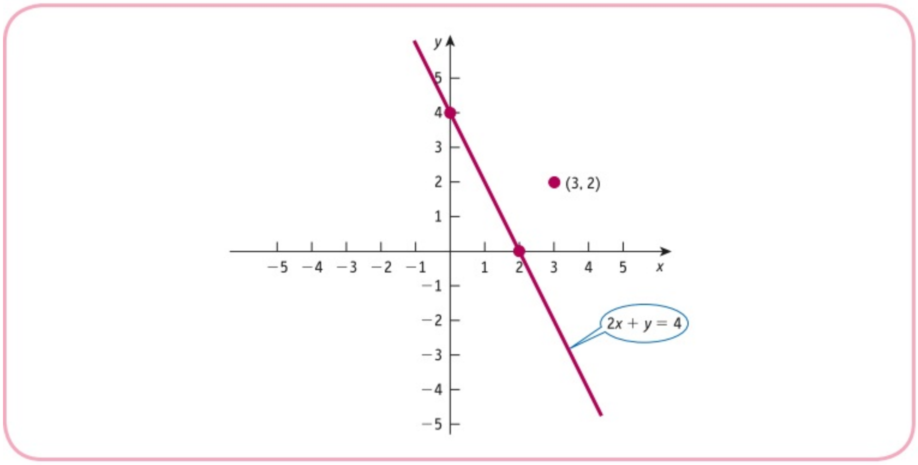
***Ví dụ* 3.1.4.** Hãy xác định phần $2x + y < 4$ trên mặt phẳng.

Giải. Chúng ta có ba bước sau

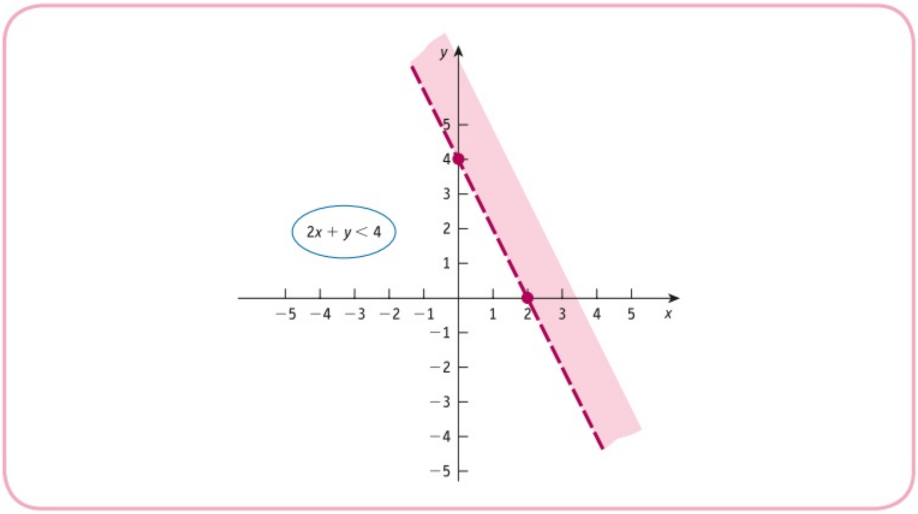
- Trước tiên, chúng ta vẽ đường thẳng $2x + y = 4$, bằng cách chọn hai điểm $(0, 4)$ và $(2, 0)$.

- Tiếp theo, chọn một điểm $P(3, 2)$. Kiểm tra, $2.3 + 2 = 8 > 4$, nên điểm P của chúng ta chọn nằm phía trên đường thẳng $2x + y = 4$.

- Vùng chúng ta quan tâm, $2x + y < 4$, là vùng phía dưới của đường thẳng.



Hình 3.3: Đường thẳng $2x + y = 4$ và điểm $P(3, 2)$.



Hình 3.4: Vùng tô màu là vùng bỏ đi.

Bây giờ chúng ta xem xét vùng được xác định bởi các bất phương trình tuyến tính đồng thời. Đây được gọi là vùng khả thi. Nó bao gồm những điểm (x, y) thoả mãn đồng thời nhiều bất phương trình. Chúng ta tìm ra vùng này bằng cách vẽ các vùng được xác định bởi từng bất phương trình lần lượt. Vùng khả thi là phần không được làm đậm trên mặt phẳng tương ứng với giao điểm của tất cả các vùng riêng lẻ.

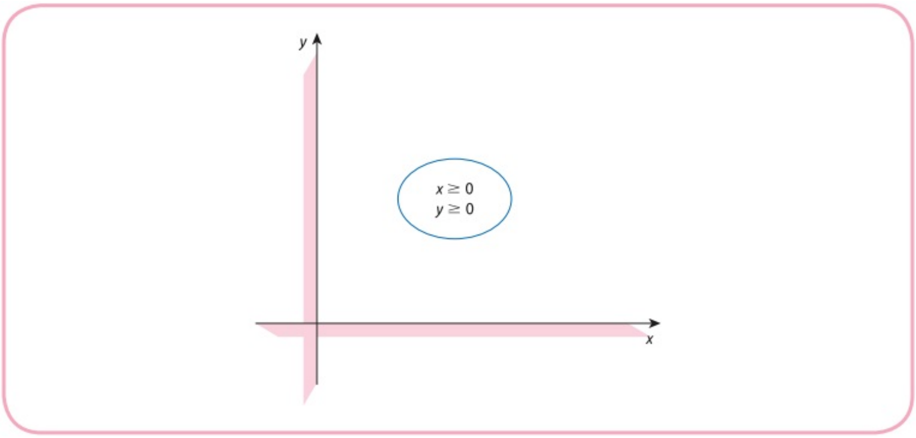
Để minh họa điều này, hãy xem xét vùng khả thi được xác định bởi

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & \leq & 12 \\ -x & + & y & \leq & 3 \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Trong bài toán này, những bất phương trình dễ nhất để xử lý là hai bất phương trình cuối cùng. Chúng chỉ cho biết x và y không âm, vì vậy chúng ta chỉ cần xem xét các điểm ở góc trên bên phải của mặt phẳng, góc phần tư thứ I, như được hiển thị trong Hình 3.5.

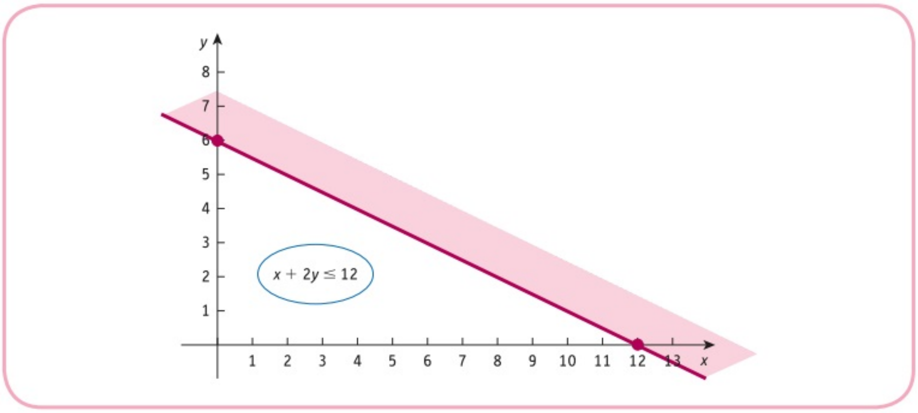
Đối với bất phương trình

$$x + 2y \leq 12,$$



Hình 3.5: Vùng được chọn cho $x \geq 0$ và $y \geq 0$.

chúng vẽ đường thẳng $x + 2y = 12$ đi qua hai điểm $(0, 6)$ và $(12, 0)$. Chọn điểm kiểm tra là $O\,(0, 0)$, thấy rằng điểm này nằm bên dưới đường thẳng $x + 2y = 12$.



Hình 3.6: Vùng được chọn cho $x + 2y \leq 12$.

Đối với bất phương trình $-x + y \leq 3$, chúng vẽ đường thẳng $-x + y = 3$ đi qua hai điểm $(0, 3)$ và $(-3, 0)$. Chọn điểm kiểm tra là $O\,(0, 0)$, thấy rằng điểm này nằm bên dưới đường thẳng $-x + y = 3$.
Hình vẽ hoàn chỉnh cho vùng thỏa mãn các bất phương trình trên là

Bây giờ, chúng xem xét và giải bài toán sau
Bài toán. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm

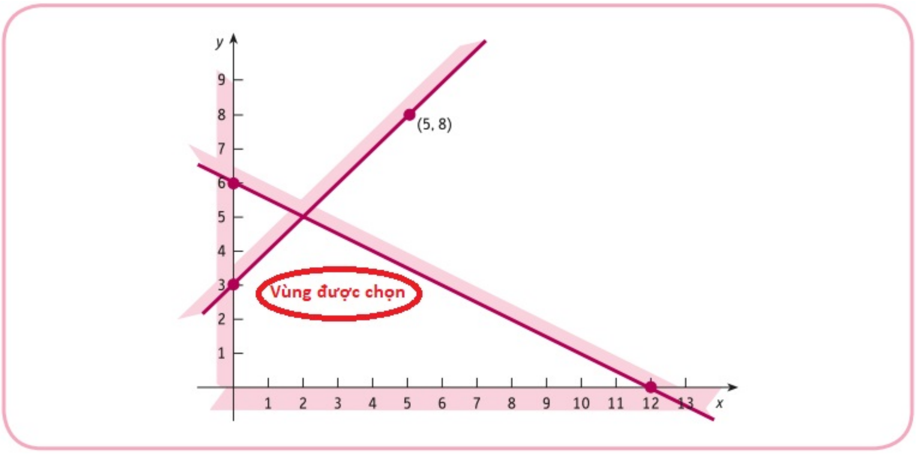
$$-2x + y,$$

thỏa mãn

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & \leq & 12 \\ -x & + & y & \leq & 3 \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Nói chung, có ba yếu tố tạo nên một bài toán lập trình tuyến tính. Thứ nhất, có một số ẩn cần xác định. Trong ví dụ này, chỉ có hai ẩn, x và y. Thứ hai, có một biểu thức toán học có dạng

$$ax + by,$$



Hình 3.7: Vùng được chọn cho tất cả các ràng buộc ban đầu.

mà chúng ta muốn tối đa hay tối thiểu chúng, được gọi là **hàm mục tiêu**. Cuối cùng, các ẩn x và y phải thỏa mãn một tập hợp các bất phương trình tuyến tính, tập tất cả các điểm (x, y) như vậy được gọi là **tập phương án**. Thông thường, nhưng không phải lúc nào cũng, hai trong số các bất phương trình đó là $x \geq 0$ và $y \geq 0$.. Chúng được gọi là ràng buộc không âm. Trong ví dụ trên, có tổng cộng bốn ràng buộc bao gồm cả các ràng buộc không âm.

Theo Hình 3.7 , chúng ta đã xác định vùng khả thi hay tập phương án của bài toán này. Bây giờ, vấn đề là cố gắng xác định điểm trong vùng khả thi mà làm giảm thiểu giá trị của hàm mục tiêu. Một cách ngây thơ để làm điều này có thể là sử dụng phương pháp thử và sai: tức là, chúng ta có thể đánh giá hàm mục tiêu tại mỗi điểm trong vùng và chọn điểm tạo ra giá trị nhỏ nhất. Ví dụ, $(1, 1)$ nằm trong vùng, và khi giá trị $x = 1$ và $y = 1$ được thay vào hàm mục tiêu, ta có:

$$(-2).1 + 1 = -1.$$

Tương tự, ta thử với điểm $(2, 1.5)$, giá trị hàm mục tiêu lúc này là

$$(-2).2 + 1.5 = -2.5$$

điều này là một cải tiến tốt hơn so với phương án cũ là $(1, 1)$ vì $-2.5 < -1$. Tuy nhiên, vùng khả thi có vô số điểm, việc tìm ra một điểm để hàm mục tiêu nhận giá trị nhỏ nhất so với tất cả các giá trị khác là điều khó khăn, nếu không muốn nói là không tưởng.

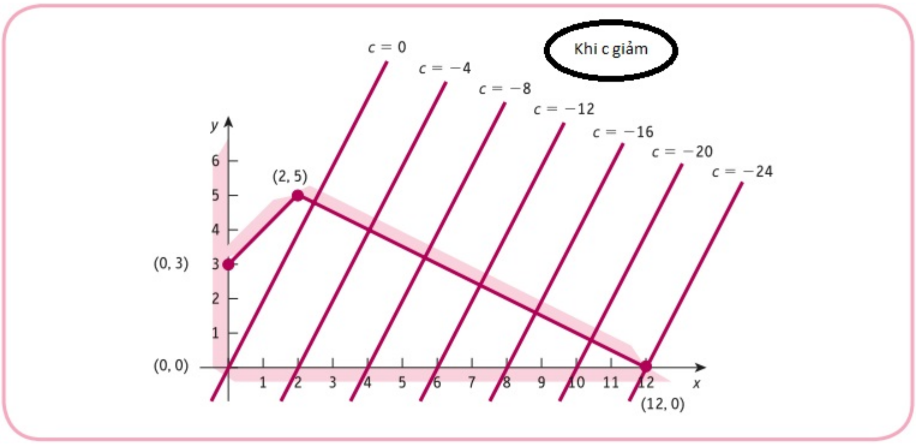
Một cách tiếp cận khác khả thi hơn là quét qua vùng khả thi bởi họ các đường thẳng

$$-2x + y = c,$$

với c là một hằng số tùy ý. Nhìn lại hàm mục tiêu, bạn sẽ nhận thấy rằng số c chính xác là thứ mà chúng ta muốn giảm thiểu.
Chúng tôi biết sắp xếp lại các số hạng để mô tả họ đường cong này rõ ràng hơn

$$y = 2x + c,$$

trong đó 2 là hệ số góc. Khi c thay đổi, ta thấy các đường cong này có cùng một hệ số góc, vì vậy chúng song song với nhau, vị trí chính xác của chúng được xác định từ số c cụ thể. Khi cho $y = 0$, thấy $x = c/2$, do đó các đường thẳng này đi qua điểm $(c/2, 0)$. Hình 3.8 phác thảo



Hình 3.8: Phác họa các đường thẳng khi c giảm.

cho một vài giá trị c trong phạm vi từ 0 đến -24. Lưu ý rằng khi c giảm từ 0 xuống -24, các đường quét qua vùng khả thi từ trái sang phải. Ngoài ra, một khi c xuống dưới -24, các đường thẳng không còn cắt vùng này nữa. Do đó, giá trị tối thiểu của c (mà bạn có thể nhớ chỉ là giá trị của hàm mục tiêu) là -24. Hơn nữa, khi $c = -24$, đường thẳng

$$-2x + y = c$$

cắt vùng khả thi tại đúng 1 điểm là $(12, 0)$, điểm này vừa nằm trong vùng khả thi và do nó cũng nằm trên đường thẳng

$$-2x + y = -24$$

có giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là -24, đó là giá trị nhỏ nhất. Các điểm khác trong vùng khả thi cũng nằm trên các đường thẳng có dạng $-2x + y = c$, nhưng có giá trị c lớn hơn. Nhận xét rằng, giá trị tối thiểu của hàm mục tiêu đạt tại điểm $(12, 0)$.
Chúng ta cũng có thể xét một ví dụ khác, cụ thể là tìm giá trị tối đa của hàm mục tiêu $(-x + y)$ với các ràng buộc giống như ví dụ trên, tức là miền khả khi không đổi. Bằng cách làm tương tự, khi cho họ đường thẳng $y = x + c$ quét qua vùng khả thi với các giá trị $c = -4, -2, 0, 1, 3$, chúng ta nhận được giá trị tối đa của hàm mục tiêu là 3. Lưu ý rằng, các đường thẳng này có hệ số góc là 1 và đi qua hai điểm là $(0, -c)$ và $(-c, 0)$.

Qua hai ví dụ, chúng ta có thể "thấy rằng": giá trị tối ưu của hàm mục tiêu đạt được tại một trong các đỉnh của vùng khả thi. Điều này không chỉ đơn thuần là một sự trùng hợp. Có thể chứng minh rằng phương án tối ưu của bất kỳ bài toán quy hoạch tuyến tính nào cũng luôn xảy ra tại một trong các đỉnh. Do đó, phương pháp thử và lỗi được đề xuất trước đây không hề ngây thơ. Các đỉnh là những ứng viên duy nhất cho câu trả lời, và do đó chỉ cần xem xét một số hữu hạn các điểm. Phương pháp này có thể được tóm tắt như sau:

Các bước giải.

- Xác định vùng khả thi.

- Xác định các đỉnh của miền khả thi và tìm tọa độ của chúng.
- Tính giá trị của hàm mục tiêu tại các đỉnh và chọn hàm có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

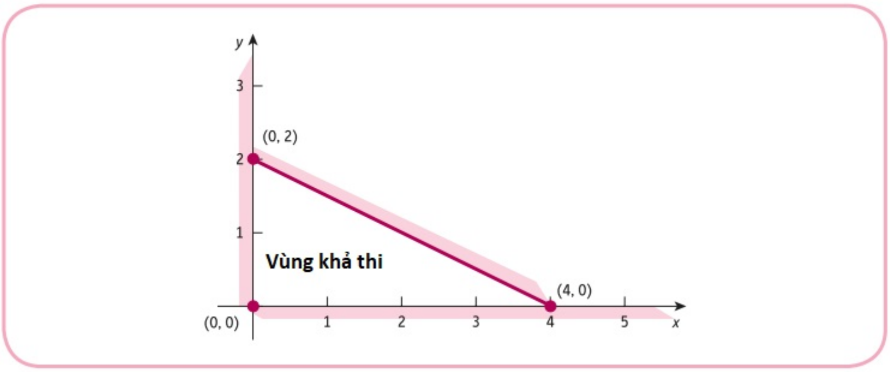
***Ví dụ* 3.1.5.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm

$$5x + 3y,$$

thỏa mãn

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 4y & \leq & 8 \\ & & x & \geq & 0. \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Giải. Các ràng buộc không âm $x \geq 0$ và $y \geq 0$ chỉ ra rằng miền được giới hạn bởi các trục tọa độ trong góc phần tư thứ I. Đường thẳng $2x + 4y = 8$ đi qua hai điểm $(0, 2)$ và $(4, 0)$. Ngoài ra, tại điểm kiểm tra $(0, 0)$, bất phương trình $2x + 4y \leq 8$ thỏa mãn. Do đó, chúng tôi quan tâm đến vùng bên dưới đường kẻ, vì vùng này chứa điểm kiểm tra, $(0, 0)$. Vùng khả thi được vẽ như trong Hình 3.9.



Hình 3.9: Vùng được chọn cho tất cả các ràng buộc ban đầu.

Vùng khả thi là một tam giác với ba đỉnh: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(4, 0)$.
Tính giá trị của hàm mục tiêu tại các đỉnh

Đỉnh	**Hàm mục tiêu**
$(0, 0)$	$(5 \times 0) + (3 \times 0) = 0$
$(0, 2)$	$(5 \times 0) + (3 \times 2) = 6$
$(4, 0)$	$(5 \times 4) + (3 \times 0) = \mathbf{20}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu là 20, đạt tại điểm $(4, 0)$.

***Ví dụ* 3.1.6.** Tìm giá trị lớn nhất của hàm

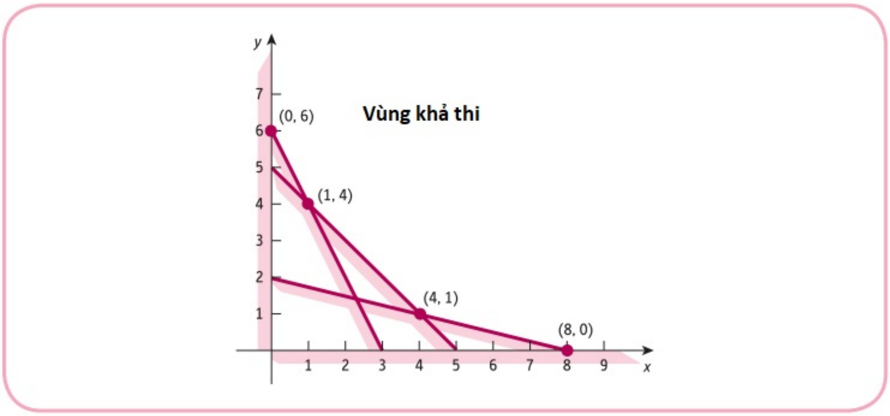
$$3x + 2y,$$

thỏa mãn

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 4y & \geq & 8 \\ x & + & y & \geq & 5 \\ 2x & + & y & \geq & 6. \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Bạn có thể nói gì về phương án tối ưu nếu bài toán này là một bài toán tối thiểu hóa thay vì là tối đa hóa?

Giải. Như thường lệ, các ràng buộc không âm chỉ ra rằng chúng ta chỉ cần xem xét góc phần tư thứ I. Đường thẳng $x + 4y = 8$ đi qua $(0, 2)$ và $(8, 0)$. Đường thẳng $x + y = 5$ đi qua $(0, 5)$ và $(5, 0)$. Đường thẳng $2x + y = 6$ đi qua $(0, 6)$ và $(3, 0)$.
Ngoài ra, điểm kiểm tra $(0, 0)$ không thỏa mãn bất kỳ ràng buộc tương ứng nào vì ba dấu bất đẳng thức đều là '$\geq$'. Do đó, chúng tôi quan tâm đến khu vực phía trên tất cả các đường này, như trong Hình 3.10.



Hình 3.10: Vùng được chọn cho tất cả các ràng buộc ban đầu.

Vùng khả thi có 4 đỉnh: $(0, 6), (1, 4), (4, 1)$ và $(8, 0)$.
Tính giá trị của hàm mục tiêu tại các đỉnh

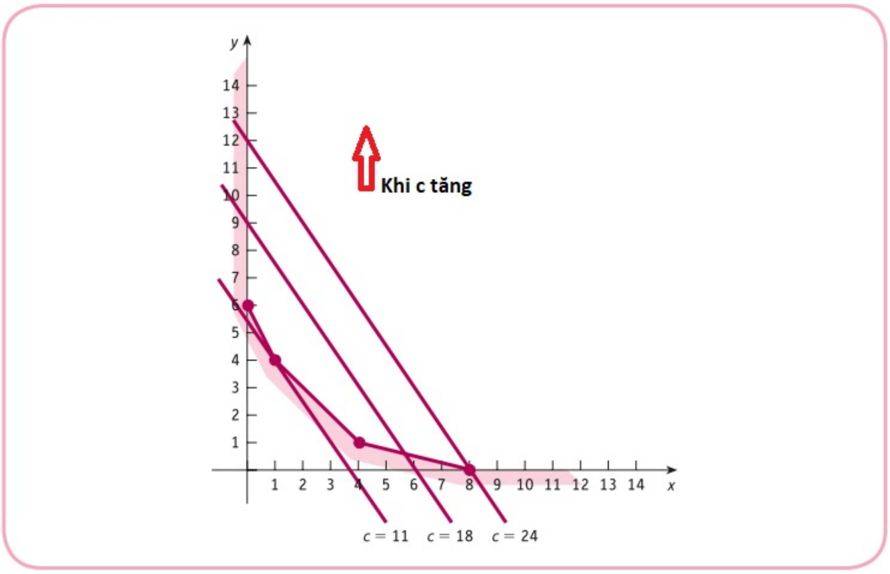
Đỉnh	**Hàm mục tiêu**
$(0, 6)$	$(3 \times 0) + (2 \times 6) = 12$
$(1, 4)$	$(3 \times 1) + (2 \times 4) = 11$
$(4, 1)$	$(3 \times 4) + (2 \times 1) = 14$
$(8, 0)$	$(3 \times 8) + (2 \times 0) = 24$

Từ bảng, các giá trị tối thiểu và tối đa của hàm mục tiêu là 11 và 24, tương ứng xảy ra tại $(1, 4)$ và $(8, 0)$. Tuy nhiên, chúng tôi có một tình huống hơi bất thường ở chỗ vùng khả thi không được bao bọc ở mọi phía, tức là vùng khả thi là không bị chặn. Nó mở ở phía trên và nói đúng ra, không có ý nghĩa gì khi nói về các đỉnh của một vùng như vậy. Trong trường hợp này, chúng ta sẽ làm gì? Để trả lời câu hỏi này, chúng tôi xét sự thay đổi của họ các đường thẳng

$$3x + 2y = c,$$

tương ứng với hàm mục tiêu, được mô tả như Hình 3.11. Khi $c = 11$, đường thẳng cắt vùng khả thi tại duy nhất một điểm $(1, 4)$. Tuy nhiên, khi c tăng từ giá trị này, các đường sẽ quét qua vùng khả thi và không bao giờ rời khỏi nó, bất kể c trở nên lớn như thế nào.

Do đó, nếu bài toán là một bài toán tối đa hóa, chúng tôi kết luận rằng nó không có nghiệm tối ưu. Mặt khác, nếu bài toán là một bài toán tối thiểu hóa, thì nó có nghiệm tối ưu, đạt ở đỉnh $(1, 4)$.
Ví dụ này chỉ ra rằng một bài toán quy hoạch tuyến tính có thể không có phương án tối ưu khi vùng khả thi không bị chặn. Tuy nhiên, khi một phương án tối ưu tồn tại, nó có thể được tìm thấy đơn giản bằng cách kiểm tra giá trị của hàm mục tiêu tại các đỉnh theo cách thông thường.



Hình 3.11: Minh họa khi c tăng.

3.2 Phương pháp đơn hình.

Trong chương trước, tất cả các ví dụ đều dẫn đến một vấn đề toán học cơ bản: tối ưu hóa một hàm tuyến tính dưới điều kiện của một hệ thống ràng buộc tuyến tính; đồng thời giới thiệu phương pháp đồ thị để giải một số bài toán đơn giản hai biến, với trường hợp có số biến lớn hơn hai thì việc minh họa trở nên không đơn giản. Do đó, việc phát triển một phương pháp giải khác là hoàn toàn hợp lý, với lưu ý rằng phương án tối ưu, nếu đạt được, chỉ đạt được tại các đỉnh của vùng khả khi. Trong chương này, chúng ta sẽ phát triển một kỹ thuật để giải quyết vấn đề cơ bản này.

Một rắc rối nhỏ là bài toán tối ưu hóa có thể có nhiều dạng khác nhau. Ví dụ, chúng ta đã thấy cả các bài toán tối đa và tối thiểu cũng như các tập ràng buộc bao gồm cả phương trình và bất phương trình. Tuy nhiên, khó khăn này dễ dàng được giải quyết vì tất cả các bài toán quy hoạch tuyến tính luôn có thể đưa được về bài toán tương đương, mà chúng ta gọi là dạng chuẩn sau.

Định nghĩa 3.1. Dạng **chuẩn** của bài toán quy hoạch tuyến tính là cực tiểu hóa, ($\longrightarrow$ min), hàm mục tiêu

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + x_nc_n - z_0$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases},$$

với

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Chúng ta lưu ý rằng số hạng $-z_0$ là một hằng số trong biểu thức của hàm cần được tối ưu. Trong ứng dụng, một hằng số như vậy có thể đại diện cho các chi phí cố định hoặc lợi ích đảm bảo. Chúng ta đặt dấu trừ trước hằng số để tiện lợi cho việc trình bày sau này; z_0 có thể là số dương, số âm hoặc bằng không. Một nghiệm của hệ ràng buộc, thỏa điều kiện các biến không âm, được gọi là một giải pháp hay một phương án chấp nhận được, hoặc ngắn gọn hơn là một phương án; tập tất cả các nghiệm được gọi là tập phương án.

3.2.1 Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ về dạng chuẩn.

Trên đây là dạng chuẩn của bài toán quy hoạch tuyến tính, một bài toán tối thiểu hóa chỉ liên quan đến các đẳng thức, mà chúng ta sẽ giải quyết. Do đó, nhiệm vụ đầu tiên của chúng ta là chỉ ra rằng bất kỳ bài toán quy hoạch tuyến tính nào cũng có thể đưa về được bài toán ở dạng chuẩn.

• Đưa các ràng buộc có dấu bất đẳng thức về dấu đẳng thức :

Trước tiên hãy xem xét một bài quy hoạch tuyến tính với một hệ thống ràng buộc có chứa các bất đẳng thức.

Bài toán 1.

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn các ràng buộc sau

$$\begin{array}{ccccccc} 10x_1 & + & 20x_2 & + & 15x_3 & \leq & 125 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \geq & 20 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng bài toán này tương đương với bài toán sau đây, xuất phát từ bài toán ban đầu bằng cách thêm hai biến không âm mới là x_4 và x_5.

Bài toán 2.

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn các ràng buộc sau

$$\begin{array}{ccccccccccc} 10x_1 & + & 20x_2 & + & 15x_3 & + & x_4 & & & = 125 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & - & x_5 & = 20 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Lưu ý rằng, nếu $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$ là nghiệm của hệ ràng buộc thứ hai, thì vì x_4, x_5 là các giá trị không âm nên

$$10x_1^* + 20x_2^* + 15x_3^* = 125 - x_4^* \leq 125$$

và

$$x_1^* + 3x_2^* + 4x_3^* = 20 + x_5^* \geq 20$$

Do đó, (x_1^*, x_2^*, x_3^*) cũng là một nghiệm của hệ ràng buộc thứ nhất. Như vậy, các nghiệm của hai tập ràng buộc tương ứng với nhau, với các nghiệm tương ứng có ba tọa độ đầu tiên giống nhau. Đồng thời, hàm cần tối thiểu, $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, chỉ phụ thuộc vào ba tọa độ đầu tiên. Do đó, giá trị tối thiểu của hàm tuyến tính cho cả hai bài toán sẽ giống nhau.

Rõ ràng, kỹ thuật này là một sự khái quát hóa. Với bất kỳ bài toán nào có hệ ràng buộc chứa các bất đẳng thức, bằng cách bổ sung thêm các biến không âm, một bài toán tương đương có thể được hình thành với một hệ ràng buộc chỉ gồm các đẳng thức. Số lượng các biến được thêm vào sẽ bằng với số lượng các bất đẳng thức trong hệ thống các ràng buộc. Các biến được thêm vào được gọi là biến phụ, đôi khi vẫn được gọi là biến thặng dư. Trên thực tế, chúng thường có thể được hiểu là đo lường sự thiếu hụt hoặc dư thừa của các mục hoặc yêu cầu của vấn đề đặt ra. Ngoài ra, nếu bài toán quy hoạch tuyến tính được cho dưới dạng "Tìm cực đại của $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ thì bằng cách đặt $Z = -z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$ ta đưa được về bài toán tìm cực tiểu tương ứng. Do đó, một bài toán cực đại hóa có thể dễ dàng đưa được về một bài toán cực tiểu hóa bằng cách nhân hàm cần tối ưu hóa với (-1).

• **Đưa dấu của các biến về không âm.**

Hạn chế cuối cùng đối với dạng chuẩn của bài toán quy hoạch tuyến tính là tất cả các biến đều không âm. Đối với hầu hết các vấn đề, hạn chế này xuất phát tự nhiên từ việc giải thích vật lý của các biến. Trong tất cả các ví dụ chúng ta đã xem xét, các biến chỉ có thể nhận các giá trị không âm. Tuy nhiên, đối với một số hệ thống sản xuất phức tạp liên quan đến nhiều quy trình và tùy chọn khác nhau, có thể một số mặt hàng là đầu vào của quy trình này lại là đầu ra của quy trình khác và không rõ liệu mặt hàng này sẽ là đầu vào hay đầu ra trong hoạt động tối ưu của hệ thống . Vì vậy, chúng ta có thể muốn xây dựng bài toán với một biến không bị hạn chế về dấu. Không mất tính tổng quát, ta giả sử biến x_1 không bị hạn chế về dấu, có nghĩa là, giá trị của x_1 có khi là dương, có khi là âm, hoặc là bằng 0. Bằng cách đặt $x_1 = x_1^{'} - x_1^{''}$, trong đó $x_1^{'}, x_1^{''}$ là các biến không âm. Thay thế x_1 trong bài toán bài đầu, ta đưa về bài toán mới tương đương với các biến $x_1^{'}, x_1^{''}, \ldots$

***Ví dụ* 3.2.1.** Xét bài toán

$$z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2023 \longrightarrow \max$$

thỏa mãn hệ ràng buộc sau

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 5 \\ -7x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & \geq & 9 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 12 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \ x_4 \text{ tùy ý.}$$

Chúng ta sẽ đưa bài toán trên về bài toán dạng chuẩn như sau:

• Trước tiên, ta đưa bài toán cực đại hóa về bài toán cực tiểu, bằng cách đặt

$$Z = -z = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2023.$$

• Tiếp theo, chúng ta sẽ đưa các dấu bất đẳng thức ở các bất phương trình thứ nhất và thứ hai trong hệ ràng buộc về dấu đẳng thức. Cụ thể như sau:

$3x_1 - x_2 + x_4 \leq 5 \longrightarrow 3x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5$ (cộng thêm vào biến $x_5 \geq 0$).

$-7x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 9 \longrightarrow -7x_1 + 3x_2 + x_3 - x_6 = 9$ (trừ bớt ra biến $x_6 \geq 0$).

• Cuối cùng, ta quan sát thấy, biến x_4 có dấu tùy ý nên đặt

$$x_4 = x_4^{'} - x_4^{''}$$

với $x_4^{'}, x_4^{''} \geq 0$.

Khi đó, bài toán ban đầu được đưa về bài toán dạng chuẩn sau

$$Z = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4^{'} - x_4^{''} + 2023 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & & & + & x_4^{'} & - & x_4^{''} & + & x_5 & & & = & 5 \\ -7x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & & & - & x_6 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4^{'} & - & x_4^{''} & & & & & = & 12 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4^{'}, x_4^{''}, x_5, x_6 \geq 0.$$

3.2.2 Đưa bài toán dạng chuẩn về dạng chuẩn tắc.

Bài toán 1. Xét bài toán

$$z = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Đây là một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn. Để giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 - x_3 & = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 \end{cases}$$

chúng ta có thể sử dụng phương pháp Gauss. Ở đây, chúng ta sẽ xem xét phương pháp khử **Gauss - Jordan**, là một sự "làm đẹp hơn" của phương pháp Gauss khi đưa một ma trận về dạng bậc thang với sự xuất hiện của ma trận đơn vị trong ma trận hệ số của hệ phương trình.

Xét lại hệ phương trình trên với ma trận hệ số mở rộng là

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_2} \to H_2 + (-1)H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_1} \to H_1 + (-1)H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -3 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Khi đó, hệ được viết lại

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} & & - & 3x_3 & = & -2 \\ & \mathbf{x_2} & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Các biến $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ được gọi là các **biến cơ bản**, biến x_3 là biến không cơ bản. Hệ này có vô số nghiệm. Một **nghiệm cơ bản** của hệ trên có được bằng cách cho biến không cơ bản $x_3 = 0$, tức là bộ số $(-2, 3, 0)$.
Chúng ta cũng có thể biến đổi như sau

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_2} \to H_2 + (-1)H_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathbf{H_2} \to \left(\frac{1}{2}\right) H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1/2 & 1 & 3/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathbf{H_1} \to H_1 + H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3/2 & \mathbf{0} & 5/2 \\ \mathbf{0} & 1/2 & \mathbf{1} & 3/2 \end{array}\right]$$

Khi đó, hệ được viết lại

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + \dfrac{3}{2}x_2 = \dfrac{5}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2}x_2 + \mathbf{x_3} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Các biến $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}$ được gọi là các **biến cơ bản**, biến x_2 là biến không cơ bản. Hệ này có vô số nghiệm. Một **nghiệm cơ bản** của hệ trên có được bằng cách cho biến không cơ bản $x_2 = 0$, tức là bộ số $\left(\dfrac{5}{2}, 0, \dfrac{3}{2}\right)$.

Thực hiện phép biến đổi tương tự, chúng ta thu được hệ

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x_1 + \mathbf{x_2} = \dfrac{1}{3} \\ \\ -\dfrac{1}{3}x_1 + \mathbf{x_3} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Tương tự, các biến $\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ được gọi là các **biến cơ bản**, biến x_1 là biến không cơ bản. Hệ này có vô số nghiệm. Một **nghiệm cơ bản** của hệ trên có được bằng cách cho biến không cơ bản $x_1 = 0$, tức là bộ số $\left(0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.

Như vậy, hệ phương trình tuyến tính ban đầu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

được biến đổi tương đương với các hệ bằng các phép biến đổi khác nhau. Đối chiếu điều kiện $x, x_2, x_3 \geq 0$, ta thấy nghiệm cơ bản của cách biến đổi thứ nhất là $(-2, 3, 0)$ không thỏa mãn; những nghiệm cơ bản của cách biến đổi thứ hai và thứ ba thỏa điều kiện các tọa độ có giá trị không âm và nó được gọi là **phương án cơ bản chấp nhận được** hoặc là **phương án cực biên**.

Định nghĩa 3.2. Dạng **chuẩn tắc** của bài toán quy hoạch tuyến tính là

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + x_nc_n - z_0 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc gồm m phương trình, n biến, có

- $m \leq n$.
- Hệ phương trình ràng buộc có đủ m biến cơ bản.
- Các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ và $b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử m biến cơ bản là các biến đầu tiên $x_1, x_2, \ldots, x_m$, hệ ràng buộc được viết lại tường minh như sau

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + \ldots + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \mathbf{x_2} + \ldots + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x_m} + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \text{ và } b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0.$$

Bằng cách cho các biến không cơ bản $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$, ta có một phương án cực biên là

$$\mathbf{x}^*_{(\mathbf{1})} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$$

Lưu ý rằng, số phương án cực biên là hữu hạn, ($1 \leq$ số phương án cực biên $\leq C_n^m$), và bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc nếu có phương án tối ưu thì nó sẽ đạt tại các phương án cực biên. Điều này cho phép chúng ta thử lần lượt giá trị của hàm mục tiêu tại mỗi phương án cực biên để tìm phương án tối ưu cho bài toán.

***Ví dụ* 3.2.2.** Xét bài toán

$$z = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2023 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + 3x_3 = 5 \\ \mathbf{x_2} + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Đây là một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc với:

$$m = 2 < 4 = n;\ b_1 = 5 > 0, b_2 = 1 > 0;\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

- Đối với hệ ràng buộc

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + 3x_3 = 5 \\ \mathbf{x_2} + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

có hai biến cơ bản là $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$. Phương án cực biên thứ nhất là $\mathbf{x}^*_{(\mathbf{1})} = (5, 1, 0, 0)$.

- Đối với hệ ràng buộc

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} - 3x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_2 + \mathbf{x_3} - x_4 = 1 \end{cases}$$

có hai biến cơ bản là $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}$. Phương án cực biên thứ hai là $\mathbf{x}^*_{(\mathbf{2})} = (2, 0, 1, 0)$.

- Đối với hệ ràng buộc

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + 3x_3 = 5 \\ -x_2 - x_3 + \mathbf{x_4} = -1 \end{cases}$$

có hai biến cơ bản là $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ nhưng ta không xét vì $b_2 = -1 < 0$.

- Đối với hệ ràng buộc

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x_1 + \mathbf{x_2} - x_4 = -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3}x_1 + \mathbf{x_3} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

có hai biến cơ bản là $\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ nhưng ta không xét vì $b_1 = -2/3 < 0$.

- Đối với hệ ràng buộc

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 - x_2 + \mathbf{x_4} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}x_1 + \mathbf{x_3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

có hai biến cơ bản là $\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}$. Phương án cực biên thứ ba là $\mathbf{x}^*_{(\mathbf{3})} = (0, 0, 5/3, 2/3)$.

Tính giá trị của hàm mục tiêu tại các phương án cực biên

Phương án cực biên	Hàm mục tiêu
$(5, 1, 0, 0)$	$(-5) + (2 \times 1) - 2023 = -\mathbf{2026}$
$(2, 0, 1, 0)$	$(-2) + (3 \times 1) - 2023 = -2022$
$\left(0, 0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$(3 \times \frac{5}{3}) + (0 \times \frac{2}{3}) - 2023 = -2018$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu là -2026, đạt tại phương án cực biên $\mathbf{x}^*_{(\mathbf{1})} = (5, 1, 0, 0)$. Đây là phương án tối ưu.

3.2.3 Tiêu chuẩn tối ưu - Thuật toán đơn hình.

Trong mục này, chúng ta xem xét hàm mục tiêu, cụ thể là các hệ số c_j, để từ đó đưa ra tiêu chuẩn tối ưu cho bài toán dạng chính tắc. Xét bài toán ở **Ví dụ 3.2.2**, với hàm mục tiêu

$$z = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2023 \longrightarrow \min$$

Bằng cách thay thế các biến cơ bản trong hàm mục tiêu bằng các biến không cơ bản và quan sát các hệ số c_j, ta thấy

- Đối với hệ biến cơ bản $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$ thì

$$z = -(5 - 3x_3) + 2(1 - x_3 + x_4) + 3x_3 - 2023 = \mathbf{4}x_3 + \mathbf{2}x_4 - 2026.$$

- Đối với hệ biến cơ bản $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}\}$ thì

$$z = -(2 - 3x_2 - 3x_4) + 2x_2 + 3(1 - x_2 + x_4) - 2023 = -\mathbf{4}x_2 + \mathbf{6}x_4 - 2022.$$

- Đối với hệ biến cơ bản $\{\mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}\}$ thì

$$z = -x_1 + 2x_2 + 3\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_1\right) - 2023 = -\mathbf{2}x_1 + \mathbf{2}x_2 - 2018.$$

Như vậy, giả sử hệ biến cơ bản của bài toán chính tắc là $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}\}$, lưu ý rằng các $x_i \geq 0$, nếu $\boldsymbol{c_j \geq 0, \forall j = m+1, m+2, \ldots, n}$ thì **giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu là** $\boldsymbol{-z_0}$, đạt tại điểm $(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ bởi vì

$$c_{m+1}x_{m+1} + c_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c_n x_n \geq 0.$$

Theo ví dụ trên, ta thấy hàm mục tiêu $z = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2023 = \mathbf{4}x_3 + \mathbf{2}x_4 - 2026$, ứng với hệ biến cơ bản $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$, đạt giá trị nhỏ nhất là -2026 tại phương án cực biên $(5, 1, 0, 0)$.

***Ví dụ* 3.2.3.** Xét bài toán

$$z = -2x_4 + 3x_5 - 60 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + 2x_4 - x_5 = 10 \\ \quad x_2 \quad\quad - x_4 - 5x_5 = 20 \\ \quad\quad x_3 + 6x_4 - 12x_5 = 18 \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Các biến cơ bản là $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$. Bằng cách cho các biến không cơ bản $x_4 = x_5 = 0$, dễ dàng xác định phương án cực biên ban đầu là $\mathbf{x}^*_{\mathbf{(1)}} = (10, 20, 18, 0, 0)$ và giá trị của hàm mục tiêu tại điểm này là -60. Tuy nhiên, hệ số $c_4 = -2$ là số âm, do đó, ta sẽ làm giảm giá trị của hàm mục tiêu z bằng cách đưa biến x_4 vào các biến cơ bản. Điều này, bắt buộc chúng ta phải loại bớt một biến từ hệ các biến cơ bản ban đầu $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$.
Để tìm biến đưa ra, ta làm như sau. Cho $x_5 = 0$, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + 2x_4 = 10 \\ \quad x_2 \quad\quad - x_4 = 20 \\ \quad\quad x_3 + 6x_4 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 - 2x_4 \\ x_2 = 20 + x_4 \\ x_3 = 18 - 6x_4 \end{cases}.$$

Từ các phương trình nhất và thứ ba, ta có

$$x_1 = 10 - 2x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq \frac{10}{2} = 5$$

và

$$x_3 = 18 - 6x_4 \geq 0 \Rightarrow x_4 \leq \frac{18}{6} = 3.$$

Giá trị lớn nhất có thể thỏa điều kiện của x_4 với $x_5 = 0$ là $\min\{3, 5\} = 3$. Với $x_4 = 3$, ta có $x_3 = 0$. Vì vậy, x_4 sẽ thay thế x_3 trong các biến cơ bản ban đầu, tức là tập các biến cơ bản mới là $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}\}$. Nói cách khác, bài toán quy hoạch tuyến tính ban đầu tương đương với bài toán sau

$$z = \frac{1}{3}x_3 - x_5 - 66 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 \quad - \frac{1}{3}x_3 \quad\quad + 3x_5 = 4 \\ \quad x_2 + \frac{1}{6}x_3 \quad\quad - 7x_5 = 23 \\ \quad\quad \frac{1}{6}x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Chúng ta thấy rằng, bài toán mới vẫn ở dạng chính tắc nhưng với các biến cơ bản mới là $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_4}\}$. Phương án cơ bản của bài toán mới là $\mathbf{x}^*_{\mathbf{(2)}} = (4, 23, 0, 3, 0)$ và giá trị của hàm mục tiêu tại phương án này là -66. Mặc dù chưa đạt được giá trị tối ưu của hàm mục tiêu nhưng chúng tôi đã chuyển sang một phương án cơ bản mới mà giá trị giảm cho z trong khi vẫn duy trì bài toán ở dạng chính tắc.

• Thuật toán đơn hình.

Xét bài toán dạng **Chuẩn tắc** ở **Định nghĩa 3.2.**. Đối với những bài toán càng nhiều biến thì việc tìm phương án tối ưu bằng phương pháp thế thủ công như trên thực sự gặp nhiều khó khăn. Do đó, các nhà toán học đã đưa ra một bảng tính khá hữu hiệu, nó được gọi là **Phương pháp đơn hình (simplex method)**, cho phép tính toán trên một số lượng lớn các biến và quan trọng hơn hết phương pháp này có thể lập trình để tính toán trên máy tính. Qua thời gian, bảng đơn hình đã có nhiều cải tiến phù hợp với giao diện thân thiện hơn. Thuật toán đơn hình được mô tả cụ thể như sau

Bước 1. Xác định phương án cực biên (PACB) ban đầu: $\mathbf{x}^*_{(\mathbf{1})}$ ứng với các biến cơ bản nào đó cùng với hệ số tương ứng.

Bước 2. Lập bảng đơn hình như sau

Biến cơ bản	**Hệ số cơ bản**	**PACB**	x_1 c_1	x_2 c_2	$\cdots$ $\cdots$	x_m c_m	x_{m+1} c_{m+1}	$\cdots$ $\cdots$	x_n c_n
x_1	c_1	b_1	1	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}
x_2	c_2	b_2	0	1	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	c_m	b_m	0	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}
Bảng 1		$z(\mathbf{x}^*_{(\mathbf{1})})$	0	0	$\cdots$	0	Δ_{m+1}	$\cdots$	Δ_n

Ở đây,

• $z\left(\mathbf{x}^*_{(\mathbf{1})}\right) = c_1.b_1 + c_2.b_2 + \cdots + c_m.b_m$: giá trị của hàm mục tiêu tại PACB $\mathbf{x}^*_{(\mathbf{1})}$.

• $\Delta_j = 0,\ j = 1, 2, ..., m$ và $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i.a_{ij} - c_j,\ j = m+1, m+2, ..., n.$

Bước 3. Kiểm tra điều kiện tối ưu

• Nếu tất cả $\Delta_j \leq 0$ thì PACB đang xét là tối ưu.

• Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ và mọi $a_{ij} \leq 0$ (phần tử thuộc cột chứa $\Delta_j > 0$ đang xét) thì bài toán đã cho không có phương án tối ưu.

• Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ và với mỗi $\Delta_j > 0$ đều tồn tại ít nhất một $a_{ij} > 0$ thì PACB đang xét chưa tối ưu. Chuyển sang **Bước 4.**

Bước 4. Chọn một PACB mới tốt hơn PACB cũ

• Chọn biến cơ bản mới đưa vào. Chọn x_v sao cho $\Delta_v = \max\{\Delta_j > 0\}$.

• Chọn biến cơ bản cũ đưa ra. Chọn x_r sao cho $\lambda_r = \min\left\{\lambda_i = \dfrac{b_i}{a_{iv}} : a_{iv} > 0\right\}$.

• Khi đó, chọn hàng r là trục xoay và **phần tử xoay** là a_{rv}.

Bước 5. Tính toán lại bảng đơn hình tương ứng với PACB mới được chọn ở **Bước 4.**

• Thay biến cơ bản x_r bởi x_v. Thay hệ số cơ bản c_r bởi c_v

• Chia toàn bộ các phần tử trên trục xoay cho phần tử xoay $a_{rv} \rightarrow$ **Hàng r mới**.

• Biến đổi các dòng i, kể từ cột PACB sang phải (tức là trừ các cột chứa x_i, c_i không biến đổi gì thêm), theo cách sau

$$\text{Hàng } i \text{ mới} = \left(\text{Hàng } i \text{ cũ}\right) - a_{iv}\left(\text{Hàng } r \text{ mới}\right).$$

- Kiểm tra lại điều kiện tối ưu của PACB ở **Bước 3.**

***Ví dụ* 3.2.4.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$z = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 - 2023 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ \qquad x_2 \qquad + x_4 \qquad + x_6 = 12 \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

Giải. Các biến cơ bản là x_1, x_2, x_3 với các hệ số tương ứng là $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ và $c_3 = 0$. Cho $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, ta được PACB ban đầu là $\mathbf{x}^*_{(1)} = (2, 12, 9, 0, 0, 0)$. Giá trị của hàm mục tiêu tại $\mathbf{x}^*_{(1)}$ là

$$z\left(\mathbf{x}^*_{(1)}\right) = 2 - 12 - 2023 = -2033.$$

Bảng đơn hình đầu tiên là

Biến cơ bản	**Hệ số cơ bản**	**PACB**	x_1 1	x_2 -1	x_3 0	x_4 -2	x_5 2	x_6 -3
x_1	1	2	1	0	0	1	1	-1
x_2	-1	12	0	1	0	1	0	1
x_3	0	9	0	0	1	2	4	3
Bảng 1		-2033	0	0	0	**2**	-1	1

Ta thấy hàng cuối cùng của bảng trên có $\Delta_4 = 2 > 0$, $\Delta_6 = 1 > 0$ và trên mỗi cột đều có các $a_{ij} > 0$, do đó PACB đang xét chưa phải là phương án tối ưu.
Chọn một PACB mới tốt hơn PACB cũ bằng các tính toán sau

- Vì $\Delta_4 = \max\{\Delta_4 = 2, \Delta_6 = 1\}$ nên biến cơ sơ mới đưa vào là x_4 (ứng với $\Delta_4 = 2$ lớn nhất).

- Ta có: $\lambda_1 = \dfrac{b_1}{a_{14}} = \dfrac{2}{1} = 2, \lambda_2 = \dfrac{12}{1} = 12, \lambda_3 = \dfrac{9}{2}$. Do đó,

$$\lambda_1 = \min\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 4,5\}$$

Vì vậy, biến đưa ra khỏi cơ sở là x_1 (ứng với $\lambda_1 = 2$ nhỏ nhất).

- Hàng 1 là trục xoay và phần tử xoay là $a_{14} = 1$.

Tính toán lại bảng đơn hình đầu tiên theo hướng dẫn như ở **Bước 5.**, ta được bảng đơn hình thứ hai như sau

Biến cơ bản	**Hệ số cơ bản**	**PACB**	x_1 1	x_2 -1	x_3 0	x_4 -2	x_5 2	x_6 -3
x_4	-2	2	1	0	0	1	1	-1
x_2	-1	10	-1	1	0	0	-1	2
x_3	0	5	-2	0	1	0	2	5
Bảng 2		-2037	-2	0	0	0	-3	**3**

Tương tự, ta thấy hàng cuối cùng của bảng có $\Delta_6 = 3 > 0$ và trên cột có hai phần tử $a_{26} = 2 > 0, a_{36} = 5 > 0$. Do đó, PACB vừa được chọn là $\mathbf{x}^*_{(2)} = (0, 10, 5, 2, 0, 0)$ chưa phải là phương án tối ưu, mặc dù PACB này tốt hơn PACB cũ vì đã làm giảm được giá trị của hàm mục tiêu từ -2033 xuống -2037.
Chọn một PACB khác tốt hơn PACB ở Bảng 2. Bằng những tính toán tương tự, biến cơ sở mới đưa vào là x_6 thay cho biến cơ sở cũ đưa ra là x_3, phần tử xoay là $a_{36} = 5$.
Tính toán lại bảng đơn hình thứ hai, ta được bảng đơn hình thứ ba sau

Biến cơ bản	**Hệ số cơ bản**	**PACB**	x_1 1	x_2 -1	x_3 0	x_4 -2	x_5 2	x_6 -3
x_4	-2	3	$3/5$	0	$1/5$	1	$7/5$	0
x_2	-1	8	$-1/5$	1	$-2/5$	0	$-9/5$	0
x_6	-3	1	$-2/5$	0	$1/5$	0	$2/5$	1
Bảng 3		-2040	$-4/5$	0	$-3/5$	0	$-21/5$	0

Trong bảng này, mọi $\Delta_j \leq 0, j = 1, 2..., 6$ nên PACB đang xét cũng là phương án tối ưu. Vậy phương án tối ưu của bài toán đã cho là $\mathbf{x}^*_{(3)} = (0, 8, 0, 3, 0, 1)$ với giá trị hàm mục tiêu là

$$z_{\min}\left(\mathbf{x}^*_{(3)}\right) = -2040.$$

Trong thực hành tính toán, chúng ta có thể thao tác trên bảng lớn bằng cách gộp chung các bảng nhỏ lại với nhau. Chẳng hạn như ví dụ trên, ta có thể thực hành tính toán như sau

Biến cơ bản	**Hệ số cơ bản**	**PACB**	x_1 1	x_2 -1	x_3 0	x_4 -2	x_5 2	x_6 -3
x_1	1	2	1	0	0	1	1	-1
x_2	-1	12	0	1	0	1	0	1
x_3	0	9	0	0	1	2	4	3
Bảng 1		-2033	0	0	0	$\mathbf{2}$	-1	1
x_4	-2	2	1	0	0	1	1	-1
x_2	-1	10	-1	1	0	0	-1	2
x_3	0	5	-2	0	1	0	2	5
Bảng 2		-2037	-2	0	0	0	-3	$\mathbf{3}$
x_4	-2	3	$3/5$	0	$1/5$	1	$7/5$	0
x_2	-1	8	$-1/5$	1	$-2/5$	0	$-9/5$	0
x_6	-3	1	$-2/5$	0	$1/5$	0	$2/5$	1
Bảng 3		-2040	$-4/5$	0	$-3/5$	0	$-21/5$	0

Bài tập chương 3

Bài tập 3.1. Một nhà sản xuất sản xuất hai mẫu xe đạp đua, A và B. Mỗi mẫu đều phải được chế tạo qua hai cửa hàng gia công. Cửa hàng gia công I có tối đa 120 giờ làm việc mỗi tháng và cửa hàng gia công II có tối đa 180 giờ làm việc mỗi tháng. Việc chế tạo mỗi chiếc xe loại A mất sáu giờ ở cửa hàng I và ba giờ ở cửa hàng II. Thời gian tương ứng cho loại B là 4 và 10 giờ. Nếu lợi nhuận là 180 đô la và 220 đô la cho mỗi chiếc xe loại A và B, tương ứng, nhà sản xuất nên sắp xếp sản xuất như thế nào để tối đa hóa lợi nhuận?

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 3.2. Một cơ sở sản xuất và bán các chai cocktail không cồn, loại 1 lít, gồm có "The Caribbean" và "Mr Fruity", được bán với giá lần lượt là 1 đô la và 1.25 đô la. Mỗi loại được làm bằng cách trộn nước ép cam, dứa và táo tươi theo các tỷ lệ khác nhau. Caribbean bao gồm một phần cam, sáu phần dứa và một phần táo. Mr Fruity bao gồm hai phần cam, ba phần dứa và một phần táo. Công ty có thể mua tối đa 300 lít nước cam, tối đa 1125 lít nước dứa và tối đa 195 lít nước táo mỗi tuần với chi phí tương ứng là 0.72 đô la, 0.64 đô la và 0.48 đô la một lít.
Tìm số chai "The Caribbean" và "Mr Fruity" mà công ty nên sản xuất để tối đa hóa lợi nhuận. Bạn có thể cho rằng cocktail không cồn phổ biến đến mức hãng có thể bán tất cả những gì hãng sản xuất.

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 3.3. Một nhà hàng Ý phục vụ các món mì ống hoặc pizza. Chi phí để làm một món mì ống là 3 đô la và được bán với giá 13 đô la. Các số liệu tương ứng cho pizza lần lượt là 2 đô la và 10 đô la. Số bữa ăn tối đa có thể được nấu trong một tuần là 1200 và nhà hàng có ngân sách chi phí hàng tuần là 3000 đô la. Nên nấu bao nhiêu món mì ống và bánh pizza mỗi tuần để tối đa hóa lợi nhuận?

Giải. ...

Bài tập 3.4. Một nhà sản xuất nhỏ sản xuất hai loại hàng hóa, A và B, mà nhu cầu vượt quá khả năng cung cấp. Chi phí sản xuất cho mỗi mặt hàng của A và B lần lượt là 6 đô la và 3 đô la, và giá bán tương ứng là 7 đô la và 4 đô la. Ngoài ra, chi phí vận chuyển lần lượt là 0.2 đô la và 0.3 đô la cho mỗi hàng hóa loại A và B. Các điều kiện của khoản vay ngân hàng giới hạn nhà sản xuất chi phí cho sản xuất hàng tuần tối đa là 2700 đô la và chi phí vận chuyển hàng tuần tối đa là 120 đô la. Nhà sản xuất nên tổ chức sản xuất như thế nào để tối đa hóa lợi nhuận?

Giải. ...

Bài tập 3.5. Một nhà xuất bản quyết định sử dụng một bộ phận trong nhà máy của mình để sản xuất hai cuốn sách giáo khoa có tên là Kinh tế học vi mô và Kinh tế học vĩ mô. Lợi nhuận kiếm được trên mỗi bản sao là 12 đô la cho môn Kinh tế vi mô và 18 đô la cho môn Kinh tế vĩ mô. Mỗi bản Kinh tế vi mô cần 12 phút để in và 18 phút để đóng sách. Các số liệu tương ứng cho Kinh tế vĩ mô lần lượt là 15 và 9 phút. Có 10 giờ để in và 10.5 giờ để đóng sách. Mỗi loại nên được sản xuất bao nhiêu để tối đa hóa lợi nhuận?

Giải. ....

Bài tập 3.6. Một trường đại học ở Việt Nam có chỉ tiêu tuyển sinh là 9000 sinh viên. Yêu cầu từ Bộ GD&ĐT đòi hỏi ít nhất 75% số chỉ tiêu phải dành cho sinh viên Việt Nam, nhưng phần còn lại có thể dành cho người nước ngoài. Kí túc xá của trường đủ cho 5000 sinh viên. Tất cả sinh viên nước ngoài và ít nhất một phần tư số sinh viên Việt Nam phải được cấp chỗ ở trong kí túc xá. Trường đại học nhận 12.000 đô la học phí cho mỗi sinh viên Mỹ và 15.000 đô la cho mỗi sinh viên nước ngoài. Trường muốn tối đa hóa số tiền học phí nhận được.
Gọi x là số chỗ ở trong kí túc xá dành cho sinh viên Việt Nam và y là số chỗ dành cho sinh viên nước ngoài. Hãy

a) Viết biểu thức cho hàm mục tiêu và cho biết liệu nó cần được tối đa hóa hay tối thiểu hóa;

b) viết ra năm ràng buộc xác định vùng khả thi và giải thích lý do một cách cẩn thận;

c) Xác định khía cạnh nào của vấn đề ban đầu đã bị bỏ qua trong các phần a) và b).

Giải. ....

Bài tập 3.7. Một bệnh viện tư nhân chuyên về phẫu thuật thẩm mỹ và chỉnh hình. Lợi nhuận kiếm được trên mỗi bệnh nhân trải qua phẫu thuật thẩm mỹ là $12,000$ đô la và đối với phẫu thuật chỉnh hình, lợi nhuận là $14,000$ đô la. Mỗi bệnh nhân trải qua phẫu thuật thẩm mỹ cần 1.5 giờ phẫu thuật, sau đó là 12 giờ chăm sóc hậu phẫu. Ca phẫu thuật chỉnh hình diễn ra trong 2 giờ với 10 giờ chăm sóc hậu phẫu. Mỗi tuần bệnh viện có thể cung cấp tổng cộng 18 giờ phẫu thuật và 120 giờ chăm sóc hậu phẫu. Bệnh viện nên tiếp nhận bao nhiêu bệnh nhân thẩm mỹ và chỉnh hình mỗi tuần để tối đa hóa lợi nhuận?

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 3.8. Một hãng sản xuất hai sản phẩm X và Y. Để làm ra 1 đơn vị sản phẩm X cần 3 đơn vị nguyên vật liệu và 2 đơn vị lao động. Để làm ra 1 đơn vị sản phẩm Y cần 5 đơn vị nguyên vật liệu và 2 đơn vị lao động. Tổng số đơn vị có sẵn cho nguyên vật liệu thô và lao động tương ứng là 31.500 và 17.000. Công ty kiếm được 15 đô la lợi nhuận khi sản xuất và bán sản phẩm X. Lợi nhuận tương ứng của Y là 20 đô la.

a) Lập công thức bài toán quy hoạch tuyến tính để tối đa hóa lợi nhuận của hãng.

b) Giải bài toán quy hoạch tuyến tính bằng đồ thị.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 3.9. Một nhà sản xuất quần áo ngoài trời sản xuất áo khoác và quần. Mỗi áo khoác cần một giờ để sản xuất, trong khi mỗi quần mất 40 phút. Vật liệu cho một chiếc áo khoác có giá 32 đô la và vật liệu cho một quần có giá 40 đô la. Công ty chỉ có thể dành 34 giờ mỗi tuần để sản xuất áo khoác và quần, và tổng chi phí hàng tuần của công ty cho vật liệu không được vượt quá 1200 đô la. Công ty bán áo khoác với lợi nhuận là 12 đô la cho mỗi chiếc và bán quần với lợi nhuận là 14 đô la cho mỗi chiếc. Nghiên cứu thị trường cho thấy công ty có thể bán hết số áo khoác được sản xuất, nhưng chỉ có thể bán tối đa một nửa số quần so với số áo khoác.

a) Công ty nên sản xuất bao nhiêu áo khoác và quần mỗi tuần để tối đa hóa lợi nhuận?

b) Do thay đổi trong nhu cầu, công ty phải thay đổi mức lợi nhuận trên một cặp quần. Giả sử lợi nhuận trên một chiếc áo khoác vẫn là 12 đô la và các ràng buộc sản xuất không thay đổi. Tìm mức lợi nhuận tối thiểu và tối đa trên mỗi quần mà công ty có thể chấp nhận trước khi nên thay đổi chiến lược để đạt được lợi nhuận tối ưu.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 3.10. Một người có 300.000 để đầu tư vào một loạt công ty A, B và C. Bảng này cho thấy tỷ lệ phần trăm rủi ro, cổ tức và tăng trưởng dự kiến trong mỗi công ty.

Công ty	**Rủi ro**(%)	**Cổ tức** (%)	**Tăng trưởng** (%)
A	10	15	10
B	15	5	25
C	5	5	15

Người này muốn đầu tư tất cả 300.000 đô la với rủi ro tối thiểu, nhưng muốn đảm bảo rằng cổ tức dự kiến ít nhất là 10% và tăng trưởng ít nhất là 15% khoản đầu tư.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 3.11. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$z = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 2022 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 - 2x_4 \phantom{{}+x_5} = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 - 3x_3 + 7x_4 \phantom{{}+x_5} = 12 \\ - x_3 + 3x_4 + x_5 = 16 \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 3.12. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$z = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 + 100 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_5 = 152 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 60 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 16 \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

Giải. ....

Bài tập 3.13. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$z = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 6x_7 \longrightarrow \min$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_6 + x_7 = 152 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 + x_7 = -9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 3.14. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$z = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 + 2023 \longrightarrow \max$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 52 \\ \quad\;\; 4x_2 + 2x_3 + x_4 & = 60 \\ \quad\;\; 3x_2 + x_5 & = 36 \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 3.15. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2024 \longrightarrow \max$$

thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 60 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 10 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 50 \end{array} \end{cases}$$

với

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Giải. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Tài liệu tham khảo

[1] Akim M. Rahman, *Mathematics for Business and Economics*, Social and Economic Research Institute , Bangladesh, 2020.

[2] Anthony, M. and Biggs, N., *Mathematics for Economics and Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] Black, J. and Bradley, J.F., *Essential Mathematics for Economists*, 2nd edition, John Wiley, Chichester, 1980.

[4] Catherine L., *Linear Programming: Theory and Applications*, John Wiley, 2008.

[5] Dowling, E.T, *Introduction to Mathematical Economics*, 2nd edition, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1992.

[6] Ian Jacques, *Mathematics for Economics and Business*, 9th edition, Pearson, 2018.

[7] Paul R. Thie and Gerard E. Keough, *An introduction to linear program and game theory*, 3rd John Wiley & Sons, 2008.

[8] Teresa, B. and Paul P., *Essential Mathematics for Economics and Business*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1999.